

APPENDICE A4

NUMERI COMPLESSI

A.1 Definizione e rappresentazione di un numero complesso

Si riepilogano i concetti e le operazioni elementari relativi ai numeri complessi. Sia z un numero complesso; esso è definito dalla *parte reale* $x = \text{Re}\{z\}$ e dalla *parte immaginaria* $y = \text{Im}\{z\}$:

$$z = x + iy, \quad (\text{A1})$$

dove $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria. La rappresentazione (A4.1) suggerisce di associare al numero complesso z il punto P di coordinate (x,y) del piano complesso (detto, anche, *piano di Gauss*; si veda Figura A.1). Per questa ragione la (1) è detta rappresentazione *cartesiana rettangolare* del numero complesso z .

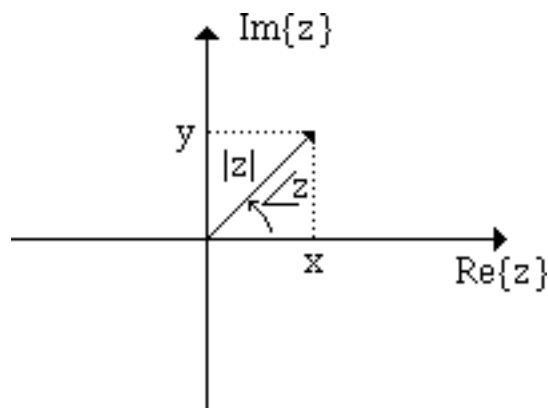


Fig. A.1 *Piano di Gauss*

Invece di rappresentare il numero complesso attraverso le “componenti rettangolari” del punto P, possiamo rappresentarlo mediante le “componenti polari” $|z|$ e $\angle z$,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \angle z = \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{se } \operatorname{Re}\{x\} > 0, \\ \pi + \arctg(y/x) & \text{se } \operatorname{Re}\{x\} < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Il numero reale e positivo $|z|$ prende il nome di modulo del numero complesso z ; il numero reale $\angle z$ prende il nome di argomento o fase del numero complesso $\angle z$; spesso l'argomento di un numero complesso z si indica anche con $\arg(z)$.

È evidente che

$$\begin{aligned} x &= |z| \cos \angle z, \\ y &= |z| \sin \angle z. \end{aligned} \quad (3)$$

Le componenti rettangolari di un numero complesso possono essere determinate, a partire da quelle polari, utilizzando la (3); invece dalle (2) è possibile determinare le componenti polari a partire da quelle rettangolari.

È immediato verificare che l'argomento di un numero complesso è definito univocamente a meno di un multiplo intero di 2π : ciò è conseguenza della periodicità delle funzioni $\sin(\varphi)$ e $\cos(\varphi)$, che hanno periodo 2π .

Utilizzando la formula di Eulero

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (4)$$

si ha che

$$|z|e^{i\angle z} = |z|\cos \angle z + i|z|\sin \angle z = x + iy = z, \quad (5)$$

quindi

$$z = |z|e^{i\angle z}. \quad (6)$$

L'espressione (1) è la rappresentazione cartesiana del numero complesso z ; l'espressione (6) è la rappresentazione polare.

Osservazione

Ad ogni numero complesso z è possibile associare il vettore del piano complesso ottenuto congiungente l'origine del piano complesso con il punto P di coordinate (x,y) . La lunghezza del vettore così definito è uguale al modulo del numero complesso z ; $\angle z$ è l'angolo che esso forma con l'asse immaginario (il verso di riferimento per gli angoli è quello antiorario; si veda la Figura A.1).

Si noti che per il numero complesso $0 = 0 + i0$ ($|z|=0$) la fase non è definita. Il numero reale è un caso particolare di numero complesso. La fase di un numero reale positivo è uguale a zero (o 2π), mentre la fase di un numero reale negativo è uguale a $\pm\pi$.

Il numero immaginario è un numero complesso con parte reale uguale a zero. La fase di un numero immaginario con parte immaginaria positiva è uguale a $+\pi/2$, mentre la fase di un numero immaginario con parte immaginaria negativa è uguale a $-\pi/2$.



Numero complesso coniugato

Se z è il numero complesso $x + iy$, si chiama il numero *complesso coniugato* di z il numero complesso $x - iy$ e lo si indica con z^* .

