

CAPITOLO 6

	pagina
6.1 Introduzione	368
6.2 Equazioni di stato e circuito resistivo associato	369
6.2.1 Circuiti del primo ordine	369
6.2.2 Circuiti del secondo ordine	376
6.2.3 Continuità delle grandezze di stato	383
6.3 Soluzione di circuiti del primo ordine	386
6.3.1 Circuiti del primo ordine tempo-invarianti	386
6.3.2 Evoluzione libera ed evoluzione forzata	389
6.3.3 Circuito dissipativo; transitorio e regime permanente	390
6.3.4 Regime stazionario e regime sinusoidale	395
6.3.5 Regime periodico e regime aperiodico	397
6.3.6 Circuito con generatore impulsivo	399
6.3.7 Circuiti tempo-varianti	406
6.4 Soluzione di circuiti del secondo ordine tempo-invarianti	409
6.4.1 Circuito <i>RLC</i> serie e circuito <i>RLC</i> parallelo	409
6.4.2 Circuito <i>RC</i> e circuiti <i>RL</i> del secondo ordine	432
6.5 Metodo della trasformata di Fourier	----
6.5.1 Circuito di impedenze operatoriali	----
6.5.2 Metodi di antitrasformazione	----
6.5.3 Caratterizzazione ingresso-uscita attraverso l'integrale di convoluzione	----
6.5.4 Risposta in frequenza di un circuito	----

6.1 Introduzione

Il Capitolo 5 è stato dedicato esclusivamente ai circuiti dinamici lineari tempo invarianti a regime (stazionario, sinusoidale, periodico, ...). In questo Capitolo, invece, studieremo i circuiti dinamici lineari, anche tempo varianti, in condizioni di funzionamento generiche a partire da un istante assegnato, il cosiddetto *istante iniziale*, che indicheremo con t_0 .

Nel Capitolo 2 abbiamo già studiato approfonditamente il circuito *RL* semplice e il circuito *RC* semplice, § 2.4. Ricordiamo che con l'espressione "circuito *RC*" si intende un generico circuito dinamico con soli condensatori, "circuito *RL*" si intende un generico circuito dinamico con soli induttori e "circuito *RLC*" si intende un generico circuito dinamico con induttori e condensatori. Ora estenderemo il metodo di analisi che lì abbiamo presentato a generici circuiti dinamici del primo e del secondo ordine. I circuiti costituiti da un solo elemento dinamico (condensatore o induttore) e da elementi adinamici (resistori, trasformatori ideali, generatori controllati, generatori indipendenti) prendono il nome di circuiti del primo ordine. I circuiti costituiti da due elementi dinamici e da elementi adinamici prendono il nome di circuiti del secondo ordine (un circuito di ordine m contiene m elementi dinamici ed elementi adinamici).

Alle equazioni circuitali (costituite da un insieme completo e linearmente indipendente di equazioni di Kirchhoff e dalle equazioni caratteristiche degli elementi circuitali) bisogna affiancare, per una descrizione completa del comportamento del circuito, il valore all'istante iniziale della tensione di ciascun condensatore e della corrente di ciascun induttore.

La tensione del condensatore descrive lo *stato* del condensatore (vedi § 1.8.7) e la corrente dell'induttore descrive lo *stato* dell'induttore (vedi § 1.8.8). Conoscere lo stato di un condensatore e lo stato di un induttore significa conoscere l'energia in essi immagazzinata. I resistori non immagazzinano l'energia che assorbono e, quindi, per essi non è possibile individuare nessuna grandezza di stato. Per questa ragione, le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori prendono il nome di grandezze di stato del circuito.

Discuteremo una importante proprietà delle tensioni dei condensatori e delle correnti degli induttori, molto utile nella soluzione di circuiti che contengono generatori indipendenti di tensione (e/o corrente) con tensioni (e/o correnti) discontinue e/o interruttori. Introduciamo il concetto di circuito resistivo associato di un circuito dinamico, un potente strumento per determinare le

equazioni di stato del circuito. Infine, approfondiremo i concetti di circuito dissipativo e circuito conservativo, di transitorio e regime permanente, nonché quello di evoluzione libera ed evoluzione forzata.

6.2 Equazioni di stato e circuito resistivo associato

Le equazioni circuitali, insieme alle condizioni iniziali per le grandezze di stato, descrivono completamente la dinamica di un circuito. Ad eccezione delle equazioni caratteristiche dei condensatori e degli induttori, le equazioni circuitali sono tutte di tipo algebrico. Le equazioni caratteristiche dei condensatori e degli induttori sono equazioni differenziali.

La tecnica più generale per la soluzione di un circuito lineare, che già abbiamo applicato nel § 2.4, consiste nel ridurre, attraverso la tecnica della eliminazione per sostituzione, il sistema completo di equazioni del circuito, ad una sola equazione in una sola incognita. Una volta risolta l'equazione in una sola incognita, si possono determinare eventuali altre grandezze di interesse, che sono state eliminate nella procedura di riduzione. Ovviamente, questa tecnica può essere applicata senza alcuna difficoltà anche quando il circuito contiene tanti induttori e condensatori.

La procedura di riduzione più semplice consiste nel ridurre, prima, il sistema completo di equazioni del circuito al sistema di equazioni in cui le incognite sono solo le grandezze di stato, le cosiddette *equazioni di stato del circuito*, e poi, eventualmente, ridurre le equazioni di stato ad una sola equazione in una sola incognita. Come poi faremo vedere, tutte le altre grandezze circuitali possono essere espresse in funzione delle grandezze di stato, delle tensioni dei generatori indipendenti di tensione e delle correnti dei generatori indipendenti di corrente attraverso sole relazioni di tipo algebrico utilizzando un procedimento estremamente semplice ed elegante.

6.2.1 Circuiti del primo ordine

Per determinare le equazioni di stato di un circuito non c'è bisogno di considerare esplicitamente il sistema completo di equazioni del circuito. Ora illustreremo un procedimento estremamente semplice ed elegante per fare ciò.

Circuiti RC

Come al solito, solo per semplificare il ragionamento, faremo riferimento a un circuito ben definito, ad esempio, a quello mostrato in Figura 6.1. L'estensione dei risultati che otterremo ad situazioni più generali non presenta alcuna difficoltà, come poi vedremo.

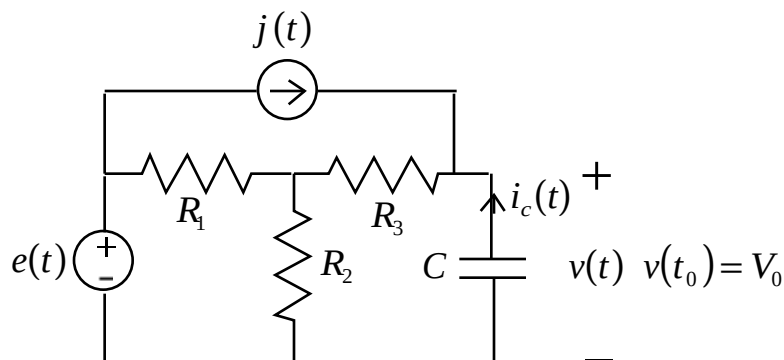


Fig. 6.1 Esempio di circuito dinamico del primo ordine.

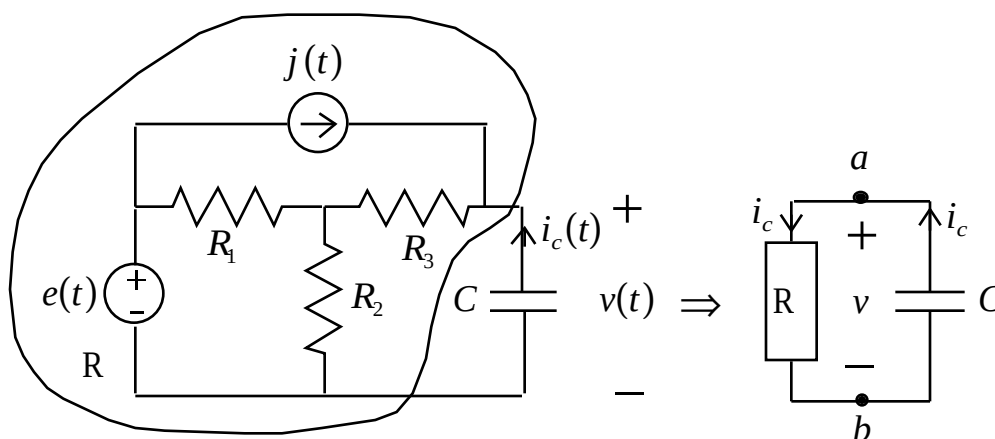


Fig. 6.2 Il circuito di Figura 6.1 può essere schematizzato come un condensatore in parallelo con un bipolo resistivo.

Per determinare l'equazione di stato del circuito del primo ordine illustrato in Figura 6.1 è utile riferirsi alla rappresentazione illustrata in Figura 6.2, dove è stata messa in evidenza la parte adinamica, che abbiamo indicato con il simbolo R . La tensione del condensatore è, in ogni istante, determinato dall'interazione tra il condensatore stesso e il resto del circuito, che consiste in un bipolo di soli elementi adinamici, il bipolo R . Si può dire che l'equazione che governa la tensione $v(t)$ è il frutto della interazione tra due diverse esigenze: che il

condensatore si comporti in modo compatibile con la sua specifica natura e che tale comportamento sia a sua volta compatibile con quello di tutti gli altri elementi che definiscono il bipolo dinamico R .

Il bipolo dinamico R può essere rappresentato attraverso il bipolo equivalente di Thévenin, Figura 6.3; e_0 è la tensione a vuoto del bipolo dinamico R e R_{eq} è la resistenza equivalente del bipolo R quando tutti i generatori indipendenti sono spenti.

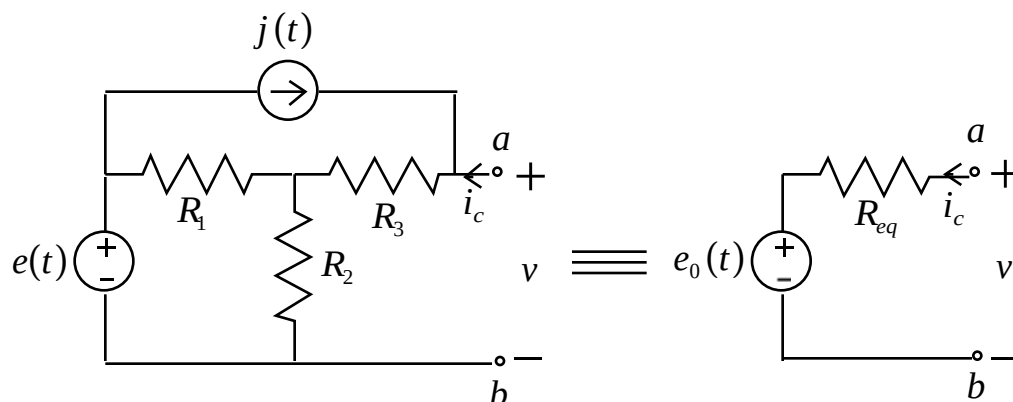


Fig. 6.3 Bipolo equivalente di Thévenin della parte dinamica del circuito 6.1.

L'equazione differenziale (abbiamo adottato la convenzione dell'utilizzatore per il condensatore)

$$C \frac{dv}{dt} = -i_c \quad (1)$$

descrive il funzionamento del condensatore e l'equazione algebrica

$$i_c = \frac{v - e_0}{R_{eq}} \quad (2)$$

descrive il funzionamento del bipolo dinamico R . L'equazione che ne deriva è l'equazione di stato del circuito,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_{eq} C} = \frac{e_0}{R_{eq} C}. \quad (3)$$

Questa equazione deve essere risolta con la condizione iniziale

$$v(t_0) = V_0. \quad (4)$$

Ovviamente si ottiene lo stesso risultato se invece del bipolo equivalente di Thévenin si utilizzasse il bipolo equivalente di Norton per rappresentare la parte resistiva del circuito.

La soluzione dell'equazione differenziale (3) con la condizione iniziale (4) prende il nome di **Problema di Cauchy**. Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie ¹ si ha la seguente proprietà:

Esiste una e una sola soluzione dell'equazione (3) che verifica le condizioni iniziali (4).

Questa proprietà così forte è dovuta alla linearità del sistema di equazioni. Di conseguenza una volta assegnato il valore dello stato del circuito all'istante iniziale $t = t_0$, lo stato per $t > t_0$ è univocamente determinato dalle equazioni di stato.

Esercizio

Si verifichi che la resistenza equivalente e la tensione a vuoto hanno le espressioni

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3, \quad e_0(t) = e(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2} + j(t) \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right). \quad (5)$$

L'andamento nel tempo della tensione a vuoto e_0 dipende dall'andamento temporale della tensione $e(t)$ e della corrente $j(t)$.

◆

Una volta risolta l'equazione (3) con la condizione iniziale (4), è possibile determinare qualsiasi grandezza del circuito in esame risolvendo il circuito resistivo ottenuto sostituendo al condensatore un generatore indipendente di tensione con tensione uguale alla tensione del condensatore, Figura 6.4. Questo circuito prende il nome di circuito resistivo associato al circuito RC rappresentato in Figura 6.1. Attraverso il circuito resistivo associato è possibile esprimere ogni grandezza del circuito in funzione della grandezza di stato e delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti. Di

¹ Vedi, ad esempio, in C. Miranda, Lezioni di Analisi Matematica, Liguori Editore, Napoli 1976.

conseguenza, ogni grandezza del circuito di Figura 6.1 è esprimibile in funzione della sola grandezza di stato attraverso solo relazioni di tipo algebrico. I risultati che abbiamo ora trovato per il circuito RC del primo ordine riportato in Figura 6.1 valgono per un qualsiasi circuito RC del primo ordine costituito da elementi lineari e un condensatore con capacità costante nel tempo, Figura 6.5.

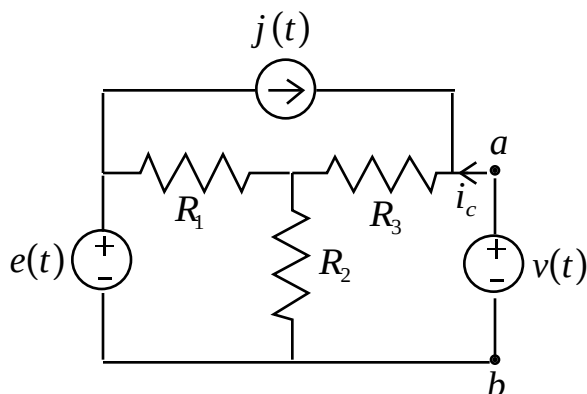


Fig. 6.4 Circuito resistivo associato al circuito RC del primo ordine riportato in Figura 6.1.

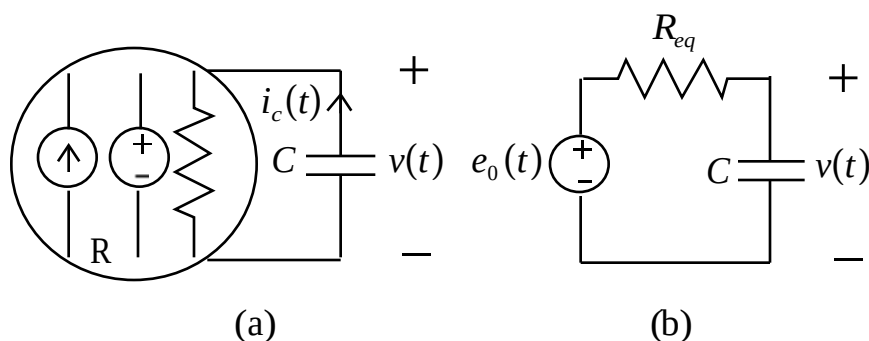


Fig. 6.5 (a) Un generico circuito RC del primo ordine e (b) corrispondente circuito equivalente.

Osservazione

Si consideri un circuito RC del primo ordine che contiene interruptori. In questo caso la resistenza equivalente del bipolo che rappresenta la parte resistiva del circuito è funzione del tempo. La tensione a vuoto dipende dal tempo anche quando i generatori indipendenti del circuito sono stazionari.

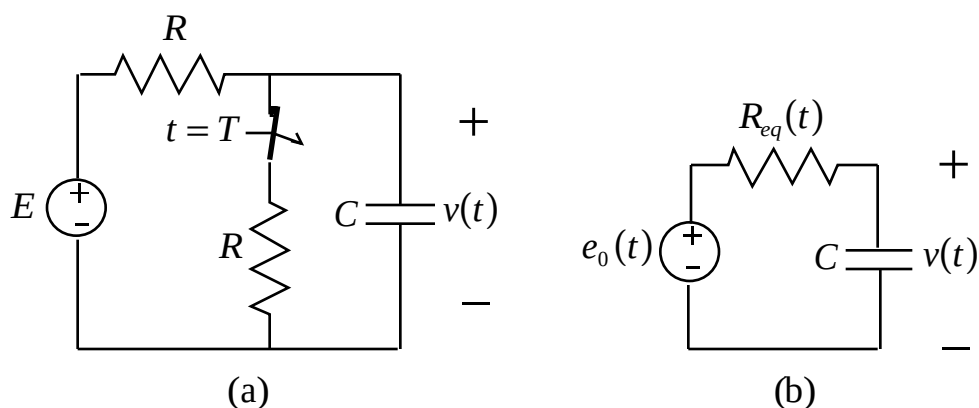


Fig. 6.6 Circuito RC tempo-variante (l'interruttore si apre all'istante $t=T$).

Si consideri, ad esempio, il circuito del primo ordine rappresentato in Figura 6.6, dove la tensione E impressa dal generatore indipendente di tensione è costante. L'interruttore per $t < T$ è chiuso e si apre all'istante $t = T$. Il grafico dell'andamento temporale della tensione a vuoto $e_0 = e_0(t)$ è rappresentato in Figura 6.7a e il grafico dell'andamento temporale della resistenza equivalente $R_{eq}(t)$ è rappresentato in Figura 6.7b. Questo è un esempio di circuito tempo-variante.

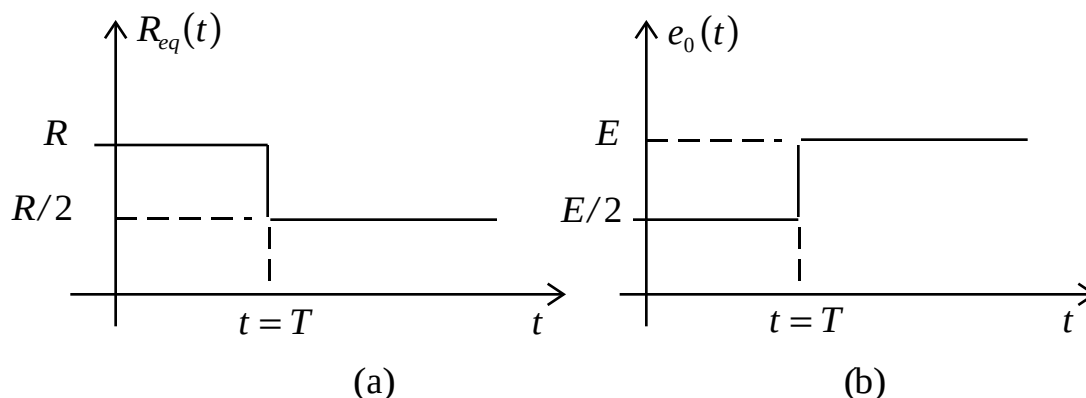


Fig. 6.7 Andamento temporale della resistenza equivalente e della tensione a vuoto del bipolo resistivo visto dal condensatore del circuito di Figura 6.8.

♦

Circuiti RL

Si consideri un generico circuito RL del primo ordine costituito da elementi lineari e da un induttore, Figura 6.8a. Anche in questo caso l'interazione

dell'unico elemento dinamico del circuito con la parte adinamica può essere rappresentata attraverso il bipolo equivalente di Thévenin (o il bipolo equivalente di Norton), Figura 6.8b.

