

## CAPITOLO 5

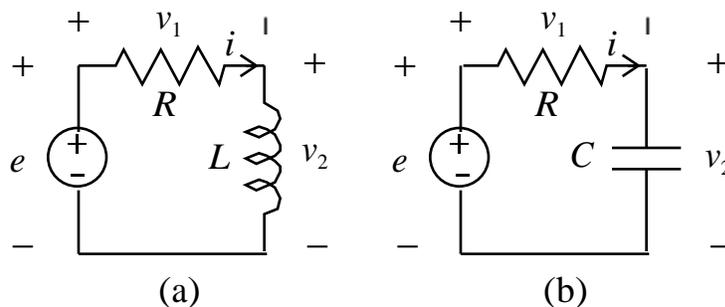
### CIRCUITI A REGIME

	Pagina
5.1 Circuiti in regime permanente	263
5.2 Circuiti in regime stazionario	265
5.3 Circuiti in regime sinusoidale: i fasori	267
5.3.1 Proprietà di unicità	271
5.3.2 Proprietà di linearità	272
5.3.3 Regola di derivazione	272
5.4 Analisi dei circuiti in regime sinusoidale tramite il metodo dei fasori	273
5.5 Circuiti di impedenze	276
5.6 Proprietà dei circuiti di impedenze	281
5.6.1 Bipoli di impedenze	282
5.6.2 Equivalenze serie e parallelo, partitore di tensione, partitore di corrente, trasformazioni stella-triangolo.	283
5.6.3 Sovrapposizione degli effetti	288
5.6.4 Generatore equivalente di Thévenin-Norton	289
5.6.5 Doppio bipolo di impedenze, reciprocità	291
5.7 Metodo dei potenziali di nodo e delle correnti di maglia	296
5.8 Potenza ed energia in regime sinusoidale	297
5.8.1 Potenza elettrica istantanea	298
5.8.2 Potenza elettrica media	299
5.8.3 Potenza elettrica complessa, potenza reattiva e potenza apparente	300
5.8.4 Conservazione delle potenze complesse, potenze medie e potenze reattive	302
5.8.5 Potenza virtuale complessa e teorema di Tellegen	304
5.9 Bipoli “elementari” in regime sinusoidale e diagrammi fasoriale	305
5.9.1 Potenza virtuale complessa e teorema di Tellegen	306
5.9.2 Resistore	307

5.9.3	Induttore	309
5.9.4	Condensatore	310
5.9.5	Generatori indipendenti	312
5.10	Giratore, trasformatore ideale, circuiti accoppiati e generatori controllati	312
5.11	Bipoli di impedenze “canonici”; risonanza	314
5.11.1	Bipolo <i>RC</i> serie	314
5.11.2	Bipolo <i>RL</i> serie	316
5.11.3	Bipolo <i>RLC</i> serie	317
5.11.4	Bipolo <i>RLC</i> parallelo	319
5.11.5	Circuiti risonanti	321
5.11.6	Proprietà di un generico bipolo di impedenze	326
5.12	Reti in regime periodico e quasi-periodico	328
5.12.1	Sovrapposizione di un regime stazionario e di un regime sinusoidale	328
5.12.1	Sovrapposizione di regimi regime sinusoidali con diverse pulsazioni	330
5.13	Risposta in frequenza di un circuito e funzione di rete	334
5.13.1	Filtro passa-basso	341
5.13.2	Filtro passa-alto	343
5.13.3	Filtro passa-banda	345
5.13.4	Filtro taglia-banda	350
5.14	Cenni sui sistemi elettrici di potenza e sulle reti elettriche trifase	351
5.14.1	Trasmissione dell’energia elettrica	353
5.14.2	Rifasamento	355
5.14.3	Trasmissione dell’energia elettrica in alta tensione	357
5.14.4	Sistemi trifase	359

## 5.1 Circuiti in regime permanente

I Capitoli 3 e 4 sono stati dedicati, ad eccezione del paragrafo sugli induttori accoppiati, esclusivamente ai circuiti costituiti da soli *elementi dinamici lineari*, cioè resistori, generatori indipendenti, generatori controllati lineari, giratori, trasformatori ideali. Abbiamo introdotto il concetto di equivalenza, le regole dei partitori, la proprietà della sovrapposizione degli effetti, il generatore equivalente di Thévenin-Norton, la trasformazione stella-triangolo. In questi circuiti la variabile temporale non gioca nessun ruolo importante, è solo un parametro.



**Fig. 5.1** Un circuito dinamico del primo ordine con (a) induttore e (b) condensatore.

Nel Capitolo 2 già abbiamo affrontato lo studio di un circuito dinamico “*semplice*” lineare e tempo invariante, composto da tre elementi collegati in serie (Figura 5.1): un induttore (o un condensatore), un resistore e un generatore di tensione indipendente (vedi § 2.4). Abbiamo trovato che, per qualsiasi forma d’onda della tensione impressa  $e(t)$ , la soluzione, cioè qualsiasi grandezza del circuito, può essere sempre espressa come somma di due termini, un termine **transitorio** e un termine di **regime permanente** ( $\tau = RC$  per il circuito  $RC$ ,  $\tau = L/R$  per il circuito  $RL$ ),

$$x(t) = \underbrace{A \exp(-t/\tau)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{Regime permanente}} \quad (1)$$

Il termine transitorio, che dipende dallo stato iniziale del circuito, tende esponenzialmente a zero per  $t \rightarrow \infty$  perché il circuito è passivo e dissipativo ( $R > 0$ ,  $C > 0$ ). Ricordiamo che la grandezza di stato del circuito riportato in Figura 5.1a è l’intensità della corrente elettrica che attraversa l’induttore, mentre la grandezza di stato del circuito riportato in Figura 5.1b è la tensione

del condensatore. Il termine di regime permanente, che non dipende dal particolare stato iniziale del circuito, è in generale diverso da zero, anche quando  $t \rightarrow \infty$  (ovviamente, se la tensione del generatore di tensione è diversa da zero per  $t \rightarrow \infty$ ).

Si considerino due diverse soluzioni dello stesso circuito che differiscano solo per il valore iniziale della grandezza di stato. La passività del circuito fa sì che la differenza tra le due soluzioni rimanga limitata nel tempo, anche per  $t \rightarrow \infty$ , mentre la dissipazione fa sì che essa tenda, con legge esponenziale, a zero per  $t \rightarrow \infty$ . È evidente che, dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo, il comportamento del circuito è indipendente dallo stato iniziale e dipende solo dalla tensione impressa dal generatore. Questa è una proprietà generale dei circuiti lineari, tempo invarianti, passivi e dissipativi, che non dipende da come essi sono costituiti in dettaglio. Dal dettaglio della loro costituzione dipende solo il tempo necessario per raggiungere il regime permanente. Ritourneremo su questi aspetti nel prossimo Capitolo, dove verranno approfonditi.

La forma d'onda del regime permanente dipende solo dalla forma d'onda della tensione del generatore ideale di tensione. Per i due circuiti riportati in Figura 5.1 abbiamo trovato che (vedi § 2.4):

- il regime permanente è stazionario se la tensione impressa è stazionaria (costante nel tempo);
- il regime permanente è sinusoidale con pulsazione  $\omega$  se la tensione impressa è sinusoidale con pulsazione  $\omega$ .

Anche questa è una proprietà generale, dei circuiti lineari, tempo invarianti, passivi e dissipativi, che non dipende dal particolare circuito in esame.

In un circuito lineare, tempo-invariante e dissipativo, dopo l'esaurimento del transitorio, le tensioni e le correnti sono costanti nel tempo se tutti i generatori sono costanti nel tempo, **circuiti in regime stazionario**.

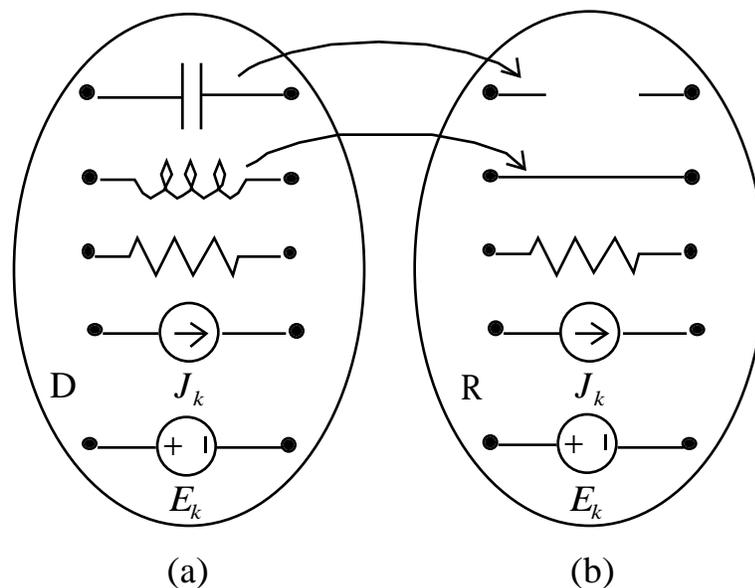
In un circuito lineare, tempo-invariante e dissipativo alimentato da uno o più generatori sinusoidali tutti con la stessa pulsazione  $\omega$ , dopo l'esaurimento del transitorio, tutte le tensioni e le correnti sono sinusoidali alla stessa pulsazione, **circuiti in regime sinusoidale**.

Nel presente Capitolo si considerano esclusivamente circuiti lineari in regime stazionario, in regime sinusoidale e in regime periodico. Molti circuiti operano in regime stazionario o in regime sinusoidale. Come si vedrà in seguito, se è nota la *risposta* di un circuito lineare, tempo-invariante e dissipativo ad un

ingresso costante e ad un ingresso sinusoidale di frequenza arbitraria, allora è possibile calcolare la risposta ad un segnale arbitrario.

## 5.2 Circuiti in regime stazionario

Si consideri un circuito  $D$  lineare tempo invariante costituito da resistori, condensatori, induttori e generatori indipendenti (di tensione e/o di corrente) stazionari. Si assuma che il circuito  $D$  sia in regime stazionario (il transitorio si è estinto).



**Fig. 5.2** (a) Circuito dinamico in regime stazionario e (b) circuito resistivo equivalente.

Si consideri un generico condensatore del circuito  $D$  e siano  $V_C$ ,  $I_C$  e  $C$  la tensione, l'intensità della corrente elettrica e la capacità, rispettivamente, Figura 5.2a. È evidente, allora, che

$$I_C = C \frac{dV_C}{dt} = 0 \quad (2)$$

per ogni valore della tensione  $V_C$ , perché essa è costante. Allora, un condensatore in regime stazionario si comporta come se fosse un circuito aperto.

Si consideri, ora, un generico induttore del circuito e siano  $V_L$ ,  $I_L$  e  $L$  la tensione, l'intensità della corrente elettrica e l'induttanza, rispettivamente, Figura 5.2a. È evidente, allora, che

$$V_L = L \frac{dI_L}{dt} = 0 \quad (3)$$

per ogni valore della corrente  $I_L$ , perché essa è costante. Allora, un induttore in regime stazionario si comporta come se fosse un corto circuito.

Le relazioni tra le tensioni e correnti dei resistori sono descritte da equazioni algebriche, quindi non dipendono dal particolare andamento temporale delle tensioni e correnti. È evidente, allora, che la soluzione stazionaria del circuito D coincide con la soluzione del circuito resistivo R ottenuto sostituendo nel circuito D a ogni condensatore un circuito aperto e a ogni induttore un corto circuito, Figura 5.2b. Il circuito resistivo equivalente R può essere analizzato utilizzando i metodi di analisi tipici dei circuiti resistivi illustrati nei due Capitoli precedenti.

**Procedura per la soluzione di un circuito dinamico in regime stazionario**

- (a) Si sostituisca a ogni condensatore un circuito aperto e a ogni induttore un corto circuito.
- (b) Si risolva la rete di resistori, circuiti aperti, corto circuiti e generatori così ottenuta.

**Osservazione**

Questo risultato, ovviamente, resta valido anche quando nel circuito in regime stazionario ci sono, oltre ai resistori, altri tipi di elementi adinamici, come, ad esempio, i giratori, i generatori controllati, i trasformatori ideali. Gli elementi adinamici possono essere anche non lineari, come, ad esempio, diodi a giunzione  $pn$ , diodi tunnel, transistori, ... . In questo caso il circuito equivalente R è un circuito ancora di tipo resistivo, ma non lineare.



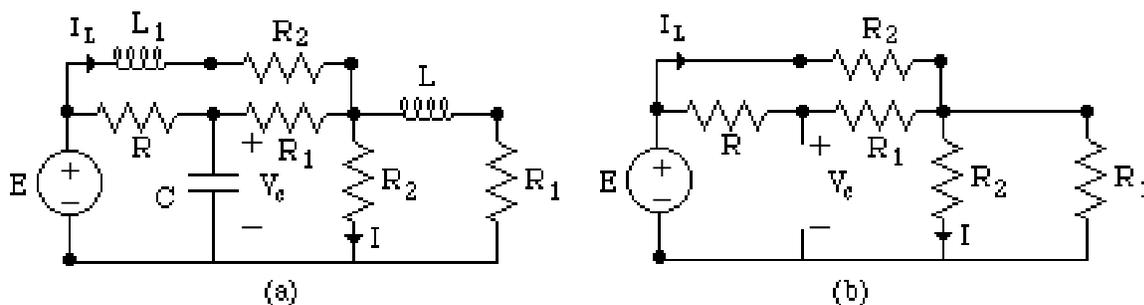
## Esempio

Si consideri il circuito lineare, tempo-invariante e dissipativo descritto in Figura 5.3a e si assuma che sia in regime stazionario. Determinare le correnti  $I_L$  e  $I$  che circolano, rispettivamente, nell'induttore con induttanza  $L_1$  e nel resistore  $R_2$ , e la tensione  $V_c$  del condensatore. I dati del problema sono riportati in Tabella 5.1.

$E = 10, R = 2, R_1 = 4, R_2 = 6, L = 1 \mu H, L_1 = 10 \mu H, C = 50 \mu F.$
---

**Tab. 5.1** Parametri del circuito in regime stazionario riportato in Figura 5.3.

Il circuito resistivo equivalente è rappresentato in Figura 5.3b. Questo circuito è stato ottenuto sostituendo al posto dei due induttori un corto circuito e al posto del condensatore un circuito aperto. La soluzione del circuito resistivo equivalente può essere ottenuta utilizzando le regole dei partitori e delle equivalenze serie-parallelo. Operando in questo modo si ottiene  $I_L = 25/27$ ,  $I = 100/91$ ,  $V_c = 4,4$ . La soluzione stazionaria è indipendente dai valori delle induttanze e della capacità!

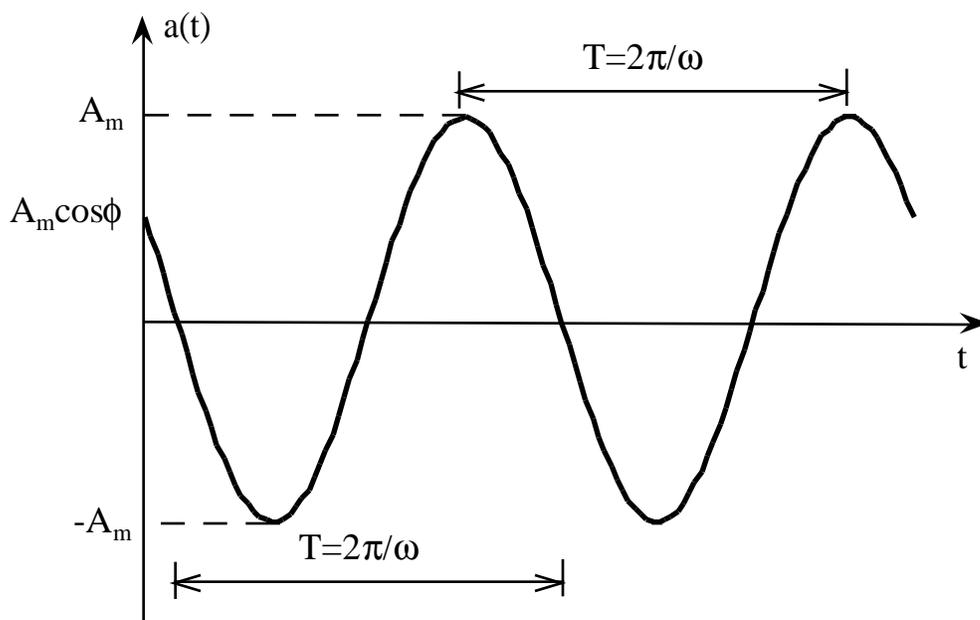


**Fig. 5.3** (a) Circuito in regime stazionario; (b) circuito resistivo equivalente corrispondente.

## 5.3 Circuiti in regime sinusoidale: i fasori

Si consideri, ora, un circuito  $D$  lineare tempo invariante, costituito da resistori, condensatori, induttori e generatori indipendenti (di tensione e/o di corrente) sinusoidali, tutti con la stessa pulsazione  $\omega$  (ossia con la stessa frequenza  $f = \omega/2\pi$ ). Si assuma che il circuito  $D$  sia in regime sinusoidale, quindi tutte le tensioni e tutte le correnti del circuito sono funzioni sinusoidali del tempo

con la stessa pulsazione  $\omega$  dei generatori (il transitorio si è estinto). Il resto di questo Capitolo, ad eccezione degli ultimi due paragrafi, è dedicato allo studio dei circuiti in regime sinusoidale. Negli ultimi due paragrafi considereremo circuiti in regime periodico e circuiti in regime non periodico.



**Fig. 5.4** Funzione sinusoidale di pulsazione  $\omega$ .

In un circuito in regime sinusoidale ogni corrente e ogni tensione è una funzione **sinusoidale** del tempo, cioè del tipo

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi), \quad (4)$$

dove l'ampiezza massima  $A_m$ , la fase "iniziale"  $\phi$  e la pulsazione  $\omega$  sono grandezze costanti reali (la fase dipende dal riferimento scelto per la variabile temporale). L'andamento grafico di questa funzione è riportato in Figura 5.4. L'ampiezza massima  $A_m$  è una grandezza definita positiva. La funzione (4) è una funzione periodica con periodo

$$T = 2\pi/\omega. \quad (5)$$

Infatti si ha

$$a(t + T) = A_m \cos[\omega(t + T) + \phi] = A_m \cos(\omega t + \phi) = a(t). \quad (6)$$

La pulsazione  $\omega$  è misurata nel Sistema Internazionale in *rad/s* e la frequenza  $f$  in Hz (*hertz*):  $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$

### Osservazione

Posto  $\phi = \varphi - \pi/2$ , è immediato verificare che

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi - \pi/2) = A_m \sin(\omega t + \varphi); \quad (7)$$

inoltre, posto  $\phi = \chi + \pi$  si ha anche

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \chi + \pi) = -A_m \cos(\omega t + \chi). \quad (8)$$

Per  $\omega \rightarrow 0$  il periodo di  $a(t)$  tende all'infinito, quindi la funzione sinusoidale tende a una funzione costante. Infatti, per  $\omega = 0$  si ha

$$a(t) = A_m \cos \phi = \text{costante}. \quad (9)$$

Quindi, il regime stazionario può essere considerato come il limite per  $\omega \rightarrow 0$  di un regime sinusoidale (ovviamente, deve essere, in generale,  $\phi \neq \pi/2$ ).



Una volta che è stata fissata la pulsazione  $\omega$  (che, ricordiamo, è imposta dai generatori), ogni tensione e ogni corrente sinusoidale è caratterizzata da due e solo due grandezze, l'ampiezza massima  $A_m$  e la fase iniziale  $\phi$ . Per questo motivo alla funzione sinusoidale (4) è possibile associare un numero complesso  $\bar{A}$  (per un breve richiamo sui numeri complessi vedi in **Appendice**) secondo la regola:

$$\bar{A} = A_m e^{i\phi}. \quad (10)$$

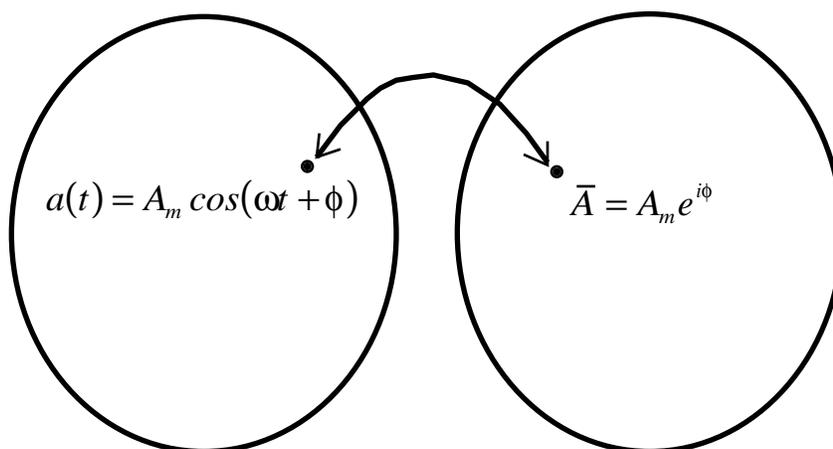
Al numero complesso  $\bar{A}$  si dà il nome di **fasore rappresentativo** della funzione sinusoidale  $a = a(t)$ .

### Osservazione

Ricordiamo che la funzione complessa (di variabile reale  $\phi$ )  $e^{i\phi}$  può essere espressa come (formula di Eulero)

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi. \quad (11)$$

Per  $\phi = 0$  e  $\phi = \pm 2\pi$  si ha  $e^{i\phi} = 1$ , per  $\phi = \pm\pi/2$  e  $\phi = \pm 3\pi/2$  si ha  $e^{i\phi} = \pm i$ , mentre per  $\phi = \pm\pi$  si ha  $e^{i\phi} = -1$ ; per gli altri valori di  $\phi$  sia la parte reale che la parte immaginaria di  $e^{i\phi}$  sono diverse da zero.



**Fig. 5.5** *Corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni sinusoidali a pulsazione  $\omega$  e l'insieme dei numeri complessi.*

Il fatto importante è che la regola (10) produce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni sinusoidali di pulsazione definite dalla (4),  $\omega \{a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)\}^1$ , e l'insieme dei fasori rappresentativi  $\{\bar{A} = A_m e^{i\phi}\}$ . Infatti, in base alla regola (10) la funzione sinusoidale  $a(t)$  definisce univocamente il fasore rappresentativo  $\bar{A}$ . D'altra parte, in base alla stessa regola, a ciascun numero complesso  $\bar{A}$  è possibile associare univocamente una funzione sinusoidale  $a(t)$ . Questa corrispondenza biunivoca può essere indicata formalmente attraverso l'espressione

$$\{a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)\} \Leftrightarrow \{\bar{A} = A_m e^{i\phi}\}, \quad (12)$$

<sup>1</sup> Qui, il simbolo  $\{\cdot\}$  indica un insieme.

e rappresentata simbolicamente come riportato in Figura 5.5.

Tutte le correnti e tensioni di un circuito in regime sinusoidale possono essere rappresentate tramite i fasori. Si dimostrerà che l'analisi del circuito si può, allora, ricondurre alla risoluzione di sole equazioni algebriche lineari (e non più equazioni algebriche e differenziali lineari), a coefficienti complessi in cui le incognite sono proprio i fasori rappresentativi (quindi numeri complessi e non funzioni del tempo). Una volta determinati i fasori rappresentativi, attraverso la (12) si determinano le corrispondenti funzioni sinusoidali nel dominio del tempo, che descrivono l'andamento delle correnti e delle tensioni. Questo è il **metodo dei fasori** detto, anche, **metodo simbolico**.

### Osservazione

Utilizzando la (11), la relazione che fa corrispondere al fasore  $\bar{A}$  la funzione sinusoidale  $a(t)$  che esso rappresenta può essere espressa come

$$\operatorname{Re}\{\bar{A}e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{A_m e^{i(\omega t + \phi)}\} = A_m \cos(\omega t + \phi) = a(t). \quad (13)$$

È evidente che  $a(t) = \operatorname{Re}\{\bar{A}e^{i\omega t}\} = 0$  per ogni  $t$  implica che  $\bar{A} = \bar{0}$ .

◆

Il metodo dei fasori si basa sulle seguenti proprietà.

#### 5.3.1 Proprietà di unicità

Due funzioni sinusoidali  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)$  e  $b(t) = B_m \cos(\omega t + \varphi)$  sono uguali se e solo se sono uguali i corrispondenti fasori rappresentativi  $\bar{A} = A_m e^{i\phi}$  e  $\bar{B} = B_m e^{i\varphi}$ ,

$$a(t) = b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} = \bar{B}. \quad (14)$$

Questa proprietà è una immediata conseguenza del fatto che la regola che associa alla funzione sinusoidale il fasore rappresentativo dà luogo a una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni sinusoidali a pulsazione  $\omega$  e l'insieme dei numeri complessi.