La fase del numero complesso z^* coniugato di z è uguale all'opposto della fase del numero complesso z , cioè

$$\angle z^* = -\angle z. \quad (7)$$

Nella rappresentazione polare per il numero complesso z^* coniugato di z si ha

$$z^* = |z|e^{-i\angle z}. \quad (8)$$

A4.2 Operazioni con i numeri complessi

La nozione di uguaglianza di due numeri complessi scaturisce dalla loro interpretazione geometrica. Due vettori si considerano uguali se hanno stessa lunghezza, direzione e verso, cioè se hanno proiezioni uguali sugli assi coordinati.

Due numeri complessi $z_1 = x_1 + i y_1$ e $z_2 = x_2 + i y_2$ sono uguali se e solo se sono uguali rispettivamente le loro parti reali e le loro parti immaginarie, cioè la condizione di eguaglianza di due numeri complessi è

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Pertanto due numeri complessi sono uguali se e solo se i loro moduli sono uguali e le loro fasi differiscono di un multiplo intero di 2π . Per indicare che i due numeri complessi z_1 e z_2 sono uguali, si usa la notazione $z_1 = z_2$.

Le operazioni ordinarie sono definite nel seguente modo. Siano z_1 e z_2 due arbitrari numeri complessi

$$z_1 = x_1 + i y_1 = |z_1| e^{i \angle z_1} \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + i y_2 = |z_2| e^{i \angle z_2}. \tag{10}$$

Addizione di numeri complessi

L'addizione dei due numeri complessi z_1 e z_2 è uguale a un numero complesso che ha come parte reale la somma delle parti reali e come parte immaginaria la somma delle parti immaginarie, cioè la somma dei due numeri complessi z_1 e z_2 è

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{11}$$

Sottrazione di numeri complessi

La sottrazione dei due numeri complessi z_1 e z_2 è uguale a un numero complesso che ha come parte reale la sottrazione delle parti reali e come parte immaginaria la sottrazione delle parti immaginarie, cioè la sottrazione dei due numeri complessi z_1 e z_2 è

$$z_1 - z_2 = (x_1 + i y_1) - (x_2 + i y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (12)$$

Moltiplicazione di numeri complessi

La moltiplicazione dei due numeri complessi z_1 e z_2 è uguale a un numero complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli e come fase la somma delle fasi, cioè la moltiplicazione dei due numeri complessi z_1 e z_2 è

$$z_1 z_2 = (|z_1| e^{i \angle z_1}) (|z_2| e^{i \angle z_2}) = |z_1| |z_2| e^{i(\angle z_1 + \angle z_2)}. \quad (13)$$

Divisione di numeri complessi

La divisione dei due numeri complessi z_1 e z_2 (con $z_2 \neq 0$), è uguale a un numero complesso che ha come modulo la divisione dei moduli e come fase la differenza delle fasi, cioè la divisione dei due numeri complessi z_1 e z_2 è

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i \angle z_1}}{|z_2| e^{i \angle z_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\angle z_1 - \angle z_2)}. \quad (14)$$

Dalle definizioni di addizione, moltiplicazione, ... segue immediatamente che la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione e la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Inoltre per esse sono valide la proprietà associativa e la proprietà distributiva. Si può dimostrare che con le operazioni definite precedentemente, l'insieme dei numeri complessi soddisfa le stesse proprietà dell'insieme dei numeri reali, cioè essi formano ciò che in algebra è definito un campo. Di conseguenza tutte le manipolazioni algebriche che si sono apprese per i

numeri reali sono applicabili ai numeri complessi. Così, per esempio, la regola per portare i fattori fuori dalle parentesi, le formule elementari, la soluzione di equazioni algebriche, e così via.

Il prodotto del numero complesso z per il suo complesso coniugato z^* è uguale al quadrato del modulo, cioè

$$zz^* = |z||z|e^{i(\angle z - \angle z)} = |z|^2 \quad (15)$$

Inoltre si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} z + z^* &= 2 \operatorname{Re}\{z\} \\ z - z^* &= 2 \operatorname{Im}\{z\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Notiamo una proprietà importante nei calcoli con numeri complessi contenenti le quattro operazioni elementari. Dalle definizioni delle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione segue immediatamente la seguente proposizione: *se in una somma, una differenza, un prodotto o un quoziente sostituiamo tutti i numeri complessi con i loro coniugati, anche i risultati delle operazioni vanno sostituiti con i loro coniugati.*