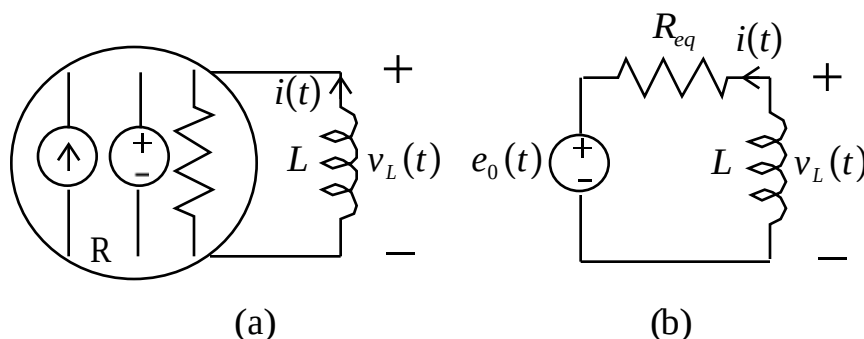


Fig. 6.8 (a) Un generico circuito RL del primo ordine e (b) corrispondente circuito equivalente.

L'equazione differenziale (abbiamo adottato anche in questo caso la convenzione dell'utilizzatore per l'induttore)

$$L \frac{di}{dt} = -v_L \quad (6)$$

descrive il funzionamento dell'induttore e l'equazione algebrica

$$v = R_{eq}i + e_0 \quad (7)$$

descrive il funzionamento del bipolo adinamico R. L'equazione che ne deriva è l'equazione di stato del circuito,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_{eq}}{L}i = \frac{e_0}{L}. \quad (8)$$

Questa equazione deve essere risolta con la condizione iniziale

$$i(t_0) = I_0. \quad (9)$$

Anche in questo caso bisogna risolvere un problema di Cauchy che ammette una e una sola soluzione.

Una volta risolta l'equazione di stato (8) con la condizione iniziale (9), è possibile determinare qualsiasi grandezza del circuito in esame risolvendo il circuito resistivo ottenuto sostituendo all'induttore un generatore indipendente di corrente con corrente uguale all'intensità della corrente elettrica dell'induttore, Figura 6.9. Il circuito così ottenuto è il circuito resistivo associato al circuito RL rappresentato in Figura 6.9a. Come nel caso del circuito RC , attraverso il circuito resistivo associato è possibile esprimere ogni grandezza del circuito in funzione della sola corrente dell'induttore (che è la grandezza di stato del circuito), e delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti. Di conseguenza, ogni grandezza del circuito di Figura 6.8a è esprimibile in funzione della sola grandezza di stato attraverso solo relazioni di tipo algebrico.

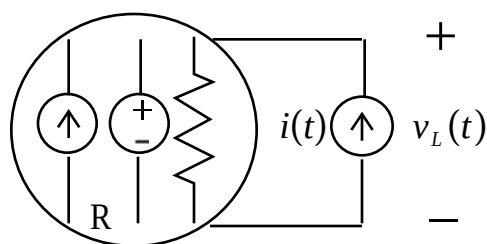


Fig. 6.9 *Circuito resistivo associato al circuito RL del primo ordine di Figura 6.8a.*

6.2.2 Circuiti del secondo ordine

Ora estenderemo la procedura che abbiamo appena utilizzato per determinare l'equazione di stato di un circuito del primo ordine al caso più generale di un circuito del secondo ordine.

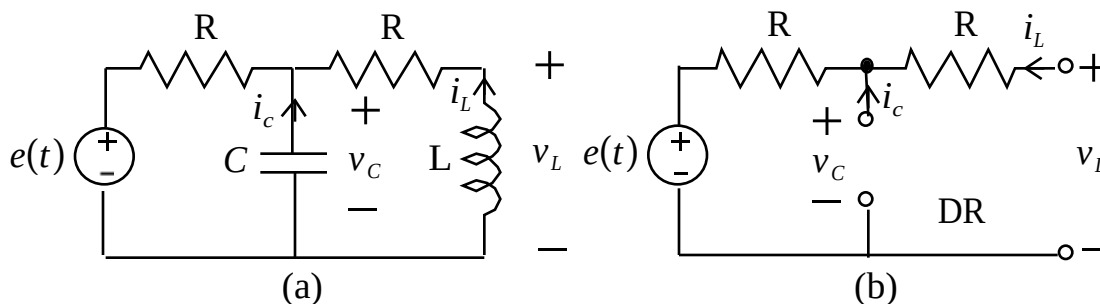


Fig. 6.10 *(a) Circuito RLC del secondo ordine e (b) corrispondente parte resistiva.*

Circuiti RLC

Come al solito, solo per semplificare il ragionamento, faremo riferimento a un circuito ben definito, ad esempio, a quello mostrato in Figura 6.10a. Esso è un circuito *RLC* del secondo ordine con un generatore indipendente di tensione; i resistori, il condensatore e l'induttore sono tempo-invarianti. L'estensione dei risultati che otterremo ad situazioni più generali non presenta alcuna difficoltà, come poi vedremo.

In questo caso il circuito ha due variabili di stato, la corrente dell'induttore $i_L = i_L(t)$, e la tensione del condensatore, $v_C = v_C(t)$. Di conseguenza le equazioni di stato del circuito sono due. Anche per un circuito di questo tipo possiamo mettere in evidenza la parte adinamica, costituita da soli resistori e generatori indipendenti. Essa può essere descritta come un doppio bipolo DR : abbiamo la porta *a-a'* a cui è collegato il condensatore e la porta *b-b'* a cui è collegato l'induttore, Figura 6.10b.

Le equazioni differenziali (abbiamo adottato la convenzione dell'utilizzatore per il condensatore e l'induttore)

$$C \frac{dv_C}{dt} = -i_c, \quad (10)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_L, \quad (11)$$

descrivono, rispettivamente, il funzionamento del condensatore e dell'induttore del circuito di Figura 6.10. l'equazione algebrica. Per esprimere la corrente del condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato del circuito bisogna caratterizzare il doppio bipolo DR . Questa caratterizzazione può essere effettuata attraverso il *circuito resistivo associato*.

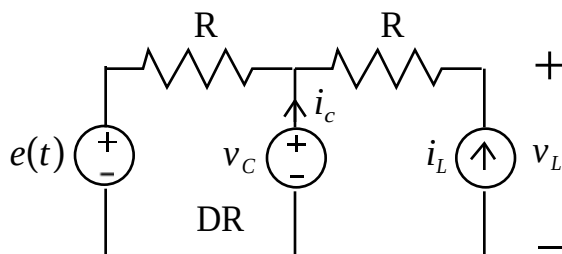


Fig. 6.11 Circuito resistivo associato al circuito dinamico riportato in Figura 6.10a.

In Figura 6.11 è riportato il circuito resistivo associato al circuito dinamico di Figura 6.10a, ottenuto sostituendo al posto del condensatore un generatore indipendente di tensione con tensione $v_L(t)$ e al posto dell'induttore un generatore indipendente di corrente con corrente $i_L(t)$. Si osservi che il circuito resistivo associato coincide proprio con il doppio bipolo DR di Figura 6.10b quando è alimentato alla porta $a-a'$ con un generatore di tensione e alla porta $b-b'$ con un generatore di corrente. È come se stessimo caratterizzando il doppio bipolo assumendo come variabili indipendenti la tensione v_C della porta $a-a'$ e la corrente i_L della porta $b-b'$ e come variabili dipendenti la corrente i_C della porta $a-a'$ e la tensione v_L della porta $b-b'$. Ricordate questa non è altro che una caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo, § 4.6.3.

La soluzione del circuito resistivo associato di Figura 6.11 è semplice. Applicando la sovrapposizione degli effetti abbiamo

$$i_c = \frac{v_C}{R} - i_L - \frac{e(t)}{R}, \quad (12)$$

$$v_L = v_C + Ri_L. \quad (13)$$

I parametri

$$h_{aa} = \frac{1}{R}, \quad h_{ab} = -1, \quad h_{ba} = 1, \quad h_{bb} = R \quad (14)$$

sono proprio i parametri ibridi del doppio bipolo DR quando il generatore di tensione $e(t)$ è spento. Infatti, abbiamo appena osservato che il circuito resistivo associato di Figura 6.11 non è altro che una caratterizzazione ibrida del doppio bipolo DR.

Le equazioni di stato del circuito RLC di Figura 6.10a si ottengono combinando le equazioni (10)-(11) con le equazioni (12)-(13). Esse sono

$$C \frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{R} + i_L + \frac{e(t)}{R}, \quad (15)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_C - Ri_L. \quad (16)$$

Le equazioni (14) e (15) non sono tra loro indipendenti, quindi le equazioni di stato del circuito RLC in esame definiscono un sistema di due equazioni

differenziali del primo ordine nelle due funzioni incognite $v_C = v_C(t)$ e $i_L = i_L(t)$. Esse devono essere risolte con le condizioni iniziali

$$v_C(t_0) = V_0, \quad (17)$$

$$i_L(t_0) = I_0. \quad (18)$$

La soluzione del sistema di equazioni differenziali (15)-(16) con le condizioni iniziali (15)-(16) è un altro **Problema di Cauchy**. Anche in questo caso esiste una e una sola soluzione del sistema (15)-(16) che verifica le condizioni iniziali (17)-(18).

Una volta risolto il sistema (15)-(16) con le condizioni iniziali (17)-(18), attraverso il circuito resistivo associato di Figura 6.11 è possibile determinare qualsiasi grandezza del circuito in esame.

È evidente che il risultato a cui siamo pervenuti vale per qualsiasi circuito *RLC* del secondo ordine con elementi dinamici tempo-invarianti. Ciò che dipende dal particolare circuito *RLC* in esame sono i parametri e non la struttura delle equazioni di stato (15)-(16).

Osservazione

La struttura delle equazioni circuitali (15)-(16) mette chiaramente in luce che i bipoli dinamici e quelli adinamici giocano due ruoli diversi nel meccanismo che governa l'evoluzione temporale del circuito: in particolare le equazioni caratteristiche dei bipoli adinamici (resistori, generatori, ...) giocano un ruolo simile a quello svolto dalle equazioni di Kirchhoff. Infatti, in analogia con la meccanica, la parte algebrica delle equazioni circuitali può essere considerata come un insieme di *vincoli olonomi*, in generale variabili nel tempo, sulle tensioni e le correnti del circuito in esame, mentre le equazioni differenziali che esprimono le equazioni caratteristiche degli elementi dinamici ricordano le equazioni del moto.



Circuiti *RC* e *RL*

Prima abbiamo esaminato circuiti *RLC* del secondo ordine. Ora, invece, esamineremo circuiti *RC* e *RL* del secondo ordine. Come al solito, solo per semplificare il ragionamento, faremo riferimento a un circuito ben definito, ad

esempio, a quello mostrato in Figura 6.12a. Esso è un circuito RC del secondo ordine con un generatore indipendente di tensione; i resistori, il condensatore e l'induttore sono tempo-invarianti.

In questo caso le variabili di stato del circuito sono le tensioni dei due condensatori $v_a = v_a(t)$ e $v_b = v_b(t)$. Anche per un circuito di questo tipo possiamo mettere in evidenza la parte adinamica, costituita da soli resistori e generatori indipendenti. Per come abbiamo scelto l'esempio, essa coincide con la parte adinamica del circuito RLC che abbiamo precedentemente analizzato e che è rappresentata dal doppio bipolo DR . In questo caso alla porta $a-a'$ è collegato il condensatore di capacità C_a e alla porta $b-b'$ è collegato il condensatore di capacità C_b , Figura 6.12b.

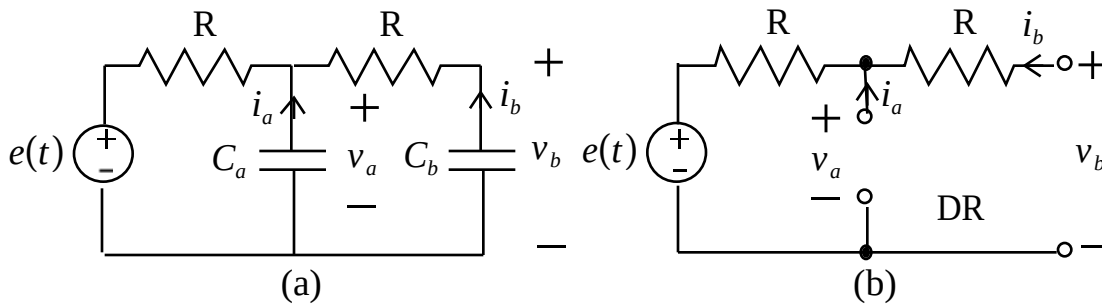


Fig. 6.12 (a) Circuito RC del secondo ordine e (b) corrispondente parte resistiva.

Le equazioni differenziali (abbiamo adottato la convenzione dell'utilizzatore per entrambi i condensatori)

$$C_a \frac{dv_a}{dt} = -i_a, \quad (19)$$

$$C_b \frac{dv_b}{dt} = -i_b, \quad (20)$$

descrivono il funzionamento dei due condensatori.

Per esprimere le correnti dei due condensatori, i_a e i_b , in funzione delle grandezze di stato del circuito bisogna caratterizzare il doppio bipolo DR assumendo come variabili indipendenti le due tensioni v_a e v_b e come variabili dipendenti le due correnti i_a e i_b . Ricordate questa non è altro che la caratterizzazione su base tensione di un doppio bipolo, § 4.6.2.

Questa caratterizzazione può essere ottenuta risolvendo il circuito resistivo associato riportato in Figura 6.13, ottenuto sostituendo al posto del

condensatore di capacità C_a un generatore indipendente di tensione con tensione $v_a(t)$ e al posto del condensatore di capacità C_b un generatore indipendente di tensione con tensione $v_b(t)$. Si osservi che il circuito resistivo associato coincide proprio con il doppio bipolo DR quando è alimentato alle porte $a-a'$ e $b-b'$ con generatori indipendenti di tensione.

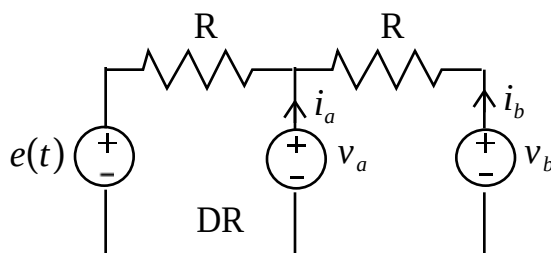


Fig. 6.13 Circuito resistivo associato al circuito dinamico riportato in Figura 6.10a.

La soluzione del circuito resistivo associato di Figura 6.13 è semplice. Applicando la sovrapposizione degli effetti abbiamo

$$i_a = \frac{2}{R}v_a - \frac{1}{R}v_b - \frac{e(t)}{R}, \quad (21)$$

$$i_b = -\frac{1}{R}v_a + \frac{1}{R}v_b. \quad (22)$$

I parametri

$$G_{aa} = \frac{2}{R}, \quad G_{ab} = G_{ba} = -\frac{1}{R}, \quad G_{bb} = \frac{1}{R} \quad (23)$$

sono proprio gli elementi della matrice delle conduttanze del doppio bipolo DR quando il generatore di tensione $e(t)$ è spento. Infatti, abbiamo appena osservato che il circuito resistivo associato di Figura 6.13 non è altro che una caratterizzazione su base tensione del doppio bipolo DR.

Le equazioni di stato del circuito RC di Figura 6.12a si ottengono combinando le equazioni (19)-(20) con le equazioni (21)-(22). Esse sono

$$C_a \frac{dv_a}{dt} = -\frac{2}{R}v_a + \frac{1}{R}v_b + \frac{e(t)}{R}, \quad (24)$$

$$C_b \frac{dv_b}{dt} = \frac{1}{R}v_a - \frac{1}{R}v_b, \quad (25)$$

Le equazioni (24) e (25) non sono tra loro indipendenti, come nel caso del circuito RLC . Quindi le equazioni di stato del circuito RC del secondo ordine in esame definiscono un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine nelle due funzioni incognite $v_a = v_a(t)$ e $v_b = v_b(t)$. Esse devono essere risolte con le condizioni iniziali

$$v_a(t_0) = V_{a0}, \quad (26)$$

$$v_b(t_0) = V_{b0}. \quad (27)$$

Una volta risolto il sistema (24)-(25) con le condizioni iniziali (26)-(27), attraverso il circuito resistivo associato di Figura 6.13 è possibile determinare qualsiasi grandezza del circuito in esame.

È evidente che il risultato a cui siamo pervenuti vale per qualsiasi circuito RC del secondo ordine con elementi dinamici tempo-invarianti. Ciò che dipende dal particolare circuito RC in esame sono i parametri e non la struttura delle equazioni di stato (24)-(25).

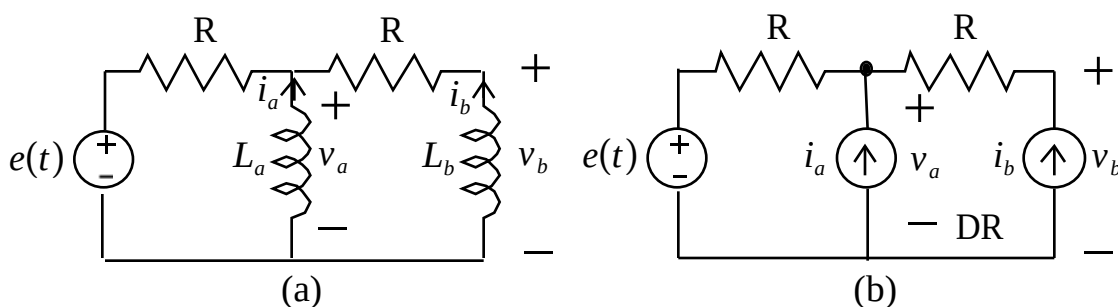


Fig. 6.14 (a) Un circuito RL del secondo ordine e (b) corrispondente circuito resistivo associato.

Esercizio

Il lettore verifichi che le equazioni di stato del circuito RL del secondo ordine riportato in Figura 6.14 sono

$$L_a \frac{di_a}{dt} = -Ri_a - Ri_b + e(t), \quad (28)$$

$$L_b \frac{di_b}{dt} = -Ri_a - 2Ri_b + e(t). \quad (29)$$

Il circuito resistivo associato è riportato in Figura 6.14b. Esso è stato ottenuto sostituendo ai due induttori due generatori indipendenti di corrente con correnti $i_a(t)$ e $i_b(t)$.



6.2.3 Continuità delle grandezze di stato di un circuito

Come abbiamo appena mostrato le correnti dei condensatori e le tensioni degli induttori sono combinazioni lineari delle grandezze di stato, delle tensioni generatori indipendenti di tensione e delle correnti dei generatori indipendenti di corrente. I coefficienti delle combinazioni lineari dipendono dai valori delle resistenze dei resistori del circuito.

In ogni circuito i valori delle tensioni dei condensatori e delle correnti degli induttori, cioè le grandezze di stato, sono limitati: se la tensione (corrente) di un condensatore (induttore) fosse illimitata si avrebbe un'energia illimitata immagazzinata nel condensatore (induttore), il che non può essere mai realizzato. Di conseguenza, i valori delle correnti dei condensatori e delle tensioni degli induttori sono (quasi sempre) limitati perché i valori delle tensioni dei generatori indipendenti di tensione e delle correnti dei generatori indipendenti di corrente sono limitati.