### 5.3.2 Proprietà di linearità

Si consideri la funzione sinusoidale

$$c(t) = \alpha a(t) + \beta b(t), \quad (15)$$

dove  $a$  e  $b$  sono coefficienti costanti reali. Essa è combinazione lineare delle funzioni sinusoidali  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)$  e  $b(t) = B_m \cos(\omega t + \phi)$ . Il fasore  $\bar{C}$  rappresentativo della funzione sinusoidale  $c(t)$  è uguale alla stessa combinazione lineare dei fasori  $\bar{A} = A_m e^{i\phi}$ ,  $\bar{B} = B_m e^{i\phi}$  rappresentativi, rispettivamente, delle rispettive funzioni sinusoidali  $a(t)$  e  $b(t)$ ,

$$\bar{C} = \alpha \bar{A} + \beta \bar{B}. \quad (16)$$

Questa proprietà è una immediata conseguenza del fatto che  $\alpha_1 \operatorname{Re}\{\bar{A}_1 e^{i\omega t}\} + \alpha_2 \operatorname{Re}\{\bar{A}_2 e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{(\alpha_1 \bar{A}_1 + \alpha_2 \bar{A}_2) e^{i\omega t}\}$ , se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono numeri reali.

Una corrispondenza biunivoca, per la quale vale la proprietà di linearità, prende il nome di *isomorfismo lineare*.

### 5.3.3 Regola di derivazione

La derivata prima della funzione sinusoidale  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)$ ,

$$b(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}[A_m \cos(\omega t + \phi)], \quad (17)$$

è anche essa una funzione sinusoidale con pulsazione  $\omega$ ,

$$b(t) = \frac{d}{dt}[A_m \cos(\omega t + \phi)] = -\omega A_m \sin(\omega t + \phi) = \omega A_m \cos(\omega t + \phi + \pi/2). \quad (18)$$

Sia  $\bar{A} = A_m e^{i\phi}$  è il fasore rappresentativo della funzione sinusoidale  $a(t)$ . Allora, il fasore rappresentativo della derivata prima di  $a(t)$ ,  $\bar{B}$ , è dato da

$$\bar{B} = i\omega \bar{A} = \omega A_m e^{i(\phi + \pi/2)}. \quad (19)$$

#### 5.4 Analisi dei circuiti in regime sinusoidale tramite il metodo dei fasori

Si consideri un circuito lineare, tempo-invariante in regime sinusoidale, con  $n$  nodi e  $l$  lati. Le correnti e le tensioni del circuito sono funzioni sinusoidali del tempo

$$i_h(t) = I_{mh} \cos(\omega t + \phi_h) \quad h = 1, 2, \dots, l, \quad (20)$$

$$v_h(t) = V_{mh} \cos(\omega t + \phi_h) \quad h = 1, 2, \dots, l. \quad (21)$$

Siano ( $h = 1, 2, \dots, l$ )

$$\bar{I}_h = I_{mh} e^{i\phi_h}, \quad (22)$$

$$\bar{V}_h = V_{mh} e^{i\phi_h}, \quad (23)$$

i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni, rispettivamente: essi rappresentano le correnti e le tensioni del circuito nel **dominio dei fasori**, detto anche **dominio simbolico**.

#### Osservazione

Il modulo e, quindi, la parte reale e la parte immaginaria dei fasori rappresentativi delle correnti sono omogenei dimensionalmente a una corrente e, quindi, si misurano in *ampere*; il modulo e, quindi, la parte reale e la parte immaginaria dei fasori rappresentativi delle tensioni sono omogenei dimensionalmente a una tensione e quindi si misurano in *volt*.



È possibile riformulare le equazioni circuitali in modo tale che le incognite siano direttamente i fasori rappresentativi? Se sì, quali sono queste equazioni? Si considerino, in primo luogo, le equazioni che esprimono le leggi di Kirchhoff. Esse sono (nel dominio del tempo):

$$\sum_h (\pm) i_h(t) = 0 \quad \text{per ogni nodo} \quad (A_a i(t) = \theta), \quad (24)$$

$$\sum_k (\pm)v_k(t) = 0 \text{ per ogni maglia } (\mathbf{B}_a \mathbf{v}(t) = \mathbf{0}). \quad (25)$$

(Ricordiamo che  $\mathbf{A}_a$  è la matrice di incidenza,  $\mathbf{B}_a$  è la matrice di maglia,  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_l)^T$  è il vettore rappresentativo delle correnti del circuito e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_b)^T$  è il vettore rappresentativo delle tensioni.)

Utilizzando la proprietà di linearità (15), dalle (24) e (25) si ottengono le corrispondenti equazioni nel dominio dei fasori:

$$\sum_h (\pm)\bar{I}_h = \bar{0} \text{ per ogni nodo } (\mathbf{A}_a \bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{0}}), \quad (26)$$

$$\sum_k (\pm)\bar{I}_k = \bar{0} \text{ per ogni maglia } (\mathbf{B}_a \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{0}}). \quad (27)$$

$\bar{\mathbf{I}} = (\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_l)^T$  è un vettore con  $l$  componenti complesse rappresentativo dei fasori delle correnti e  $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_b)^T$  è un vettore con  $l$  componenti complesse rappresentativo dei fasori delle tensioni. È evidente, anche, che imporre che i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni verifichino le equazioni (26) e (27) equivale ad imporre che le correnti e le tensioni nel dominio del tempo verifichino, rispettivamente, le equazioni di Kirchhoff per le correnti (24) e le equazioni di Kirchhoff per le tensioni (25).

Abbiamo ottenuto un risultato molto importante: anche i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni di un circuito in regime sinusoidale verificano le equazioni di Kirchhoff.

Si considerino ora le equazioni caratteristiche degli elementi costituenti il circuito. Solo per non appesantire la trattazione si assuma che il circuito sia costituito da soli bipoli; ovviamente il metodo fasoriale vale anche se nel circuito ci sono elementi lineari a più terminali, come i trasformatori ideali, i generatori controllati, gli amplificatori operazionali (modello lineare), i giratori e gli induttori accoppiati.

Le equazioni costitutive dei bipoli lineari e tempo-invarianti sono:

$$\begin{aligned} v_k(t) - Ri_k(t) &= 0 && \text{resistori,} \\ C \frac{dv_k}{dt} - i_k(t) &= 0 && \text{condensatori,} \\ v_k(t) - L \frac{di_k}{dt} &= 0 && \text{induttori,} \end{aligned} \quad (28)$$

e quelle dei generatori indipendenti sono:

$$\begin{aligned} v_k(t) &= E_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k) && \text{generatore ideale di tensione} \\ i_h(t) &= J_{mh} \cos(\omega t + \beta_h) && \text{generatore ideale di corrente.} \end{aligned} \quad (29)$$

Applicando le proprietà dei fasori, in particolare, la proprietà di linearità e la regola di derivazione, dalle relazioni caratteristiche (28) e (29) si ottengono ulteriori equazioni (tante quanti sono i bipoli) per i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni. Per i bipoli lineari e tempo-invarianti esse sono

$$\begin{aligned} \bar{V}_k - R \bar{I}_k &= 0 && \text{resistori,} \\ i \omega C \bar{V}_k - \bar{I}_k &= 0 && \text{condensatori,} \\ \bar{V}_k - i \omega L \bar{I}_k &= 0 && \text{induttori,} \end{aligned} \quad (30)$$

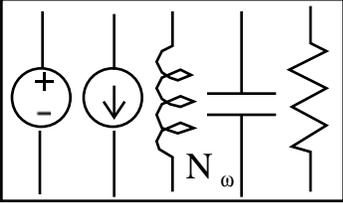
e per i generatori indipendenti esse sono

$$\begin{aligned} \bar{V}_k &= \bar{E} = E_{mk} e^{i\alpha_k} && \text{generatore ideale di tensione simbolico,} \\ \bar{I}_h &= \bar{J} = J_{mh} e^{i\beta_h} && \text{generatore ideale di corrente simbolico.} \end{aligned} \quad (31)$$

Per converso, le (30) e (31) implicano, grazie alla proprietà di unicità e alla regola di derivazione, rispettivamente, le (28) e (29).

A questo punto possiamo riassumere attraverso il quadro descritto in Tabella I. In questa tabella sono riportate le equazioni circuitali nel **dominio del tempo** e nel **dominio simbolico**. Il simbolo  $\Leftrightarrow$  sta a indicare che le equazioni nel dominio del tempo implicano quelle nel dominio simbolico e viceversa.

Le equazioni circuitali corrispondenti nel dominio dei fasori sono equazioni algebriche lineari. È evidente, allora, che conviene trasformare le equazioni circuitali del dominio del tempo, che sono algebriche lineari e differenziali lineari, nelle corrispondenti del dominio simbolico, che sono tutte algebriche lineari, risolverle e ricostruire, poi, la soluzione nel dominio del tempo attraverso la (13). La proprietà di unicità dei fasori assicura che questa procedura fornisce la soluzione del problema originale.

<p><i>do min io del tempo</i></p> $\mathbf{i}(t) =  v_1(t), \dots, v_l(t) ^T$ $\mathbf{v}(t) =  v_1(t), \dots, v_l(t) ^T$		<p><i>do min io simbolico</i></p> $\bar{\mathbf{I}} =  \bar{I}_1, \dots, \bar{I}_b ^T$ $\bar{\mathbf{V}} =  \bar{V}_1, \dots, \bar{V} ^T$
$\begin{cases} A\mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \\ B\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \end{cases}$	<p><i>equazioni di Kirchhoff</i></p> $\Leftrightarrow$	$\begin{cases} A\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \\ B\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \end{cases}$
$\begin{cases} v_k - R_k i_k = 0 \\ C_k dv_k / dt - i_k = 0 \\ v_k - L_k di_k / dt = 0 \end{cases}$	<p><i>equazioni caratteristiche bipoli lineari tempo-invarianti</i></p> $\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \bar{V}_k - R_k \bar{I}_k = 0 \\ (i\omega C_k) \bar{V}_k - \bar{I}_k = 0 \\ \bar{V}_k - (i\omega L_k) \bar{I}_k = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} v_k = e_k(t) = E_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k) \\ i_h = j_h(t) = J_{mh} \cos(\omega t + \beta_h) \end{cases}$	<p><i>equazioni caratteristiche generatori ideali</i></p> $\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \bar{V}_k = \bar{E}_k = E_{mk} e^{i\alpha_k} \\ \bar{I}_h = \bar{J}_h = J_{mh} e^{i\beta_h} \end{cases}$

**Tab. 5.2** Formulazione delle equazioni di un circuito lineare, tempo-invariante in regime sinusoidale tramite i fasori.

## 5.5 Circuiti di impedenze

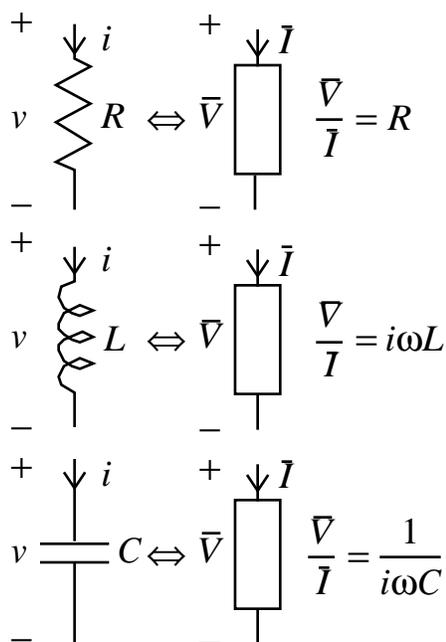
Le equazioni circuitali nel dominio simbolico di un circuito in regime sinusoidale sono analoghe a quelle di un circuito resistivo lineare. In particolare, si osservi che, nel dominio simbolico le equazioni caratteristiche dei bipoli lineari sono tutte dello stesso tipo, cioè equazioni algebriche lineari riconducibili alla forma

$$\bar{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{I}}. \quad (32)$$

La grandezza  $\hat{\mathbf{Z}}$  è una grandezza costante, in generale complessa, indipendente dal fasore della corrente e della tensione, che vale (vedi Tabella 5.3)

$$\hat{Z} = \begin{cases} R & \text{resistore di resistenza } R, \\ \frac{1}{i\omega C} & \text{condensatore di capacità } C, \\ i\omega L & \text{induttore di induttanza } L. \end{cases} \quad (33)$$

La costante complessa  $\dot{Z}$  prende il nome di **impedenza**. La parte reale, la parte immaginaria e il modulo delle impedenze sono grandezze omogenee dimensionalmente con una resistenza e quindi si misurano in *ohm*.



**Tab. 5.3** Impedenze dei bipoli lineari tempo invarianti elementari.

### Osservazione

I fasori sono numeri complessi che rappresentano correnti e tensioni sinusoidali con una pulsazione assegnata. Le impedenze, invece, pur essendo numeri complessi, rappresentano le relazioni tra i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni dei bipoli. Questa è la ragione per la quale alle impedenza si dà anche il nome di **operatori di impedenza**.



L'inverso dell'impedenza

$$\dot{Y} = 1/\dot{Z} \quad (34)$$

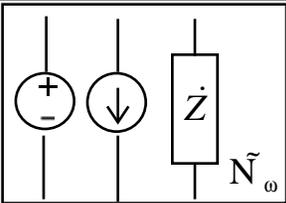
prende il nome di **ammettenza** del bipolo. Si noti che sia l'impedenza che l'ammettenza dipendono, in generale, dalla pulsazione  $\omega$ .

Le equazioni circuitali nel dominio simbolico possono essere interpretate come le equazioni di un circuito ausiliario di natura “simbolica” così definito:

- il grafo del circuito simbolico coincide con il grafo del circuito in regime sinusoidale in esame;
- a ogni bipolo lineare corrisponde un “bipolo simbolico” con impedenza corrispondente definita in base alle (33);
- a ogni generatore di tensione indipendente sinusoidale con tensione  $e_k(t)$  corrisponde un “generatore di tensione simbolico” indipendente, con fasore  $\bar{E}_k$ , e a ogni generatore di corrente indipendente sinusoidale con corrente  $j_k(t)$  corrisponde un “generatore di corrente simbolico” indipendente, con fasore  $\bar{J}_h$ .

Il circuito “simbolico”  $\tilde{N}_\omega$  così definito prende il nome di **rete di impedenze**, (Tabella 5.4). Esso può essere inteso come il corrispondente nel **dominio simbolico** del circuito in regime sinusoidale in esame nel dominio del tempo.

Il modello matematico delle reti di impedenze è analogo a quello delle reti di soli resistori e generatori indipendenti, quindi possono essere risolte utilizzando le metodologie descritte nel Capitolo 3, come, ad esempio, le tecniche di riduzione attraverso le equivalenze, le regole dei partitori, la sovrapposizione degli effetti, il teorema di Thévenin-Norton.

	
$\begin{cases} A\bar{I} = \mathbf{0} \\ B\bar{V} = \mathbf{0} \end{cases}$	equazioni di Kirchhoff
$\bar{V}_k - \dot{Z}_k \bar{I}_k = 0$	equazioni caratteristiche impedenze operatoriali
	$\dot{Z}_k(i\omega) = \begin{cases} R & \text{resistore} \\ -i/(\omega C) & \text{condensatore} \\ i\omega L & \text{induttore} \end{cases}$
$\begin{cases} \bar{V}_k = \bar{E}_k \\ \bar{I}_h = \bar{J}_h \end{cases}$	equazioni caratteristiche generatori indipendenti

**Tab. 5.4** Impedenze dei bipoli lineari tempo invarianti elementari.

**Procedura per la soluzione di un circuito  $N_\omega$  in regime sinusoidale**

- (a) si costruisca la rete di impedenze  $\tilde{N}_\omega$  corrispondente;  
 (b) si risolva la rete di impedenze  $\tilde{N}_\omega$ : siano  $\bar{I}_k, \bar{V}_k, k = 1, 2, \dots, l$ , i fasori delle correnti e delle tensioni;  
 (c) la soluzione della rete  $N_\omega$  in regime sinusoidale è data nel dominio del tempo da

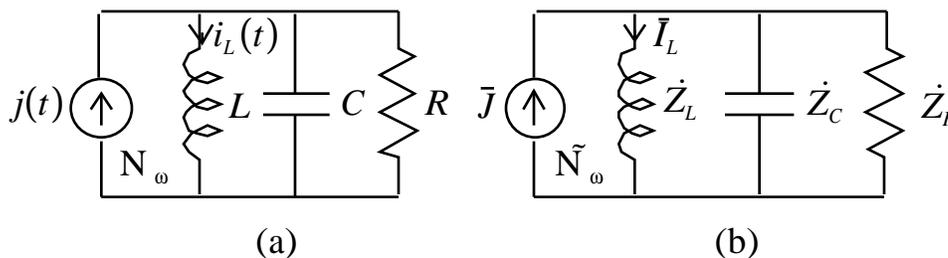
$$i_k(t) = \text{Re}\{\bar{I}_k e^{i\omega t}\}, v_k(t) = \text{Re}\{\bar{V}_k e^{i\omega t}\}.$$

Ora illustreremo questa procedura attraverso un esempio.

**Esempio**

Si consideri il circuito in regime sinusoidale rappresentato in Figura 5.6a. Applicheremo il metodo simbolico per determinare la corrente  $i_L(t)$  che attraversa l'induttore.

I dati del problema sono  $j(t) = 2 \sin(1000t)$ ,  $R = 2$ ,  $L = 2 \text{ mH}$ ,  $C = 0.25 \text{ mF}$ . La pulsazione  $\omega$  della corrente  $j(t)$  del generatore di corrente è 1000, l'ampiezza massima della corrente è 2, e la fase è uguale a  $-\pi/2$  (perché  $j(t) = 2 \sin(1000t) = 2 \cos(1000t - \pi/2)$ ).



**Fig. 5.6** Rete in regime sinusoidale (a) e rete di impedenze corrispondente (b).

Si costruisca la rete di impedenze  $\tilde{N}_\omega$  corrispondente (Figura 5.6b), operando nel seguente modo:

- (i)  $\tilde{N}_\omega$  ha lo stesso grafo orientato del circuito in regime sinusoidale in esame;

- (ii) ad ogni bipolo lineare della rete in regime sinusoidale corrisponde una impedenza secondo la Tabella 5.3;
- (iii) al generatore indipendente di corrente corrisponde il generatore simbolico di corrente caratterizzato dal fasore rappresentativo della corrente.

Il fasore  $\bar{J}$  rappresentativo della  $j(t)$  è  $\bar{J} = 2e^{-i\pi/2} = -2i$ . Le impedenze  $\dot{Z}_R$ ,  $\dot{Z}_L$ ,  $\dot{Z}_C$ , rappresentative, rispettivamente, del resistore, dell'induttore e del condensatore sono date da  $\dot{Z}_R = 2$ ,  $\dot{Z}_L = 2i$ ,  $\dot{Z}_C = -4i$ .

Dopo avere costruito la rete di impedenze, bisogna risolverla. Siccome interessa calcolare la corrente  $i_L(t)$  nell'induttore, basta determinare la corrente simbolica  $\bar{I}_L$  che "attraversa" l'impedenza  $\dot{Z}_L$ .

La rete di impedenze è descritta da un modello matematico identico a quello delle reti di soli resistori (lineari) e generatori indipendenti. Quindi può essere risolta utilizzando le stesse metodologie. Siccome le tre impedenze  $\dot{Z}_R$ ,  $\dot{Z}_L$ ,  $\dot{Z}_C$  sono in parallelo con il generatore di corrente simbolico  $\bar{J}$ , la corrente  $\bar{I}_L$  può essere determinata applicando la regola del partitore di corrente al circuito simbolico  $\tilde{N}_\omega$ . Operando in questo modo si ottiene

$$\bar{I}_L = \bar{J} \frac{\dot{Z}_{eq}}{\dot{Z}_{eq} + \dot{Z}_L}, \quad (35)$$

dove  $\dot{Z}_{eq}$  è l'impedenza equivalente del parallelo costituito da  $\dot{Z}_R$  e  $\dot{Z}_C$  e vale

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = -\frac{8i}{2 - 4i} = \frac{8 - 4i}{5} = \frac{4}{\sqrt{5}} e^{-i \arctan(0.5)}. \quad (36)$$

Pertanto si ha (tutte i calcoli sono stati svolti troncando dopo le prime due cifre significative)

$$\bar{I}_L = \bar{J} \frac{\dot{Z}_{eq}}{\dot{Z}_{eq} + \dot{Z}_L} = -2i \frac{1.79e^{-i0.46}}{\frac{8-4i}{5} + 2i} = \frac{3.58e^{-i2.03}}{2e^{i0.64}} = 1.79e^{-i2.67}. \quad (37)$$

Dopo avere risolto il circuito di impedenze (in questo caso è stato calcolato il fasore rappresentativo della corrente  $i_L(t)$ ) bisogna costruire la funzione reale corrispondente nel dominio del tempo attraverso la (13). La proprietà di unicità

assicura che la procedura fornisce la soluzione del problema originale. Applicando la (13) si ottiene la corrente  $i_L(t)$  nel dominio del tempo

$$\bar{I}_L = 1.79 e^{-i2.67} \Rightarrow i_L(t) = 1.79 \cos(1000t - 2.67). \quad (38)$$

Operando in questo modo è possibile determinare tutte le altre grandezze. Il lettore determini la corrente nel resistore e la tensione sul condensatore.



### Osservazione

Se nel circuito in regime sinusoidale ci sono anche elementi lineari e tempo invarianti a più terminali, come, ad esempio, trasformatori ideali, generatori controllati, giratori, induttori accoppiati, il metodo simbolico, che è stato appena illustrato, resta ancora valido. Le equazioni caratteristiche nel dominio simbolico degli elementi adinamici sono le stesse equazioni che si hanno nel dominio del tempo.

Le equazioni caratteristiche degli elementi dinamici bisogna ricavarle applicando la regola della derivazione. Ad esempio, le equazioni caratteristiche nel dominio simbolico del doppio bipolo che descrive due circuiti accoppiati (trasformatore) sono:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= i\omega L_1 \bar{I}_1 + i\omega M \bar{I}_2, \\ \bar{V}_2 &= i\omega M \bar{I}_1 + i\omega L_2 \bar{I}_2, \end{aligned} \quad (39)$$

dove  $L_1$ ,  $L_2$  e  $M$  sono, rispettivamente, i coefficienti di autoinduzione del circuito “1”, del circuito “2” e il coefficiente di mutua induzione.

## 5.6 Proprietà dei circuiti di impedenze

Il modello matematico di un circuito di impedenze  $\tilde{N}_\omega$ , corrispondente a un circuito in regime sinusoidale  $N_\omega$ , è lo stesso modello che descrive un circuito resistivo lineare (in esso non vi sono operazioni di derivazione). Pertanto per le reti di impedenze valgono molte proprietà illustrate per le reti resistive lineari (teorema di Tellegen, sovrapposizione degli effetti, teorema di Thévenin-

Norton, teorema della reciprocità). Inoltre sono estensibili i concetti di equivalenza, le regole del partitore di corrente e di tensione, le regole di trasformazione stella-triangolo e i concetti di  $N$ -polo e  $M$ -porte con le relative matrici di rappresentazione e alcune proprietà.

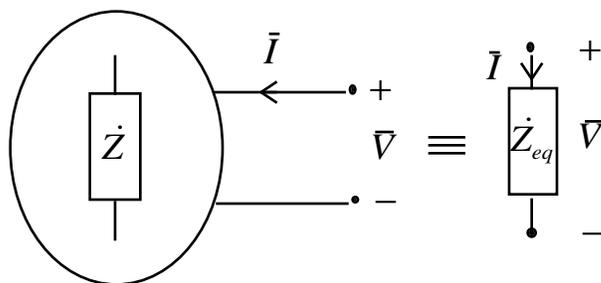
### 5.6.1 Bipoli di impedenze

Il concetto di equivalenza introdotto per i bipoli di resistori si estende ai bipoli di impedenze senza nessuna limitazione.

Si consideri un generico bipolo  $\tilde{N}_\omega$  costituito di sole impedenze (non ci sono generatori indipendenti), Figura 5.7. La relazione tra il fasore della tensione  $\bar{V}$  e il fasore della corrente  $\bar{I}$  è lineare,

$$\bar{V} = \dot{Z}_{eq} \bar{I}, \text{ ovvero } \bar{I} = \dot{Y}_{eq} \bar{V}, \quad (40)$$

dove  $\dot{Y}_{eq} = 1/\dot{Z}_{eq}$ . Per la linearità l'impedenza (equivalente)  $\dot{Z}_{eq}$  è una grandezza indipendente sia da  $\bar{V}$  che da  $\bar{I}$ : essa dipende solo dalle impedenze che costituiscono  $\tilde{N}_\omega$  e da come sono connesse tra loro. Pertanto un qualsiasi bipolo  $\tilde{N}_\omega$  costituito da sole impedenze può essere rappresentato da un bipolo equivalente di impedenza  $\dot{Z}_{eq}$ .



**Fig. 5.7** Bipolo di impedenze.

In generale, come tra poco vedremo, l'impedenza  $\dot{Z}_{eq}$  è una grandezza complessa, con parte reale e parte immaginaria diverse da zero,

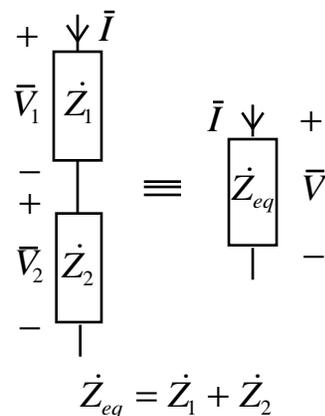
$$\dot{Z}_{eq} = R + iX. \quad (41)$$

Alla parte reale  $R$  si dà il nome di “resistenza” e alla parte immaginaria  $X$  il nome di *reattanza*. Come vedremo tra poco, sia la parte reale che la parte immaginaria dell’impedenza dipendono dalla frequenza, cioè entrambi i parametri  $R$  e  $X$  sono funzioni della pulsazione  $\omega$ .