Le correnti dei condensatori e le tensioni degli induttori sono funzioni del tempo discontinue (funzioni generalmente continue ¹) se le tensioni dei generatori indipendenti di tensione e le correnti dei generatori indipendenti di corrente sono funzioni del tempo discontinue (generalmente continue) e/o il circuito contiene interruttori, come, ad esempio, nel circuito di Figura 6.6. Invece, le grandezze di stato, cioè le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatore sono funzioni continue del tempo. Questa proprietà, detta **proprietà di continuità delle variabili di stato**, è molto importante e, come poi vedremo, è molto utile nella soluzione dei circuiti dinamici, per questo merita di essere approfondita. Essa può essere dimostrata attraverso un ragionamento che è allo stesso tempo semplice e “rigoroso”.

¹ Una discontinuità di prima specie di una funzione reale $f(t)$ è un punto $t = \hat{t}$ tale che $f(\hat{t}^+)$ e $f(\hat{t}^-)$ esistono (finiti) e $f(\hat{t}^+) \neq f(\hat{t}^-)$; la differenza $f(\hat{t}^+) - f(\hat{t}^-)$ è il salto di discontinuità di f a $t = \hat{t}$. $f(t)$ si dice generalmente continua in un intervallo I se e solo se $f(t)$ è continua in I eccetto che in un numero finito di punti in cui ha discontinuità di prima specie.

Dimostrazione

Siccome il valore dell'intensità della corrente elettrica, $i_c = i_c(t)$, di un condensatore (tempo-invariante) è limitato in ogni istante, allora la tensione del condensatore, $v_c = v_c(t)$, è una funzione continua del tempo. Dualmente, siccome il valore della tensione $v_L = v_L(t)$ di un induttore (tempo-invariante) è limitato, allora la corrente dell'induttore, $i_L = i_L(t)$, è una funzione continua del tempo.

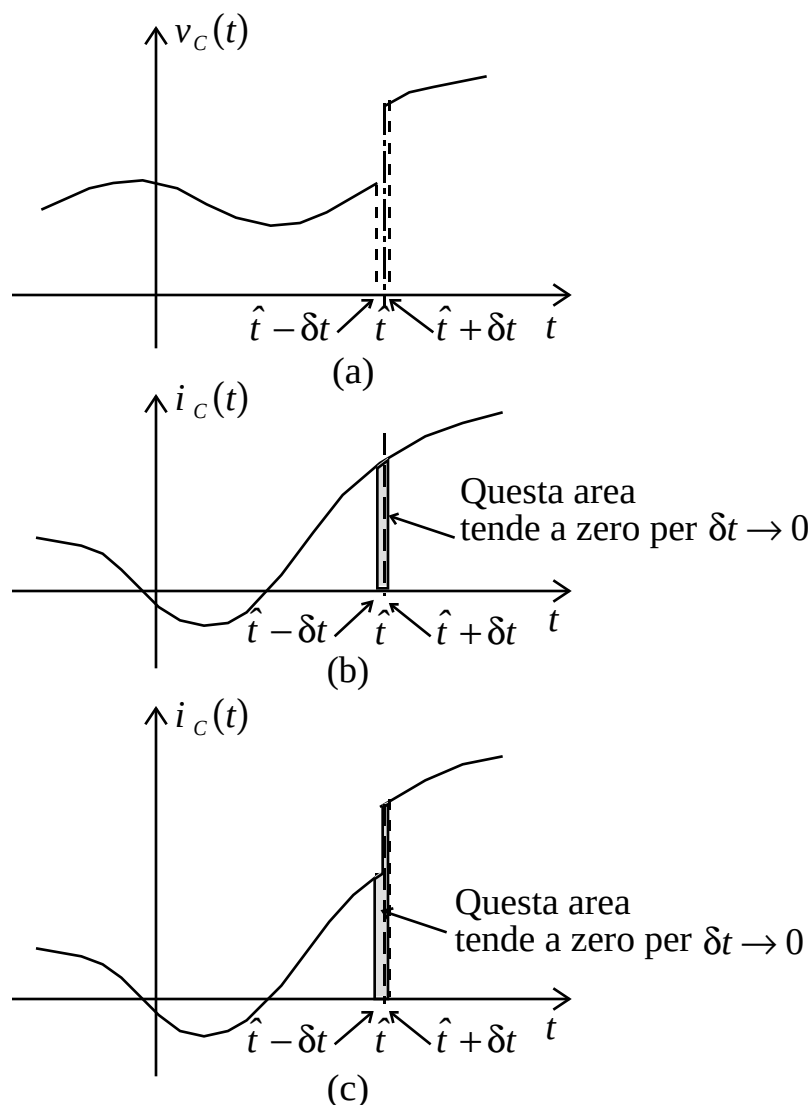


Fig. 6.15 (a) Andamento temporale di una tensione discontinua; (b) la corrente del condensatore è sempre limitata e (c) può essere discontinua.

Si dimostrerà soltanto la prima proprietà poiché l'altra segue per dualità. Si assuma che la tensione v_c possa essere discontinua a un certo istante $\hat{t}$, cioè

$v(\hat{t} - \delta t) \neq v(\hat{t} + \delta t)$, dove δt è un intervallo di tempo piccolo a piacere, Figura 6.15a. Si consideri la relazione caratteristica del condensatore (tempo-invariante),

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}, \quad (30)$$

e si integrino ambo i membri dell'equazione sull'intervallo temporale $(\hat{t} - \delta t, \hat{t} + \delta t)$ di lunghezza infinitesima. Si ha

$$v_c(\hat{t} + \delta t) = \frac{1}{C} \int_{\hat{t} - \delta t}^{\hat{t} + \delta t} i_c(\tau) d\tau + v_c(\hat{t} - \delta t). \quad (31)$$

L'integrale definito nell'espressione (31) è uguale a zero perché δt è un intervallo di tempo piccolo a piacere e la corrente $i_c = i_c(t)$ è limitata. Questo risultato è evidente se interpretiamo geometricamente l'integrale definito che appare nella (31), vedi Figure 6.15b e 6.15c. Di conseguenza deve essere necessariamente $v_c(\hat{t} + \delta t) = v_c(\hat{t} - \delta t)$. Questo risultato vale per ogni istante $\hat{t}$. In conclusione, abbiamo mostrato che la tensione del condensatore è continua perché i valori delle tensioni dei generatori indipendenti di tensione e i valori delle correnti dei generatori indipendenti di corrente sono limitati.

Osservazione

Siccome la tensione del condensatore e la corrente nell'induttore sono continue, sia l'energia elettrica immagazzinata nel condensatore $W_C(t) = Cv_C^2(t)/2$, che l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore $W_L(t) = Li_L^2(t)/2$ sono funzioni continue e la potenza elettrica assorbita da questi bipoli ($p_C = dW_C/dt$ e $p_L = dW_L/dt$) è limitata.



Osservazione

Queste proprietà di continuità non valgono se il condensatore (l'induttore) è tempo-variante e la funzione che descrive l'andamento temporale della capacità (dell'induttanza) è una funzione generalmente continua. In generale è la carica del condensatore (il flusso dell'induttore) che è continua se la corrente (la

tensione dell'induttore) è limitata. In corrispondenza di un punto di discontinuità di prima specie della capacità (del coefficiente di autoinduzione), la tensione del condensatore (la corrente dell'induttore) è discontinua.



6.3 Soluzione di circuiti del primo ordine

I circuiti costituiti da un solo condensatore (o da un solo induttore) e da elementi statici (resistori, trasformatori ideali, amplificatori operazionali, generatori controllati, generatori indipendenti, etc) sono circuiti del primo ordine. Nel precedente paragrafo abbiamo determinato le equazioni di stato di un circuito del primo ordine.

In questo paragrafo vengono discusse e risolte le equazioni di stato di circuiti del primo ordine tempo-invarianti, cioè circuiti con parametri costanti nel tempo. Ricordiamo che già abbiamo affrontato questa questione nel § 2.4, qui approfondiremo alcuni aspetti.

6.3.1 Circuiti del primo ordine tempo-invarianti

Le equazioni di stato (3) e (8) sono del tipo

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = b(t). \quad (32)$$

La (32) è una equazione differenziale ordinaria, del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea. Essa ha infinite soluzioni. Per determinare quella che si realizza nel circuito in esame, bisogna imporre la condizione iniziale

$$x(t_0) = X_0. \quad (33)$$

La soluzione generale dell'equazione (32) (ricordiamo che la soluzione generale, per definizione, contiene tutte le possibili soluzioni dell'equazione) è uguale alla somma della soluzione generale $x_o = x_o(t)$ dell'equazione omogenea associata, (cioè l'equazione che si ottiene ponendo $b(t) = 0$ nella (32), vedi § 2.4),

$$\frac{dx_o}{dt} + \alpha x_o = 0. \quad (34)$$

e di una soluzione particolare $x_p(t)$ dell'equazione completa (32),

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t). \quad (35)$$

La soluzione generale dell'equazione (32) è

$$x_o(t) = K \exp[\lambda(t - t_0)]. \quad (36)$$

dove K è una costante arbitraria e λ è la soluzione dell'*equazione caratteristica*

$$\lambda + \alpha = 0 \quad (37)$$

associata all'equazione differenziale omogenea (34). Nell'espressione (36) abbiamo rappresentato la costante arbitraria attraverso il fattore $Ae^{t_0/\tau}$ perché così risulterà più semplice imporre la condizione iniziale (33) all'istante iniziale t_0 , che in generale è diverso da zero.

L'equazione algebrica (37) è ottenuta costruendo il *polinomio caratteristico*

$$p(\lambda) = \lambda + \alpha \quad (38)$$

e imponendo, poi, che sia uguale a zero. Il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ associato all'equazione (34) è costituito dalla somma di due monomi in λ : al termine in cui compare la derivata prima corrisponde il monomio in λ di grado uno, con lo stesso coefficiente della derivata prima, cioè 1, e al termine senza derivate corrisponde il monomio di grado zero in λ , cioè uno, con lo stesso coefficiente che moltiplica la funzione incognita, cioè α .

Osservazione

La soluzione dell'equazione omogenea associata coincide con la soluzione del circuito in evoluzione libera. Un circuito si dice che è in *evoluzione libera* se è privo di generatori indipendenti (o se i generatori indipendenti che contiene

sono tutti spenti). Per questa ragione si dice che il termine $A \exp(\lambda t)$ rappresenta il *modo naturale di evoluzione* del circuito. La radice λ del polinomio caratteristico prende il nome di *frequenza naturale* del circuito.

Un circuito del primo ordine è descritto da una equazione di stato del primo ordine e quindi il polinomio caratteristico corrispondente è di primo grado. Un circuito del primo ordine ha un solo modo naturale e una sola frequenza naturale.



L'integrale generale dell'equazione (32) è

$$x(t) = K \exp[-(t - t_0)/\tau] + x_p(t), \quad (39)$$

dove

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \quad (40)$$

è la costante di tempo. Essa vale ($G_{eq} = 1/R_{eq}$)

$$\tau = C/G_{eq} = R_{eq} C \quad (41)$$

per il circuito RC e

$$\tau = L/R_{eq} = G_{eq} L \quad (42)$$

per il circuito RL .

La costante di integrazione K deve essere determinata imponendo la condizione iniziale (33). Così facendo si ottiene

$$K = X_0 - x_p(t_0) \quad (43)$$

quindi la soluzione è

$$x(t) = [X_0 - x_p(t_0)] \exp[-(t - t_0)/\tau] + x_p(t). \quad (44)$$

La funzione che descrive la soluzione particolare dipende dalla forma della funzione $b = b(t)$ e quindi dall'andamento temporale delle correnti e delle tensioni dei generatori indipendenti.

6.3.2 Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Ricordiamo che, un circuito si dice che è in *evoluzione libera* se è privo di generatori indipendenti (o se i generatori indipendenti che contiene sono tutti spenti). Nei circuiti in evoluzione libera l'energia immagazzinata all'istante iniziale negli elementi dinamici produce le correnti e le tensioni.

Si dice che un circuito è in *evoluzione forzata* se le grandezze di stato del circuito all'istante iniziale sono tutte nulle (le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori) e, quindi, l'energia inizialmente immagazzinata in essi è uguale a zero. In un circuito in evoluzione forzata i generatori indipendenti producono le correnti e le tensioni.

Nella soluzione (44) c'è un termine dipendente unicamente dalla condizione iniziale (indipendente dall'integrale particolare e quindi dai generatori) e due termini dipendenti solo dall'integrale particolare e quindi dai generatori (indipendenti dalla condizione iniziale).

$x(t) = X_0 \exp[-(t - t_0)/\tau] + \{-x_p(t_0) \exp[-(t - t_0)/\tau] + x_p(t)\}$
<i>ter min e di</i> <i>ter min e di</i> <i>evoluzione libera</i> <i>evoluzione forzata</i>

Il termine dipendente unicamente dalla condizione iniziale è la soluzione del circuito se esso fosse in *evoluzione libera*. Nel circuito *RC* (nel circuito *RL*) con tensione iniziale V_0 (con corrente iniziale I_0), un'energia uguale a $CV_0^2/2$ (uguale a $LI_0^2/2$) è immagazzinata nel condensatore (nell'induttore). È questa l'energia che viene messa in gioco nell'evoluzione libera.

Il termine dipendente unicamente dai generatori è la soluzione che si avrebbe se il circuito fosse in *evoluzione forzata*. Il termine di evoluzione forzata è la soluzione che si avrebbe se il valore dello stato iniziale del circuito fosse uguale a zero ($V_0 = 0$ nel circuito *RC* e $I_0 = 0$ nel circuito *RL*). È evidente che in questo caso c'è bisogno di generatori indipendenti per sollecitare il circuito.

Per la linearità del circuito è sempre possibile decomporre qualsiasi soluzione in un termine di evoluzione libera e in uno di evoluzione forzata.

6.3.3 Circuito dissipativo; transitorio e regime permanente

Siccome le frequenze naturali di un circuito non dipendono dai generatori indipendenti, ma solo dagli elementi lineari presenti in esso, tutte le loro proprietà possono essere messe in evidenza considerando il circuito in evoluzione libera.

La frequenza naturale di un circuito del primo ordine è una grandezza reale e può essere, come vedremo, positiva, uguale a zero o negativa.

Quando la frequenza naturale è negativa, la costante di tempo è positiva, e lo stato del circuito in evoluzione libera tende a zero con legge esponenziale per $t \rightarrow +\infty$. Se la frequenza naturale è zero, l'evoluzione libera è una costante uguale al valore iniziale della grandezza di stato. L'evoluzione libera diverge esponenzialmente se la frequenza naturale è maggiore di zero (costante di tempo negativa).

Da queste considerazioni risulta evidente che il segno della frequenza naturale caratterizza fortemente la dinamica di un circuito. Sarebbe interessante poterne prevedere il segno senza dover risolvere il circuito. Analizziamo un attimo questa questione.

Consideriamo un circuito RC del primo ordine (considerazioni analoghe possono essere svolte per il circuito RL). Siccome la capacità del condensatore è positiva (stiamo evidentemente considerando un condensatore passivo), la frequenza naturale è minore di zero quando la conduttanza equivalente è positiva, $R_{eq} > 0$, ed è maggiore di zero quando $R_{eq} < 0$; la frequenza naturale è nulla quando $1/R_{eq} = G_{eq} = 0$. Allora, quando $R_{eq} > 0$ la tensione del condensatore decresce nel tempo, quando $1/R_{eq} = G_{eq} = 0$ la tensione resta costante, invece quando $R_{eq} < 0$ la tensione del condensatore cresce nel tempo. Queste proprietà possono essere dedotte anche a partire dal bilancio energetico per il circuito in evoluzione libera (ottenuto a partire dalla conservazione delle potenze elettriche)

$$\frac{1}{2} C v^2(t) = -G_{eq} \int_{t_0}^t v^2(\tau) dt + \frac{1}{2} C v^2(t_0), \quad (45)$$

che, nel caso del circuito RL diventa

$$\frac{1}{2} Li^2(t) = -R_{eq} \int_{t_0}^t i^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2} Li^2(t_0). \quad (46)$$

In entrambe le equazioni il termine integrale rappresenta la potenza assorbita dalla parte “adinamica” del circuito. Quando il circuito RC è costituito da soli elementi strettamente passivi ², la potenza assorbita dalla parte adinamica del circuito è strettamente maggiore di zero e quindi anche la conduttanza equivalente “vista” dal condensatore (nei circuiti RL la resistenza equivalente vista dall’induttore) è strettamente maggiore di zero. In un circuito siffatto l’energia immagazzinata inizialmente nel condensatore (nell’induttore) viene completamente dissipata dagli elementi adinamici durante l’evoluzione libera.

La potenza assorbita dalla parte adinamica e quindi la conduttanza equivalente vista dal condensatore nel circuito RC (dall’induttore nel circuito RL) può essere nulla quando gli elementi adinamici non sono tutti strettamente passivi. Ciò accade, ad esempio, quando il condensatore è collegato in serie a un circuito aperto (l’induttore è collegato in parallelo a un corto circuito). Il circuito aperto e il corto circuito sono elementi passivi ma non strettamente passivi. In questo caso l’energia immagazzinata negli elementi dinamici si conserva. Il circuito aperto in serie al condensatore e il corto circuito in parallelo all’induttore possono essere, rispettivamente, un generatore di corrente indipendente spento e un generatore di tensione indipendente spento (ricordiamoci che stiamo analizzando l’evoluzione libera del circuito, quindi i generatori indipendenti sono tutti spenti).

Infine, la potenza assorbita dalla parte statica e quindi la conduttanza equivalente (la resistenza equivalente nel circuito RL) può essere minore di zero se il circuito in evoluzione libera contiene elementi attivi (come, ad esempio, generatori controllati, resistori con resistenza negativa). Quando ciò accade l’energia immagazzinata nel condensatore (nell’induttore) cresce indefinitamente nel tempo.

Dunque l’evoluzione libera di un circuito del primo ordine passivo o tende a zero o al più si mantiene costante per $t \rightarrow +\infty$, e quindi tutte le grandezze circuitali si mantengono limitate nel tempo.

² Un bipolo adinamico si dice che è strettamente passivo se nelle condizioni di funzionamento in cui la potenza assorbita è nulla sia la tensione che la corrente sono entrambe uguali a zero. Il resistore con resistenza maggiore di zero, il diodo sono due esempi di bipoli strettamente passivi. Un corto circuito o un circuito aperto sono esempi di bipoli passivi ma non sono strettamente passivi, perchè la potenza da essi assorbita è uguale a zero anche quando la corrente del corto circuito e la tensione del circuito aperto sono diverse da zero.

A questo punto possiamo introdurre il concetto di **circuito dissipativo**. Un circuito si dice **dissipativo** se nell'evoluzione libera l'energia immagazzinata nell'elemento dinamico tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$. È evidente che un circuito del primo ordine è dissipativo se e solo se la frequenza naturale è strettamente minore di zero (cioè la costante di tempo è strettamente maggiore di zero). In un circuito dissipativo in evoluzione libera l'energia immagazzinata all'istante iniziale viene completamente assorbita dai resistori, e quindi dissipata in energia termica. Si osservi che un circuito di soli elementi passivi potrebbe non essere dissipativo. Ciò è quanto si verifica quando in serie al condensatore c'è un circuito aperto e in parallelo all'induttore un corto circuito (il generatore indipendente di corrente si comporta da circuito aperto e il generatore indipendente di tensione si comporta da corto circuito quando vengono spenti). In questi casi la tensione del condensatore e la corrente nell'induttore si mantengono costanti nell'evoluzione libera. Circuiti di questo tipo vengono detti **conservativi**.

Si consideri ora un circuito in evoluzione generica, si supponga che esso sia dissipativo e si faccia tendere l'istante iniziale $t_0 \rightarrow -\infty$ (è come se il circuito iniziasse a funzionare all'istante "remoto" $t_0 \rightarrow -\infty$). La grandezza di stato in un generico istante vale

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \{ [X_0 - x_p(t_0)] \exp[-(t - t_0)/\tau] \} + x_p(t) = x_p(t). \quad (47)$$

La dinamica dello stato per t finito non dipende dalla particolare condizione iniziale (si è persa ogni traccia di essa), ma dipende unicamente dalla soluzione particolare e quindi dalla forma d'onda delle tensioni imposte dai generatori di tensione e delle correnti imposte dai generatori di corrente. In questi casi si dice che il funzionamento del circuito è in *regime permanente* e alla soluzione particolare si dà il nome di *soluzione di regime permanente* o semplicemente *regime*.

Si consideri ora il caso in cui l'istante iniziale t_0 sia al finito. Il termine esponenziale tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$, indipendentemente dal valore che lo stato e l'integrale particolare assumono all'istante iniziale t_0 . A questo termine si dà il nome di *termine transitorio*.

$\lambda = -1/\tau < 0$	
<i>termine transitorio:</i>	$x_{tran}(t) \equiv [X_0 - x_p(t_0)] \exp[-(t - t_0)/\tau]$
<i>termine di regime:</i>	$x_{reg}(t) \equiv \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} x(t) = x_p(t)$

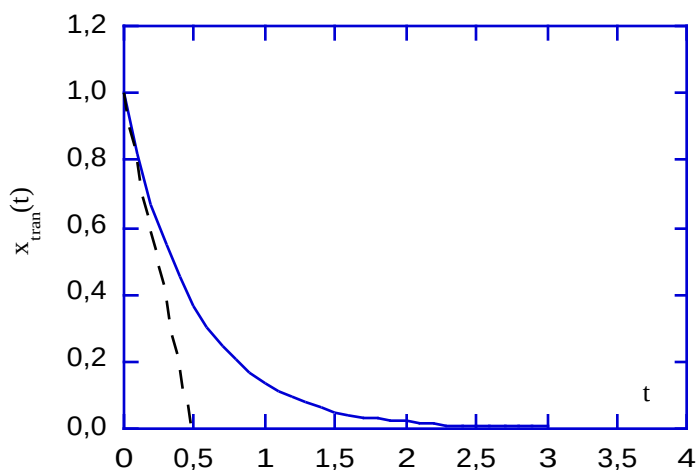


Fig. 6.16 Andamento del termine transitorio (l'istante iniziale è $t_0 = 0$).

Il termine transitorio può essere rappresentato graficamente (Figura 6.16) sfruttando le seguenti osservazioni:

- la tangente in $t = t_0$ alla curva, che rappresenta $x_{tran}(t)$, passa per i punti $[t_0, X_0 - x_p(t_0)]$ e $[t_0 + \tau, 0]$;
- dopo un intervallo di tempo pari alla costante di tempo τ , l'ampiezza (in valore assoluto) del termine transitorio è circa il 37% del valore iniziale $|X_0 - x_p(t_0)|$;
- dopo un intervallo pari a cinque costanti di tempo, $x_{tran}(t)$ è praticamente uguale a zero ($e^{-5} \cong 0,007$). In pratica si può assumere che il funzionamento di regime si instaura dopo un intervallo di tempo pari all'incirca a cinque costanti di tempo.

Quando la frequenza naturale del circuito è uguale a zero, il “termine transitorio” non si estingue ma si mantiene costante nel tempo. In questo caso il comportamento asintotico del circuito (a ogni t finito per $t_0 \rightarrow -\infty$ o per $t \rightarrow +\infty$ a partire da un istante iniziale finito) dipende anche dalla condizione

iniziale e quindi non c'è più un funzionamento di regime. Un circuito di questo tipo è detto **conservativo**. Quando la frequenza naturale del circuito è maggiore di zero, il “termine transitorio” addirittura diverge con legge esponenziale per $t \rightarrow +\infty$ ed è, quindi, quello predominante (come poi vedremo in quasi tutti i casi la soluzione particolare è limitata se le correnti imposte dai generatori di corrente indipendenti e le tensioni imposte dai generatori di tensione indipendenti sono limitate).

In conclusione il funzionamento di regime può essere realizzato se e solo se il circuito è dissipativo (non basta la sola passività; in realtà, la condizione di passività oltre a essere non sufficiente, non è nemmeno necessaria).

L'evoluzione di un circuito RC (o RL) del primo ordine dissipativo tende asintoticamente alla soluzione di regime indipendentemente dal valore iniziale della grandezza di stato.

Osservazione

La tensione del condensatore del circuito illustrato in Figura 17a e la corrente dell'induttore del circuito illustrato in Figura 17b valgono, rispettivamente:

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t j(\tau) d\tau, \quad (48)$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau. \quad (49)$$

Entrambi i circuiti hanno costante di tempo uguale a infinito, $\tau = \infty$, cioè frequenza naturale uguale a zero. Pertanto il termine dipendente dal valore iniziale dello stato non svanisce, ma permane indefinitamente in entrambi i circuiti. A causa dell'assenza di bipoli dissipativi i termini di evoluzione libera non tendono asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$, ma restano costanti nel tempo (ricordiamo che nell'evoluzione libera il generatore di corrente indipendente si comporta come un circuito aperto e il generatore di tensione indipendente si comporta come un corto circuito). In questi casi il comportamento asintotico dei due circuiti dipende anche dal valore iniziale dello stato e quindi non ha più senso parlare di regime.

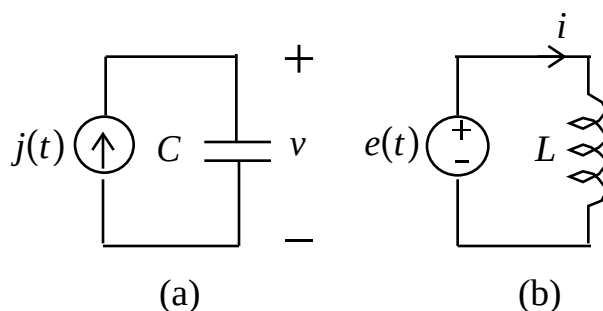


Fig. 6.17 *Circuiti dinamici elementari.*



6.3.4 Regime stazionario e regime sinusoidale

Il termine di regime dipende, oltre che dai parametri caratteristici del circuito, anche dalla forma d'onda dei generatori. Per ora verranno discussi due casi di notevole interesse: circuiti con generatori costanti (o stazionari) e circuiti con generatori sinusoidali (vedi § 2.4 e Capitolo 5).

- *Regime stazionario*

Si consideri un circuito RL o RC del primo ordine con soli generatori stazionari (cioè costanti nel tempo). In questo caso anche la tensione a vuoto $e_0(t)$ del circuito equivalente è costante nel tempo e, quindi, il regime che si instaura nel circuito è stazionario.

La soluzione di un circuito RC (o RL) in regime stazionario può essere ottenuta per ispezione diretta. Quando il circuito funziona in regime stazionario, la tensione del condensatore (la corrente dell'induttore) è costante, quindi il condensatore si comporta come se fosse un circuito aperto (l'induttore come se fosse un corto circuito). Pertanto, per calcolare la soluzione di regime stazionario di un circuito dinamico, si può risolvere il circuito resistivo ottenuto considerando al posto del condensatore un circuito aperto (al posto dell'induttore un corto circuito).

Quando i generatori sono stazionari, il regime di funzionamento che si instaura nel circuito è anche esso stazionario, se il circuito è dissipativo.

In Figura 6.18 viene riportato l'andamento dello stato per due condizioni iniziali diverse quando i generatori sono costanti. Per $t > 15$ la soluzione in entrambi i casi ha raggiunto, praticamente, il regime stazionario.

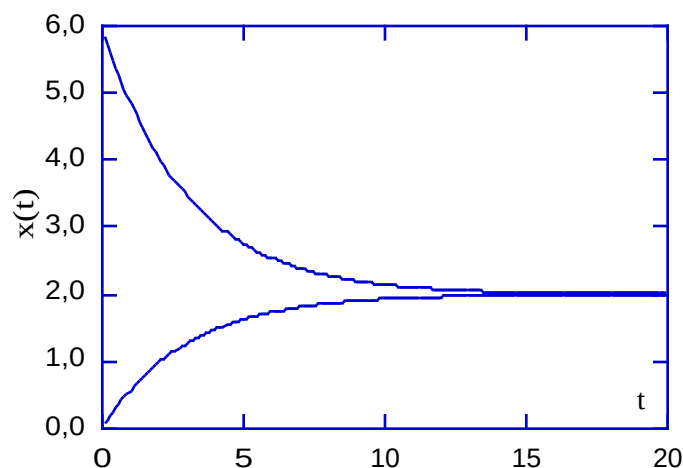


Fig. 6.18 Per $t > 15$ entrambe le soluzioni, relative a due condizioni iniziali diverse, raggiungono il valore di regime.

- Regime sinusoidale

Si consideri un circuito RL o RC del primo ordine con soli generatori sinusoidali isofrequenziali (le frequenze, e quindi le pulsazioni, dei generatori sinusoidali sono uguali) a pulsazione ω . Nel caso in esame, anche la tensione a vuoto $e_o(t)$ è una funzione sinusoidale con pulsazione ω (essa è combinazione lineare delle tensioni dei generatori di tensione e delle correnti dei generatori di corrente indipendenti). Di conseguenza, il regime che si instaura nel circuito è sinusoidale a pulsazione ω , quindi la soluzione di regime può essere determinata applicando il metodo simbolico.

Quando i generatori sono sinusoidali e isofrequenziali, il regime di funzionamento che si instaura nel circuito è anche esso sinusoidale con la stessa pulsazione dei generatori, se il circuito è dissipativo.

In Figura 6.19 viene riportato l'andamento dello stato per due condizioni iniziali diverse quando i generatori sono sinusoidali e isofrequenziali. Per $t > 5$ entrambe le soluzioni raggiungono, praticamente, il regime sinusoidale che si instaura nel circuito.

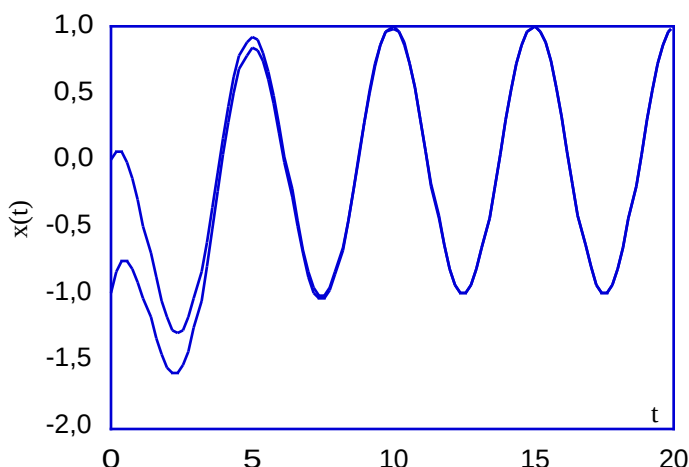


Fig. 6.19 Per $t > 10$ entrambe le soluzioni, relative a due condizioni iniziali diverse, hanno praticamente raggiunto il funzionamento di regime.

6.3.5 Regime periodico e regime aperiodico

Quando il circuito RC (o RL) contiene generatori costanti e generatori sinusoidali con diverse pulsazioni la tensione a vuoto $e_0(t)$ è una funzione periodica o aperiodica e, di conseguenza, il regime risultante è periodico o aperiodico. Il regime è periodico se tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro, invece, è aperiodico se non tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro, vedi § 5.12.

Esercizio

Si consideri il circuito rappresentato in Figura 6.2 e si assuma che $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = R_3 = 2\Omega$, $C = 2\mu F$, $e(t) = E_m \sin(\omega t)$, $j(t) = J_0$, $E_m = 0.8 \text{ V}$, $J_0 = 6/5 \text{ A}$, $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$, $t_0 = 0$ e $V_0 = -1 \text{ V}$. Si determini la tensione del condensatore. Il circuito è descritto dall'equazione di stato

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3 \cdot 10^6}{16} v = 10^6 \cdot [3/8 + 0.1 \sin(10^5 t)]. \quad (50)$$

L'integrale generale dell'equazione (50) è

$$v(t) = K \exp(-t/\tau) + v_p(t), \quad (51)$$

dove la costante di tempo vale $\tau = 5.33\mu\text{s}$ e la soluzione particolare $v_p(t)$ è il termine di regime; la costante K deve essere determinata imponendo la condizione iniziale $v(0) = -1$.

Il termine di regime $v_p(t)$ può essere determinato applicando la sovrapposizione degli effetti. Così facendo si ottiene

$$v_p(t) \cong 2.0 + 0.9 \cos(10^5 t - 2.1), \quad (52)$$

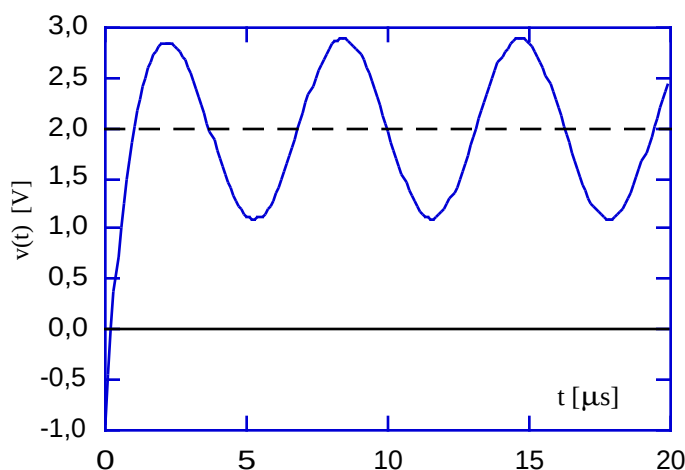


Fig. 6.20 *Circuito con regime periodico.*

Il primo termine è la soluzione di regime stazionario del circuito quando agisce solo il generatore di corrente stazionario e il secondo termine è la soluzione di regime sinusoidale quando agisce solo il generatore di tensione sinusoidale. La soluzione di regime stazionaria può essere determinata risolvendo il circuito resistivo equivalente ottenuto sostituendo al condensatore un circuito aperto (in regime stazionario il condensatore si comporta da circuito aperto). La soluzione di regime sinusoidale può essere determinata applicando il metodo simbolico descritto nel Capitolo 5. Dalla sovrapposizione dei due regimi si ottiene un regime periodico con periodo $T = 6.8\mu\text{s}$ (Figura 6.20).

Sostituendo la (52) nella (51) e imponendo la condizione iniziale, si ottiene $K = -2.5\text{V}$ e quindi la soluzione del problema è

$$v(t) \cong -2.5 \exp(-t/\tau) + [2.0 + 0.9 \cos(10^5 t - 2.1)]. \quad (53)$$

◆

6.3.6 Circuito con generatore impulsivo

Si consideri il circuito di Figura 6.21 e si determini la tensione e la corrente del condensatore quando la tensione del generatore ha l'andamento riportato in Figura 6.21: $e(t)$ è un impulso rettangolare di ampiezza E_0 e durata T .

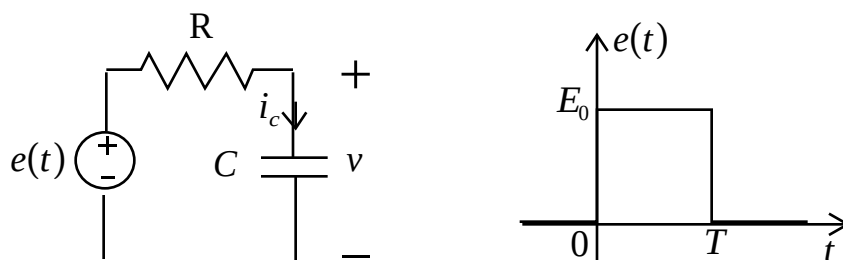


Fig. 6.21 Circuito RC con impulso rettangolare.

L'equazione di stato di questo circuito è:

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ E_0 & 0 < t < T, \\ 0 & T < t; \end{cases} \quad (54)$$

$\tau = RC$ è la costante di tempo del circuito. Pur essendo la tensione del generatore discontinua all'istante $t=0$ e all'istante $t=T$, la tensione del condensatore deve essere continua perché il generatore di tensione è limitato.

Siccome la tensione del generatore è uguale a zero per $t < 0$, il circuito è a riposo per $t < 0$, quindi la tensione del condensatore a un istante immediatamente prima di $t=0$ è nulla, $v(0^-) = 0$. Per la continuità della tensione del condensatore abbiamo

$$v(0^-) = v(0^+) = 0. \quad (55)$$

Nell'intervallo $(0, T)$ la tensione del generatore è costante, $e(t) = E_0$. Pertanto per $(0, T)$ la tensione del condensatore è soluzione dell'equazione

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = E_0, \quad (56)$$

con la condizione iniziale

$$v(0^+) = 0. \quad (57)$$

La soluzione dell'equazione (56) con la condizione iniziale (57) è

$$v(t) = E_0(1 - e^{-t/\tau}). \quad (58)$$

Questo è l'andamento della tensione del condensatore nell'intervallo $(0, T)$. esso è l'andamento della tensione nella fase di carica del condensatore. Siccome la tensione del condensatore è una funzione continua, si ha

$$v(T^+) = v(T^-) = E_0(1 - e^{-T/\tau}). \quad (59)$$

Per $t > T$ il circuito è in evoluzione libera, quindi si ha

$$v(t) = E_0(1 - e^{-T/\tau})e^{-(t-T)/\tau}. \quad (60)$$

Riassumendo, la tensione $v(t)$ del circuito illustrato in Figura 6.21 vale

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ E(1 - e^{-t/\tau}) & 0 \leq t \leq T, \\ E(1 - e^{-T/\tau})e^{-(t-T)/\tau} & t \geq T. \end{cases} \quad (61)$$

Se $T/\tau \gg 1$ (ad esempio, $T/\tau = 10$) abbiamo $v(T^+) = v(T^-) \cong E_0$, cioè la fase di carica viene completata nell'intervallo di tempo in cui il generatore è acceso. In Figura 6.22 viene mostrato l'andamento temporale della tensione del condensatore per un fissato valore di E_0 e diversi valori di T ; in Figura 6.23 è mostrato l'andamento della corrente per il caso $T = 4\tau$. Si osservi che, a differenza della tensione, la corrente del condensatore è discontinua all'istante $t = 0$ e all'istante $t = T$.

Al decrescere della durata dell'impulso il picco della tensione del condensatore decresce. Per $T = 4\tau$ il circuito praticamente raggiunge il regime stazionario prima che il generatore di tensione si spenga; infatti abbiamo $v_{max} = v(T = 4\tau) \cong E_0$. Per $T = \tau/2$ il circuito non riesce a raggiungere il

regime stazionario prima che il generatore di tensione si spenga; infatti abbiamo $v_{max} = v(T) \cong 0.4E_0$.

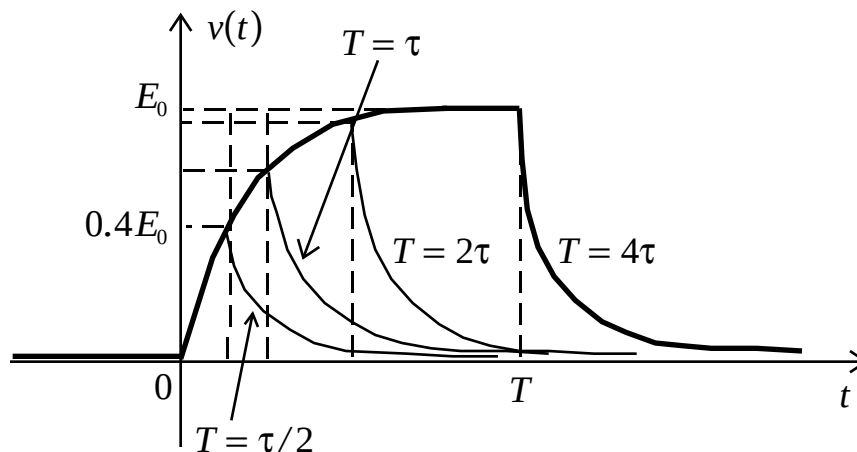


Fig. 6.22 Andamento temporale della tensione del condensatore per fissato valore di E_0 e diversi valori di T .