Per determinare l’impedenza equivalente di un bipolo composto di impedenze elementari, spesso è sufficiente applicare le regole del parallelo, della serie e le trasformazioni stella-triangolo che tra poco illustreremo.

### 5.6.2 Equivalenze serie e parallelo, partitore di tensione, partitore di corrente, trasformazioni stella-triangolo

Il concetto di equivalenza serie e parallelo introdotto per le reti resistive si estende alle reti di impedenze senza nessuna limitazione.



**Fig. 5.8** Serie di impedenze.

#### - *Equivalenza serie*

Le due impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$  siano collegate in serie, (Figura 5.8). Il bipolo simbolico di impedenza

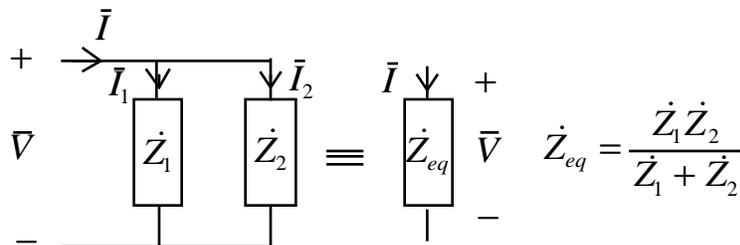
$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \quad (42)$$

è equivalente alla serie delle impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$ .

### - Partitore di tensione

Sia  $\bar{V}$  il fasore della tensione sulla serie delle due impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$  (Figura 5.8). Il fasore della tensione  $\bar{V}_1$  del bipolo di impedenza  $\dot{Z}_1$  e il fasore della tensione  $\bar{V}_2$  del bipolo di impedenza  $\dot{Z}_2$  sono (i versi di riferimento per le tensioni sono quelli di Figura 5.8)

$$\bar{V}_1 = \bar{V} \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}, \quad \bar{V}_2 = \bar{V} \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}. \quad (43)$$



**Fig. 5.9** Parallelo di impedenze.

### - Equivalenza parallelo

Le due impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$  siano collegate in parallelo, (Figura 5.9). Il bipolo simbolico di impedenza

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}. \quad (44)$$

ovvero di ammettenza

$$\dot{Y}_{eq} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2. \quad (45)$$

è equivalente al parallelo delle impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$ , dove  $\dot{Y}_1 = 1/\dot{Z}_1$  e  $\dot{Y}_2 = 1/\dot{Z}_2$ .

### - Partitore di corrente

Sia  $\bar{I}$  il fasore della corrente che circola nel parallelo delle due impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$  (Figura 5.9). Il fasore della corrente  $\bar{I}_1$  del bipolo di impedenza  $\dot{Z}_1$  e il

fasore della corrente  $\bar{I}_2$  del bipolo di impedenza  $\dot{Z}_2$  sono (i riferimenti per i versi delle correnti sono quelli di Figura 5.9)

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}, \quad \bar{I}_2 = \bar{I} \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}. \quad (46)$$

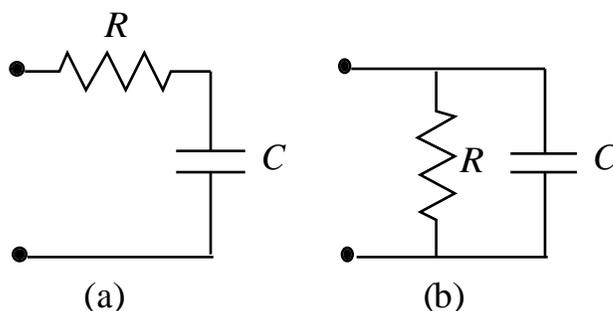
I casi in cui ci sono serie e paralleli che contengono, oltre a impedenze, anche generatori indipendenti, si trattano allo stesso modo di quelli considerati nel Capitolo 3 (con resistori e generatori indipendenti). Inoltre, è possibile trasformare qualsiasi triangolo di sole impedenze in una stella equivalente e viceversa, utilizzando le formule (123) e (124) riportate nel Capitolo 4.

### Esempio

Si consideri il bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza  $R$  e un condensatore di capacità  $C$  collegati in serie (bipolo  $RC$  serie), Figura 5.10a. L'impedenza equivalente di questo bipolo è

$$\dot{Z}_s = R - i \frac{1}{\omega C}. \quad (47)$$

La parte reale è proprio la resistenza del resistore e la parte immaginaria è proprio uguale alla reattanza del condensatore.



**Fig. 5.10** Bipolo  $RC$  serie (a) e bipolo  $RC$  parallelo (b).

Si consideri, ora, il bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza  $R$  e un condensatore di capacità  $C$  collegati in parallelo (bipolo  $RC$  parallelo), Figura 5.10b. L'impedenza equivalente di questo bipolo è

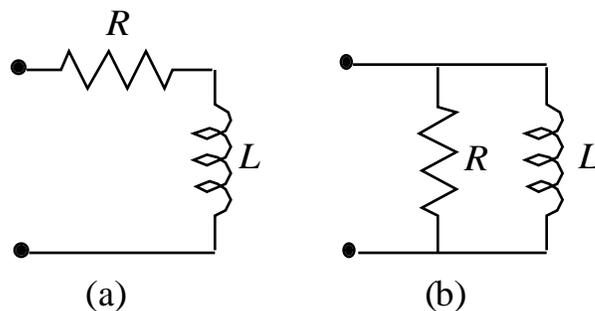
$$\dot{Z}_p = -i \frac{R}{\omega C} \frac{1}{R - i \frac{1}{\omega C}} = \frac{R}{1 + i\omega RC}. \quad (48)$$

In questo caso sia la parte reale che la parte immaginaria dell'impedenza equivalente dipendono dalla pulsazione  $\omega$ .

◆

### Esercizio

Il lettore determini le impedenze equivalenti dei due bipoli semplici riportati in Figura 5.11.



**Fig. 5.11** Bipolo  $RL$  serie (a) e bipolo  $RL$  parallelo (b).

◆

### Esempio

Si consideri il bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza  $R$ , un induttore di induttanza  $L$  e un condensatore di capacità  $C$  collegati in serie (bipolo  $RLC$  serie), Figura 5.12a. L'impedenza  $\dot{Z}_s$  del bipolo è

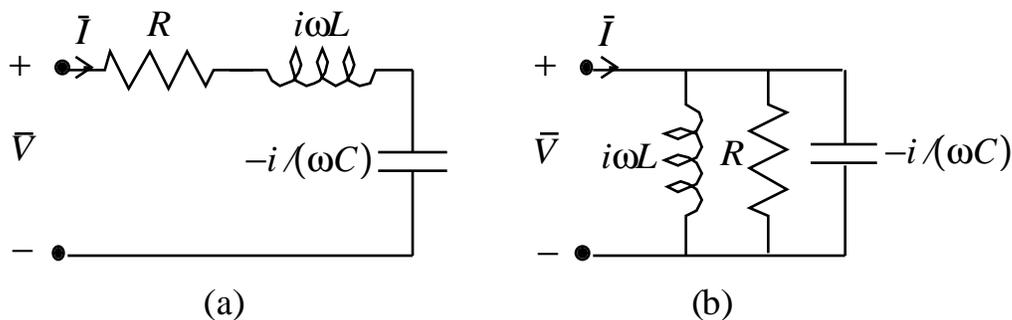
$$\dot{Z}_s = R + i[\omega L - 1/(\omega C)]. \quad (49)$$

La parte reale di  $\dot{Z}_s$  è indipendente dalla pulsazione, ed è maggiore di zero se  $R > 0$ . Invece, la parte immaginaria dipende dalla frequenza e cambia segno al variare della pulsazione  $\omega$ : per  $\omega = \omega_c \equiv 1/\sqrt{LC}$  la reattanza dell'impedenza equivalente è uguale a zero, per  $\omega < \omega_c$  è minore di zero e per  $\omega > \omega_c$  è maggiore di zero.

L'ammettenza  $\dot{Y}_p$  di un bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza  $R$ , un induttore di induttanza  $L$  e un condensatore di capacità  $C$  collegati in parallelo (bipolo  $RLC$  parallelo, Figura 5.12b) è data da

$$\dot{Y}_p = 1/R + i[\omega C - 1/(\omega L)]; \quad (50)$$

l'impedenza è  $\dot{Z}_p = 1/\dot{Y}_p$ . La parte reale di  $\dot{Y}_p$  è indipendente dalla pulsazione ed è maggiore di zero se  $R > 0$ , mentre la parte immaginaria cambia segno al variare della pulsazione  $\omega$  e si annulla per  $\omega = \omega_c \equiv 1/\sqrt{LC}$ . Sia la parte reale di  $\dot{Z}_p$ , che la parte immaginaria dipendono dalla pulsazione. Il lettore verifichi che la parte reale di  $\dot{Z}_p$  è maggiore di zero se  $R > 0$ .



**Fig. 5.12** Bipolo  $RLC$  serie (a) e  $RLC$  parallelo (b).



### - Trasformazioni stella-triangolo

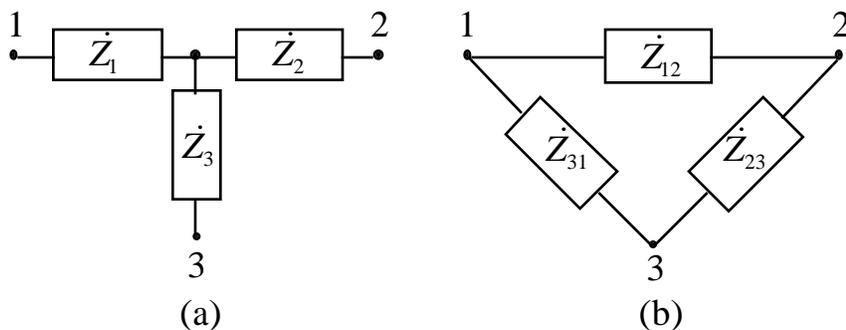
Il tripolo costituito da tre impedenze connesse a stella (Figura 5.13a) può essere sempre “rappresentato” attraverso un tripolo equivalente costituito da tre impedenze collegate a triangolo (Figura 5.13b), e viceversa.

#### Trasformazione triangolo $\rightarrow$ stella

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{23}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}. \quad (51)$$

Nel caso in cui le tre impedenze della configurazione a triangolo siano uguali,  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{31} \equiv \dot{Z}_T$ , la regola di trasformazione si semplifica notevolmente,

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \frac{1}{3} \dot{Z}_T. \quad (52)$$



**Fig. 5.13** (a) Tripolo di impedenze collegate a stella, (b) tripolo di impedenze collegate a triangolo.

### Trasformazione stella $\rightarrow$ triangolo

La trasformazione inversa è descritta dalle relazioni

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}, \quad \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}, \quad \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2}. \quad (53)$$

Nel caso in cui le tre impedenze della configurazione a stella siano uguali,  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 \equiv \dot{Z}_S$ , la regola di trasformazione si semplifica notevolmente,

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{31} = 3\dot{Z}_S. \quad (54)$$

La dimostrazione di queste regole di equivalenza è del tutto simile a quella che è stata fatta nel Capitolo 4, § 4.7.3, per i tripoli di resistori.

### 5.6.3 Sovrapposizione degli effetti

La proprietà della sovrapposizione degli effetti vale per le reti di impedenze, perché il modello matematico che le descrive è costituito da sole equazioni lineari.

Il fasore rappresentativo della generica corrente (o tensione) di un circuito di impedenze e generatori indipendenti, è la somma dei fasori rappresentativi delle

correnti (o tensioni) che ciascuno dei generatori indipendenti produrrebbe se agisse da solo con tutti gli altri generatori indipendenti “spenti”.

Ricordiamo che spegnere un generatore indipendente di tensione equivale a sostituirlo con un corto circuito e spegnere un generatore indipendente di corrente equivale a sostituirlo con un circuito aperto.

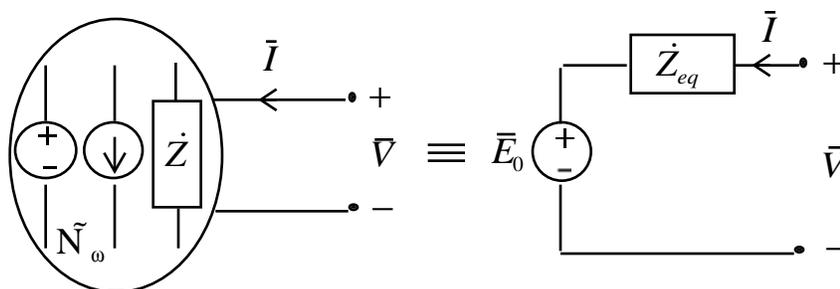
### 5.6.4 Generatore equivalente di Thévenin-Norton

Si consideri, ora, un bipolo  $\tilde{N}_\omega$  composto da impedenze e generatori indipendenti. La relazione tra la tensione  $\bar{V}$  e la corrente  $\bar{I}$  (Figura 5.14) è

$$\bar{V} = \dot{Z}_{eq} \bar{I} + \bar{E}_0 \quad (55)$$

dove:  $\dot{Z}_{eq}$ , detta impedenza equivalente di Thévenin, è l’impedenza equivalente del bipolo  $\tilde{N}_\omega$  dopo avere spento tutti i generatori indipendenti all’interno di esso;  $\bar{E}_0$ , detto fasore della tensione a vuoto, è la tensione fra i terminali “1” e “2” di  $\tilde{N}_\omega$  quando esso è collegato a un circuito aperto.

Allora, il bipolo  $\tilde{N}_\omega$  può essere rappresentato attraverso il generatore equivalente di Thevénin, Figura 5.14, cioè



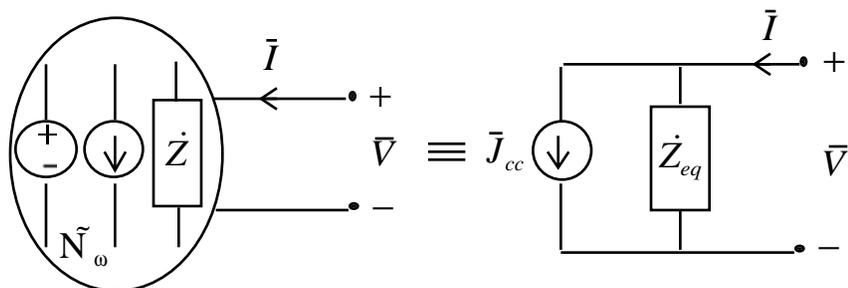
**Fig. 5.14** *Generatore equivalente di Thevénin.*

Dalla relazione (55) abbiamo

$$\bar{I} = \dot{Y}_{eq} \bar{V} + \bar{J}_{cc}, \quad (56)$$

dove:  $\dot{Y}_{eq} = 1/\dot{Z}_{eq}$  è l’ammettenza equivalente del bipolo  $\tilde{N}_\omega$  quando sono spenti tutti i generatori indipendenti all’interno di esso;  $\bar{J}_{cc} = -\bar{E}_0/\dot{Z}_{eq}$

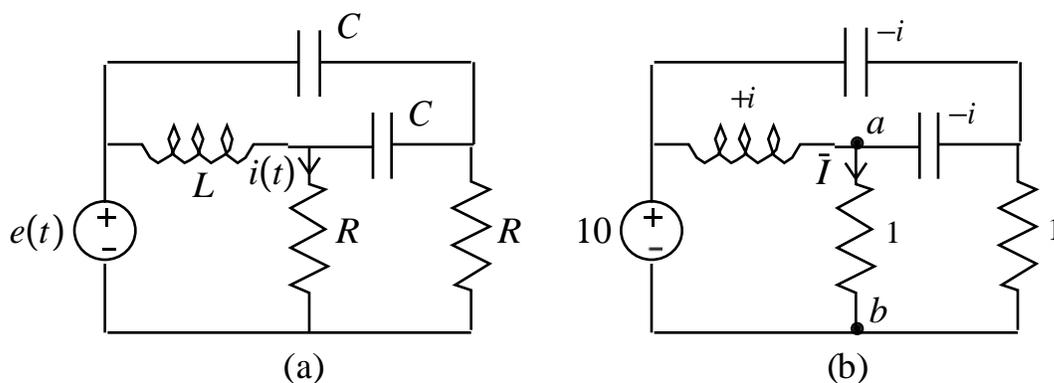
(corrente di corto circuito), è il fasore della corrente del bipolo  $\tilde{N}_\omega$  quando esso è collegato a un corto circuito. Di conseguenza, il bipolo di impedenze  $\tilde{N}_\omega$  può essere rappresentato anche attraverso il generatore equivalente di Norton, Figura 5.15.



**Fig. 5.15** *Generatore equivalente di Norton.*

### Esempio

Si consideri il circuito in regime sinusoidale illustrato in Figura 5.16a. I parametri del circuito sono  $L=10mH$ ,  $C=10mF$  e  $R=1$ ; inoltre  $e(t)=10\cos(100t+\pi/4)$ . Determinare la corrente  $i(t)$  nel resistore.



**Fig. 5.16** (a) *Circuito in esame*, (b) *corrispondente circuito nel dominio simbolico.*

In Figura 5.16b è rappresentato il circuito di impedenze corrispondente al circuito in esame. Il calcolo della corrente  $\bar{I}$  che attraversa il resistore può essere semplificato notevolmente se si usa il generatore equivalente di Thévenin per descrivere la parte restante del circuito. In Figura 5.17a è rappresentato il circuito equivalente ottenuto applicando Thévenin. Bisogna determinare la tensione a

vuoto  $\bar{E}_0$ , cioè la tensione tra i nodi “a” e “b” dopo che è stato sconnesso il resistore e l’impedenza equivalente dopo avere spento il generatore di tensione. La tensione a vuoto  $\bar{E}_0$  (vedi circuito in Figura 5.17b) è

$$\bar{E} = 10(1 - i) = 10\sqrt{2} e^{-i\pi/4}, \quad (57)$$

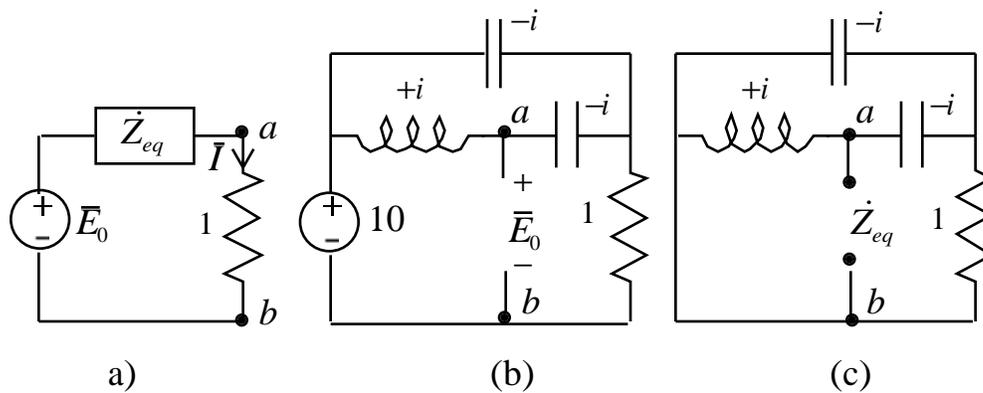
e l’impedenza equivalente è (vedi circuito Figura 5.17c)

$$\dot{Z} = \frac{\left(-i + \frac{-i}{1-i}\right)i}{-i + \frac{-i}{1-i} + i} = -\frac{2-i}{i} = 1 + 2i. \quad (58)$$

Pertanto la corrente vale

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + \dot{Z}} = \frac{10\sqrt{2} e^{-i\pi/4}}{1 + 1 + 2i} = 5\sqrt{2} e^{-i\pi/2}, \quad (59)$$

quindi  $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(100t)$ .



**Fig. 5.17** Circuito equivalente di Thévenin (a); circuiti ausiliari per il calcolo della tensione a vuoto  $\bar{E}_0$  (b), e l’impedenza equivalente  $\dot{Z}_{eq}$ .

### 5.6.5 Doppio bipolo di impedenze, reciprocità

In generale è possibile caratterizzare un doppio bipolo di impedenze così come si caratterizza un doppio bipolo di resistori lineari.

### - Matrice delle impedenze

Si consideri un doppio bipolo di impedenze, cioè una rete di sole impedenze con quattro terminali, associati a due a due, in modo tale da costituire due porte. Si assuma che il doppio bipolo possa essere caratterizzato su base corrente. La relazione tra la coppia dei fasori delle tensioni di porta  $\bar{V}_1, \bar{V}_2$  e la coppia dei fasori delle correnti di porta  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  è, in generale,

$$\bar{V}_1 = \dot{Z}_{11}\bar{I}_1 + \dot{Z}_{12}\bar{I}_2, \quad (60)$$

$$\bar{V}_2 = \dot{Z}_{21}\bar{I}_1 + \dot{Z}_{22}\bar{I}_2. \quad (61)$$

I parametri  $\dot{Z}_{hk}$  sono operatori di impedenza, in generale complessi, indipendenti dai fasori delle tensioni e delle correnti:  $\dot{Z}_{11} = \bar{V}_1/I_1|_{\bar{I}_2=0}$  e  $\dot{Z}_{22} = \bar{V}_2/I_2|_{\bar{I}_1=0}$  sono le *impedenze proprie*,  $\dot{Z}_{12} = \bar{V}_1/I_2|_{\bar{I}_1=0}$  e  $\dot{Z}_{21} = \bar{V}_2/I_1|_{\bar{I}_2=0}$  sono le *impedenze mutue*. Esse sono gli elementi della **matrice delle impedenze** del doppio bipolo.

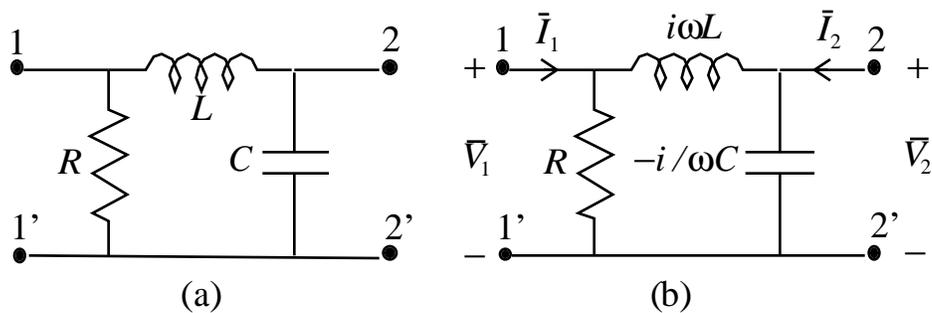
Un doppio di impedenze composto da resitori, induttori, condensatori e trasformatori ideali è reciproco, quindi la matrice delle impedenze è simmetrica

$$\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{12}. \quad (62)$$

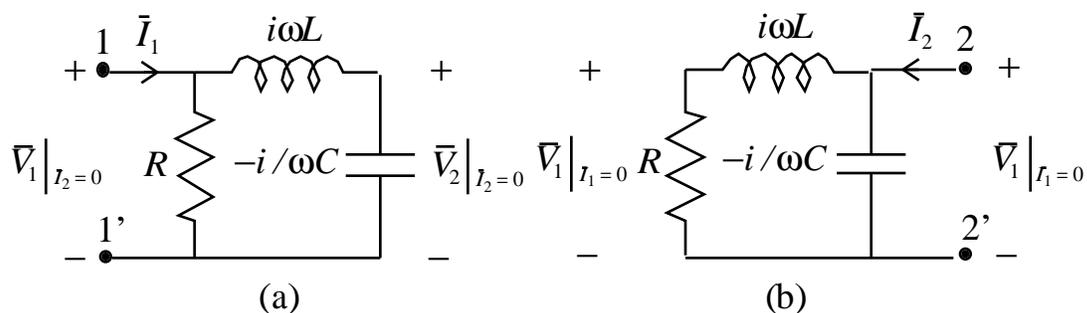
Stiamo estendendo la proprietà di reciprocità dei doppi bipoli di resitori, che abbiamo studiato nel Capitolo 4, ai doppi bipoli di impedenze. La dimostrazione è analoga a quella che si fa per i doppi bipoli di resitori (riportata in **Appendice**) e si basa sul teorema di Tellegen per le potenze virtuali complesse, vedi § 5.7. Inoltre, la parte reale delle impedenze proprie non può essere mai minore di zero se il doppio bipolo è costituito di soli elementi passivi.

### Esempio

Il doppio bipolo rappresentato in Figura 5.18a è in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega$ . Ora determineremo la matrice delle impedenze del corrispondente doppio bipolo di impedenze, Figura 5.18b.