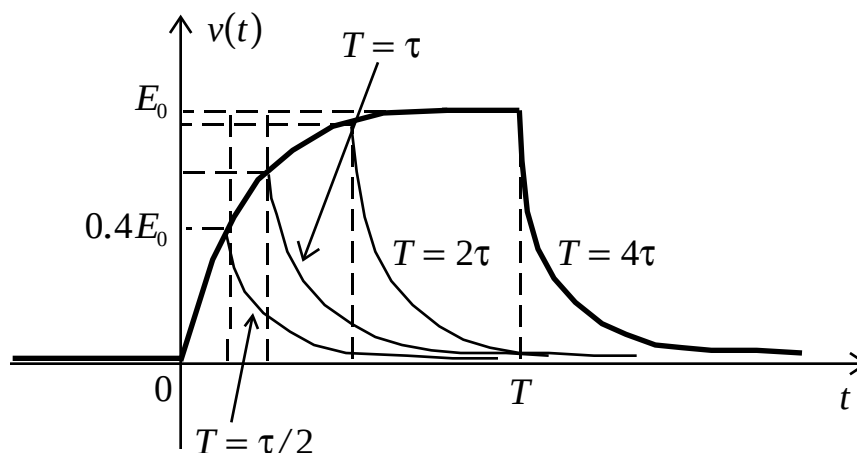


Fig. 6.23 Andamento temporale della tensione del condensatore per fissato valore di E_0 e diversi valori di T .

Si osservi che nel caso in esame è $\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) d\tau = E_0 T$ (l'area dell'impulso rettangolare), quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) d\tau \rightarrow 0$ per $T \rightarrow 0$. Quanto più corta è la durata dell'impulso, a parità di ampiezza massima, tanto meno è “efficace” la sua azione.

Cosa accade se applichiamo un impulso di tensione con un'ampiezza che cresce al decrescere della sua durata?

Consideriamo, ora, un generatore di tensione in grado di generare un impulso rettangolare $e = \Pi_{\Delta}(t)$ del tipo illustrato in Figura 6.24: l'ampiezza $(1 \text{ V} \cdot \text{s})/\Delta$ è inversamente proporzionale alla durata temporale Δ . È evidente, allora, che è $\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) d\tau = 1$ indipendentemente dal valore della durata Δ . Inoltre, si assuma che la durata temporale Δ sia diversa da zero ma arbitrariamente piccola e, quindi, l'ampiezza arbitrariamente grande.

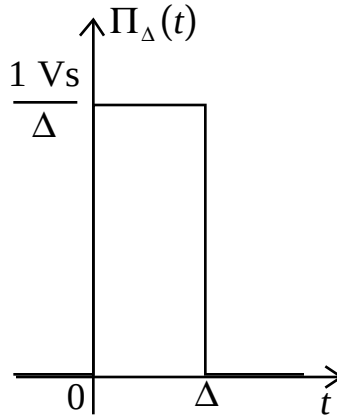


Fig. 6.24 Impulso rettangolare di ampiezza $(1 \text{ Vs})/\Delta$.

Indichiamo con il simbolo $h_{\Delta}(t)$ la funzione che descrive la tensione del condensatore per un generico valore di Δ . Abbiamo

$$h_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \frac{1}{\Delta}(1 - e^{-t/\tau}) & 0 \leq t \leq \Delta, \\ \frac{1}{\Delta}(1 - e^{-\Delta/\tau})e^{-(t-\Delta)/\tau} & t \geq \Delta. \end{cases} \quad (62)$$

Cosa accade quando $\Delta \rightarrow 0$? Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di $\Delta = 0$

$$1 - e^{-\Delta/\tau} = 1 - \left[1 - \frac{\Delta}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\tau} \right)^2 + \dots \right] = \frac{\Delta}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\tau} \right)^2 + \dots, \quad (63)$$

dalla (62) abbiamo

$$h_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \left[\frac{1}{\tau} \frac{t}{\Delta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 + \dots \right] & 0 \leq t \leq \Delta, \\ \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\tau} \right)^2 + \dots \right] e^{-(t-\Delta)/\tau} & t \geq \Delta. \end{cases} \quad (64)$$

Si osservi che per $(\Delta/\tau) \ll 1$ l'andamento della tensione nell'intervallo $(0, \Delta)$ è, con buona approssimazione, lineare nel tempo, Figura 6.25,

$$h_{\Delta}(t) \cong \frac{1}{\Delta} \left(\frac{t}{\tau} \right) \text{ per } 0 \leq t \leq \Delta. \quad (65)$$

La pendenza della corrispondente retta tende all'infinito per $\Delta \rightarrow 0$. Nel limite per $\Delta \rightarrow 0$ abbiamo

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0^-, \\ \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} & t \geq 0^+, \end{cases} \quad (66)$$

ovvero

$$h(t) \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta}(t) = u(t) \left(\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right), \quad (67)$$

dove $u = u(t)$ è la funzione *gradino unitario di Heaviside*, così definita

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0^-, \\ 1 & t > 0^+. \end{cases} \quad (68)$$

Nel limite di $\Delta \rightarrow 0$ la tensione del condensatore è discontinua $t = 0$, Figura 6.25: il suo valore è zero all'istante $t = 0^-$ ed è uguale a $1/\tau$ all'istante $t = 0^+$. Pur essendo per $\Delta \rightarrow 0$ la durata dell'applicazione della sollecitazione sempre più piccola, l'intensità di quest'ultima cresce come $1/\Delta$, e quindi è in grado di modificare istantaneamente lo stato del circuito. Per $t > 0$ il circuito è in evoluzione libera.

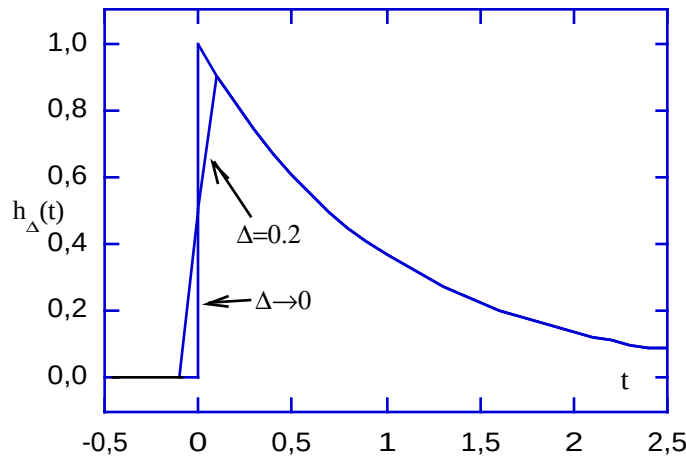


Fig. 6.25 Andamento temporale della tensione del condensatore quando l'ingresso è l'impulso rappresentato in Figura 6.24 per $\Delta/\tau = 0.2$ e $\Delta \rightarrow 0$.

Osservazione

Si consideri la successione di funzioni $\Pi_{\Delta}(t)$ quando $\Delta \rightarrow 0$. È evidente che $\Pi_{\Delta}(t)$ gode delle seguenti proprietà per $\Delta \rightarrow 0$:

- è nulla per qualsiasi t , eccetto che in un intorno (destro) arbitrariamente piccolo di $t = 0$;
- non ha valore finito in $t = 0$;
- inoltre, l'integrale definito di $\Pi_{\Delta}(t)$ sull'intervallo $(-\infty, \infty)$ vale uno per ogni valore di Δ , $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\Delta}(\tau) d\tau = 1$.

La forma d'onda limite $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_{\Delta}(t)$ è un modo per realizzare un impulso di Dirac $\delta(t)$, definito dalle proprietà

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{non limitata} & t = 0, \\ 0 & t \neq 0, \end{cases} \quad (69)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (70)$$

È immediato verificare che la (66) (o (67)) coincide proprio con la tensione del condensatore che si avrebbe nel caso in cui la tensione del generatore di

tensione nel circuito di Figura 6.21 fosse un impulso di Dirac unitario applicato all'istante $t = 0$,

$$e(t) = (1 \text{ Vs})\delta(t). \quad (71)$$

L'ampiezza di un impulso di Dirac unitario di tensione è pari a $1 \text{ V} \cdot \text{s}$, cioè, è omogenea dimensionalmente con un flusso di campo magnetico. Ciò è dovuto al fatto che dovendo essere verificata la (70), i valori della funzione $\delta(t)$ sono omogenei con s^{-1} .

La corrente del condensatore può essere espressa in funzione della tensione del condensatore e del generatore attraverso la relazione:

$$i_c(t) = \frac{\delta(t) - v(t)}{R}. \quad (72)$$

Si osservi che la corrente contiene un termine che è direttamente proporzionale a un impulso di Dirac.

D'altra parte dalla relazione caratteristica del condensatore abbiamo

$$v(0^+) = v(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_c(\tau) d\tau. \quad (73)$$

Questa equazione è stata ottenuta facendo l'integrale definito, sull'intervallo infinitesimo $(0^-, 0^+)$, di ambo i membri dell'equazione caratteristica del condensatore. Sostituendo la (72) nella (73) abbiamo,

$$v(0^+) = v(0^-) + \frac{1}{RC} \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau) d\tau - \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} v(\tau) d\tau. \quad (74)$$

La tensione del condensatore è certamente limitata (altrimenti l'energia immagazzinata potrebbe essere infinita), quindi il secondo integrale nella (73) è uguale a zero; inoltre, per definizione di impulso di Dirac $\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$. Infine, il circuito è a riposo prima che il generatore di tensione agisca, $v(0^-) = 0$. In conseguenza di tutto ciò dalla (74) abbiamo

$$v(0^+) = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}. \quad (75)$$

Per $t \geq 0^+$ il circuito è in evoluzione libera e, quindi,

$$v(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \text{ per } t > 0. \quad (76)$$

◆

Esercizio

Si determini la tensione dell'induttore per il circuito rappresentato in Figura 6.26.

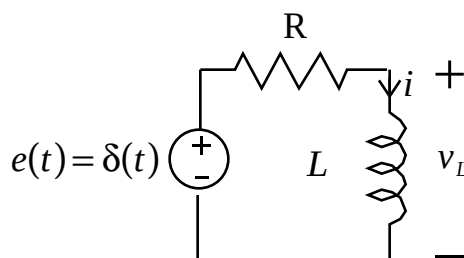


Fig. 6.26 *Circuito RL con generatore impulsivo.*

◆

6.3.7 Circuito tempo-variante

Si consideri il circuito descritto in Figura 6.6. Esso, pur essendo tempo variante, può essere analizzato usando le tecniche appena descritte. Ciò è possibile perché per $-\infty < t \leq T^-$, cioè prima dell'apertura dell'interruttore, il circuito è tempo-invariante e per $T^+ \leq t < +\infty$, cioè dopo l'apertura dell'interruttore, il circuito è di nuovo tempo-invariante. La resistenza equivalente del bipolo di Thévenin che descrive la parte statica del circuito è una funzione del tempo la cui espressione è

$$R_{eq}(t) = \begin{cases} R & t < T, \\ R/2 & t > T; \end{cases} \quad (77)$$

anche la tensione a vuoto è una funzione del tempo la cui espressione è data da

$$e_0(t) = \begin{cases} E/2 & t < T, \\ E & t > T. \end{cases} \quad (78)$$

Si osservi che, pur essendo costante la tensione del generatore indipendente di tensione presente nel circuito di Figura 6.6a, la tensione a vuoto del bipolo equivalente di Thevénin dipende dal tempo a causa dell'interruttore. Considerazioni analoghe valgono per la resistenza equivalente.

L'equazione di stato è per $-\infty < t < +\infty$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_{eq}(t)C} v = \frac{e_0(t)}{R_{eq}(t)C}. \quad (79)$$

Per $t \leq T^-$ il circuito è tempo-invariante ed è alimentato con un generatore stazionario. A un qualsiasi istante di tempo finito, minore di zero, il circuito è in regime stazionario perché sta funzionando dall'istante "remoto" $t_0 \rightarrow -\infty$ ed è dissipativo. La soluzione stazionaria per $t \leq T^-$ vale

$$v = \frac{E}{2}. \quad (80)$$

La (80) può essere ottenuta per ispezione diretta del circuito riportato in Figura 6.6. Quando il circuito è in regime stazionario la tensione del condensatore è costante e quindi la corrente che in esso circola è uguale a zero. Pertanto il condensatore si comporta come se fosse un circuito aperto.

All'istante $t = T$ si apre l'interruttore e la struttura del circuito cambia. La tensione del condensatore è continua perché il generatore di tensione ha un'ampiezza limitata, di conseguenza abbiamo:

$$v(T^+) = v(T^-) = \frac{E}{2}. \quad (81)$$

Per $T^+ \leq t < +\infty$ il circuito è di nuovo tempo-invariante e la tensione del generatore indipendente di tensione è costante. In questa situazione l'equazione di stato è

$$\frac{dv}{dt} + \frac{2}{RC}v = \frac{2E}{RC}. \quad (82)$$

La soluzione dell'equazione (82) deve verificare la condizione iniziale

$$v(T^+) = \frac{E}{2}. \quad (83)$$

La soluzione generale dell'equazione (82) è

$$v(t) = Ke^{-t/\tau} + E. \quad (84)$$

Per $t > T$ il valore della soluzione stazionaria del circuito è uguale ad E . La costante K deve essere determinata imponendo la condizione iniziale (83),

$$\frac{E}{2} = Ke^{-T/\tau} + E \Rightarrow K = -\frac{E}{2}e^{T/\tau}. \quad (85)$$

Pertanto la soluzione è data da

$$v(t) = \frac{E}{2} \left[2 - e^{-(t-T)/\tau} \right]. \quad (86)$$

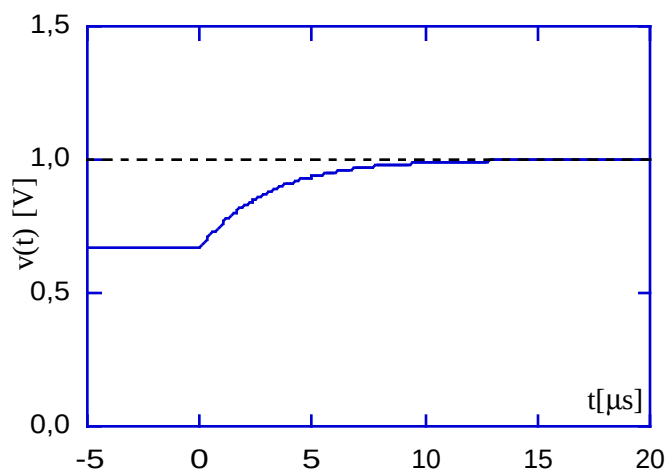


Fig. 6.27 Circuito RL con generatore impulsivo.

Riassumendo, la soluzione del circuito tempo-variante illustrato in Figura 6.6a vale

$$v(t) = \begin{cases} \frac{E}{2} & t \leq T^-, \\ \frac{E}{2} \left[2 - e^{-(t-T)/\tau} \right] & t \geq T^+. \end{cases} \quad (87)$$

In Figura 6.26 viene illustrato l'andamento temporale della tensione del condensatore per $E = 1$ e $RC = 1 \mu s$.

Esercizio

Si determini la tensione del condensatore del circuito tempo-variante di Figura 6.6 quando l'andamento temporale della tensione del generatore è quello descritto in Figura 6.28.

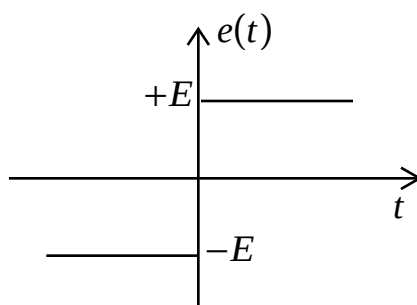


Fig. 6.28



6.4 Soluzione di circuiti del secondo ordine

In questo paragrafo affronteremo la soluzione di circuiti del secondo ordine. Come al solito per esemplificare faremo riferimento a circuiti particolari; i risultati che otterremo si estendono senza alcuna difficoltà a un generico circuito del secondo ordine.

6.4.1 Circuito *RLC* serie e circuito *RLC* parallelo

Per esemplificare le complicazioni e i nuovi fenomeni che si incontrano studiando un circuito del secondo ordine tempo-invariante considereremo il

circuito RLC serie, Figura 6.29a. Questo è l'esempio più semplice e anche più significativo di circuito del secondo ordine. In Figura 6.29b è illustrato il circuito RLC parallelo.

In questo paragrafo studieremo in dettaglio il circuito RLC serie. Lasciamo al lettore lo studio del circuito duale rappresentato dal circuito RLC parallelo.

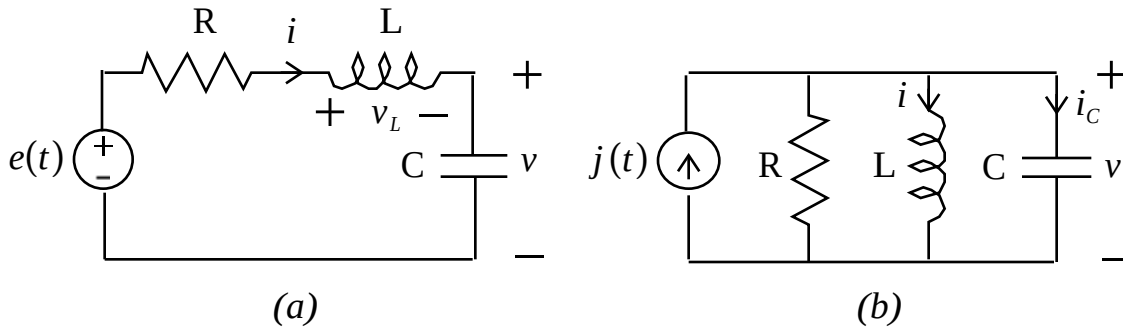


Fig. 6.29 (a) Circuito RLC serie e (b) circuito RLC parallelo.

Si consideri un circuito RLC serie con le condizioni iniziali

$$v(t_0) = V_0, \quad i(t_0) = I_0. \quad (88)$$

Le equazioni caratteristiche dei bipoli a memoria sono

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i, \\ L \frac{di}{dt} &= v_L. \end{aligned} \quad (89)$$

Per determinare le equazioni di stato bisogna esprimere la corrente del condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato. Siccome il condensatore è in serie con l'induttore la corrente del condensatore è uguale alla corrente dell'induttore e, quindi, in questo caso coincide con una grandezza di stato. Per esprimere la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato bisogna applicare la seconda legge di Kirchhoff. Abbiamo

$$v_L = e - v - Ri. \quad (90)$$

Le equazioni di stato sono

$$\begin{aligned}
 C \frac{dv}{dt} &= i, \\
 L \frac{di}{dt} &= -Ri - v + e(t).
 \end{aligned}
 \tag{91}$$

Il sistema di equazioni differenziali (91) deve essere risolto con le condizioni iniziali (88).

Per risolvere questo problema esistono diversi metodi. Qui risolveremo il problema riducendo il sistema (91) ad una sola equazione in una sola incognita. Sostituendo la prima equazione di stato nella seconda, si ottiene l'equazione differenziale per la tensione del condensatore

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = \frac{e(t)}{LC}.
 \tag{92}$$

L'equazione scalare del secondo ordine (92) deve essere risolta assegnando il valore iniziale della tensione del condensatore e il valore della sua derivata prima all'istante iniziale $t = t_0$. Il valore di dv/dt in ciascun istante può essere determinato utilizzando la prima delle equazioni di stato (91). Abbiamo, allora,

$$\begin{aligned}
 v(t_0) &= V_0, \\
 \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_0} &= \frac{I_0}{C}.
 \end{aligned}
 \tag{93}$$

Osservazione

Le equazioni di stato per il circuito RLC parallelo di Figura 6.29b sono

$$\begin{aligned}
 C \frac{dv}{dt} &= -\frac{v}{R} - i + j, \\
 L \frac{di}{dt} &= v.
 \end{aligned}
 \tag{94}$$

L'equazione differenziale per la tensione del condensatore è

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{j(t)}{LC}.
 \tag{95}$$

Essa deve essere risolta con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} i(t_0) &= I_0, \\ \frac{di}{dt} \Big|_{t_0=0} &= \frac{V_0}{L}. \end{aligned} \quad (96)$$

Anche le equazioni di stato del circuito *RLC* rappresentato in Figura 6.10 possono essere ridotte ad una sola equazione differenziale del secondo ordine in una sola incognita simile alle equazioni (92) e (95). Ovviamente, i coefficienti saranno diversi. Il lettore determini, ad esempio, l'equazione differenziale per la corrente i_L .