**Fig. 5.18** (a) Doppio bipolo in regime sinusoidale; (b) corrispondente doppio bipolo di impedenze.



**Fig. 5.19** Doppio bipolo di Figura 5.21b con (a)  $\bar{I}_2 = 0$  e (b)  $\bar{I}_1 = 0$ .

L'impedenza propria  $\dot{Z}_{11} = \bar{V}_1 / I_1 \big|_{\bar{I}_2 = 0}$  è l'impedenza equivalente alla porta "1" quando la porta "2" è collegata a un circuito aperto, cioè  $\bar{I}_2 = 0$ , Figura 5.19a. In questa situazione l'impedenza dell'induttore è effettivamente in serie con quella del condensatore; a sua volta, questa serie è in parallelo con l'impedenza del resistore. Di conseguenza deve essere

$$\dot{Z}_{11} = \frac{iR(\omega L - 1/\omega C)}{R + i(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (63)$$

Per determinare l'impedenza mutua  $\dot{Z}_{21} = \bar{V}_2 / I_1 \big|_{\bar{I}_2 = 0}$  bisogna determinare la tensione  $\bar{V}_2 \big|_{\bar{I}_2 = 0}$  nel circuito di Figura 5.19a. Applicando il partitore di tensione alla serie costituita dall'induttore e condensatore e utilizzando la definizione dell'impedenza propria  $\dot{Z}_{11}$  si ha immediatamente:

$$\bar{V}_2 \big|_{\bar{I}_2 = 0} = \bar{V}_1 \big|_{\bar{I}_2 = 0} \frac{-i/\omega C}{i(\omega L - 1/\omega C)} = \dot{Z}_{11} \bar{I}_1 \frac{-i/\omega C}{i(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (64)$$

Essendo  $\dot{Z}_{21} = \bar{V}_2 / I_1 \Big|_{i_2=0}$ , dalle (63) e (64) abbiamo

$$\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{11} \frac{-i/\omega C}{i(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{-iR/\omega C}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{R}{(1 - \omega^2 LC) + i\omega RC}. \quad (65)$$

L'impedenza propria  $\dot{Z}_{22} = \bar{V}_2 / I_2 \Big|_{I_1=0}$  è l'impedenza equivalente alla porta "2" quando la porta "1" è collegata a un circuito aperto, cioè  $\bar{I}_1 = 0$ , Figura 5.19b. In questa situazione, a differenza di prima, l'impedenza dell'induttore è effettivamente in serie con quella del resistore; a sua volta questa serie è in parallelo con l'impedenza del condensatore. Di conseguenza deve essere

$$\dot{Z}_{22} = \frac{(R + i\omega L)(-i/\omega C)}{R + i(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (66)$$

Lasciamo al lettore il calcolo dell'impedenza mutua  $\dot{Z}_{12} = \bar{V}_1 / I_2 \Big|_{I_1=0}$  e la verifica della proprietà di reciprocità  $\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{12}$ .

◆

### - Matrice delle ammettenze

Se il doppio bipolo è caratterizzato su base tensione, il legame tra i fasori delle correnti e tensioni di porta è descritto dalle relazioni

$$\bar{I}_1 = \dot{Y}_{11} \bar{V}_1 + \dot{Y}_{12} \bar{V}_2, \quad (67)$$

$$\bar{I}_2 = \dot{Y}_{21} \bar{V}_1 + \dot{Y}_{22} \bar{V}_2, \quad (68)$$

dove  $\dot{Y}_{ij}$  sono gli elementi della **matrice delle ammettenze**.

La matrice delle impedenze (ammettenze), se è invertibile, è l'inversa della matrice delle ammettenze (impedenze). Se si escludono casi molto particolari, le matrici delle impedenze e delle ammettenze sono sempre invertibili.

Per un doppio reciproco la matrice delle ammettenze è simmetrica,

$$\dot{Y}_{21} = \dot{Y}_{12}. \quad (69)$$

Inoltre, la parte reale delle ammettenze proprie,  $\dot{Y}_{11}$  e  $\dot{Y}_{22}$ , non può essere mai minore di zero se il doppio bipolo è costituito di soli elementi passivi.

### Esercizio

Si determini la matrice delle ammettenze del doppio bipolo riportato in Figura 5.18b.



La caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo di impedenze è descritto dalle relazioni

$$\bar{V}_1 = \dot{H}_{11} \bar{I}_1 + \dot{H}_{12} \bar{V}_2, \quad (70)$$

$$\bar{I}_2 = \dot{H}_{12} \bar{I}_1 + \dot{H}_{22} \bar{V}_2; \quad (71)$$

$\dot{H}_{ij}$  sono gli elementi della **matrice ibrida**.

Per un doppio reciproco gli elementi mutui della matrice ibrida verificano la relazione

$$\dot{H}_{21} = -\dot{H}_{12}. \quad (72)$$

Inoltre, la parte reale degli elementi propri  $\dot{H}_{11}$  e  $\dot{H}_{22}$  non può essere mai minore di zero se il doppio bipolo è costituito di soli elementi passivi.

### Esercizio

Si determini la matrice delle ammettenze del doppio bipolo riportato in Figura 5.18b.



La caratterizzazione di un doppio bipolo di impedenze attraverso la matrice di trasmissione è descritto dalle relazioni

$$\bar{V}_1 = \dot{T}_{11} \bar{V}_2 + \dot{T}_{12} (-\bar{I}_2), \quad (73)$$

$$\bar{I}_1 = \dot{T}_{21} \bar{V}_2 + \dot{T}_{22} (-\bar{I}_2). \quad (74)$$

Per un doppio reciproco la matrice di trasmissione  $\dot{T}$  verifica la relazione

$$\det(\dot{\mathbf{T}}) = 1. \quad (75)$$

La matrice di trasmissione di due doppi bipoli di impedenze collegati in cascata (vedi § 4.6.5) con matrici di trasmissione  $\dot{\mathbf{T}}'$  e  $\dot{\mathbf{T}}''$  è data da

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}' \dot{\mathbf{T}}''. \quad (76)$$

### Esercizio

Si determini la matrice di trasmissione del doppio bipolo riportato in Figura 5.18b.



## 5.7 Metodo dei potenziali di nodo e delle correnti di maglia

L'insieme dei fasori rappresentativi delle tensioni verifica le equazioni di Kirchhoff per le tensioni, e quindi è possibile rappresentare il fasore rappresentativo della tensione del generico lato (bipolo o porta) come differenza dei fasori rappresentativi dei potenziali dei due nodi a cui il lato è connesso, Figura 5.20,

$$\bar{V}_q = \bar{E}_r - \bar{E}_s. \quad (77)$$

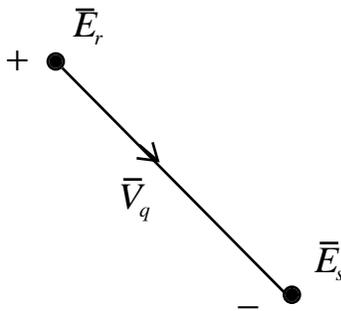


Fig. 5.20 *Potenziali di nodo nel dominio simbolico.*

Pertanto si ha

$$B\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{V}} = A^T \bar{\mathbf{E}}, \quad (78)$$

dove  $\bar{\mathbf{E}}$  è il vettore colonna complesso  $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{n-1})^T$  ed  $\bar{E}_k$  è il fasore rappresentativo del potenziale del  $k$ -esimo nodo ( $n$  sono i nodi del circuito e si è posto  $\bar{E}_n = 0$ ).

L'insieme dei fasori rappresentativi delle correnti verifica le equazioni di Kirchhoff per le correnti, e quindi è possibile rappresentare il fasore della corrente del generico lato (bipolo o porta) come somma algebrica dei fasori rappresentativi delle correnti di maglia che circolano in quel lato, come nel dominio del tempo (vedi § 2.11.2)

$$\bar{I}_k = \sum_h (\pm) \bar{J}_h. \quad (79)$$

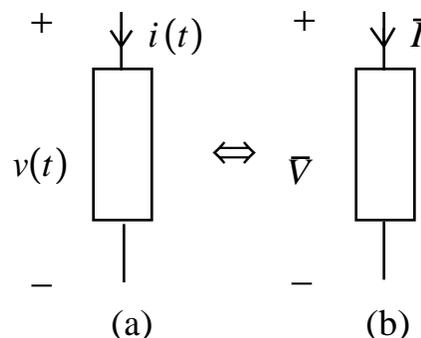
Pertanto si ha

$$A\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{I}} = B^T \bar{\mathbf{J}}, \quad (80)$$

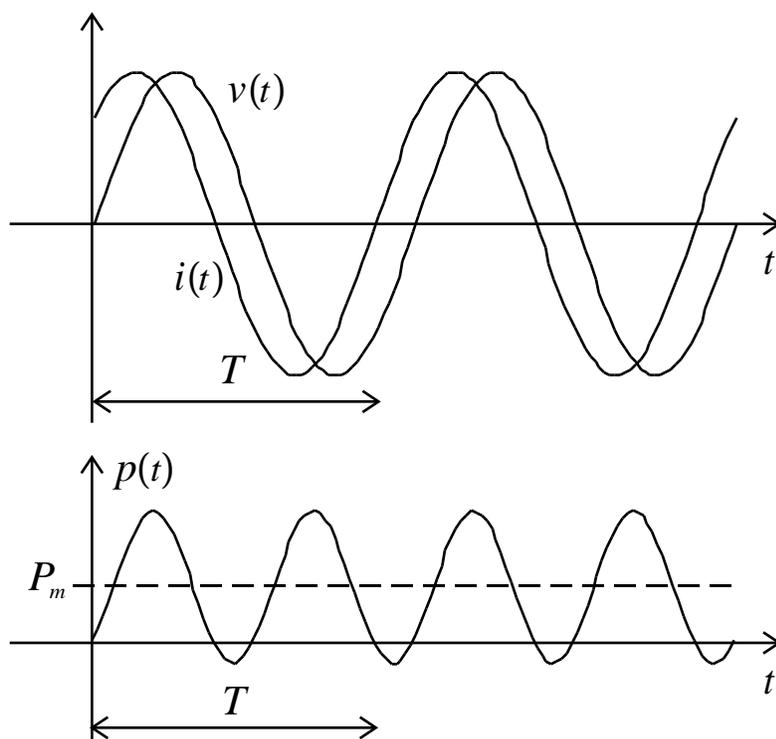
dove  $\bar{\mathbf{J}}$  è il vettore colonna complesso  $(\bar{J}_1, \bar{J}_2, \dots, \bar{J}_{b-(n-1)})^T$  ed  $\bar{J}_k$  è il fasore rappresentativo della corrente di maglia della  $k$ -esima maglia fondamentale (le maglie fondamentali sono  $l - (n - 1)$ ).

## 5.8 Potenza ed energia in regime sinusoidale

Si consideri una circuito in regime sinusoidale. La corrente e la tensione del bipolo sono  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha)$  e  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \beta)$ , rispettivamente, e i loro riferimenti per i versi sono scelti in accordo alla convenzione dell'utilizzatore, Figura 5.21.



**Fig. 5.21** Bipolo in regime sinusoidale: (a) dominio del tempo, (b) dominio della frequenza.



**Fig. 5.22** *Andamento temporale della potenza istantanea assorbita da un bipolo in regime sinusoidale.*

### 5.8.1 Potenza elettrica istantanea

La potenza elettrica istantanea assorbita da un generico bipolo del circuito è

$$p(t) = i(t)v(t) = I_m V_m \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta). \quad (81)$$

Applicando l'identità

$$2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y). \quad (82)$$

si ottiene:

$$p(t) = \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} I_m V_m \cos(2\omega t + \alpha + \beta). \quad (83)$$

Dunque, la potenza elettrica istantanea assorbita da un generico bipolo di una rete in regime sinusoidale è la somma di un termine sinusoidale a pulsazione

$2\omega$  e un termine costante, quindi è una funzione periodica di periodo  $T/2$ . Essa oscilla due volte nel periodo  $T = 2\pi/\omega$ , Figura 5.22.

### 5.8.2 Potenza elettrica media

Il valore medio della potenza  $p(t)$  su un periodo  $T$ , o *potenza media*, è data da

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\alpha - \beta). \quad (84)$$

Essa è uguale al termine costante dell'espressione (83). Il valore medio su un periodo  $T$  del termine fluttuante della potenza istantanea è uguale a zero perché esso è una funzione sinusoidale di periodo  $T/2$ .

L'energia assorbita dal bipolo in regime sinusoidale nell'intervallo di tempo  $(0, \hat{t})$  è data da

$$w(0, \hat{t}) = \int_0^{\hat{t}} p(\tau) d\tau = (nT) P_{av} + \int_{nT}^{nT+\Delta t} p(\tau) d\tau. \quad (85)$$

dove il numero intero  $n$  è tale che  $\hat{t} = nT + \Delta t$ , con  $\Delta t < T$ . Il numero intero  $n$  rappresenta il numero di periodi  $T$  contenuti nell'intervallo di tempo  $(0, \hat{t})$ . Se  $n \gg 1$  il contributo dovuto all'energia assorbita nell'intervallo di tempo  $(nT, nT + \Delta t)$  è trascurabile rispetto a  $(nT)P_{av}$ . Allora abbiamo

$$w(0, \hat{t}) \cong (nT) P_{av} \cong \hat{t} P_{av}. \quad (86)$$

### Osservazione

La potenza media dipende non solo dall'ampiezza massima della tensione e della corrente, ma anche dalla differenza delle fasi  $(\alpha - \beta)$ . Questa differenza, come tra poco vedremo, dipende solo dalla costituzione fisica del bipolo.

### 5.8.3 Potenza elettrica complessa, potenza reattiva e potenza apparente

I fasori rappresentativi della corrente e della tensione del bipolo sono, rispettivamente,

$$\bar{I} = I_m e^{i\alpha}, \quad (87)$$

$$\bar{V} = V_m e^{i\beta}. \quad (88)$$

È evidente, allora, che la potenza media  $P_m$ , data dall'espressione (84), può essere espressa direttamente in funzione dei fasori rappresentativi della tensione e della corrente del bipolo.

Si introduca la *potenza elettrica complessa assorbita dal bipolo* definita come

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^*. \quad (89)$$

Il simbolo  $\bar{I}^*$  indica che si considera il numero complesso coniugato del numero complesso  $\bar{I}$ : se  $\bar{I} = a + ib = I_m e^{i\alpha}$ , allora  $\bar{I}^* = a - ib = I_m e^{-i\alpha}$  (vedi **Appendice**).

Utilizzando le espressioni (87) e (88) per la potenza complessa abbiamo

$$\hat{P} = \frac{1}{2} I_m V_m e^{i(\beta - \alpha)} = \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\beta - \alpha) + i \frac{1}{2} I_m V_m \sin(\beta - \alpha) = P + iQ, \quad (90)$$

avendo posto

$$P = \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\beta - \alpha), \quad (91)$$

$$Q = \frac{1}{2} I_m V_m \sin(\beta - \alpha). \quad (92)$$

La parte reale della potenza complessa  $P$  è uguale alla potenza elettrica media assorbita dal bipolo,

$$P_{av} = Re\{\hat{P}\} = Re\left\{\frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^*\right\}. \quad (93)$$

Allora, per determinare la potenza media assorbita da un bipolo possiamo utilizzare direttamente la relazione (93).

La parte immaginaria di  $\hat{P}$  prende il nome di *potenza reattiva* assorbita e si denota con la lettera  $Q$ . La potenza reattiva, a differenza della potenza media, non ha nessun significato fisico.

Al modulo della potenza complessa si dà il nome di *potenza apparente*,  $A = |\hat{P}|$ .

Per la potenza apparente si ha

$$A = \frac{1}{2} V_m I_m = \sqrt{P_m^2 + Q^2}. \quad (94)$$

La potenza media e la potenza reattiva assorbite da un bipolo possono essere espresse come

$$P_m = A \cos(\alpha - \beta), \quad (95)$$

$$Q = A \sin(\alpha - \beta). \quad (96)$$

L'unità di misura nel SI della potenza elettrica media è la stessa unità di misura della potenza istantanea, cioè il *watt*. Invece, l'unità di misura della potenza reattiva è il “ VAr ” (*volt-ampere reattivo*) e l'unità di misura della potenza apparente è il “ VA ” (*volt-ampere*).

### Osservazione

La potenza complessa assorbita da un doppio bipolo lineare tempo invariante in regime sinusoidale è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dalle singole porte,  $\hat{P} = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^*$ . La parte reale rappresenta la potenza media assorbita dal doppio bipolo e la parte immaginaria è la potenza reattiva assorbita dal doppio bipolo.



### 5.8.4 Conservazione delle potenze complesse, potenze medie e potenze reattive

Pur non avendo la potenza reattiva assorbita da un bipolo in regime sinusoidale nessun significato fisico, essa ha una proprietà molto importante: la potenza reattiva assorbita da tutti i bipoli si conserva, così come si conserva la potenza media assorbita da tutti gli elementi del circuito.

Si consideri un circuito di impedenze con  $l$  bipoli. Le potenze complesse assorbite dai singoli elementi del circuito verificano la seguente proprietà.

#### Teorema della conservazione delle potenze elettriche complesse

La somma delle potenze elettriche complesse assorbite dagli elementi di un circuito di impedenze è uguale a zero,

$$\sum_{k=1}^l \hat{P}_k = \sum_{k=1}^l \frac{1}{2} \bar{V}_k \bar{I}_k^* = \bar{0}. \quad (97)$$

◆

La dimostrazione di questa proprietà è analoga alla dimostrazione delle potenze elettriche istantanee descritta nel Capitolo 2. Essa si basa sul fatto che i fasori rappresentativi delle tensioni verificano le equazioni di Kirchhoff per le tensioni e i fasori rappresentativi delle correnti verificano le equazioni di Kirchhoff per le correnti. In conseguenza di quest'ultima proprietà si ha che anche i complessi coniugati dei fasori rappresentativi delle correnti verificano le equazioni di Kirchhoff per le correnti. Infatti, si ha

$$\sum_k (\pm) \bar{I}_k = \bar{0} \Leftrightarrow \sum_k (\pm) \bar{I}_k^* = \bar{0}, \quad (98)$$

perché  $(\sum (\pm) I_k)^* = \sum (\pm) \bar{I}_k^*$ . Il lettore partendo da queste considerazioni dimostri la conservazione delle potenze complesse assorbite da tutti gli elementi del circuito seguendo il percorso che abbiamo seguito nella dimostrazione della conservazione delle potenza elettriche istantanee.

Come ovvi corollari della conservazione delle potenze complesse abbiamo che in un generico circuito in regime sinusoidale:

- La somma delle potenze elettriche medie assorbite da tutti elementi del circuito è uguale a zero (**conservazione delle potenze medie**)

$$\sum_{h=1}^l P_{av,k} = 0. \quad (99)$$

- La somma delle potenze reattive assorbite dagli elementi della rete è uguale a zero (**conservazione delle potenze reattive**)

$$\sum_{h=1}^l Q_k = 0. \quad (100)$$

Infatti, dalla (97) abbiamo

$$\sum_{k=1}^l \hat{P}_k = \sum_{k=1}^l (P_{kav} + iQ_k) = \sum_{k=1}^l P_{kav} + i \sum_{k=1}^l Q_k = \bar{0}. \quad (101)$$

Quindi deve essere necessariamente

$$\sum_{k=1}^l P_{av,k} = 0 \quad (102)$$

e

$$\sum_{k=1}^l Q_k = 0. \quad (103)$$

Pertanto la conservazione della potenza elettrica complessa non solo dà la conservazione della potenza media, ma anche quella della potenza reattiva. Quindi se un certo elemento di una rete assorbe potenza reattiva, allora ci devono essere altri elementi del circuito che devono produrla (generatori indipendenti o altri elementi). Questo risultato è d'importanza fondamentale nell'ingegneria dei sistemi elettrici di potenza.

La potenza apparente, essendo una grandezza definita positiva, non può verificare nessuna proprietà di conservazione.

### 5.8.5 Potenza virtuale complessa e teorema di Tellegen

Si considerino, ora, due reti di impedenze  $\tilde{N}'_{\omega}$  e  $\tilde{N}''_{\omega}$  che hanno lo stesso grafo orientato. Sia  $\vec{I}'_1, \dots, \vec{I}'_l$  l'insieme dei fasori delle correnti della rete  $\tilde{N}'_{\omega}$  e  $\vec{V}''_1, \dots, \vec{V}''_l$  l'insieme dei fasori delle tensioni della rete  $\tilde{N}''_{\omega}$ . Come per i circuiti nel dominio del tempo, si definisce la potenza virtuale complessa  $\hat{S}_k$  assorbita dal  $k$ -esimo lato

$$\hat{S}_k = \frac{1}{2} \vec{V}''_k \vec{I}'_k{}^* \quad (104)$$

È possibile definire anche altre potenze virtuali complesse, come, ad esempio,  $\vec{V}''_k \vec{I}'_k$ , ma solo quella definita attraverso la (104) coincide con la potenza elettrica complessa assorbita da un bipolo nel caso in cui  $\vec{V}''_1, \dots, \vec{V}''_l$  e  $\vec{I}'_1, \dots, \vec{I}'_l$  sono le tensioni e correnti di uno stesso circuito.

### Teorema di Tellegen

La somma delle potenze virtuali complesse assorbite da un circuito è uguale a zero,

$$\sum_{k=1}^l \hat{S}_k = \sum_{k=1}^l \frac{1}{2} \vec{V}''_k \vec{I}'_k{}^* = 0. \quad (105)$$

Per la dimostrazione della (105) valgono le stesse considerazioni che abbiamo fatto per la dimostrazione della potenza complessa.

### 5.9 Bipoli “elementari” in regime sinusoidale e diagrammi fasoriale

Il rapporto tra il fasore rappresentativo della tensione e il fasore rappresentativo della corrente (con la convenzione dell'utilizzatore) di un generico bipolo lineare in regime sinusoidale (quindi, non contiene generatori indipendenti di tensione e corrente) è uguale all'impedenza del bipolo,

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \dot{Z}. \quad (106)$$

Posto

$$\dot{Z} = Ze^{i\varphi}, \quad (107)$$

dove  $Z$  è il modulo dell'impedenza e  $\varphi$  è l'argomento, immediatamente abbiamo

$$V_m e^{i\beta} = (Ze^{i\varphi}) I_m e^{i\alpha} = (ZI_m) e^{i(\alpha+\varphi)}. \quad (108)$$

Quindi deve essere

$$V_m = ZI_m, \quad (109)$$

e

$$\beta - \alpha = \varphi. \quad (110)$$

È immediato allora che la potenza media assorbita da un bipolo lineare in regime sinusoidale è data da

$$P_{av} = \frac{1}{2} ZI_m^2 \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{Z} \cos \varphi = A \cos \varphi, \quad (111)$$

e la potenza reattiva è data da

$$Q = \frac{1}{2} ZI_m^2 \sin \varphi = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{Z} \sin \varphi = A \sin \varphi. \quad (112)$$

L'espressione della potenza apparente è

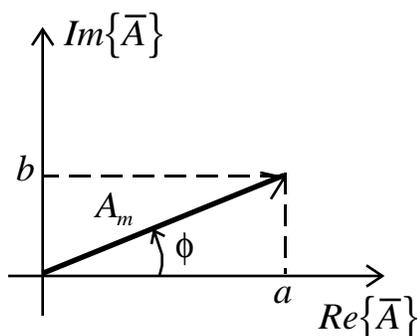
$$A = \frac{1}{2} ZI_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{Z}. \quad (113)$$

Il fattore  $\cos\alpha$ , detto **fattore di potenza**, è di estrema importanza nell'ingegneria dei sistemi di potenza che funzionano in regime sinusoidale.

### 5.9.1 Diagrammi fasoriale

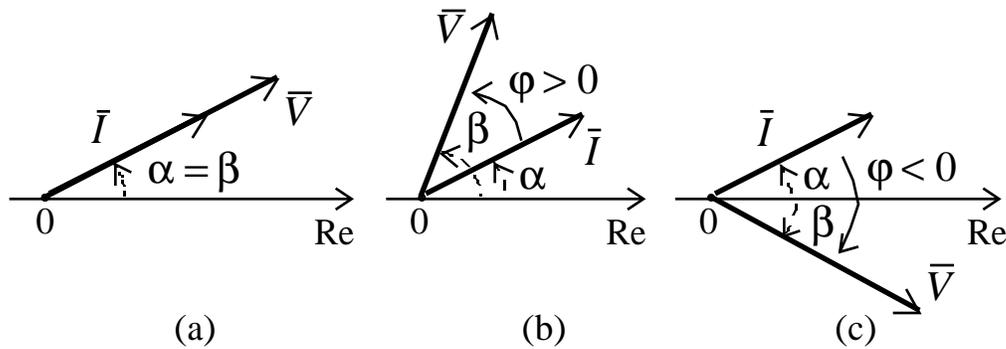
Prima di iniziare lo studio delle proprietà di alcuni bipoli “semplici”, introduciamo un concetto molto importante nello studio di circuiti di impedenze.

Alla funzione sinusoidale  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)$  è associato il fasore rappresentativo  $\bar{A} = A_m e^{i\phi} = a + ib$ . È possibile rappresentare il numero complesso  $\bar{A}$  nel piano complesso (piano di Gauss) come un segmento orientato (vettore), congiungente l'origine con il punto di coordinate rettangolari  $(a, b)$  o coordinate polari  $(A_m, \phi)$ , così come illustrato in Figura 5.23. Adottiamo come verso di riferimento per gli angoli quello antiorario.



**Fig. 5.23** Rappresentazione grafica del fasore  $\bar{A}$  sul piano di Gauss.

Le equazioni di Kirchhoff e le equazioni caratteristiche nel dominio simbolico possono essere rappresentate graficamente tracciando i fasori rappresentativi delle tensioni e correnti sul piano di Gauss. In Figura 5.24 è rappresentato il diagramma fasoriale della tensione e corrente di un generico bipolo. Sono riportati i tre possibili casi che possono presentarsi,  $\phi = 0$ ,  $\phi > 0$  e  $\phi < 0$ . In Figura 5.25 sono rappresentati i diagrammi fasoriali della tensione e della corrente di un resistore, un induttore e un condensatore. In Figura 5.2... sono rappresentati i diagrammi fasoriali per un resistore in serie con un condensatore e per un resistore in serie con un induttore.



**Fig. 5.24** *Diagramma fasoriale della tensione e corrente di una generica impedenza.*

Ora analizzeremo in dettaglio le proprietà di alcuni bipoli “semplici” di particolare interesse.

### 5.9.2 Resistore

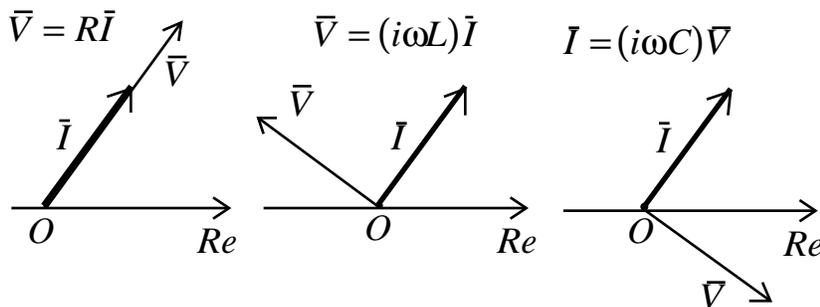
Dalla relazione caratteristica del resistore nel dominio simbolico (convenzione dell'utilizzatore)

$$\bar{V} = R\bar{I}, \quad (114)$$

essendo  $R > 0$ , si ha che il fasore  $\bar{V}$  ha la stessa fase della corrente  $\bar{I}$ , (l'impedenza del resistore è reale e, quindi, la sua fase è uguale a zero,  $\varphi = 0$ )

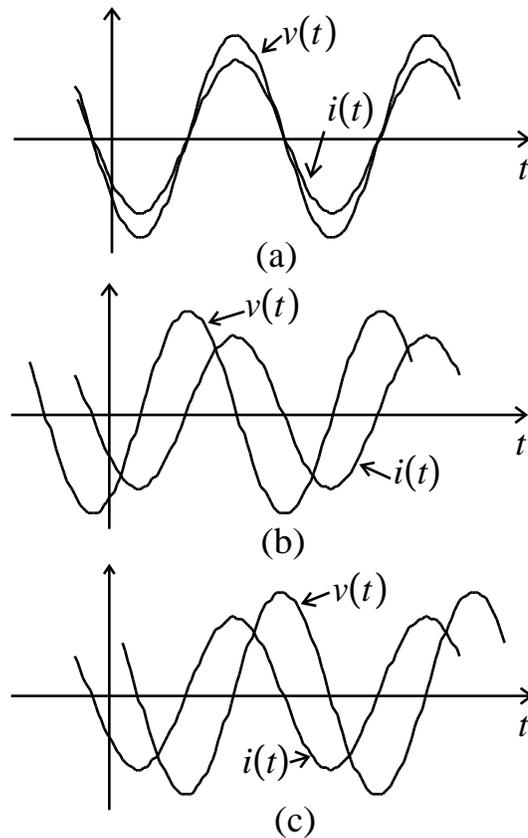
$$V_m = RI_m, \quad \beta = \alpha. \quad (115)$$

*La tensione di un resistore (in regime sinusoidale) è in fase con l'intensità della corrente, Figura 5.25.*



**Fig. 5.25** *Rappresentazione delle caratteristiche del resistore, induttore e condensatore nel dominio simbolico tramite i diagrammi fasoriali.*

In Figura 5.8a è riportato l'andamento nel dominio del tempo dell'intensità della corrente e della tensione di un resistore. In particolare, osserviamo che quando l'intensità della corrente è massima (o minima) anche la tensione è massima (o minima).



**Fig. 5.26** Andamenti temporali dell'intensità della corrente elettrica e tensione per un (a) resistore, (b) induttore e (c) condensatore in regime sinusoidale.

### Osservazione

Per un resistore con resistenza negativa si ha, invece,  $\varphi = \beta - \alpha = \pi$ . Quindi, nel dominio del tempo, quando l'intensità della corrente è minima (massima) la tensione è massima (minima).



Il fattore di potenza del resistore è uguale a 1,  $\cos\varphi = 1$ . Di conseguenza la potenza complessa assorbita dal resistore ha parte immaginaria uguale a zero, e quindi la potenza reattiva è nulla. La potenza media assorbita è data da

$$P_{av} = \frac{V_{av} I_{av}}{2} = \frac{R I_{av}^2}{2} = \frac{V_{av}^2}{2R} \quad (116)$$

essa è positiva se il bipolo è passivo ( $R > 0$ ).

La potenza istantanea assorbita dal resistore è data da

$$p(t) = \frac{R I_m^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + \alpha)]. \quad (117)$$

Essa è una funzione periodica di periodo  $T/2$  che oscilla tra 0 e  $R I_m^2$ , ed ha quindi valore medio diverso da zero sul periodo  $T$ .

### 5.9.3 Induttore

Si consideri un induttore di induttanza  $L$  ( $L > 0$ ). Dalla relazione caratteristica dell'induttore nel dominio simbolico (convenzione dell'utilizzatore)

$$\bar{V} = (i\omega L)\bar{I}, \quad (118)$$

si ha che (l'impedenza dell'induttore è immaginaria e la parte immaginaria è positiva, quindi  $\varphi = \pi/2$ )

$$V_m = (\omega L) I_m, \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}. \quad (119)$$

La grandezza

$$X_L = \omega L, \quad (120)$$

è la reattanza dell'induttore. Essa è sempre positiva (se  $L > 0$ ).

È evidente che  $V_m = X_L I_m$ . Per  $\omega \rightarrow 0$  la reattanza dell'induttore tende a zero e, quindi, il funzionamento dell'induttore tende a quello del corto circuito; invece, per  $\omega \rightarrow \infty$  la reattanza dell'induttore diverge e, quindi, il funzionamento dell'induttore tende a quello del circuito aperto.

*Il fasore rappresentativo della tensione di un induttore è in anticipo di  $\pi/2$  rispetto al fasore rappresentativo della corrente, Figura 5.25. In Figura 5.26b è*

riportato l'andamento nel dominio del tempo dell'intensità della corrente e della tensione. In particolare, osserviamo che quando l'intensità della corrente cresce nel tempo la tensione è positiva; invece, quando l'intensità della corrente decresce nel tempo la tensione è negativa. Inoltre, quando l'intensità della corrente è massima o minima la tensione è nulla, e viceversa.

Il fattore di potenza dell'induttore è uguale a zero,  $\cos \alpha = 0$ . Di conseguenza la potenza complessa assorbita dall'induttore ha parte reale uguale a zero, come nel caso del condensatore, e quindi la potenza media assorbita dall'induttore è uguale a zero. L'induttore, come il condensatore, è un bipolo conservativo e, quindi, non c'è dissipazione di energia. La potenza reattiva assorbita è positiva e vale

$$Q_L = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{X_L I_m^2}{2} = \frac{V_m^2}{2 X_L}. \quad (121)$$

La potenza istantanea assorbita dall'induttore è data da

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) = \frac{\omega L I_m^2}{2} \cos[2(\omega t + \alpha + \pi/4)]. \quad (122)$$

Essa è una funzione periodica di periodo  $T/2$ , che oscilla tra i valori  $-\frac{1}{2} \omega L I_m^2$  e  $+\frac{1}{2} \omega L I_m^2$ ;  $\frac{1}{2} L I_m^2$  è il massimo dell'energia immagazzinata nell'induttore. È evidente, allora, che il valore medio della potenza assorbita dall'induttore calcolata su un periodo è nulla. Si osservi che la potenza istantanea assorbita dall'induttore è positiva in alcuni intervalli di tempo ed è negativa in altri intervalli.

### 5.9.4 Condensatore

Si consideri un condensatore di capacità  $C$  ( $C > 0$ ). Dalla relazione caratteristica del condensatore nel dominio simbolico (convenzione dell'utilizzatore)

$$\bar{V} = -\frac{i}{\omega C} \bar{I}, \quad (123)$$

si ha che (l'impedenza del condensatore è immaginaria e la parte immaginaria è negativa, quindi  $\varphi = -\pi/2$ )

$$V_m = \left( \frac{1}{\omega C} \right) I_m, \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}. \quad (124)$$

La reattanza del condensatore è

$$X_c = -\frac{1}{\omega C}. \quad (125)$$

La reattanza del condensatore è sempre negativa ( $C > 0$ ), a differenza della reattanza dell'induttore, che è sempre positiva.

È evidente che  $V_m = |X_c| I_m$ . Per  $\omega \rightarrow 0$  la reattanza del condensatore diverge e, quindi, il funzionamento del condensatore tende a quello del circuito aperto; invece, per  $\omega \rightarrow \infty$  la reattanza del condensatore tende a zero e, quindi, il funzionamento del condensatore tende a quello del corto circuito. È evidente che  $V_m = |X_c| I_m$ .

*Il fasore rappresentativo della tensione di un condensatore è in ritardo di  $\pi/2$  rispetto al fasore rappresentativo della corrente, Figura 5.25.*

In Figura 5.26c è riportato l'andamento nel dominio del tempo dell'intensità della corrente e della tensione. In particolare, osserviamo che quando la tensione cresce nel tempo l'intensità della corrente è positiva; invece, quando la tensione decresce l'intensità della corrente è negativa. Inoltre, quando la tensione è massima o minima l'intensità della corrente è nulla, e viceversa.

Il fattore di potenza del condensatore è uguale a zero,  $\cos(\beta - \alpha) = 0$ . Di conseguenza, come per l'induttore, la potenza complessa assorbita dal condensatore ha parte reale uguale a zero e quindi la potenza media assorbita dal condensatore è uguale a zero. La potenza reattiva assorbita è negativa (la reattanza del condensatore passivo è minore di zero) e vale

$$Q_c = -\frac{V_m I_m}{2} = -\frac{X_c I_m^2}{2} = \frac{V_m^2}{2 X_c}. \quad (126)$$

La potenza istantanea assorbita dal condensatore è data da

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C v^2 \right) = \frac{\omega C V_m^2}{2} \cos[2(\omega t + \beta + \pi/4)]. \quad (127)$$

Essa, come per l'induttore, è una funzione periodica di periodo  $T/2$ , che oscilla tra  $-\frac{1}{2}\omega C V_m^2$  e  $+\frac{1}{2}\omega C V_m^2$ ;  $\frac{1}{2} C V_m^2$  è il valore massimo dell'energia immagazzinata nel condensatore. Il valore medio su un periodo della potenza istantanea assorbita dal condensatore è nullo, come previsto, perché non c'è dissipazione di energia: il condensatore è un bipolo conservativo.

### 5.9.5 Generatori indipendenti

Si consideri un generatore indipendente di tensione sinusoidale,  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \gamma)$ . Il fasore rappresentativo è  $\bar{E} = E_m e^{i\gamma}$  ed è indipendente da quello rappresentativo dell'intensità della corrente elettrica che lo attraversa. L'intensità della corrente dipende dal circuito a cui il generatore è connesso. Di conseguenza non è possibile dire niente circa la potenza complessa assorbita da un generatore di tensione  $e$ , quindi, il segno della potenza media e della potenza reattiva, se non si specifica il circuito a cui il generatore è collegato. Nelle condizioni di funzionamento in cui il generatore di tensione eroga effettivamente energia elettrica, la potenza media assorbita risulterà minore di zero e, quindi, quella erogata maggiore di zero.

Considerazioni del tutto analoghe valgono per i generatori indipendenti di corrente sinusoidali.

### 5.10 Giratore, trasformatore ideale, circuiti accoppiati e generatori controllati

La potenza complessa assorbita da un doppio bipolo lineare tempo invariante in regime sinusoidale è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dalle singole porte,  $\hat{P} = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^*$ : la parte reale è la potenza media e la parte immaginaria è la potenza reattiva.

### - *Giratore*

La potenza istantanea assorbita da un giratore è uguale a zero (vedi § 4.4), quindi la potenza media assorbita è uguale a zero. Invece, la potenza reattiva assorbita è, in generale, diversa da zero. Il lettore la determini.

Le relazioni caratteristiche del giratore nel dominio simbolico sono le stesse relazioni che abbiamo nel dominio del tempo, perché esse sono algebriche lineari.

### - *Trasformatore ideale*

La potenza complessa assorbita da un trasformatore ideale è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento. Quindi, la potenza media e la potenza reattiva assorbite da un trasformatore ideale sono uguali a zero. Il lettore dimostri questa proprietà del trasformatore ideale.

Come per il giratore, le relazioni caratteristiche del trasformatore ideale nel dominio simbolico sono le stesse relazioni che abbiamo nel dominio del tempo, perché anche esse sono algebriche lineari.

### - *Circuiti accoppiati (trasformatore reale)*

La potenza complessa assorbita da due circuiti accoppiati (trasformatore reale) può essere determinata utilizzando il circuito equivalente descritto nel § 4.8.3 e nel § 4.8.4. In generale il circuito equivalente contiene un trasformatore ideale e due induttori. Per la conservazione della potenza complessa, la potenza complessa assorbita dai due circuiti accoppiati è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dai due induttori e dal trasformatore ideale. Siccome la potenza complessa assorbita dal trasformatore ideale è zero, la potenza complessa assorbita dai due circuiti accoppiati è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dai due induttori. In conclusione, la potenza media assorbita dai due circuiti accoppiati è uguale a zero e la potenza reattiva assorbita è diversa e positiva.

### - *Generatori controllati*

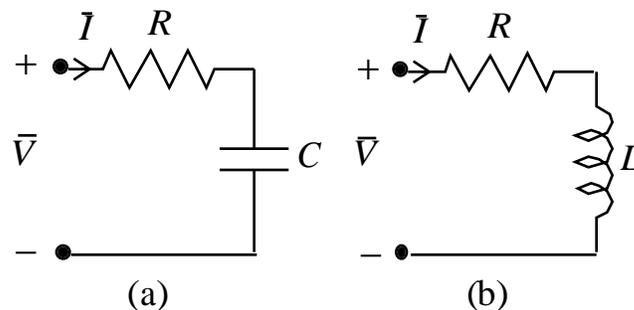
La potenza complessa assorbita dalla porta di controllo di un qualsiasi generatore controllato (purché ideale) è sempre uguale a zero, perché tale porta

si comporta o da corto circuito o da circuito aperto. L'altra porta si comporta, dal punto di vista energetico, o come un generatore di tensione ideale o come un generatore di corrente ideale. Di conseguenza valgono tutte le considerazioni che abbiamo svolto nel § 5.9.5.

## 5.11 Bipoli di impedenze “canonici”; risonanza

In questo paragrafo studieremo il comportamento di alcuni bipoli di impedenze di particolare interesse. Prima considereremo un bipolo  $RC$  serie e un bipolo  $RC$  parallelo, Figura 5.27, poi un bipolo  $RLC$  serie e un bipolo  $RLC$  parallelo, Figura 5.28. Il comportamento di questi bipoli è estremamente interessante sia dal punto di vista teorico che applicativo. Inoltre, la conoscenza del comportamento di bipoli così semplici è fondamentale per comprendere il funzionamento di bipoli estremamente più complessi.

Nel § 5.6.2 abbiamo già calcolato le impedenze equivalenti dei bipoli riportati nelle Figure 5.27 e 5.28.



**Fig. 5.27** Circuito (a)  $RC$  serie e circuito (b)  $RL$  serie in regime sinusoidale.

### 5.11.1 Bipolo $RC$ serie

L'impedenza equivalente del circuito  $RC$  serie (Figura 5.27a) è

$$\dot{Z} = R - i \frac{1}{\omega C}. \quad (128)$$

Si osservi che, pur essendo la reattanza del bipolo dipendente dalla pulsazione, il suo segno è negativo per qualsiasi valore di  $\omega$ . Il modulo dell'impedenza  $\dot{Z}$  è

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}, \quad (129)$$

e la sua fase è data dall'espressione

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{RC\omega}\right). \quad (130)$$

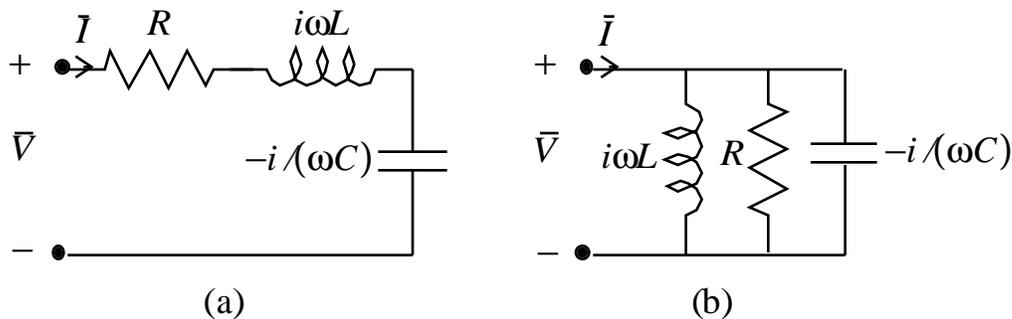
Dalla relazione (convenzione dell'utilizzatore)

$$\bar{V} = Z\bar{I}, \quad (131)$$

si ha che

$$V_m = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} I_m, \quad \beta = \alpha - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{RC\omega}\right). \quad (132)$$

Il fasore rappresentativo della tensione della serie RC è in ritardo di  $\operatorname{arctg}(1/\omega RC)$  rispetto al fasore rappresentativo della corrente, Figura 5.24c.



**Fig. 5.28** Bipolo RLC serie (a) e RLC parallelo (b).

In questo caso il valore del fattore di potenza è compreso tra zero e uno,  $0 < \cos \varphi < 1$ . Di conseguenza, la potenza complessa assorbita ha parte reale e parte immaginaria diverse da zero.

La potenza media assorbita è maggiore di zero e può essere anche espressa come

$$P_{av} = \frac{1}{2} R I_m^2. \quad (133)$$

La potenza reattiva assorbita è sempre minore di zero perché  $\varphi < 0$ . Essa può essere anche espressa come

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\omega C}. \quad (134)$$

### 5.11.2 Bipolo $RL$ serie

L'impedenza equivalente del circuito  $RL$  serie (Figura 5.27b) è

$$\dot{Z} = R + i\omega L. \quad (135)$$

Si osservi che, pur essendo la reattanza del bipolo dipendente dalla pulsazione, il suo segno è positivo per qualsiasi valore di  $\omega$ . Il modulo dell'impedenza  $\dot{Z}$  è

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (136)$$

e la sua fase è data dall'espressione

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right). \quad (137)$$

Dalla relazione (convenzione dell'utilizzatore)

$$\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}, \quad (138)$$

si ha che

$$V_m = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m, \quad \beta = \alpha + \text{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right). \quad (139)$$

*Il fasore rappresentativo della tensione della serie  $RL$  è in anticipo di  $\text{arctg}(\omega L/R)$  rispetto al fasore rappresentativo della corrente, Figura 5.24b.*

Anche in questo caso il valore del fattore di potenza è compreso tra zero e uno,  $0 < \cos \varphi < 1$ . Di conseguenza, la potenza complessa assorbita ha parte reale e parte immaginaria diverse da zero.

La potenza media assorbita è maggiore di zero e può essere espressa come

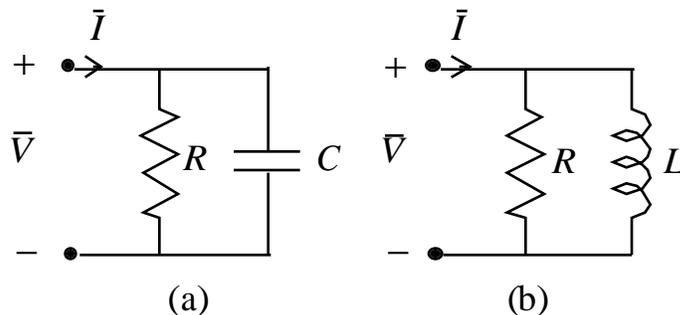
$$P_{av} = \frac{1}{2} R I_m^2. \quad (140)$$

La potenza reattiva assorbita è sempre maggiore di zero perché  $\varphi > 0$ . Essa può essere espressa come

$$Q = \frac{1}{2} \omega L I_m^2. \quad (141)$$

### Esercizio

Si analizzi il comportamento dei circuiti  $RL$  e  $RC$  paralleli riportati in Figura 5.29.



**Fig. 5.29** Circuito (a)  $RC$  parallelo e circuito (b)  $RL$  parallelo in regime sinusoidale.



### 5.11.3 Bipolo $RLC$ serie

L'impedenza equivalente del circuito  $RLC$  serie (Figura 5.28a) è

$$\dot{Z} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (142)$$

La (142) può essere riscritta come

$$\dot{Z} = R + i\omega L \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) = R + i\omega L \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right), \quad (143)$$

dove

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (144)$$

A differenza di quanto si accade nei circuiti  $RL$  serie e  $RC$  serie, la reattanza del circuito  $RLC$  serie cambia segno al variare della pulsazione del regime sinusoidale. Per  $\omega = \omega_r$  la reattanza equivalente del bipolo  $RLC$  serie è uguale a zero, per  $\omega < \omega_r$  la reattanza equivalente è minore di zero e per  $\omega > \omega_r$  la reattanza equivalente è maggiore di zero. Alla pulsazione  $\omega_r$  il circuito si comporta come se fosse un resistore di resistenza  $R$ : gli effetti dovuti all'azione dell'induttore sono controbilanciati dagli effetti dovuti all'azione del condensatore. Come poi vedremo, il circuito che si ottiene alimentando il bipolo  $RLC$  serie con un generatore di tensione ideale sinusoidale è in risonanza alla pulsazione  $\omega = \omega_r$ . Per questa ragione alla pulsazione caratteristica  $\omega_r$  si dà il nome di **pulsazione di risonanza** del bipolo  $RLC$  serie.

Il modulo dell'impedenza  $\dot{Z}$  è

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right)^2} \quad (145)$$

e la sua fase è data dall'espressione

$$\varphi = \arctg \left[ \frac{\omega L}{R} \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (146)$$

Il modulo dell'impedenza del bipolo assume il valore minimo per  $\omega = \omega_r$ ,  $Z(\omega = \omega_r) = R$ , invece la fase è uguale a zero. La fase dell'impedenza è positiva se  $\omega > \omega_r$  ed è negativa se  $\omega < \omega_r$ .

Dalla relazione (convenzione dell'utilizzatore)

$$\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}, \quad (147)$$

si ha che

$$V_m = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)^2} I_m, \beta = \alpha + \operatorname{arctg} \left[ \frac{\omega L}{R} \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right) \right]. \quad (148)$$

*Il fasore rappresentativo della tensione della serie RLC è in ritardo rispetto al fasore rappresentativo della corrente se  $\omega < \omega_r$ , è in fase se  $\omega = \omega_r$  ed è in anticipo  $\omega > \omega_r$ .*

In questo caso il fattore di potenza, che in generale ha un valore compreso tra zero e uno, per  $\omega = \omega_r$  è uguale a uno. Di conseguenza, la potenza complessa assorbita dal bipolo RLC serie, che in generale ha parte reale e parte immaginaria diverse da zero, per  $\omega = \omega_r$  ha parte immaginaria uguale a zero.

La potenza media assorbita è maggiore di zero e può essere anche espressa come

$$P_{av} = \frac{1}{2} R I_m^2. \quad (149)$$

La potenza reattiva assorbita può essere anche espressa come

$$Q = \frac{1}{2} \omega L I_m^2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right). \quad (150)$$

Per  $\omega = \omega_r$  la potenza reattiva assorbita è uguale a zero, per  $\omega < \omega_r$  è minore di zero e per  $\omega > \omega_r$  è maggiore di zero.

#### 5.11.4 Bipolo RLC parallelo

Per analizzare il bipolo RLC parallelo (Figura 5.28b) conviene fare riferimento all'ammittenza equivalente. L'ammittenza equivalente del circuito RLC parallelo è

$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \quad (151)$$

La (151) può essere riscritta come

$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + i\omega C \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) = \frac{1}{R} + i\omega C \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right); \quad (152)$$

appare di nuovo la pulsazione di risonanza  $\omega_r$ , data dall'espressione (144). Per l'impedenza equivalente  $\dot{Z} = 1/\dot{Y}$  abbiamo l'espressione

$$\dot{Z} = \left[ \frac{1}{R} + i\omega C \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right) \right]^{-1} = Y^{-2} \left[ \frac{1}{R} - i\omega C \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (153)$$

Come nel circuito *RLC* serie per  $\omega = \omega_r$ , la parte immaginaria dell'ammettenza e, quindi, la reattanza del bipolo sono uguali a zero. Di nuovo alla pulsazione  $\omega_r$ , il circuito si comporta come se fosse un resistore di resistenza  $R$ : gli effetti dovuti all'azione dell'induttore sono controbilanciati dagli effetti dovuti all'azione del condensatore. Però, a differenza di quanto si osserva nel circuito *RLC* serie, la reattanza equivalente del circuito *RLC* parallelo per  $\omega < \omega_r$  è maggiore di zero e per  $\omega > \omega_r$  è minore di zero. Come poi vedremo, anche il circuito che si ottiene alimentando il bipolo *RLC* parallelo con un generatore di corrente ideale sinusoidale è in risonanza alla pulsazione  $\omega = \omega_r$ .

Il modulo dell'impedenza  $\dot{Y}$  è

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2 \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right)^2} \quad (154)$$

e la sua fase è data dall'espressione

$$\varphi = \arctg \left[ \omega RC \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (155)$$

Nel bipolo *RLC* parallelo il modulo dell'ammettenza assume il valore minimo per  $\omega = \omega_r$ ,  $Y(\omega = \omega_r) = 1/R$ ; quindi, a differenza di quanto si osserva nel bipolo *RLC* serie, il modulo dell'impedenza per  $\omega = \omega_r$  assume il valore massimo.