◆

L'equazione differenziale (92) deve essere risolta con le condizioni iniziali (93). Questo è il problema di Cauchy che bisogna risolvere quando si studia un generico circuito del secondo ordine lineare e tempo invariante.

Una volta determinata la soluzione del problema di Cauchy, usando la prima equazione del sistema (91) è possibile determinare la corrente dell'induttore attraverso una semplice operazione algebrica di derivazione.

L'integrale generale dell'equazione scalare (92) è dato da

$$v(t) = v_l(t) + v_p(t), \quad (97)$$

dove $v_p(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione (92) e $v_l(t)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (92),

$$\frac{d^2 v_l}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_l}{dt} + \omega_r^2 v_l = 0; \quad (98)$$

il parametro α è definito come

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad (99)$$

mentre ω_r è proprio uguale alla pulsazione di risonanza della serie *RLC*,

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (100)$$

L'equazione (98) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti e omogenea.

La soluzione generale dell'equazione (98) può essere determinata osservando che la funzione

$$Ke^{\lambda t} \quad (101)$$

ha una derivata prima e una derivata seconda che somigliano proprio alla funzione stessa. L'espressione (101) è soluzione dell'equazione (98) se il parametro λ è soluzione dell'equazione algebrica di secondo grado

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_r^2 = 0. \quad (102)$$

Il polinomio di secondo grado

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_r^2. \quad (103)$$

è il **polinomio caratteristico** associato all'equazione differenziale (98). Esso è costituito dalla somma di tre monomi in λ : al termine della (98) in cui compare la derivata seconda corrisponde il monomio in λ di grado due con lo stesso coefficiente della derivata seconda, cioè 1; al termine in cui compare la derivata prima corrisponde il monomio in λ di grado uno con lo stesso coefficiente della derivata prima, cioè 2α ; infine; al termine non derivato corrisponde il monomio di grado zero, con lo stesso coefficiente che moltiplica la funzione incognita, cioè ω_r^2 .

Le radici del polinomio caratteristico sono

$$\left. \begin{matrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_r^2}. \quad (104)$$

Ovviamente esse non dipendono dalla tensione del generatore di tensione. Pertanto esistono due soluzioni dell'equazione (95) del tipo (98),

$$K_+ e^{\lambda_+ t}, K_- e^{\lambda_- t}, \quad (105)$$

dove K_+ e K_- sono due costanti arbitrarie. Siccome l'equazione (98) è lineare anche la loro somma è soluzione dell'equazione,

$$v_0(t) = K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t}. \quad (106)$$

Questa è l'espressione della soluzione generale dell'equazione (98) quando le radici del polinomio caratteristico sono distinte, cioè $\lambda_+ \neq \lambda_-$. Quando le due frequenze naturali sono coincidenti, $\lambda_+ = \lambda_- = -\alpha$, l'espressione la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$v_0(t) = Ae^{-\alpha t} + Bte^{-\alpha t}. \quad (107)$$

Quando le radici del polinomio caratteristico sono distinte $K_+ e^{\lambda_+ t}$ e $K_- e^{\lambda_- t}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (98); facendo variare nella (106) sia K_+ che K_- (in generale, nell'insieme dei numeri complessi), si ottengono tutte le possibili soluzioni della (98). Invece, quando le radici del polinomio caratteristico sono coincidenti $Ae^{-\alpha t}$ e $Bte^{-\alpha t}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (98).

Osservazione

Un circuito del secondo ordine ha due modi di evoluzione naturali, $K_+ e^{\lambda_+ t}$ e $K_- e^{\lambda_- t}$, e due frequenze naturali, λ_+ e λ_- . Quando le frequenze sono coincidenti i modi naturali di evoluzione sono $Ae^{-\alpha t}$ e $Bte^{-\alpha t}$.



La soluzione generale dell'equazione (92) è

$$v(t) = \begin{cases} K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t} + v_p(t) & \text{se } \lambda_+ \neq \lambda_-, \\ Ae^{-\alpha t} + Bte^{-\alpha t} + v_p(t) & \text{se } \lambda_+ = \lambda_- = -\alpha. \end{cases} \quad (108)$$

La soluzione generale (108) dipende: (a) dalla soluzione particolare dell'equazione (92) che dipende dall'andamento temporale della tensione del

generatore; (b) dalle costanti di integrazione K_+ e K_- (A e B); (c) dalle frequenze naturali λ_+ e λ_- .

Le due costanti di integrazione K_+ e K_- (A e B) devono essere determinate imponendo che la (108) verifichi le condizioni iniziali (93), quindi K_+ e K_- (A e B) dipendono dallo stato iniziale del circuito. Le frequenze naturali λ_+ e λ_- sono, invece, grandezze caratteristiche del circuito, che non dipendono dai generatori indipendenti e dallo stato iniziale.

Osservazione

Anche per i circuiti del secondo ordine lineari è possibile decomporre il funzionamento in condizioni generiche in due contributi: l'evoluzione libera $v_l = v_l(t)$ e l'evoluzione forzata $v_f = v_f(t)$. Nel circuito in evoluzione libera il generatore è spento e quindi il termine noto dell'equazione differenziale (92) è uguale a zero: l'evoluzione libera è la soluzione dell'equazione omogenea associata che verifica le condizioni iniziali (93). Invece, l'evoluzione forzata è la soluzione dell'equazione completa (92) che verifica condizioni iniziali nulle.

$$\begin{array}{c}
 v(t) = v_l(t) + v_f(t) \\
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 v_l}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_l}{dt} + \omega_r^2 v_l = 0 \\ v_l(t_0) = V_0 \\ \left. \frac{dv_l}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{I_0}{C} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 v_f}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_f}{dt} + \omega_r^2 v_f = 0 \\ v_f(t_0) = 0 \\ \left. \frac{dv_f}{dt} \right|_{t=t_0} = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$



Ora analizzeremo in dettaglio l'evoluzione libera di un circuito *RLC* serie. Abbiamo già visto (nei circuiti del primo ordine) che il comportamento qualitativo dell'evoluzione libera di un circuito dipende dalle sue frequenze naturali, e quindi è importante studiarne le proprietà.

Le frequenze naturali del circuito sono reali e distinte se il discriminante del polinomio caratteristico è maggiore di zero, sono reali e coincidenti se il discriminante del polinomio caratteristico è uguale a zero, mentre sono complesse coniugate se il discriminante è minore di zero.

L'espressione del discriminante del polinomio caratteristico è

$$\Delta = \alpha^2 - \omega_r^2. \quad (109)$$

La (109) può essere anche riscritta come

$$\Delta = \alpha^2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\alpha^2} \right) = \alpha^2 (1 - 4Q^2), \quad (110)$$

dove

$$Q = \frac{L}{R} \omega_r, \quad (111)$$

è il *fattore di merito* del circuito *RLC* serie.

Le due frequenze naturali del circuito, λ_+ e λ_- , sono reali se $Q < 1/2$,

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm \alpha_d, \quad (112)$$

dove

$$\alpha_d \equiv \sqrt{\alpha^2 - \omega_r^2}. \quad (113)$$

Siccome la resistenza R e l'induttanza L sono grandezze positive (bipoli passivi) si ha che (in questo caso si ha sempre $\alpha > \alpha_d$)

$$\lambda_- < \lambda_+ < 0. \quad (114)$$

Quando $Q = 1/2$ le frequenze naturali sono reali e coincidenti ($\alpha_d = 0$),

$$\lambda_{\pm} = -\alpha. \quad (115)$$

Per la passività abbiamo anche

$$\lambda_{\pm} = -\alpha < 0. \quad (116)$$

Quando $Q > 1/2$ le frequenze naturali sono complesse coniugate,

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm i \omega_d, \quad (117)$$

dove

$$\omega_d \equiv \sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2}; \quad (118)$$

nella (117) i rappresenta l'unità immaginaria, $i = \sqrt{-1}$.

Per la passività abbiamo anche

$$\operatorname{Re}\{\lambda_{\pm}\} = -\alpha < 0. \quad (119)$$

Si osservi che il fattore di merito di un circuito RLC può essere espresso anche come

$$Q = \frac{R_c}{R}, \quad (120)$$

dove la “resistenza caratteristica” R_c è definita come

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (121)$$

Quindi abbiamo,

$$R \begin{cases} < 2R_c & \text{frequenze naturali complesse coniugate,} \\ = 2R_c & \text{frequenze naturali reali e coincidenti,} \\ > 2R_c & \text{frequenze naturali reali e distinte.} \end{cases} \quad (122)$$

- Modi naturali aperiodici smorzati

Quando $R > 2R_c$ ($Q < 1/2$) le frequenze naturali sono reali, e quindi le due costanti di integrazione K_+ e K_- sono reali. Per la passività e per la presenza della dissipazione, entrambe le frequenze naturali sono negative. Pertanto, l'evoluzione libera è la somma di due funzioni esponenziali smorzati ed è, quindi, caratterizzata da una dinamica aperiodica, Figura 6.30a. Questo tipo di

evoluzione prende il nome di **evoluzione aperiodica smorzata** e i corrispondenti modi sono aperiodici smorzati. Ciascun modo di evoluzione libera ha una propria costante di tempo: $\tau_+ = 1/|\lambda_+|$ e $\tau_- = 1/|\lambda_-|$. Essendo $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ abbiamo che $\tau_+ > \tau_-$. Di conseguenza l'intervallo di tempo in cui il termine transitorio si estingue e, quindi, viene raggiunto il regime permanente, dipende dalla costante di tempo τ_+ (ad eccezione di quei casi in cui $K_+ = 0$ e $K_- \neq 0$).

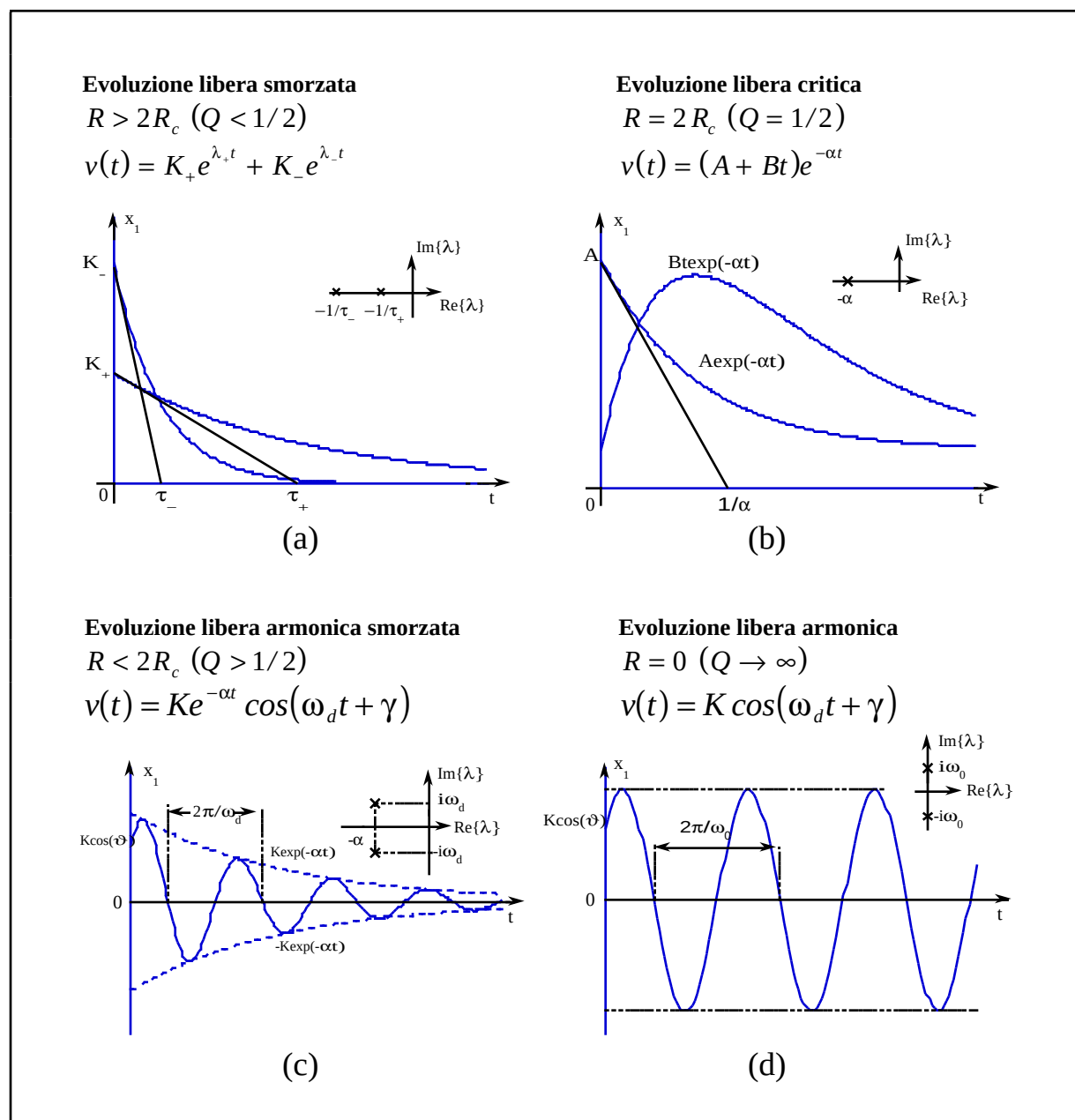


Fig. 6.30 Possibili risposte in evoluzione libera per un circuito RLC.

- Modi naturali aperiodici criticamente smorzati

Quando $R = 2R_c$ ($Q < 1/2$) le frequenze naturali sono reali e coincidenti, e quindi le due costanti di integrazione A e B sono reali. Anche in questo caso, per la passività e per la presenza di dissipazione, i due modi di evoluzione libera sono aperiodici e smorzati, Figura 6.30b. Questo tipo di evoluzione prende il nome di **evoluzione critica** o **criticamente smorzata**.

- Modo naturale armonico con ampiezza smorzata

Quando $R < 2R_c$ ($Q > 1/2$) le frequenze naturali sono complesse coniugate. Come tra poco faremo vedere, in questo caso anche le due costanti di integrazione K_+ e K_- sono complesse coniugate. Posto, allora,

$$K_+ = Ae^{i\alpha} \quad (123)$$

(A è il modulo del numero complesso K_+ e α è la fase), abbiamo

$$K_- = Ae^{-i\alpha}. \quad (124)$$

Pertanto, il termine di evoluzione libera può essere espresso come

$$\begin{aligned} v_l(t) &= K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t} = Ae^{i\gamma} e^{(-\alpha + i\omega_d)t} + Ae^{-i\gamma} e^{(-\alpha - i\omega_d)t} \\ &= Ae^{-\alpha t} \left[e^{i(\omega_d t + \gamma)} + e^{-i(\omega_d t + \gamma)} \right], \end{aligned} \quad (125)$$

ovvero come ($K = 2A$)

$$v_l(t) = Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \gamma). \quad (126)$$

Dunque la funzione $v_l(t)$, che rappresenta l'osservabile fisica tensione elettrica, è una funzione a valori reali, anche se è rappresentata attraverso la somma di due funzioni complesse (ma coniugate). In questa situazione l'andamento temporale dell'evoluzione libera è una oscillazione sinusoidale di pulsazione ω_d , con ampiezza che si smorza con legge esponenziale con costante di tempo $1/\alpha$. Ciò è conseguenza della passività e della presenza della dissipazione. Al

parametro ω_d si dà il nome di pulsazione propria del circuito. In questo caso il modo di evoluzione libera è **oscillante** (armonico) **con ampiezza smorzata**, Figura 6.30. Quando le frequenze naturali sono complesse coniugate può essere conveniente rappresentare direttamente l'integrale generale dell'equazione omogenea associata nella forma (126).

Ora dobbiamo verificare che effettivamente le costanti di integrazione K_+ e K_- sono complesse coniugate. Per determinare le costanti di integrazioni dobbiamo imporre le condizioni iniziali. Noi, qui, risolveremo questo problema per un circuito *RLC* in evoluzione generica. Assumiamo nota la soluzione particolare, $v_p(t)$, e imponiamo che

$$v(t) = K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t} + v_p(t) \quad (127)$$

verifichi le condizioni iniziali (93); solo per semplificare i calcoli assumiamo che $t_0 = 0$. Abbiamo il sistema di equazioni algebriche lineari nelle due incognite K_+ e K_- :

$$K_+ + K_- = m, \quad (128)$$

$$\lambda_+ K_+ + \lambda_- K_- = n, \quad (129)$$

dove i termini noti

$$m = V_0 - v_p(0), \quad (130)$$

$$n = \frac{I_0}{C} - \left. \frac{dv_p}{dt} \right|_{t=0}, \quad (131)$$

sono grandezze reali (le osservabili fisiche tensione e corrente, la resistenza, la capacità e l'induttanza sono espresse tutte attraverso grandezze reali). Utilizzando la (117), l'equazione (129) può essere riscritta come

$$-\alpha(K_+ + K_-) + i\omega_d(K_+ - K_-) = n. \quad (132)$$

Si osservi che la somma $K_+ + K_-$ è nota dalla prima equazione. In conclusione le costanti di integrazione K_+ e K_- sono soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} K_+ + K_- = m, \\ K_+ - K_- = -i \frac{n + \alpha m}{\omega_d}. \end{cases} \quad (133)$$

È evidente che le soluzioni K_+ e K_- del sistema (133) non possono essere reali ma devono essere necessariamente complesse; ricordiamoci che m e n sono due grandezze reali. Dalla prima equazione abbiamo che la somma di K_+ e K_- è una grandezza reale, quindi ($Im\{X\}$ rappresenta la parte immaginaria del numero complesso X)

$$Im\{K_+\} = -Im\{K_-\}. \quad (134)$$

Dalla seconda equazione abbiamo che la differenza di K_+ e K_- è una grandezza puramente immaginaria, quindi ($Re\{X\}$ rappresenta la parte reale del numero complesso X)

$$Re\{K_+\} = Re\{K_-\}. \quad (135)$$

Le proprietà (134) e (135) implicano che

$$K_+ = K_-^*, \quad (136)$$

cioè le due costanti di integrazione K_+ e K_- sono complesse coniugate. Questo risultato è conseguenza del fatto che le condizioni iniziali sono grandezze fisiche espresse attraverso numeri reali e le frequenze naturali sono complesse coniugate.

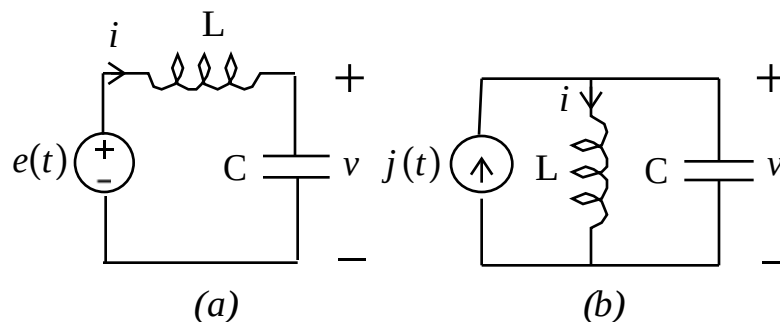


Fig. 6.31 Circuiti LC.