Dalla relazione (convenzione dell'utilizzatore)

$$\bar{I} = \dot{Y}\bar{V}, \quad (156)$$

si ha che

$$I_m = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)^2} V_m, \quad \alpha = \beta + \arctg \left[ \omega RC \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right) \right]. \quad (157)$$

Il fasore rappresentativo della tensione del parallelo  $RLC$  è in anticipo rispetto al fasore rappresentativo della corrente se  $\omega < \omega_r$ , è in fase se  $\omega = \omega_r$ , ed è in ritardo se  $\omega > \omega_r$ . Abbiamo un comportamento completamente duale rispetto a quello del circuito  $RLC$  serie.

Anche in questo caso il fattore di potenza, che in generale ha un valore compreso tra zero e uno, per  $\omega = \omega_r$  è uguale a uno. Di conseguenza, la potenza complessa assorbita dal bipolo  $RLC$  parallelo, che in generale ha parte reale e parte immaginaria diverse da zero, per  $\omega = \omega_r$  ha parte immaginaria uguale a zero.

La potenza media assorbita è maggiore di zero e può essere anche espressa come

$$P_{av} = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R}. \quad (158)$$

La potenza reattiva assorbita può essere anche espressa come

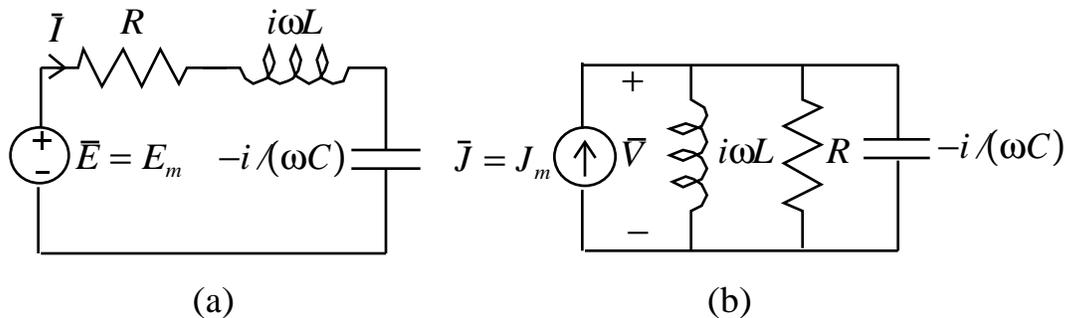
$$Q = -\frac{1}{2} \omega C V_m^2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right). \quad (159)$$

Per  $\omega = \omega_r$  la potenza reattiva assorbita è uguale a zero, per  $\omega < \omega_r$  è maggiore di zero e per  $\omega > \omega_r$  è minore di zero. Abbiamo ancora un comportamento completamente duale rispetto a quello del circuito  $RLC$  serie.

### 5.11.5 Circuiti risonanti

Si consideri, ora, il circuito che si ottiene alimentando il bipolo  $RLC$  serie con un generatore ideale di tensione sinusoidale con una generica pulsazione  $\omega$  e si

assuma che la fase iniziale della tensione impressa sia uguale a zero,  $\bar{E} = E_m$ ,  
Figura 5.30.



**Fig. 5.30** Circuito (a) risonante serie e (b) risonante parallelo.

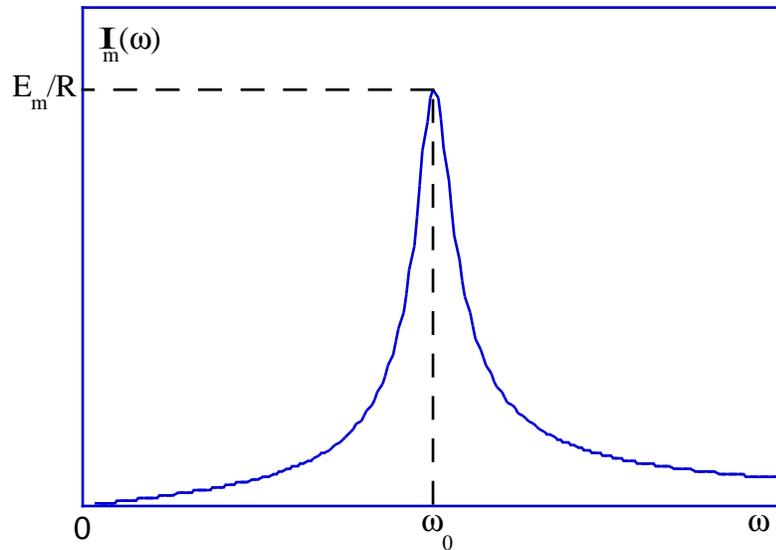
Per il fasore della corrente,  $\bar{I} = I_m e^{i\alpha}$ , abbiamo

$$I_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)^2}}, \quad \alpha(\omega) = \arctg \left[ \frac{\omega L}{R} \left( \frac{\omega_r^2}{\omega^2} - 1 \right) \right]. \quad (160)$$

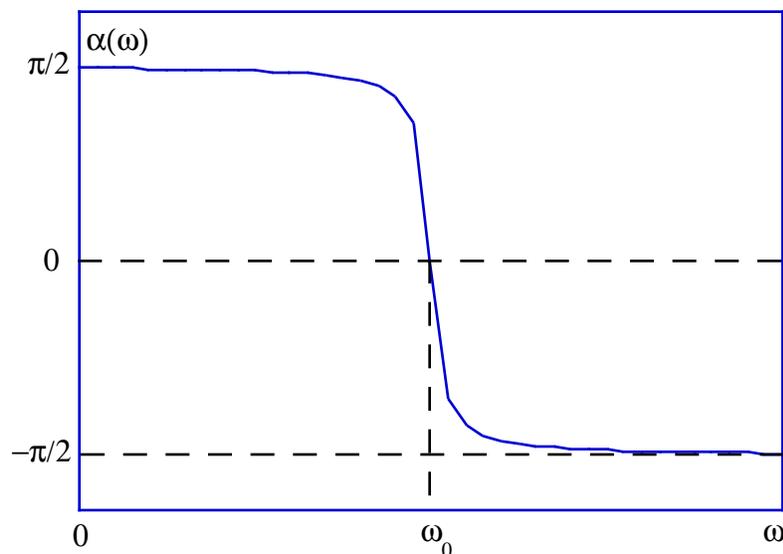
L'ampiezza massima  $I_m$  e la fase  $\alpha$  della corrente sinusoidale a pulsazione  $\omega$  che circola nel circuito dipende dal valore della pulsazione del generatore di tensione. Si consideri, ora, l'andamento dell'ampiezza massima della corrente e della fase iniziale al variare di  $\omega$ . Si immagini un esperimento in cui l'ampiezza del generatore di tensione sinusoidale è fissata e la pulsazione, invece, viene cambiata, ad esempio, attraverso una manopola. È immediato verificare che la funzione  $I_m(\omega)$  non è monotona, a differenza di quanto si osserverebbe in un analogo esperimento con un circuito  $RC$  serie o  $RL$  serie:  $I_m(\omega)$  tende a zero per  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$ , e assume il massimo valore in corrispondenza della pulsazione  $\omega_r$ , data dalla (144), Figura 5.31.

Per  $\omega \rightarrow 0$  il modulo dell'impedenza  $\dot{Z}$  tende all'infinito perché tende all'infinito il modulo della reattanza del condensatore (per  $\omega \rightarrow 0$  il condensatore si comporta come se fosse un circuito aperto) e per  $\omega \rightarrow \infty$  il modulo di  $\dot{Z}$  tende di nuovo all'infinito perché ora è la reattanza dell'induttore che tende all'infinito (per  $\omega \rightarrow \infty$  è l'induttore che si comporta come se fosse un circuito aperto). Alla pulsazione di risonanza la parte immaginaria dell'impedenza  $\dot{Z}$  è uguale a zero, perché il valore della reattanza del

condensatore è opposto al valore della reattanza dell'induttore, e quindi il modulo di  $\dot{Z}$  assume il valore minimo.



**Fig. 5.31** Diagramma dell'ampiezza massima della corrente,  $I_m(\omega)$ .



**Fig. 5.32** Diagramma della fase iniziale della corrente,  $\alpha(\omega)$ .

Il fatto che l'ampiezza massima della corrente abbia l'andamento illustrato in Figura 5.31 al variare della frequenza è una peculiarità del circuito  $RLC$  serie, proprietà che non si osserva affatto nel circuito  $RL$  serie o  $RC$  serie. La ragione sta nel fatto che alla pulsazione  $\omega = \omega_r$  il modulo dell'impedenza equivalente raggiunge il valore minimo. A questo fenomeno si dà il nome di **risonanza** e la pulsazione caratteristica  $\omega_r$ , in corrispondenza della quale l'ampiezza massima

della corrente è massima, prende il nome di **pulsazione di risonanza** del circuito.

I circuiti risonanti sono di grande importanza: (a) essi sono impiegati nelle apparecchiature di misura, nei circuiti di comunicazione (filtri passa-banda, oscillatori, sincronizzatori, ...), nei circuiti convertitori da continua a continua, e così via; (b) esso costituisce un esempio del fenomeno fisico generale della risonanza. In Figura 5.32 è riportato l'andamento in frequenza della fase iniziale della corrente. Per  $\omega < \omega_r$ , la fase è positiva, cioè il fasore della corrente è in anticipo rispetto a quello della tensione applicata (prevale il comportamento capacitivo): per  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \pi/2$ . Per  $\omega > \omega_r$ , la fase è negativa, cioè il fasore della corrente è in ritardo rispetto a quello della tensione applicata (prevale il comportamento induttivo): per  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow -\pi/2$ . Per  $\omega = \omega_r$ , la corrente è in fase con la tensione applicata, perché l'impedenza equivalente  $\dot{Z}$  ha solo parte reale.

Alla risonanza l'ampiezza della corrente vale

$$I_m(\omega_r) = \frac{E_m}{R}. \quad (161)$$

Il valore della corrente alla risonanza è uguale alla corrente che si avrebbe se nel circuito vi fosse solo il resistore. Infatti, alla risonanza il valore della tensione del condensatore  $\bar{V}_c$  è opposto al valore della tensione dell'induttore  $\bar{V}_L$ ,

$$\bar{V}_c(\omega_r) + \bar{V}_L(\omega_r) = \bar{0}, \quad (162)$$

e quindi la tensione del resistore è uguale a quella del generatore.

### Osservazione

La (162) è conseguenza del fatto che la reattanza dell'induttore è positiva e quella del condensatore è negativa (l'induttore assorbe potenza reattiva e il condensatore la eroga). ♦

Si consideri il valore della tensione dell'induttore alla risonanza. Esso è dato da

$$\bar{V}_L = i\bar{E} \frac{\omega_r L}{R}. \quad (163)$$

Pertanto il valore dell'ampiezza massima  $V_{mL}$  della tensione dell'induttore alla risonanza è

$$V_{mL} = QE_m. \quad (164)$$

dove

$$Q \equiv \frac{\omega_r L}{R}. \quad (165)$$

Il parametro adimensionale  $Q$  prende il nome di **fattore di qualità** del circuito risonante serie. Esso può essere maggiore o minore di uno, a seconda dei parametri del circuito.

Dalla (164) si evince che in un circuito risonante  $RLC$  serie il valore massimo della tensione dell'induttore può essere più grande del valore massimo della tensione del generatore se il fattore di qualità del circuito è maggiore di uno: in questo circuito c'è un fenomeno di "amplificazione" del valore massimo della tensione. Ciò è dovuto alla presenza dei due elementi conservativi, cioè l'induttore e il condensatore. Ricordate, pur essendo l'induttore e il condensatore elementi passivi ( $L > 0$ ,  $C > 0$ ), essi erogano l'energia che hanno in precedenza effettivamente assorbito. A differenza di quanto accade nei resistori, l'energia effettivamente assorbita dagli induttori e condensatori viene immagazzinata e non dissipata.

Cosa accade nel circuito  $RLC$  serie quando  $R \rightarrow 0$  e quindi il fattore di qualità tende all'infinito,  $Q \rightarrow \infty$  ?

Quando la resistenza diminuisce l'ampiezza della corrente cresce: alla risonanza essa cresce come  $1/R$  e quindi diverge per  $R \rightarrow 0$ . Per  $R = 0$  (circuito  $LC$  serie), il circuito è ancora passivo ma non è più dissipativo. Pertanto il circuito  $LC$  serie, pilotato con un generatore sinusoidale di tensione, non ha più un regime sinusoidale.

### Osservazione

Il fenomeno della risonanza, appena descritto, è dovuto alla presenza nel circuito dell'induttore e del condensatore, cioè di un elemento che assorbe potenza reattiva e di un altro che la eroga. Questo fenomeno, come già

abbiamo detto, non si osserva se nel circuito vi fosse solo l'induttore (circuito  $RL$  serie), o solo il condensatore (circuito  $RC$  serie). Ad esempio, nel circuito  $RL$  serie si ha

$$I_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (166)$$

L'ampiezza della corrente è una funzione decrescente della pulsazione: essa ha il valore massimo a  $\omega = 0$ ,  $I_m(\omega = 0) = E_m/R$ , e tende asintoticamente a zero per  $\omega \rightarrow \infty$ . A differenza del circuito serie  $RLC$ , in questo caso il modulo dell'impedenza equivalente è una funzione strettamente crescente della pulsazione. Inoltre l'ampiezza massima della tensione del resistore e l'ampiezza massima della tensione dell'induttore sono minori dell'ampiezza massima della tensione del generatore, a differenza di quanto può accadere nel circuito risonante  $RLC$  serie.

### Esercizio

Si descriva il fenomeno della risonanza nel circuito  $RLC$  parallelo illustrato in Figura 5.30b.



### 5.11.6 Proprietà di generico bipolo di impedenze

Si consideri, ora, un generico bipolo lineare tempo-invariante in regime sinusoidale costituito da resistori, induttori, condensatori, trasformatori, generatori controllati. Sia

$$\dot{Z} = R + iX \quad (166)$$

la sua impedenza. Indichiamo con:

$P_{av}^{(tot)}$  = la somma delle potenze medie assorbite dagli elementi dinamici;

$Q_L^{(tot)}$  = la somma delle potenze reattive assorbite dagli induttori e trasformatori;

$Q_C^{(tot)}$  = la somma delle potenze reattive erogate dai condensatori e giratori.

Dalla conservazione della potenza complessa, la potenza complessa assorbita dal bipolo di impedenze è data dalla somma delle potenze complesse assorbite dai singoli elementi del bipolo,

$$\hat{P} = P_{av}^{(tot)} + i(Q_L^{(tot)} + Q_C^{(tot)}). \quad (167)$$

D'altra parte dovendo essere

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \dot{Z} I_m^2 = \frac{1}{2} R I_m^2 + i \frac{1}{2} X I_m^2, \quad (168)$$

dove  $I_m$  è l'ampiezza massima della corrente del bipolo, si ottiene

$$\dot{Z} = R + iX = 2 \frac{\hat{P}}{I_m^2} = 2 \frac{P_{av}^{(tot)} + i(Q_L^{(tot)} - |Q_C^{(tot)}|)}{I_m^2}. \quad (169)$$

Quindi, in conclusione:

$$R = 2 \frac{P_{av}^{(tot)}}{I_m^2}, \quad (170)$$

$$X = 2 \frac{Q_L^{(tot)} - |Q_C^{(tot)}|}{I_m^2}. \quad (171)$$

La reattanza di un generico bipolo si dice che è di tipo induttivo se  $X$  è maggiore di zero, o di tipo capacitivo se  $X$  è minore di zero. La parte reale dell'impedenza di un bipolo costituito da resistori, induttori e condensatori passivi è sempre positiva, se si adotta la convenzione dell'utilizzatore.

Come prevedibile, a parità di  $I_m$ , maggiore è la potenza media assorbita dal bipolo più grande è la parte reale dell'impedenza; inoltre, a parità di  $I_m$ , maggiore è il valore assoluto della potenza reattiva assorbita dal bipolo, più grande è la parte immaginaria dell'impedenza.

Se il bipolo è costituito da sole induttanze, capacità, circuiti accoppiati e giratori, allora l'impedenza ha solo parte immaginaria. Se il bipolo è costituito da soli elementi adinamici (e non ci sono giratori) l'impedenza ha solo parte reale. La parte immaginaria dell'impedenza può essere nulla anche quando nel bipolo ci sono induttori, condensatori e circuiti accoppiati: ciò accade se la

potenza reattiva assorbita dagli induttori e dai circuiti accoppiati è uguale a quella erogata dai condensatori (circuiti risonanti).

## 5.12 Reti in regime periodico e quasi-periodico

Nell'analisi dei circuiti in regime sinusoidale condotta finora, si è visto come calcolare tensioni e correnti di un circuito quando i generatori sono tutti a una singola frequenza.

In questo paragrafo analizzeremo una serie di situazioni molto importanti nelle applicazioni. Spesso nei circuiti sono presenti generatori sinusoidali con pulsazioni diverse tra loro; può anche accadere che il circuito contenga generatori sinusoidali e generatori stazionari. Anche la situazione in cui la tensione (corrente) impressa da un generatore ideale di tensione (corrente) è la somma di funzioni sinusoidali con pulsazioni diverse tra loro può essere trattata come se fossero tanti generatori di tensione sinusoidali con pulsazioni diverse tra loro collegati in serie.

### 5.12.1 Sovrapposizione di un regime stazionario e di un regime sinusoidale

Si consideri un circuito lineare  $N$  tempo invariante e dissipativo alimentato, ad esempio, da due generatori indipendenti di tensione, uno sinusoidale con pulsazione  $\omega$  e l'altro stazionario, Figura 5.33. I due generatori impongono al circuito un regime permanente dato dalla sovrapposizione dei regimi che ciascun generatore imporrebbe se agisse da solo: il regime stazionario imposto dal generatore stazionario e il regime sinusoidale a pulsazione  $\omega$  imposto dal generatore sinusoidale.

Si considerino i due circuiti ausiliari  $N'$  e  $N''$  ottenuti spegnendo un generatore per volta. Il circuito ausiliario  $N'$  è in regime stazionario e il circuito ausiliario  $N''$  è in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega$ . La soluzione di regime del circuito  $N$  è data da ( $k = 1, 2, \dots, l$ )

$$\begin{aligned} i_k(t) &= i'_k(t) + i''_k(t), \\ v_k(t) &= v'_k(t) + v''_k(t), \end{aligned} \tag{171}$$

dove

$$\begin{aligned} i'_k(t) &= I_k, \\ v'_k(t) &= V_k, \end{aligned} \quad (172)$$

sono le soluzioni del circuito  $\mathcal{N}'$  in regime stazionario, e

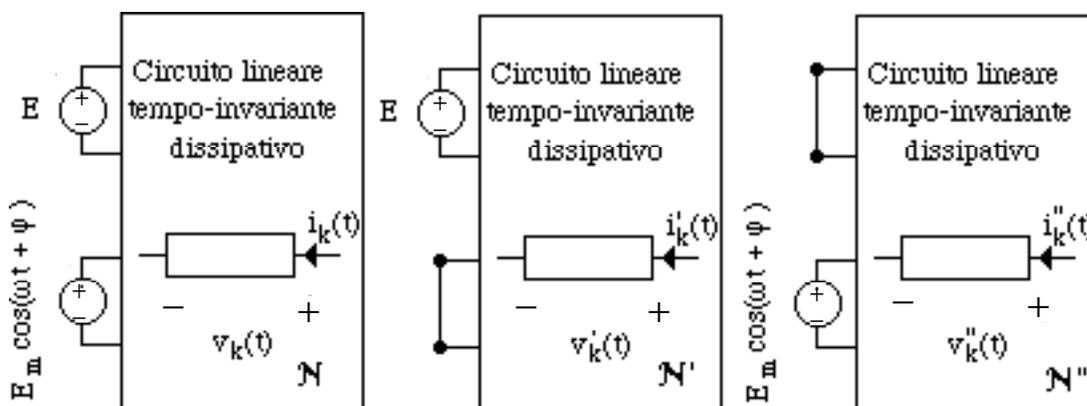
$$\begin{aligned} i''_k(t) &= I_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k), \\ v''_k(t) &= V_{mk} \cos(\omega t + \beta_k), \end{aligned} \quad (173)$$

sono le soluzioni del circuito  $\mathcal{N}''$  in regime sinusoidale. Pertanto la soluzione di regime del circuito  $\mathcal{N}$  è ( $k = 1, 2, \dots, l$ )

$$\begin{aligned} i_k(t) &= I_k + I_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k), \\ v_k(t) &= V_k + V_{mk} \cos(\omega t + \beta_k). \end{aligned} \quad (174)$$

Questo regime non è più sinusoidale, ma è periodico: il periodo è quello imposto dal generatore sinusoidale,  $T = 2\pi/\omega$ .

Il circuito  $\mathcal{N}'$  in regime stazionario può essere risolto con la tecnica illustrata nel § 5.2, mentre il circuito in regime sinusoidale  $\mathcal{N}''$  può essere risolto con il metodo dei fasori.



**Fig. 5.33** (a) Circuito a regime con un generatore stazionario e uno sinusoidale; (b) e (c) circuiti ausiliari.

La potenza istantanea  $p_k(t)$  assorbita dal  $k$ -esimo bipolo vale

$$p_k(t) = v_k(t)i_k(t) = [V_k + V_{mk} \cos(\omega t + \beta_k)] [I_k + I_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k)] \quad (175)$$

Per la potenza istantanea non vale la proprietà della sovrapposizione degli effetti: l'espressione (175) non è la somma delle potenze istantanee assorbite dal  $k$ -esimo bipolo nel circuito  $N'$  e nel circuito  $N''$ .

La potenza istantanea  $p_k(t)$  data dalla (175) è una funzione periodica con periodo  $T = 2\pi/\omega$ . Si consideri il suo valore medio  $P_{av}^{(k)}$  sul periodo  $T$ . Si ottiene:

$$P_{av}^{(k)} = \frac{1}{T} \int_0^T p_k(\tau) d\tau = V_k I_k + \frac{1}{2} V_{mk} I_{mk} \cos(\alpha_k - \beta_k). \quad (176)$$

Allora, la potenza media  $P_{av}^{(k)}$  è uguale alla somma delle potenze medie assorbite dal  $k$ -esimo bipolo nel regime stazionario del circuito  $N'$  e nel regime sinusoidale del circuito  $N''$ . Come si vedrà, tale risultato è di validità generale.

### 5.12.2 Sovrapposizione di regimi regime sinusoidali con diverse pulsazioni

Si consideri un circuito  $N$  lineare, tempo invariante e dissipativo, alimentato, ad esempio, da due generatori indipendenti di tensione sinusoidali che funzionano, rispettivamente, alle pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  con  $\omega_1 \neq \omega_2$ , (Figura 5.34). I due generatori impongono un regime dato dalla sovrapposizione dei regimi che ciascun generatore imporrebbe se agisse da solo: il regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_1$  imposto dal generatore sinusoidale a pulsazione  $\omega_1$  e il regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_2$  imposto dall'altro generatore sinusoidale.

Si considerino i due circuiti ausiliari ottenuti spegnendo un generatore per volta. Il circuito ausiliario  $N'$  è in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_1$  e il circuito ausiliario  $N''$  è in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_2$ . La soluzione di regime del circuito  $N$  è data da ( $k = 1, 2, \dots, l$ )

$$\begin{aligned} i_k(t) &= i'_k(t) + i''_k(t), \\ v_k(t) &= v'_k(t) + v''_k(t), \end{aligned} \quad (177)$$

dove

$$\begin{aligned} i'_k(t) &= I'_{mk} \cos(\omega_1 t + \alpha'), \\ v'_k(t) &= V'_{mk} \cos(\omega_1 t + \beta'), \end{aligned} \quad (178)$$

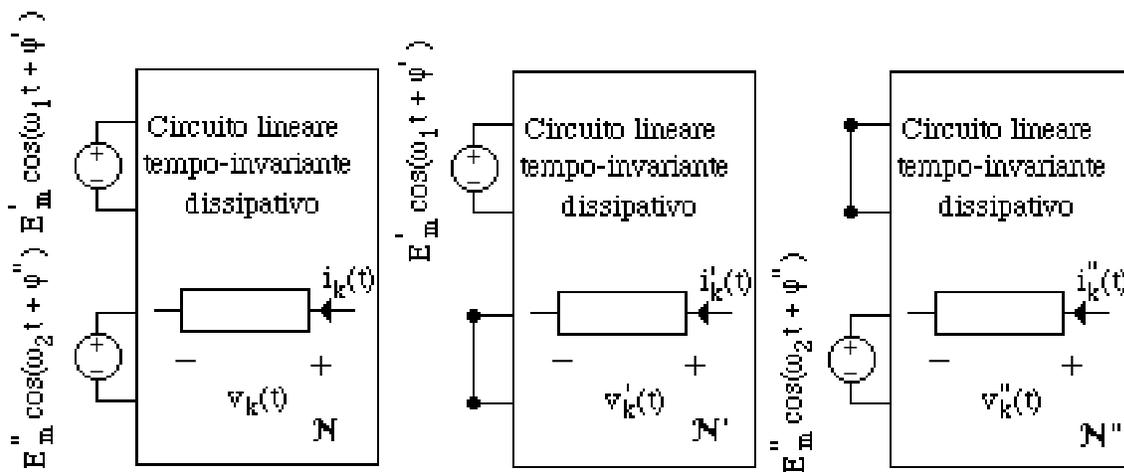
sono le soluzioni del circuito  $N'$  in regime sinusoidale, e

$$\begin{aligned} i''_k(t) &= I''_{mk} \cos(\omega_2 t + \alpha''), \\ v''_k(t) &= V''_{mk} \cos(\omega_2 t + \beta''), \end{aligned} \quad (179)$$

sono le soluzioni del circuito  $N''$  in regime sinusoidale. Pertanto la soluzione di regime del circuito  $N$  è ( $k = 1, 2, \dots, l$ )

$$\begin{aligned} i_k(t) &= I'_{mk} \cos(\omega_1 t + \alpha'_k) + I''_{mk} \cos(\omega_2 t + \alpha''_k), \\ v_k(t) &= V'_{mk} \cos(\omega_1 t + \beta'_k) + V''_{mk} \cos(\omega_2 t + \beta''_k). \end{aligned} \quad (180)$$

Il regime che si instaura nel circuito  $N$  non è sinusoidale, perché  $\omega_1 \neq \omega_2$ .



**Fig. 5.34** (a) Circuito a regime con due generatori sinusoidali; (b) e (c) circuiti ausiliari.

Il circuito  $N'$  in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_1$  e il circuito  $N''$  in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_2$  possono essere risolti con il metodo fasoriale. Attenzione: le impedenze corrispondenti al circuito  $N'$  sono diverse da quelle corrispondenti al circuito  $N''$ , perché le pulsazioni di funzionamento sono diverse!

È sempre possibile porre

$$\omega_1 = r\omega_2 \quad (181)$$

dove  $r$  è un numero reale positivo. Se  $r$  è un numero razionale, cioè  $r$  può essere espresso come rapporto tra due numeri interi,

$$r = \frac{n_1}{n_2} \quad (182)$$

allora le due sinusoidi hanno un periodo comune,

$$T_c = n_1 \frac{2\pi}{\omega_1} = n_2 \frac{2\pi}{\omega_2} \quad (183)$$

In questo caso le correnti e le tensioni descritte dalle (180) sono funzioni periodiche di periodo  $T_c$ , e quindi il regime è **periodico** di periodo  $T_c$ . Il caso più semplice è quando  $\omega_2 = m\omega_1$  con  $m$  intero (positivo).

Se  $r$  è un numero irrazionale, cioè non esprimibile come rapporto tra interi, (per esempio  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$ ,  $\ln 2$ , ...), allora le espressioni date dalle (180) non sono periodiche e il regime non è periodico: in questo caso il regime si dice **quasi-periodico**, perché pur essendo entrambe le componenti periodiche la loro somma dà luogo a un andamento temporale non periodico.

La potenza istantanea  $p_k(t)$  assorbita dal  $k$ -esimo bipolo vale

$$p_k(t) = v_k(t)i_k(t) = [V'_{mk} \cos(\omega_1 t + \beta'_k) + V''_{mk} \cos(\omega_2 t + \beta''_k)] \cdot [I'_{mk} \cos(\omega_1 t + \alpha'_k) + I''_{mk} \cos(\omega_2 t + \alpha''_k)] \quad (184)$$

Per la potenza istantanea, come nel caso analizzato in precedenza, non vale la proprietà della sovrapposizione degli effetti. L'espressione (184) non è la somma delle potenze istantanee assorbite dal  $k$ -esimo bipolo nel circuito  $N'$  e nel circuito  $N''$ .

Si assuma che  $r$  sia un numero razionale. La potenza istantanea  $p_k(t)$  è una funzione periodica con periodo  $T_c$ . Allora, il suo valore medio sul periodo  $T_c$ ,  $P_{av}^{(k)}$ , vale:

$$P_{mk} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} p_k(\tau) d\tau = \frac{1}{2} V'_k I'_k \cos(\alpha'_k - \beta'_k) + \frac{1}{2} V''_{mk} I''_{mk} \cos(\alpha''_k - \beta''_k). \quad (185)$$

La potenza media  $P_{av}^{(k)}$  è uguale alla somma delle potenze medie assorbite dal  $k$ -esimo bipolo nel circuito  $N'$  e nel circuito  $N''$  se  $r$  è un numero razionale, cioè alla somma delle potenze medie assorbite se i generatori agissero uno alla volta.

**Attenzione !!!:** la (185) non vale se  $\omega_1 = \omega_2$ , cioè se  $r = 1$ . Infatti, la (185) è stata ottenuta utilizzando l'integrale definito notevole

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 1/2 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases} \quad (186)$$

dove  $m$  e  $n$  sono due numeri interi.

Se  $r$  non è un numero razionale, non esiste un periodo comune, e la potenza media non può essere definita come nella (185). Per un regime quasi-periodico si definisce la potenza media  $P_{av}^{(k)}$  come

$$P_{av}^{(k)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T p_k(\tau) d\tau \right\}. \quad (187)$$

Sostituendo le (184) nella (187) si ottiene ancora (i calcoli sono un poco lunghi, ma semplici)

$$P_{av}^{(k)} = \frac{1}{2} V_k' I_k' \cos(\alpha_k' - \beta') + \frac{1}{2} V_{mk}'' I_{mk}'' \cos(\alpha_k'' - \beta''). \quad (188)$$

### **Proprietà: sovrapposizione delle potenze medie**

Si consideri una rete lineare, tempo-invariante in regime permanente con due generatori sinusoidali indipendenti con pulsazioni diverse. La potenza media assorbita dal generico bipolo è uguale alla somma delle potenze medie assorbite dal bipolo se i generatori agissero uno alla volta.

Tutti i risultati di questo paragrafo si estendono immediatamente al caso di  $m$  generatori sinusoidali indipendenti con  $m$  pulsazioni diverse.

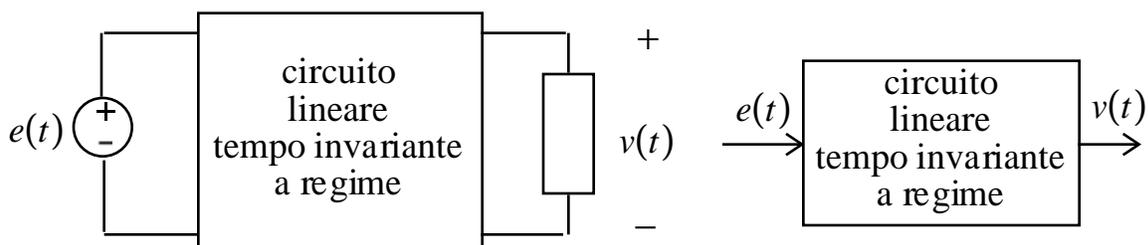
### 5.13 Risposta in frequenza di un circuito e funzione di rete

Nell'analisi dei circuiti in regime sinusoidale condotta finora, si è visto come calcolare tensioni e correnti di un circuito quando la pulsazione dei generatori è fissata. Nel caso in cui vi siano generatori con pulsazioni diverse, applicando la sovrapposizione degli effetti, si può ricondurre l'analisi del problema allo studio di tanti circuiti in ciascuno dei quali vi siano generatori tutti con la stessa pulsazione.

Se si fa in modo che l'ampiezza di un generatore sinusoidale rimanga costante, e si fa variare la pulsazione del generatore stesso, si ottiene la cosiddetta risposta in frequenza del circuito. La risposta in frequenza può essere considerata come la descrizione del comportamento in regime sinusoidale in funzione della pulsazione.

La risposta in frequenza dei circuiti risulta importante per molte applicazioni, in particolare nelle telecomunicazioni. Una applicazione specifica si ha, ad esempio, nei filtri elettrici, che sono in grado di eliminare o attenuare segnali a frequenze indesiderate e invece far passare inalterati i segnali alle frequenze desiderate. Essi sono utilizzati nei sistemi radio, TV e telefonici per separare uno dei canali trasmessi da tutti quelli che sono effettivamente presenti.

Si consideri un circuito lineare tempo invariante in regime permanente, con un solo generatore indipendente, costituito da resistori, induttori, condensatori, trasformatori ideali, generatori controllati, giratori e circuiti accoppiati.



**Fig. 5.35** *Circuito in regime permanente.*

Lo si consideri, per descriverne il funzionamento, come un *sistema ingresso-uscita*, vale a dire che, si sceglie una coppia di morsetti da cui alimentare il circuito con, ad esempio, un generatore di tensione indipendente,  $e = e(t)$ , e sia, ad esempio, la tensione di un determinato bipolo o porta, la grandezza di uscita di interesse, Figura 5.35. La tensione  $e = e(t)$  imposta dal generatore svolge il ruolo di ingresso (grandezza da elaborare), mentre la tensione  $v = v(t)$

quello di uscita (grandezza elaborata): la tensione  $v(t)$  è la risposta (a regime) del circuito al segnale  $e(t)$  applicato in ingresso.

### Osservazione

Siccome per i circuiti lineari a regime vale la sovrapposizione degli effetti, il caso più generale in cui sono presenti più *ingressi* può essere analizzato considerando acceso un solo generatore per volta e sovrapponendo, poi, gli effetti. In questo modo lo studio del problema più generale è ricondotto allo studio di circuiti a regime con un solo generatore.



Il circuito di Figura 5.35 può essere considerato come un doppio bipolo. Il generatore indipendente potrebbe rappresentare una tensione applicata alla porta di ingresso e prodotta da un altro circuito. Il più delle volte esso è un “segnale” che deve essere “elaborato”. A sua volta, la tensione della porta di uscita potrebbe sollecitare un altro circuito.

Si assuma che il “segnale” in ingresso  $e(t)$ , definito per  $-\infty < t < +\infty$ , sia rappresentabile attraverso la somma discreta (e finita)

$$e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \gamma_0) + E_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + \dots + E_h \cos(\omega_h t + \gamma_h) + \dots \quad (189)$$

di funzioni sinusoidali con pulsazioni  $\omega_h$ ;  $E_h$  e  $\gamma_h$  sono, rispettivamente, l'ampiezza e la fase delle singole componenti armoniche che costituiscono il segnale.

### Osservazione

In particolare, se

$$\omega_h = h\omega_0, \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (190)$$

$e(t)$  è una funzione periodica di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (191)$$

cioè  $e(t) = e(t + T)$  per ogni valore di  $t$ .

La somma data dalla (189) può essere costituita da un numero finito o infinito di termini. Quando il numero di termini è infinito ed è verificata la (192), la (189) è una serie di Fourier. Una funzione periodica con periodo  $T$  può essere rappresentata attraverso la **serie di Fourier**

$$e(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_n e^{in\omega_0 t}, \quad (192)$$

dove

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad (193)$$

se esiste l'integrale definito

$$\int_{-T/2}^{T/2} |e(t)| dt. \quad (194)$$

I coefficienti  $\tilde{E}_n$  sono complessi e verificano la condizione

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_{-n}^*, \quad (195)$$

perché  $e(t)$  è una funzione reale di variabile reale. Posto

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{2} E_n e^{i\gamma_n}, \quad (196)$$

( $E_n/2$  è il modulo e  $\gamma_n$  è la fase del coefficiente complesso  $\tilde{E}_n$ ) e utilizzando la condizione (195) la serie (192) può essere riscritta come

$$e(t) = \sum_{h=0}^{+\infty} E_n \cos(n\omega_0 t + \gamma_n). \quad (197)$$

Ci sono funzioni che possono essere rappresentate solo tramite una somma continua di funzioni sinusoidali, cioè attraverso l'**integrale di Fourier**

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (198)$$

dove  $\tilde{E} = \tilde{E}(\omega)$  è la **trasformata di Fourier** della funzione  $e(t)$

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (199)$$

La trasformata di Fourier esiste se l'integrale definito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)| dt \quad (200)$$

esiste. La trasformata di Fourier  $\tilde{E} = \tilde{E}(\omega)$  è una funzione complessa della variabile reale  $\omega$  e verifica la condizione

$$\tilde{E}(-\omega) = \tilde{E}^*(\omega), \quad (200)$$

perché  $e(t)$  è una funzione reale di variabile reale. Posto

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{2} E(\omega) e^{i\gamma(\omega)}, \quad (201)$$

( $E(\omega)/2$  è il modulo e  $\gamma(\omega)$  è la fase della funzione complessa  $\tilde{E}(\omega)$ ) e utilizzando la condizione (200) l'integrale (199) può essere riscritto come

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E(\omega) \cos[\omega t + \gamma(\omega)] d\omega. \quad (202)$$

Le espressioni (197) e (202) possono considerarsi come una generalizzazione della somma discreta finita (189).

◆

Il circuito in esame è lineare e quindi vale la sovrapposizione degli effetti. Indichiamo con  $v_h(t)$  la risposta (a regime) che si avrebbe se il generico termine sinusoidale  $E_h \cos(\omega t + \gamma_h)$  nella somma (189) fosse presente da solo; quindi  $v_h(t)$  è una funzione sinusoidale. La risposta (a regime)  $v = v(t)$

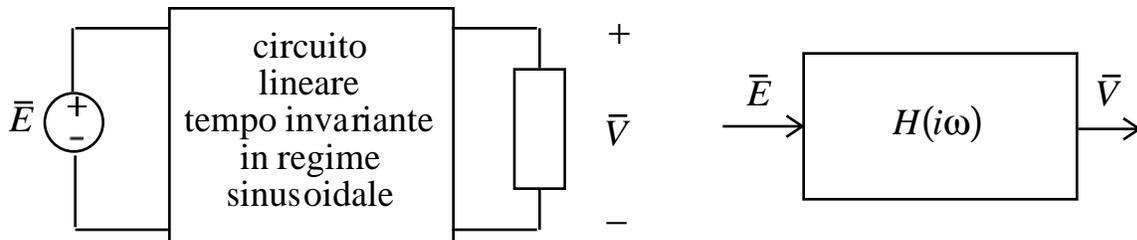
all'ingresso  $e = e(t)$  dato dalla somma (189) è uguale alla somma delle risposte (a regime)  $v_h(t)$  che si avrebbero se i singoli termini  $E_h \cos(\omega t + \gamma_h)$  agissero da soli,

$$v(t) = v_0(t) + v_1(t) + \dots + v_h(t) + \dots \quad (203)$$

È evidente allora che bisogna determinare la risposta (a regime) quando l'ingresso è una generica funzione sinusoidale

$$e(t) = E \cos(\omega t + \gamma), \quad (204)$$

per ogni valore della pulsazione  $\omega$ . In questo modo la soluzione del problema è ricondotta allo studio di un circuito in regime sinusoidale al variare della pulsazione  $\omega$ . Quando si fa in modo che l'ampiezza e la fase iniziale del generatore rimanga costante e si fa variare la pulsazione del generatore stesso, si ottiene la cosiddetta *risposta in frequenza* del circuito.



**Fig. 5.36** Funzione di rete.

Il circuito in esame quando la tensione in ingresso è data dalla (197) può essere analizzato al variare della pulsazione  $\omega$  utilizzando il metodo dei fasori, Figura 5.36a. Il fasore rappresentativo della tensione in ingresso è

$$\bar{E} = E e^{i\gamma}. \quad (205)$$

Indichiamo con

$$\bar{V} = V e^{i\theta} \quad (206)$$

il fasore rappresentativo della grandezza d'uscita.

Il rapporto tra il fasore rappresentativo della grandezza d'uscita e il fasore rappresentativo della grandezza di ingresso

$$H = \frac{\bar{V}}{\bar{E}} \quad (207)$$

è, in generale, una grandezza complessa che è indipendente dal fasore  $\bar{E}$  (per la linearità del circuito di impedenze e perché è presente un solo generatore indipendente). La grandezza  $H$  dipende solo dalla costituzione del circuito in esame e dalla pulsazione del generatore. Si intuisce che la dipendenza dalla frequenza è del tipo  $H = H(i\omega)$  perché la dipendenza delle impedenze elementari che compongono il circuito dalla pulsazione può solo del tipo  $i\omega$ . Alla funzione  $H = H(i\omega)$  si dà il nome di *funzione di rete* del circuito. Attraverso di essa si descrive la **risposta in frequenza** del circuito.

Si assuma che sia nota la risposta in frequenza  $H = H(i\omega)$  del circuito in esame. Sia  $\bar{V}_h$  il fasore rappresentativo della risposta (a regime) all'ingresso  $E_h \cos(\omega t + \gamma_h)$  e  $\bar{E}_h$  il fasore rappresentativo di quest'ultima. Allora dalla definizione di funzione di rete abbiamo

$$\bar{V}_h = H(i\omega_h)\bar{E}_h. \quad (208)$$

Poniamo

$$H(i\omega) = A(\omega)e^{i\alpha(\omega)}. \quad (209)$$

Il modulo della funzione di rete,  $A = A(\omega)$ , prende il nome di risposta in ampiezza e l'argomento,  $\varphi = \varphi(\omega)$ , prende il nome di risposta in fase. Allora abbiamo

$$\bar{V}_h = A(\omega_h)e^{i\alpha(\omega_h)}\bar{E}_h, \quad (210)$$

ovvero

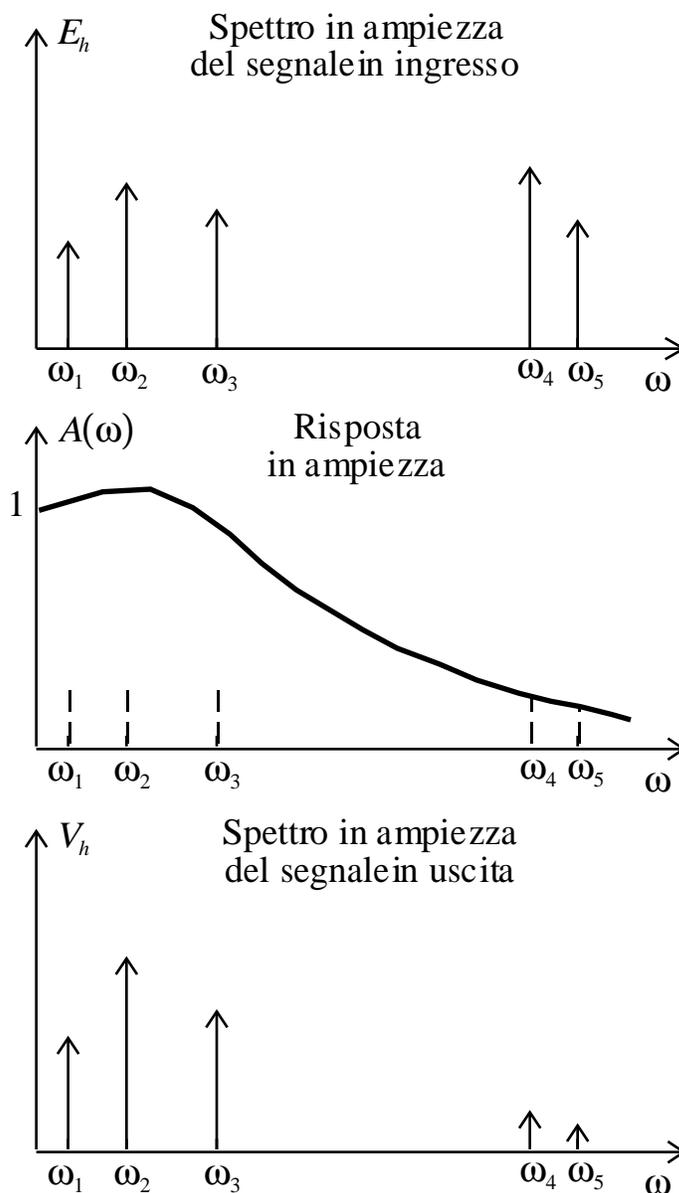
$$V_h = A(\omega_h)E_h \quad \text{e} \quad \vartheta_h = \varphi(\omega_h) + \gamma_h. \quad (211)$$

Di conseguenza per  $v_h(t)$  abbiamo

$$v_h(t) = A(\omega_h) E_h \cos[\omega_h t + \gamma_h + \phi(\omega_h)], \quad (212)$$

quindi dalla (203) abbiamo

$$v(t) = \sum_h A(\omega_h) E_h \cos[\omega_h t + \gamma_h + \phi(\omega_h)]. \quad (213)$$



**Fig. 5.37** *Analisi di un circuito attraverso la risposta in frequenza.*

Le ampiezze massime delle funzioni sinusoidali presenti nella somma (189) e della somma (213) possono essere rappresentata graficamente attraverso una sequenza di segmenti verticali, dove la lunghezza di ciascun segmento è uguale

all'ampiezza dell'armonica corrispondente, così come illustrato in Figura 5.37. Nell'esempio riportato in questa figura la risposta in ampiezza introduce una forte attenuazione per le ampiezze delle armoniche con pulsazioni  $\omega_4$  e  $\omega_5$ , e una lieve amplificazione per le ampiezze delle armoniche con pulsazioni  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ .

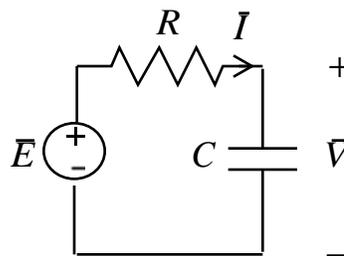
### Osservazione

È possibile misurare la risposta in ampiezza e la risposta in fase di un circuito (dissipativo) applicando in ingresso un generatore sinusoidale, misurando la grandezza di uscita quando il circuito è in regime sinusoidale, cioè dopo che il transitorio si è esaurito, e ripetendo le misure per diversi valori delle frequenze del generatore. Esistono degli apparati di misura che realizzano in maniera automatica queste operazioni. Essi sono gli analizzatori di spettro.



#### 5.13.1 Filtro passa-basso

Si consideri il circuito  $RC$  serie riportato in Figura 5.38. Si assuma come grandezza di ingresso la tensione  $\bar{E}$  e come grandezza d'uscita la tensione del condensatore  $\bar{V}$ .



**Fig. 5.38** Circuito  $RC$  serie.

La funzione di rete in questo caso è

$$H(i\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{E}} = \frac{-i/\omega C}{R - i/\omega C} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}, \quad (214)$$

dove

$$\tau = RC \quad (215)$$

è la costante di tempo del circuito  $RC$ .

La risposta in ampiezza è

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad (216)$$

e la risposta in fase è

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau). \quad (217)$$

In questo caso la risposta in ampiezza è una funzione monotona della pulsazione: essa assume il valore massimo  $A(0)=1$  per  $\omega=0$ , e decresce con legge monotona al crescere della pulsazione. Si noti che per  $\omega=1/\tau$   $A(1/\tau)=1/\sqrt{2}$ .

La pulsazione caratteristica  $\omega_{3dB} = 1/\tau$  prende il nome di *pulsazione di taglio a 3dB*<sup>1</sup>: alla pulsazione  $\omega_{3dB}$  la risposta in ampiezza è inferiore di 3dB al valore massimo  $A(0)=1$ . Infatti,  $1/\sqrt{2}$  rappresentato in *decibel* è uguale all'incirca a  $-3$ . In Figura 5.39 è illustrato l'andamento della risposta in ampiezza.

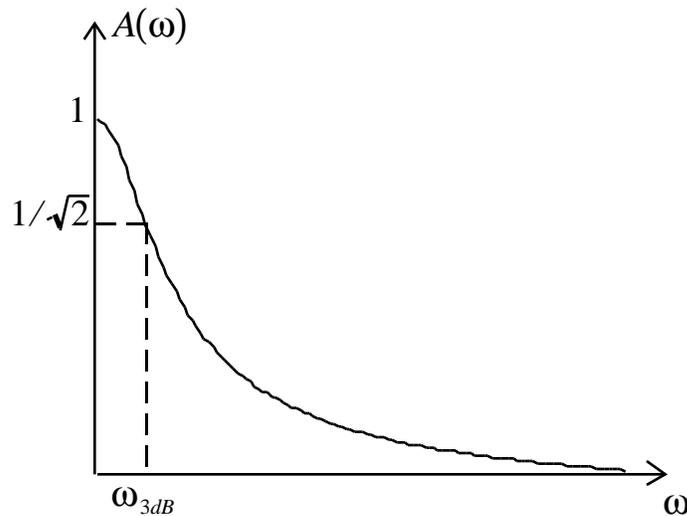
### Osservazione

La spiegazione dell'andamento qualitativo della risposta in ampiezza rappresentata in Figura 5.39 è la seguente. Nel circuito  $RC$  riportato in Figura 5.38 per  $\omega \rightarrow 0$  l'impedenza del condensatore tende all'infinito e quindi la tensione in uscita è proprio quella impressa dal generatore. Invece, per  $\omega \rightarrow \infty$  l'impedenza del condensatore tende a zero e quindi l'uscita tende anche essa a zero.




---

<sup>1</sup> La grandezza  $y = 20 \log A = 10 \log A^2$  è la cosiddetta rappresentazione in *decibel* (dB) della risposta in ampiezza ( $\log(\cdot)$  è il logaritmo in base 10);  $A(\omega_1)$  è inferiore a  $A(\omega_2)$  di 3 dB se  $20 \log A(\omega_1) - 20 \log A(\omega_2) = -3$ , cioè se  $A^2(\omega_1) = 10^{-0.3} A^2(\omega_2) \cong A^2(\omega_2)/2$  e quindi se  $A(\omega_1) \cong 0.71A(\omega_2)$ .