- *Modi naturale armonico con ampiezza costante*

Un circuito RLC è sempre dissipativo se contiene resistori. Mantenendo costante R_c e riducendo R al di sotto del valore critico $2R_c$, si ottiene un'evoluzione libera sinusoidale con ampiezza che decade esponenzialmente nel tempo. Nel caso limite $R = 0$, quindi, $Q \rightarrow \infty$, (circuito LC serie, Figura 6.31a) la forma dell'evoluzione libera diventa una sinusoide con ampiezza costante, Figura 6.30

$$v_l(t) = K \cos(\omega_d t + \gamma); \quad (137)$$

la pulsazione ω_d tende alla pulsazione di risonanza ω_r quando $R \rightarrow 0$. In questa situazione le frequenze naturali sono immaginarie (la parte reale è uguale a zero) e l'andamento temporale dell'evoluzione libera è, quindi, una oscillazione sinusoidale con ampiezza costante e con pulsazione uguale alla pulsazione di risonanza del circuito RLC , $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$.

In evoluzione libera la somma dell'energia immagazzinata nell'induttore e dell'energia immagazzinata nel condensatore di un circuito LC è costante nel tempo: l'energia viene scambiata continuamente tra il condensatore e l'induttore, senza mai essere dissipata. Questo è un esempio di circuito passivo conservativo.

Tutti questi risultati si estendono senza alcuna limitazione a qualsiasi circuito RLC del secondo ordine.

Osservazione

In generale i circuiti dinamici possono essere classificati in “*asintoticamente stabili*”, “*stabili*” e “*instabili*”.

Applicando la conservazione delle potenze a un circuito RLC serie in evoluzione libera si ha

$$\frac{dW}{dt} = -P_R(t) \leq 0, \quad (138)$$

dove $P_R(t)$ è la potenza istantanea assorbita dal resistore

$$P_R = Ri^2(t), \quad (139)$$

e W è l'energia totale immagazzinata nei due elementi dinamici del circuito,

$$W(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t). \quad (140)$$

Se il resistore è passivo, la resistenza è positiva e, quindi, la potenza elettrica $P_R(t)$ assorbita dal resistore è maggiore di zero per ogni condizione di funzionamento ed è uguale a zero solo quando il circuito è a riposo, cioè quando la corrente dell'induttore e la tensione del condensatore sono entrambe uguali a zero. In questo caso l'energia immagazzinata a un generico istante $t > t_0$ non può mai essere più grande di quella immagazzinata all'istante iniziale $t = t_0$. Questa proprietà è generale e non dipende dall'ordine del circuito. L'energia immagazzinata diminuisce continuamente nel tempo fino a quando non diventa nulla (W è definita positiva). Tutta l'energia immagazzinata inizialmente nei due elementi dinamici è stata dissipata all'interno del resistore: per questa ragione diciamo che il circuito con $R > 0$ è dissipativo.

Il circuito RLC passivo è un esempio un circuito **asintoticamente stabile**: l'evoluzione libera tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow \infty$, indipendentemente dai valori iniziali dello stato. Le frequenze naturali, a causa della presenza della dissipazione, hanno parte reale minore di zero: non ci sono frequenze naturali sull'asse immaginario e si trovano tutte nel semipiano sinistro del piano di Gauss.

L'evoluzione libera non tende asintoticamente a zero ma resta limitata quando la parte reale delle frequenze naturali è uguale a zero. Ciò si verifica quando il circuito è privo di elementi dissipativi, $R = 0$. In questa situazione abbiamo $P_R(t) = 0$ e, quindi, l'energia totale immagazzinata nel circuito è costante nel tempo.

Il circuito LC passivo è un esempio di circuito **stabile** (ma non asintoticamente stabile) perché l'evoluzione libera pur non tendendo a zero per $t \rightarrow \infty$, si mantiene limitata uniformemente rispetto al tempo, comunque siano i valori iniziali dello stato. Le frequenze naturali a causa dell'assenza della dissipazione, si trovano sull'asse immaginario.

Se la resistenza del resistore fosse minore di zero, $R < 0$, avremmo $P_R(t) < 0$ e, quindi, l'energia immagazzinata crescerebbe nel tempo senza alcuna limitazione. Ciò può accadere quando nel circuito sono presenti generatori controllati.

Il circuito *RLC* attivo, cioè con $R < 0$, è un esempio di circuito **instabile** perché l'evoluzione libera diverge per $t \rightarrow \infty$. Entrambe le frequenze naturali, a causa della presenza dell'elemento attivo, hanno parte reale maggiore di zero e quindi si trovano nel semipiano destro del piano di Gauss.



- Soluzione di regime e termine transitorio

Si consideri ora un circuito *RLC* dissipativo in condizione di funzionamento generico e si faccia tendere l'istante iniziale t_0 a $-\infty$ (il funzionamento del circuito ha inizio all'istante "remoto" $t_0 = -\infty$). La tensione del condensatore è data da

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \left[K_+ e^{\lambda_+(t-t_0)} + K_- e^{\lambda_-(t-t_0)} \right] + v_p(t) \\ \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \left[A + B(t-t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} \right] + v_p(t) \\ \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \left[K e^{-\alpha(t-t_0)} \cos[\omega_d(t-t_0) + \gamma] \right] + v_p(t) \end{array} \right\} = v_p(t). \quad (141)$$

Pertanto, la dinamica dello stato, e quindi dell'intero circuito, per t finito non dipende dalla condizione iniziale (si è persa ogni traccia dello stato iniziale), ma dipende unicamente dalla soluzione particolare e quindi dalla forma d'onda delle tensioni dei generatori di tensione e delle correnti dei generatori di corrente: il circuito funziona in **regime**. La soluzione di **regime** è uguale alla soluzione particolare ed è indipendente dallo stato. Ritroviamo quanto abbiamo già visto nei circuiti del primo ordine.

Si consideri ora il caso in cui l'istante iniziale t_0 sia al finito. Il termine dipendente dalle costanti di integrazione tende asintoticamente a zero per $\rightarrow \infty$ (indipendentemente dai valori delle costanti di integrazione); esso è il **termine transitorio** della risposta.

termine di regime : termine transitorio :	$v_{reg}(t) \equiv \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} x(t) = v_p(t)$ $v_{tran}(t) \equiv \begin{cases} K_+ e^{\lambda_+(t-t_0)} + K_- e^{\lambda_-(t-t_0)} \\ [A + B(t-t_0)] e^{-\alpha(t-t_0)} \\ K e^{-\alpha(t-t_0)} \cos[\omega_d(t-t_0) + \gamma] \end{cases}$
---	---

Se il circuito in evoluzione libera è passivo ma non dissipativo, le frequenze naturali sono a parte reale uguale a zero o almeno una di esse è nulla. In questo caso il “termine transitorio” non tende a zero per $t \rightarrow \infty$, ma rimane limitato. Se il resistore ha resistenza minore di zero (resistore attivo) le frequenze naturali hanno parte reale maggiore di zero e il termine “transitorio” divergerebbe per $t \rightarrow \infty$.

L'evoluzione di un circuito del secondo ordine dissipativo tende asintoticamente alla soluzione di regime per $t \rightarrow \infty$, indipendentemente dal valore iniziale dello stato. L'evoluzione libera tende asintoticamente a zero con legge esponenziale e l'evoluzione forzata tende asintoticamente alla soluzione di regime.

Regime stazionario e regime sinusoidale

Il termine di regime permanente $v_p(t)$ dipende, oltre che dai parametri caratteristici del circuito, anche dalla forma d'onda dei generatori. Verranno discussi i soliti due casi: circuiti con generatori stazionari e circuiti con generatori sinusoidali.

- Generatori stazionari

Si consideri un circuito *RLC* con generatori indipendenti stazionari. Il termine di regime $v_p(t)$, in questo caso, è anche esso stazionario e può essere determinato con il metodo descritto nel § 5.2.

Quando i generatori sono stazionari, il regime di funzionamento che si instaura nel circuito è anche esso stazionario, se il circuito è dissipativo. La soluzione stazionaria può essere ottenuta risolvendo direttamente il circuito resistivo ottenuto sostituendo ai condensatori circuiti aperti e agli induttori corto circuiti.

Per provare quanto affermato è sufficiente ricordare che in regime stazionario la corrente dei condensatori e le tensioni degli induttori sono uguali a zero.

Esercizio

Si consideri il circuito rappresentato in Figura 6.33. Il circuito è alimentato con un generatore a gradino. Determinare l'andamento della corrente nel condensatore.

Conviene sempre formulare il problema in termini di variabili di stato. In questo caso particolare viene prima determinata la tensione del condensatore e poi, usando la sua caratteristica, si determina la corrente.

Le equazioni caratteristiche dei bipoli a memoria sono:

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i_c, \\ L \frac{di}{dt} &= v_L. \end{aligned} \quad (142)$$

Per determinare le equazioni di stato bisogna esprimere la corrente nel condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato v e i . In questo caso ciò può essere fatto per ispezione diretta del circuito, applicando la legge di Kirchhoff per le correnti al nodo "1", e la seconda legge di Kirchhoff alla maglia costituita dal condensatore, dall'induttore e dal resistore di resistenza R_2 . Così facendo si ottiene

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= -\frac{v}{R_1} - i + \frac{E_0}{R_1} u(t), \\ L \frac{di}{dt} &= v - R_2 i, \end{aligned} \quad (143)$$

dove $E_0 = 600$.

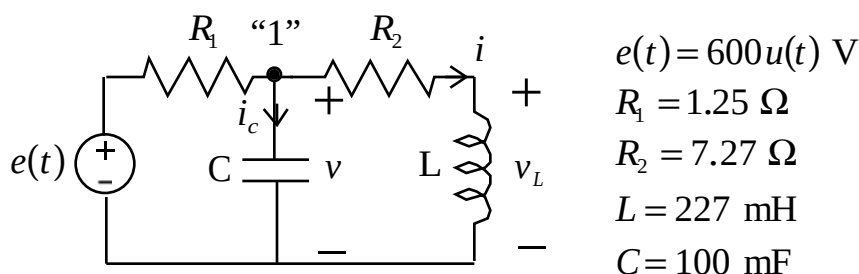


Fig. 6.32 Circuito in evoluzione forzata.

Il sistema (142) è definito per $-\infty < t < +\infty$. Per $t < 0$ il generatore di tensione è spento, quindi il circuito è nello stato stazionario di riposo (il circuito è dissipativo). La tensione del generatore è limitata, e quindi le grandezze di stato sono continue in ogni istante ed in particolare all'istante $t = 0$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} v(0^+) &= v(0^-) = 0, \\ i(0^+) &= i(0^-) = 0. \end{aligned} \quad (144)$$

Essendo noto lo stato del circuito all'istante $t = 0^+$, bisogna risolvere il sistema (143) per $t \geq 0^+$; per $t \geq 0^+$ la funzione gradino unitario di Heaviside $u(t)$ è costante ed è uguale a uno. Dovendo calcolare la corrente nel condensatore, conviene ridurre il sistema (143) a una equazione scalare del secondo ordine nella funzione incognita $v = v(t)$. Derivando ambo i membri della prima equazione di stato rispetto al tempo e usando la seconda, si ottiene per $t \geq 0^+$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v = \frac{1}{LC} \frac{R_2}{R_1} E_0. \quad (145)$$

La soluzione generale dell'equazione (145) è costituito dalla somma di un integrale particolare dell'equazione completa e dell'integrale generale dell'omogenea associata.

Come integrale particolare si può assumere senz'altro la tensione in regime stazionario (essendo per $t \geq 0^+$ il generatore costante):

$$v_p = E_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 510 \quad (146)$$

In regime stazionario il condensatore si comporta come se fosse un circuito aperto e l'induttore si comporta come se fosse un corto circuito; la (146) è stata ottenuta usando il partitore di tensione.

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C} \right) \lambda + \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (147)$$

Gli zeri del polinomio caratteristico sono nel caso in esame reali,

$$\lambda_+ = -10, \lambda_- = -30. \quad (148)$$

L'integrale generale dell'equazione (148) vale

$$v(t) = K_+ e^{-10t} + K_- e^{-30t} + 510 \quad \text{per } t \geq 0^+. \quad (149)$$

I modi naturali di evoluzione sono due modi aperiodici smorzati. Per determinare le due costanti di integrazione K_+ e K_- bisogna conoscere $v(0^+)$ e $dv/dt|_{t=0^+}$. Il valore iniziale della tensione è noto, $v(0^+) = v(0^-) = 0$. Il valore iniziale della derivata prima si determina usando la prima equazione di stato e le condizioni di continuità (144). Così facendo si ottiene

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} \left[-\frac{v(0^+)}{R_1} - i(0^+) + \frac{E_0 u(t=0^+)}{R_1} \right] = \frac{E_0}{R_1 C} = 4800. \quad (150)$$

Imponendo alla (149) le condizioni iniziali per $v(0^+)$ e $dv/dt|_{t=0^+}$ si ottiene il sistema algebrico lineare

$$\begin{aligned} K_+ + K_- &= -510, \\ K_+ + 3K_- &= -480. \end{aligned} \quad (151)$$

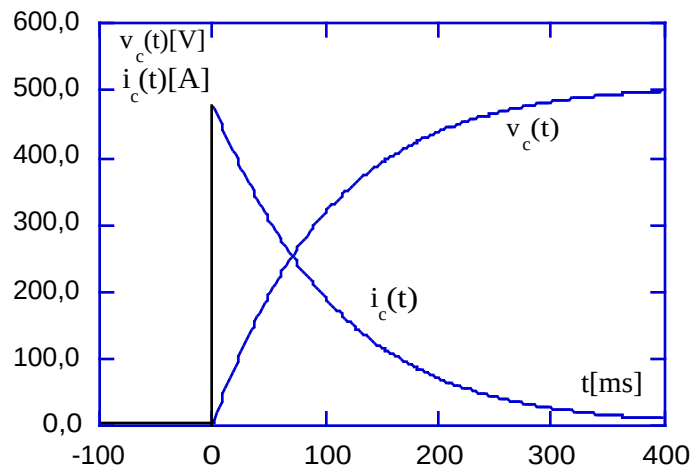


Fig. 6.33 Andamento della corrente e della tensione del condensatore del circuito in evoluzione forzata di Figura 6.32.

Risolvendo il sistema (151) si ottengono le due costanti di integrazione; quindi si ha, in definitiva,

$$v(t) = (-525e^{-10t} + 15e^{-30t} + 510)u(t). \quad (152)$$

La corrente nel condensatore vale

$$i_c(t) = C \frac{dv}{dt} = (525e^{-10t} - 40e^{-30t})u(t). \quad (153)$$

Si noti che la corrente del condensatore è discontinua in $t = 0$. Gli andamenti della tensione e della corrente nel condensatore sono riportati in Figura 6.33.



- Generatori sinusoidali isofrequenziali

Si consideri un circuito RLC con generatori indipendenti sinusoidale con pulsazione ω . Il termine di regime permanente $v_p(t)$ è anche esso sinusoidale con pulsazione ω .

Quando i generatori sono sinusoidali e isofrequenziali, il regime di funzionamento che si instaura nel circuito è anche esso di tipo sinusoidale con la stessa pulsazione dei generatori, se il circuito è dissipativo.

In questi casi la soluzione di regime può essere ottenuta direttamente utilizzando il **metodo fasoriale**, trattato nel Capitolo 5.

Osservazione

Si consideri un circuito LC serie (parallelo) forzato da un generatore di tensione (corrente) sinusoidale con pulsazione ω , Figura 6.31, $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. Quando la pulsazione del generatore è uguale alla pulsazione naturale del circuito, che in questo caso è uguale proprio a quella di risonanza,

$$\omega = \omega_r, \quad (154)$$

non esiste una soluzione particolare sinusoidale. Stiamo considerando un circuito *RLC* serie (parallelo) in risonanza nel limite di $R \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$), vedi Capitolo 5. In questo caso, è facile verificare che una soluzione particolare è una funzione sinusoidale con pulsazione ω_r e ampiezza crescente linearmente nel tempo. In questa situazione l'equazione per la corrente del circuito è

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_r^2 i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt} = -\frac{1}{L} \omega_r E_m \sin(\omega_r t). \quad (155)$$

È immediato verificare che questa equazione non ha una soluzione sinusoidale a pulsazione ω_r (l'ampiezza dovrebbe essere infinita). Una soluzione particolare di questa equazione è

$$i(t) = \frac{1}{2} \frac{E_m}{R_c} (\omega_r t) \cos \omega_r t. \quad (156)$$

Questa è la soluzione del circuito che verifica le condizioni iniziali $i(0) = 0$ e $v(0) = E_m/2$.

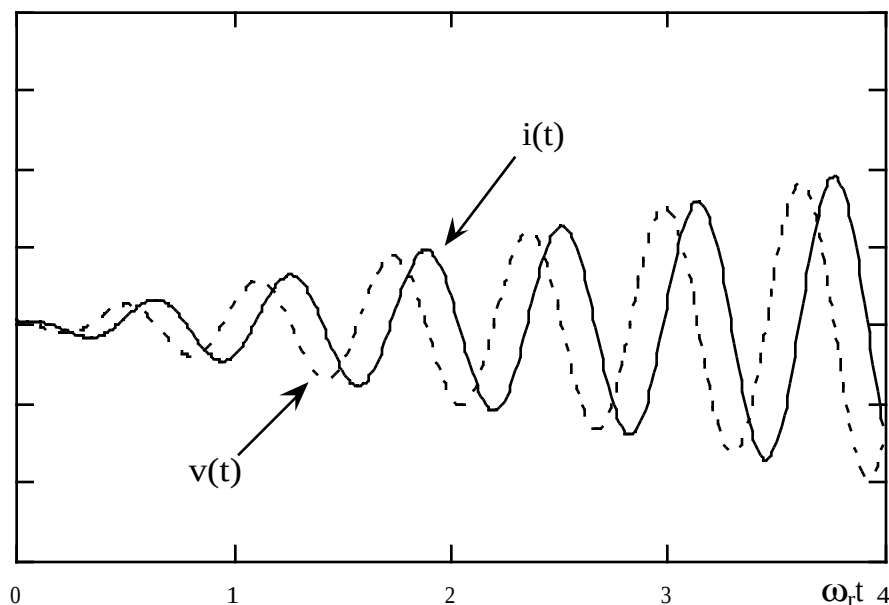


Fig. 6.34 Andamento della corrente $i(t)$, curva —, e della tensione $v(t)$, curva ---, nel circuito risonante *LC* serie (per condizioni iniziali $i(0) = 0$ e $v(0) = E_m/2$).

In Figura 6.34 è illustrato l'andamento della corrente in funzione del tempo: un andamento sinusoidale con ampiezza crescente linearmente nel tempo. Quando non ci sono perdite e il generatore di tensione è in risonanza con il circuito, l'azione del generatore è sincrona con l'oscillazione naturale del circuito per un'opportuna scelta delle condizioni iniziali. Ciò rende possibile un continuo trasferimento di energia dal generatore al circuito. Infatti, nel caso in esame la potenza istantanea erogata dal generatore di tensione è

$$p(t) = \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{R_c} (\omega_r t) \cos^2 \omega_r t. \quad (157)$$

Essa è sempre positiva e la sua ampiezza cresce linearmente nel tempo: l'energia fornita dal generatore è immagazzinata nell'induttore e nel condensatore. In queste condizioni il condensatore e l'induttore non cedono, nemmeno in parte, l'energia assorbita in precedenza. Ciò ricorda un fenomeno a tutti ben noto: la possibilità di far crescere nel tempo l'ampiezza massima dell'oscillazione di un'altalena agendo su di essa con una forza sincrona con il periodo proprio di oscillazione dell'altalena (l'altalena si comporta come se fosse un pendolo) e in fase con il suo verso di moto.

L'andamento temporale della tensione del condensatore è descritto dalla funzione, Figura 6.34,

$$v(t) = \frac{1}{2} E_m \cos \omega_r t - \frac{1}{2} E_m (\omega_r t) \sin \omega_r t. \quad (158)$$

In realtà non mai è possibile avere esattamente $R = 0$: possiamo solo ridurre il valore della resistenza elettrica R del circuito a valori molto piccoli se confrontati con la “resistenza caratteristica” R_c . In questa situazione il circuito ha un regime sinusoidale e l'ampiezza massima della corrente a regime è $I_m = E_m / R$ (il circuito è in risonanza, vedi Capitolo 5). L'ampiezza della corrente cresce linearmente fino a raggiungere il valore di regime $I_m = E_m / R$, dopodiché satura. Il tempo necessario per raggiungere il valore di saturazione è $2R_c / (R\omega_r) = 2L / R = 1/\alpha$. Questa è proprio la costante di tempo del circuito RLC quando il modo di evoluzione è oscillante con ampiezza smorzata.

◆

- Generatori periodici o quasi periodici

Quando il circuito contiene generatori costanti e generatori sinusoidali con diverse pulsazioni, allora la soluzione di regime può essere determinato utilizzando la sovrapposizione degli effetti: la soluzione di regime è la somma delle soluzioni di regime che ciascuno dei generatori produrrebbe se agisse da solo, essendo gli altri “spenti”.

6.4.2 Circuito RC e circuiti RL del secondo ordine

Si consideri un circuito con due condensatori, ad esempio, il circuito riportato in Figura 6.12a (o con due induttori, ad esempio, il circuito riportato in Figura 6.14a). Cosa si osserva di nuovo rispetto ai circuiti RLC che abbiamo analizzato fino a questo momento? Per scoprire cosa accade in questo caso dobbiamo risolvere il problema. Riduciamo il sistema di equazioni differenziali del primo ordine (24)-(25) ad una sola equazione differenziale del secondo ordine, ad esempio, nella funzione incognita v_a . Derivando la prima equazione rispetto al tempo abbiamo

$$C_a \frac{d^2 v_a}{dt^2} = -\frac{2}{R} \frac{dv_a}{dt} + \frac{1}{R} \frac{dv_b}{dt} + \frac{1}{R} \frac{de}{dt}. \quad (159)$$

D'altra parte sostituendo l'espressione di v_b che si ottiene dall'equazione (24),

$$v_b(t) = \frac{dv_a}{dt} + 2v_a(t) - e(t), \quad (160)$$

nell'equazione (25) riusciamo ad esprimere la derivata prima di v_b in termini di v_a , della sua derivata prima e dei generatori,

$$C_b \frac{dv_b}{dt} = \frac{1}{R} v_a - \frac{1}{R} \left[\frac{dv_a}{dt} + 2v_a(t) - e(t) \right] = -\frac{1}{R} \frac{dv_a}{dt} - \frac{1}{R} v_a + \frac{1}{R} e(t). \quad (161)$$

Sostituendo la (161) nella (159) abbiamo l'equazione per v_a ,

$$\frac{d^2 v_a}{dt^2} + \left(\frac{2}{RC_a} + \frac{1}{RC_b} \right) \frac{dv_a}{dt} + \frac{1}{R^2 C_a C_b} v_a = \frac{1}{R^2 C_a C_b} e(t). \quad (162)$$

Anche in questo caso la soluzione generale è esprimibile come

$$v_a = v_l(t) + v_p(t), \quad (163)$$

$v_l(t)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata all'equazione (162),

$$\frac{d^2 v_l}{dt^2} + \left(\frac{2}{RC_a} + \frac{1}{RC_b} \right) \frac{dv_l}{dt} + \frac{1}{R^2 C_a C_b} v_l = 0, \quad (164)$$

e $v_p(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa la cui espressione dipende dall'andamento temporale della tensione $e(t)$.

L'integrale generale dell'equazione (162) ha l'espressione

$$v_l(t) = K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t}, \quad (165)$$

dove le frequenze naturali λ_+ e λ_- sono soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \left(\frac{2}{RC_a} + \frac{1}{RC_b} \right) \lambda + \frac{1}{R^2 C_a C_b} = 0, \quad (164)$$

ottenuta dall'equazione (164) sostituendo alla derivata seconda di $v_l(t)$ il monomio λ^2 , alla derivata prima di $v_l(t)$ il monomio λ e alla funzione $v_l(t)$ (non derivata) il monomio $\lambda^0 = 1$. Il discriminante dell'equazione algebrica (164),

$$\Delta = \left(\frac{2}{RC_a} + \frac{1}{RC_b} \right)^2 - 4 \frac{1}{R^2 C_a C_b} = \frac{4}{R^2 C_a^2} + \frac{1}{R^2 C_b^2}, \quad (166)$$

è sempre positivo. Pertanto le frequenze naturali sono sempre reali. Inoltre, esse sono sempre negative (se gli elementi del circuito sono passivi, $R > 0$, $C_a > 0$ e $C_b > 0$). Di conseguenza i modi di evoluzione naturali sono entrambi aperiodici smorzati, Figura 6.35.

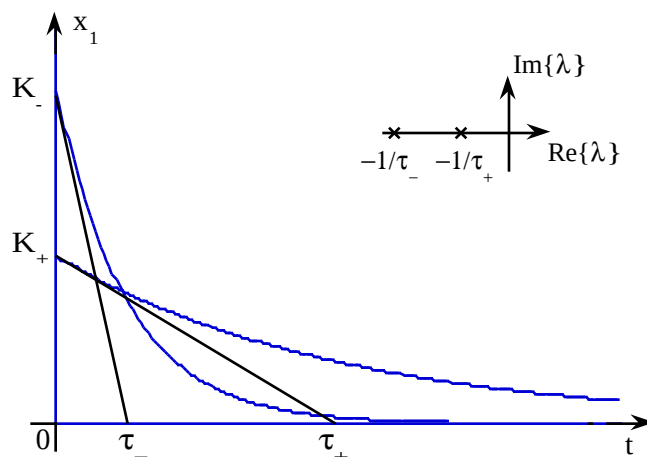


Fig. 6.35 Modi aperiodici smorzati di un circuito RC (o RL) del secondo ordine.

Questo è un risultato generale, che vale per ogni circuito costituito da resistori, trasformatori ideali e soli condensatori (o soli induttori).

L'evoluzione libera di un circuito costituito da soli condensatori (rispettivamente, soli induttori), resistori lineari e trasformatori ideali è descritta dalla somma di due funzioni esponenziali decrescenti, con costanti di tempo $\tau_+ = -1/\lambda_+$, $\tau_- = -1/\lambda_-$.

In questi circuiti le frequenze naturali non possono essere mai coincidenti (se si escludono casi degeneri, come, ad esempio, quello illustrato in Figura 6.36: i due condensatori non sono tra loro collegati; tuttavia, in questo caso non sarà mai possibile “eccitare” modi naturali del tipo $B(t - t_0)e^{-\alpha(t-t_0)}$).

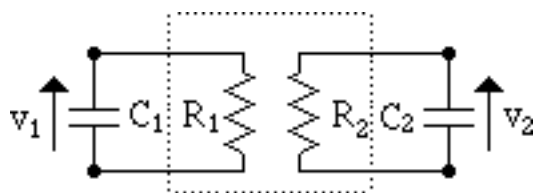


Fig. 6.36 Esempio di un circuito RC del secondo ordine degenere.

Osservazione

Se un circuito con due condensatori (o con due induttori) contenesse giratori e/o generatori controllati le frequenze naturali potrebbero essere complesse

coniugate. In Figura 6.37 è illustrato un esempio di circuito in cui ciò può accadere. Il lettore verifichi questa affermazione e dia una spiegazione.

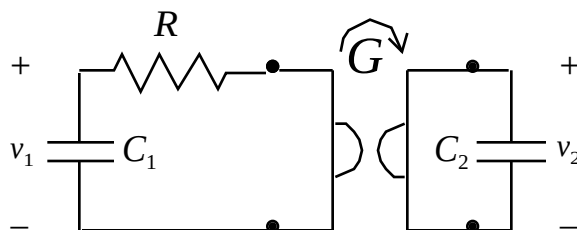


Fig. 6.37 Esempio di un circuito RC del secondo ordine che potrebbe avere frequenze naturali complesse coniugate.

◆

Esercizio

Valutare l'andamento della tensione $v(t)$ nel circuito di Figura 6.38 supposto a riposo prima della chiusura dell'interruttore (l'interruttore si chiude all'istante $t = 0$). La $v(t)$ può essere determinata una volta nota la variabile di stato $i_2 = i_2(t)$.

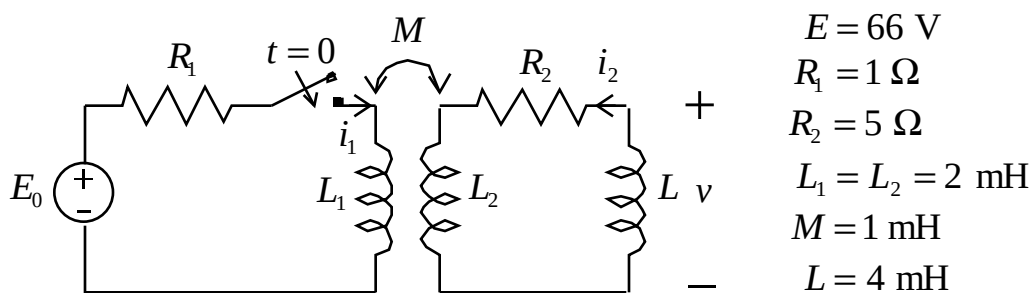


Fig. 6.38 Circuito del secondo ordine con trasformatore (reale).

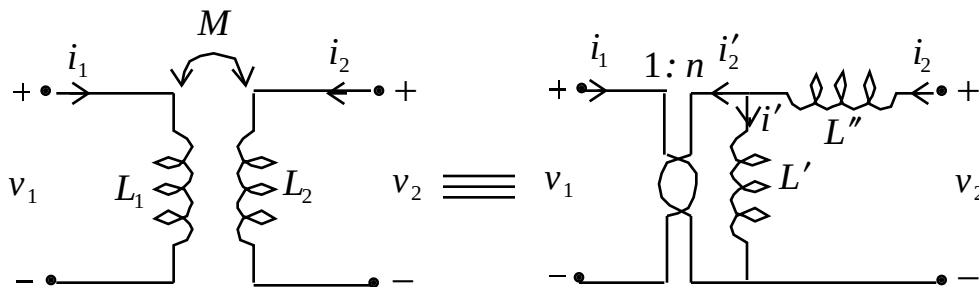


Fig. 6.39 Circuito equivalente del trasformatore (reale).

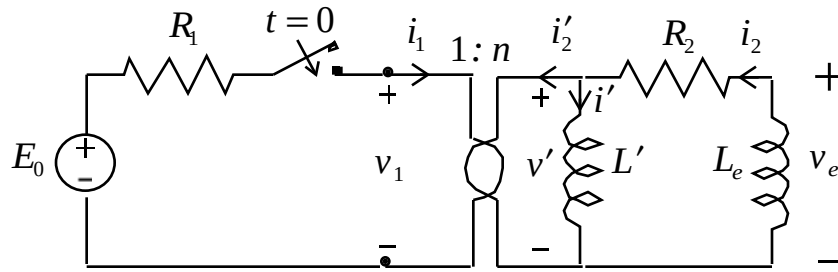


Fig. 6.40 Circuito equivalente del circuito dinamico illustrato in Figura 6.38.

Il trasformatore non è ad accoppiamento perfetto perché $L_1 L_2 < M^2$. Un possibile circuito equivalente del trasformatore (reale) è rappresentato in Figura 6.39. Le induttanze L' e L'' valgono $L' = 0.5 \text{ mH}$, $L'' = 1.5 \text{ mH}$ e il rapporto di trasformazione vale $n = L' / M = 0.5$. Usando il circuito equivalente del trasformatore di Figura 6.39, si ottiene il circuito equivalente dinamico illustrato in Figura 6.40, dove $L_e = L + L'' = 5.5 \text{ mH}$.

Nel circuito in esame le variabili di stato sono le due correnti del trasformatore e la corrente dell'induttore. In realtà, le variabili di stato sono solo $i' = i'(t)$ e $i_2 = i_2(t)$ perché la corrente i_2 dell'induttore è uguale a quella che attraversa la porta "2" del trasformatore e la corrente i_1 è legata alla corrente i_2 e alla corrente i' attraverso la relazione algebrica

$$i_1 = 0.5(i' - i_2). \quad (167)$$

La corrente i'_2 è uguale a $-2i_1$, perché il rapporto di trasformazione è uguale a 0.5. Infatti, le variabili di stato del circuito equivalente sono la corrente $i' = i'(t)$ e la corrente $i_2 = i_2(t)$.

Per potere scrivere le equazioni di stato del circuito equivalente di Figura 6.40, si parta dalle equazioni caratteristiche dei due induttori; esse sono:

$$\begin{aligned} L' \frac{di'}{dt} &= v', \\ L_{eq} \frac{di_2}{dt} &= -v_e. \end{aligned} \quad (168)$$

Poi bisogna esprimere le tensioni v' e v_e in funzione delle variabili di stato i' e i_2 . Applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia comprendente il

generatore di tensione, le equazioni caratteristiche del trasformatore ideale e la prima legge di Kirchhoff al nodo a cui è collegato l'induttore con coefficiente di autoinduzione L' , si ha

$$2v' = v_1 = E - R_1 i_1 = E + \frac{R_1}{2} i_2' = E + \frac{R_1}{2} (-i' + i_2) \quad t \geq 0^+. \quad (169)$$

Invece applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia comprendente L_{eq} , R_2 e L' si ha:

$$v_e = v' + R_2 i_2 = -\frac{R_1}{4} i' + \left(\frac{R_1}{4} + R_2 \right) i_2 + \frac{E}{2} \quad t \geq 0^+. \quad (170)$$

Pertanto le equazioni di stato sono per $t \geq 0^+$

$$\begin{cases} L' \frac{di'}{dt} = -\frac{R_1}{4} i' + \frac{R_1}{4} i_2 + \frac{E}{2}, \\ L_{eq} \frac{di_2}{dt} = \frac{R_1}{4} i' - \left(\frac{R_1}{4} + R_2 \right) i_2 - \frac{E}{2}. \end{cases} \quad (171)$$

Il sistema (171) deve essere risolto con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} i'(0^+) &= i'(0^-) = 0, \\ i_2(0^+) &= i_2(0^-) = 0. \end{aligned} \quad (172)$$

Con i valori assegnati, si ottiene dal sistema (171) l'equazione scalare per la corrente i_2

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{16}{11} \cdot 10^3 \frac{di_2}{dt} + \frac{5}{11} \cdot 10^6 i_2 = 0 \quad t \geq 0^+ \quad (173)$$

L'integrale generale dell'equazione (173) è:

$$i_2(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (174)$$

dove

$$\lambda_1 = -1000, \quad \lambda_2 = -\frac{10}{22}10^3 \cong -454.5 \quad (175)$$

sono le frequenze naturali del circuito. Per determinare le costanti di integrazione bisogna imporre le condizioni iniziali per $i_2(t)$ e di_2/dt all'istante $t = 0^+$. Il valore iniziale di $i_2(t)$ è nullo; invece il valore iniziale di di_2/dt è dato dalla seconda equazione del sistema (171), imponendo che all'istante iniziale sia nulla anche i' ,

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0^+} = -6000 \text{ A/s}. \quad (176)$$

Imponendo queste due condizioni si ottiene il sistema di equazioni lineari e algebriche in due incognite

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= 0, \\ \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 &= -6000. \end{aligned} \quad (177)$$

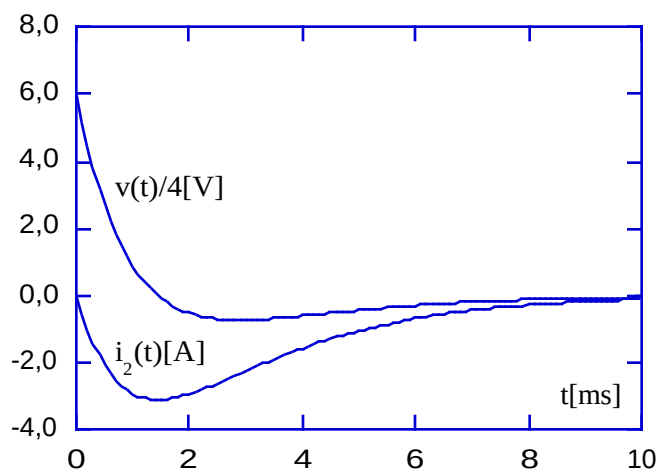


Fig. 6.41 Andamento della corrente $i_2(t)$ e della tensione $v(t)$.

Risolvendo il sistema (177) e sostituendo nell'integrale generale, si ottiene

$$i_2(t) = 11(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})u(t), \quad (178)$$

e quindi

$$v(t) = (44e^{\lambda_1 t} - 20e^{\lambda_2 t})u(t). \quad (179)$$

In Figura 6.41 sono rappresentati gli andamenti della corrente $i_2(t)$ e della tensione $v(t)$.



Osservazione

In questi circuiti può accadere che una delle due frequenze naturali sia uguale a zero, cioè $\lambda_- < \lambda_+ = 0$. Ciò si verifica quando i due condensatori sono in serie (o i due induttori sono in parallelo), Figura 6.37. In questi casi l'evoluzione libera è costituita da un esponenziale smorzato con costante di tempo uguale a $\tau = 1/|\lambda_-|$ e da un termine costante. Essa non tende a zero per $t \rightarrow \infty$, ma tende asintoticamente a una costante dipendente dallo stato iniziale. In quest'ultimo caso, l'energia immagazzinata all'istante iniziale nei due condensatori (rispettivamente, nei due induttori) non viene completamente assorbita dai resistori (e quindi dissipata). Ad esempio, nel circuito di Figura 6.37a la tensione sulla serie costituita dai due condensatori tende a zero (rispettivamente, la corrente totale del parallelo costituito dai due induttori di Figura 6.37b), ma le tensioni sui due condensatori tendono a valori costanti, diversi da zero e opposti, di modo che la loro somma sia uguale a zero (rispettivamente, le correnti nei due induttori tendono a due valori costanti, diversi da zero e opposti). È evidente allora che la potenza assorbita dal resistore, in entrambi i casi, può essere zero pur continuando a esserci energia immagazzinata nei due condensatori (due induttori).

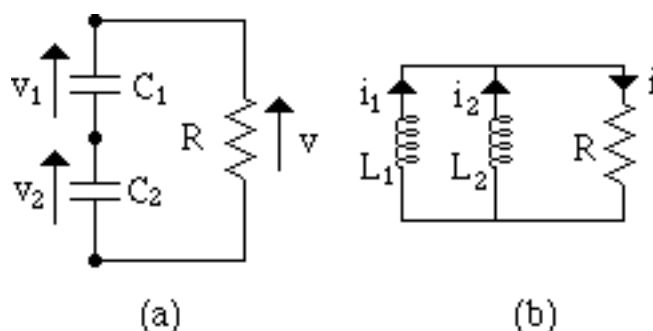


Fig. 6.42 Esempi di circuiti del secondo ordine passivi ma non dissipativi.

Un circuito costituito da soli condensatori (rispettivamente, soli induttori), resistori lineari e trasformatori ideali è dissipativo se i due condensatori non sono in serie (rispettivamente, i due induttori non sono in parallelo).



Osservazione

È evidente che, n condensatori in parallelo di capacità $C_1, C_2, \dots, C_n$, equivalgono a un solo condensatore di capacità equivalente $C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$ e, dualmente, m induttori in serie di induttanza $L_1, L_2, \dots, L_m$ equivalgono a un solo induttore di induttanza $L_{eq} = \sum_{i=1}^m L_i$. In entrambi i casi, pur avendo più elementi dinamici, abbiamo una sola grandezza di stato.