**Fig. 5.39** Risposta in ampiezza del filtro passa-basso.

Un circuito con una risposta in ampiezza di questo tipo è l'esempio più semplice di **filtro passa-basso**. La sua funzione è quella di sopprimere tutte le componenti armoniche ad alta frequenza del segnale in ingresso, cioè tutte le armoniche con pulsazioni al di sopra di una *pulsazione di taglio* caratteristica  $\Omega_{LPF}$ , che potremmo fissare, ad esempio, uguale a tre volte la pulsazione di taglio a 3dB,  $\Omega_{LPF} = 3\omega_{3dB}$ . La *banda oscura* è l'intervallo di pulsazioni  $3\omega_{3dB} < \omega < \infty$ .

La *banda passante* del filtro passa-basso è l'intervallo di pulsazioni in cui la risposta in ampiezza è molto prossima al valore unitario, ad esempio l'intervallo  $0 < \omega < \omega_{3dB}$ . Le ampiezze delle armoniche con pulsazioni comprese nella banda passante sono praticamente inalterate. L'intervallo restante,  $\omega_{3dB} < \omega < 3\omega_{3dB}$ , prende il nome di *banda di transizione* tra la banda passante e la banda oscura. In questa banda c'è un'attenuazione delle ampiezze delle armoniche, ma non la loro completa soppressione.

### 5.13.2 Filtro passa-alto

Se nel circuito  $RC$  di Figura 5.38 si assume la corrente  $\bar{I}$  come grandezza di uscita, si ha la funzione di rete:

$$H(i\omega) = \frac{\bar{I}}{\bar{E}} = \frac{1}{R - i/\omega C} = C \frac{i\omega}{1 + i\omega\tau}. \quad (218)$$

La risposta in ampiezza è data da (per  $\omega > 0$ )

$$A(\omega) = C \frac{\omega}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}. \quad (219)$$

e la risposta in fase vale (per  $\omega > 0$ ):

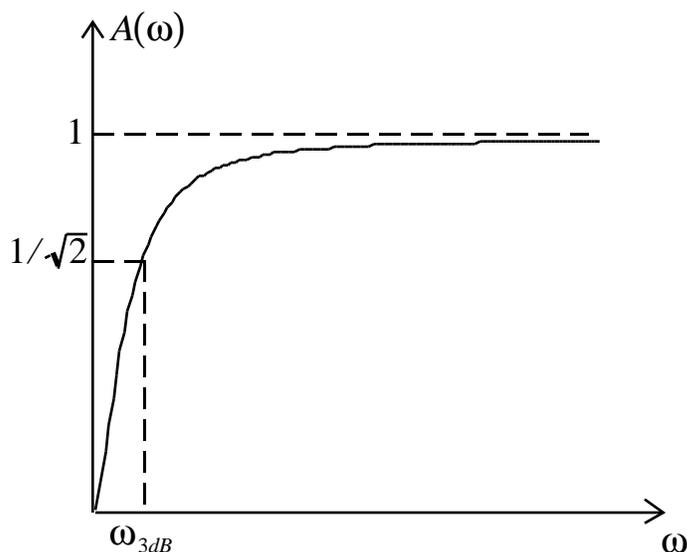
$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau). \quad (220)$$

In questo caso, a causa della presenza del fattore  $|\omega|$  la risposta in ampiezza è uguale a zero per  $\omega = 0$  (questo è anche il valore minimo);  $A(\omega)$  cresce con legge monotona al crescere della pulsazione. Il valore massimo della risposta in ampiezza è  $A(\infty) = C/\tau = 1/R$ .

Anche in questo caso  $\omega_{3dB} = 1/\tau$  è la pulsazione di taglio a 3dB. Infatti si ha

$$A(\omega_{3dB}) = A(\infty)/\sqrt{2}. \quad (221)$$

In Figura 5.40 è illustrato l'andamento della risposta in ampiezza.



**Fig. 5.40** Risposta in ampiezza del filtro passa-alto.

### Osservazione

L'andamento qualitativo della risposta in ampiezza riportata in Figura 5.40 si spiega facilmente in questo modo: per  $\omega \rightarrow 0$  l'impedenza del condensatore

tende all'infinito, quindi si comporta da circuito aperto, di conseguenza la corrente tende a zero. Invece per  $\omega \rightarrow \infty$  l'impedenza tende a zero e l'ampiezza della corrente tende ad assumere il massimo valore.



Un circuito con una risposta in ampiezza di questo tipo è l'esempio più semplice di **filtro passa-alto**. La sua funzione è quella di sopprimere tutte le componenti armoniche a bassa frequenza di un segnale, cioè tutte le armoniche con pulsazioni al di sotto di una *pulsazione di taglio* caratteristica  $\Omega_t$ , che potrebbe essere, ad esempio, scelta uguale a un terzo della pulsazione di taglio a 3dB,  $\Omega_{HPF} = \omega_{3dB} / 3$ , consentendo il passaggio di tutte le armoniche con pulsazioni superiori a  $\omega_{3dB}$ . In questo caso  $0 \leq \omega < \omega_{3dB} / 3$  è la banda oscura del filtro, mentre  $\omega_{3dB} < \omega$  è la banda passante. La banda di transizione è  $\omega_{3dB} / 3 < \omega < \omega_{3dB}$ .

Possiamo concludere che, il circuito *RC* illustrato in Figura 5.38 si comporta come un filtro passa-basso quando la grandezza di uscita è la tensione del condensatore, invece si comporta come filtro passa-alto quando la grandezza di uscita è la corrente, ovvero la tensione del resistore.

Il lettore dimostri che il circuito *RL* serie ha un comportamento duale a quello del circuito *RC* serie. Anche il circuito *RC* parallelo ha un comportamento duale se si considera la corrente del parallelo come grandezza di ingresso. Invece, il circuito *RL* parallelo si comporta come il circuito *RC* serie se si considera come grandezza di ingresso la corrente totale del parallelo e come uscita la corrente dell'induttore.

### 5.13.3 Filtro passa-banda

Si consideri ora il circuito *RLC* serie analizzato nel § 5.11.5 (Figura 5.30a) e si assuma come grandezza di uscita la corrente  $\bar{I}$ . La funzione di rete è in questo caso l'ammettenza equivalente del bipolo *RLC* serie

$$H(i\omega) = \frac{\bar{I}}{\bar{E}} = \frac{1}{R + i\omega L \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)}; \quad (222)$$

$\omega_r = 1/\sqrt{LC}$  è la pulsazione di risonanza. Per la risposta in ampiezza abbiamo

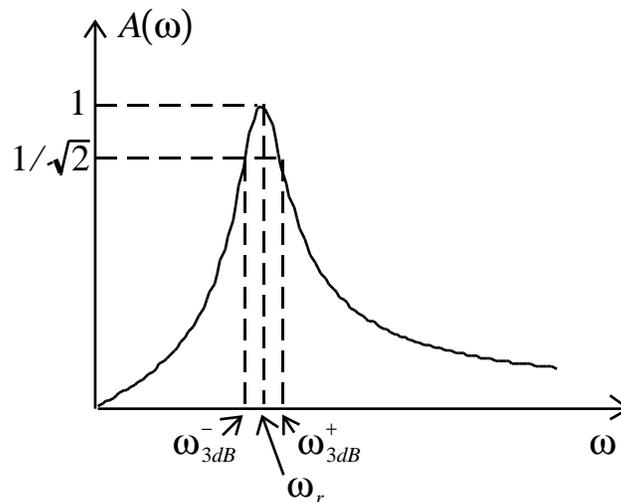
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)^2}}; \quad (223)$$

la risposta in fase è data dall'espressione

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[ \omega RC \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right) \right]. \quad (224)$$

L'andamento della risposta in ampiezza e l'andamento della risposta in fase sono già stati riportati nelle Figure 5.31 e 5.32.

La risposta in ampiezza in questo caso tende a zero per  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$ , ed è massima alla pulsazione  $\omega = \omega_r$ ; il massimo di  $A(\omega)$  è uguale a  $1/R$ .



**Fig. 5.41** Risposta in ampiezza del filtro passa-banda.

### Osservazione

L'andamento qualitativo della risposta in ampiezza riportata in Figura 5.41 si può spiegare qualitativamente in questo modo: per  $\omega \rightarrow 0$  l'impedenza del condensatore tende all'infinito, quindi si comporta come un circuito aperto, di conseguenza la corrente tende a zero; per  $\omega \rightarrow \infty$  l'impedenza dell'induttore tende all'infinito, quindi si comporta da circuito aperto, di conseguenza la corrente tende di nuovo a zero. Invece, per  $\omega = \omega_r$ , l'impedenza della serie LC è

uguale a zero e l'impedenza del bipolo  $RLC$  serie è, in modulo, minima; di conseguenza l'ampiezza della corrente è massima.

◆

Anche in questo caso possiamo definire la pulsazione di taglio a 3dB,  $\omega_{3dB}$ , come quel valore della pulsazione in corrispondenza del quale l'ampiezza massima è inferiore di 3 dB rispetto al valore massimo di  $A(\omega)$ ,

$$A(\omega_{3dB}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{R}. \quad (225)$$

La pulsazione  $\omega_{3dB}$  deve essere soluzione dell'equazione

$$\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_{3dB}^2}\right)^2 = \frac{1}{Q^2} \frac{\omega_r^2}{\omega_{3dB}^2}, \quad (226)$$

dove  $Q$  è il fattore di qualità del circuito  $RLC$  serie,  $Q = \omega_r L / R$ . Posto  $x \equiv \frac{\omega_r^2}{\omega_{3dB}^2}$ , la (226) diventa

$$x^2 - \left(2 + \frac{1}{Q^2}\right)x + 1 = 0. \quad (227)$$

Questa equazione ha due radici positive, quindi esistono due valori positivi di  $\omega_{3dB}$  che verificano la (226). Facilmente si verifica che un valore di  $\omega_{3dB}$  è più piccolo di  $\omega_r$ ,  $\omega_{3dB}^-$ , e l'altro più grande,  $\omega_{3dB}^+$ .

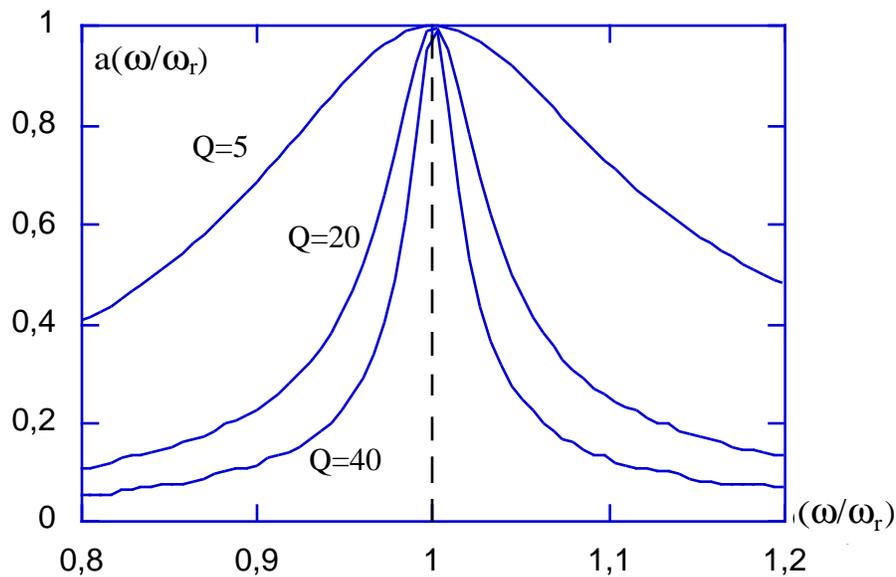
Per  $Q \gg 1$  è possibile ottenere un'espressione approssimata per le pulsazioni di taglio molto semplice,

$$\omega_{3dB}^{\pm} \cong \omega_r \pm \frac{R}{2L} = \omega_r \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right). \quad (228)$$

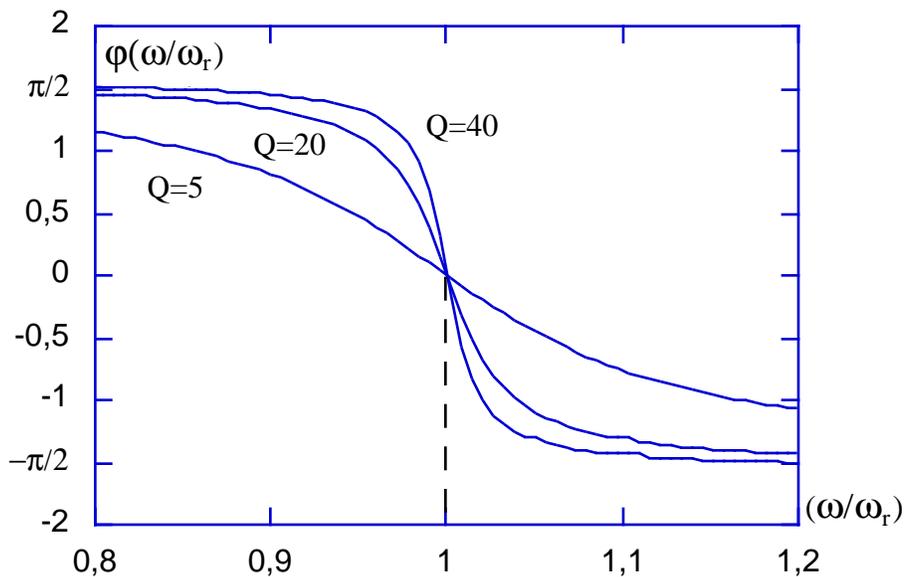
In questa situazione la risposta in ampiezza ha valori compresi nell'intervallo  $\left(\frac{1}{R\sqrt{2}}, \frac{1}{R}\right)$  se i valori delle pulsazioni sono compresi nell'intervallo che ha il baricentro in  $\omega = \omega_r$  e larghezza

$$\omega_{3dB}^+ - \omega_{3dB}^- \cong \frac{\omega_r}{Q}. \quad (229)$$

Quando cresce il fattore di qualità del circuito l'intervallo delle pulsazioni in cui l'ampiezza è compresa nell'intervallo  $\left(\frac{1}{R\sqrt{2}}, \frac{1}{R}\right)$  decresce come  $1/Q$ .



**Fig. 5.42** Grafici della risposta in ampiezza normalizzata per diversi valori di  $Q$ .



**Fig. 5.43** Grafici della risposta in fase per diversi valori di  $Q$ .

### Osservazione

Per evidenziare meglio la dipendenza della risposta in ampiezza dal fattore di qualità  $Q$  si consideri l'espressione della risposta in ampiezza normalizzata al suo valore massimo  $1/R$ ,

$$a(\omega/\omega_r) = \frac{A}{\frac{1}{R}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \frac{L^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)^2}}. \quad (230)$$

È immediato verificare che

$$a(\omega/\omega_r) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left[ (\omega/\omega_r) - (\omega_r/\omega) \right]^2}}. \quad (231)$$

Per la risposta in fase abbiamo

$$\varphi(\omega/\omega_r) = -\text{arctg}\left\{Q\left[(\omega/\omega_r) - (\omega_r/\omega)\right]\right\}. \quad (232)$$

Nelle Figure 5.42 e 5.43 sono illustrati i grafici dell'ampiezza  $a(\omega/\omega_r)$  e della fase  $\varphi(\omega/\omega_r)$  al crescere del fattore di qualità. Quanto più alto è il fattore di qualità tanto più stretta è la regione nell'intorno di  $\omega/\omega_r = 1$  in cui la funzione  $a(\omega/\omega_r)$  è vicina al valore massimo e tanto più brusco è il cambiamento di pendenza della curva della fase iniziale.

◆

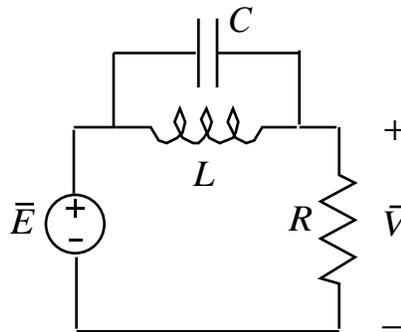
Questo circuito si comporta da **filtro passa-banda**. Un filtro passa-banda sopprime tutte le componenti armoniche di un segnale con pulsazioni all'esterno di un intervallo (banda) centrato alla frequenza di risonanza, lasciando praticamente inalterate le ampiezze delle armoniche con pulsazioni all'interno di quella banda. Nel caso in esame le ampiezze delle armoniche con pulsazioni esterne a una banda  $(\omega_r - \Omega_{PBF}, \omega_r + \Omega_{PBF})$  centrata in  $\omega_r$  (banda oscura del filtro passa-banda) vengono notevolmente attenuate, rispetto alle

ampiezze delle armoniche con pulsazioni esterne a tale intervallo. Potremmo fissare, anche in questo caso,  $\Omega_{BPF}$  uguale a due o tre volte la pulsazione di taglio a 3dB,  $\Omega_{BPF} = 3\omega_{3dB}$ . La banda passante del filtro è l'intervallo  $(\omega_r - \omega_{3dB}, \omega_r + \omega_{3dB})$ ;  $2\omega_{3dB}$  è la larghezza della banda passante del filtro a 3dB. La larghezza della banda passante tende a zero per  $Q \rightarrow \infty$  come  $1/Q$ .

Un circuito con una risposta in ampiezza di questo tipo è un circuito *risonante alla pulsazione*  $\omega_r$ ; ( $\omega_r/2\pi$  è la frequenza di risonanza del circuito). In corrispondenza della pulsazione di risonanza l'impedenza equivalente della serie costituita dall'induttore e dal condensatore è nulla e quindi il modulo dell'impedenza equivalente vista dal generatore è minima (il fenomeno della risonanza in un circuito *RLC* serie viene descritto nel Capitolo 8).

### 5.13.3 Filtro taglia-banda

Si consideri ora il circuito *RLC* riportato in Figura 5.44, si assuma come grandezza di uscita la tensione del resistore  $\bar{V}$  e come grandezza di ingresso la tensione  $\bar{E}$ .



**Fig. 5.44** Un circuito che funziona da filtro taglia banda.

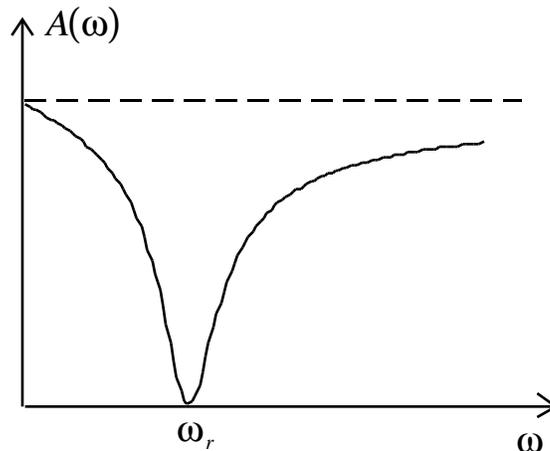
Il lettore determini la funzione di rete, la risposta in ampiezza e la risposta in fase e verifichi che l'andamento qualitativo della risposta in ampiezza è quello riportato in Figura 5.45.

### Osservazione

L'andamento qualitativo della risposta in ampiezza riportata in Figura 5.48 si può spiegare qualitativamente in questo modo: per  $\omega \rightarrow 0$  l'impedenza dell'induttore tende a zero, quindi si comporta come un corto circuito, di conseguenza l'uscita  $\bar{V} \rightarrow \bar{E}$ ; per  $\omega \rightarrow \infty$  l'impedenza del condensatore tende

all'infinito, quindi si comporta come un corto circuito, di conseguenza di nuovo l'uscita  $\bar{V} \rightarrow \bar{E}$ . Invece, per  $\omega = \omega_r$ , l'ammettenza del parallelo  $LC$  è uguale a zero e, quindi, l'impedenza è infinita, di conseguenza  $\bar{V} = \bar{0}$ .

◆



**Fig. 5.45** Risposta in ampiezza del filtro taglia-banda.

Questo circuito si comporta come un **filtro taglia-banda**. Un filtro taglia-banda ha la funzione di sopprimere tutte le componenti armoniche di un segnale con pulsazioni all'interno di una certa banda e lasciare inalterate le ampiezze di tutte le armoniche con pulsazioni all'esterno di quella banda.

#### 5.14 Cenni sui sistemi elettrici di potenza e sulle reti elettriche trifase

Nell'ingegneria dei sistemi elettrici di potenza funzionanti in regime sinusoidale (come quelli che producono energia elettrica e poi la distribuiscono per essere utilizzata nelle abitazioni, negli uffici, nei laboratori, nelle industrie, nei servizi, ...) si usa definire il fasore rappresentativo di una generica grandezza sinusoidale usando come modulo il valore efficace della grandezza sinusoidale al posto del valore massimo.

Il valore efficace  $X_{eff}$  (*valore quadratico medio*) di una grandezza periodica  $x(t)$  di periodo  $T$  è così definito

$$X_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}. \quad (233)$$

quindi il valore efficace della grandezza sinusoidale  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$  è dato da

$$A_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [A_m \cos(\omega t + \alpha)]^2 dt} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}. \quad (234)$$

Il fasore rappresentativo della grandezza sinusoidale  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$  può essere, allora, definito usando il valore efficace della grandezza sinusoidale come modulo, cioè

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \bar{A} = A_{eff} e^{i\alpha}. \quad (235)$$

È immediato verificare che la potenza media assorbita da un generico bipolo in regime sinusoidale è (non c'è più il fattore 1/2 !!!)

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(\tau) d\tau = I_{eff} V_{eff} \cos(\beta - \alpha) = I_{eff} V_{eff} \cos(\varphi), \quad (236)$$

dove abbiamo posto  $\varphi = (\beta - \alpha)$  (la corrente è  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha)$  e la tensione è  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \beta)$ ).

La potenza media assorbita dal resistore è (essa ricorda l'espressione del caso stazionario)

$$P_{av} = R I_{eff}^2 = \frac{V_{eff}^2}{R}. \quad (237)$$

La potenza complessa è definita come (non c'è più il fattore 1/2 perché il modulo del fasore rappresentativo della tensione è il valore efficace della tensione e il modulo del fasore rappresentativo della corrente è il valore efficace della corrente)

$$P = \bar{V} \bar{I}^*. \quad (236)$$

L'espressione della potenza reattiva assorbita da un bipolo diventa

$$Q = I_{eff} V_{eff} \sin(\beta - \alpha) = P_{av} \tan \varphi. \quad (237)$$

Ad esempio, nelle abitazioni, la società per l'energia elettrica fornisce l'alimentazione a 220 volt in regime sinusoidale, dove 220 è il valore efficace della tensione sinusoidale; la frequenza della tensione sinusoidale è 50 Hz. Pertanto la tensione istantanea è  $220\sqrt{2} \cos(2\pi 50t + \beta)$  ( $V_m = 220\sqrt{2} \cong 311$  volt,  $\omega = 2\pi 50 \cong 314$  rad/s, la fase iniziale  $\beta$  dipende dalla scelta dell'origine per la variabile temporale).

Nei sistemi di potenza i valori nominali di tensione e di corrente che assicurano il corretto funzionamento del **bipolo utilizzatore** (ad esempio, una lampada elettrica, un televisore, un computer, un motore elettrico monofase, ...) sono espressi tramite i valori efficaci.

In generale la caratteristica di un bipolo utilizzatore può essere specificata attraverso:

- (a) il valore efficace  $V_{eff}$  della tensione nominale di funzionamento;
- (b) la potenza media nominale  $P_{av}$  assorbita dal bipolo (oppure la potenza apparente);
- (c) il fattore di potenza  $\cos \varphi$ ;
- (d) il segno della potenza reattiva assorbita.

Da queste grandezze è possibile ricavare tutte le altre, ad esempio, il valore efficace nominale della corrente e l'impedenza del bipolo  $\dot{Z} = R + iX$ , utilizzando le relazioni (essendo  $R \geq 0$  per i bipoli passivi)

$$I_{eff} = \frac{P_m}{V_{eff} \cos \varphi}, \quad \varphi = \operatorname{sgn}(Q)|\varphi|, \quad (238)$$

$$R = \operatorname{Re}\{\dot{Z}\} = \frac{V_{eff}^2}{P_{av}} \cos^2 \varphi, \quad X = \operatorname{Im}\{\dot{Z}\} = R \tan \varphi. \quad (239)$$

### 5.14.1 Trasmissione dell'energia elettrica

Si consideri la trasmissione di potenza elettrica lungo una linea elettrica, Figura 5.46. Abbiamo il generatore di tensione, il bipolo utilizzatore e una resistenza  $R_L$  che descrive gli effetti dovuti alla dissipazione per effetto joule presente nei conduttori della linea elettrica (qui stiamo ignorando altri effetti, come, ad

esempio, quelli induttivi e e capacitivi). In questo caso, è prevista una quantità fissa di potenza media da trasmettere

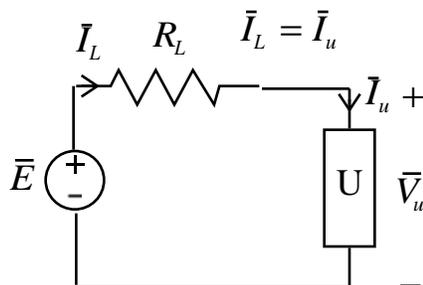
$$P_u = \text{Re}\{\bar{V}_u \bar{I}_u^*\} = V_u I_u \cos(\varphi_u). \quad (240)$$

che è quella assorbita dall'utilizzatore in condizioni di funzionamento nominali;  $V_u$  è il valore efficace della tensione nominale dell'utilizzatore,  $\cos(\varphi_u)$  è il fattore di potenza dell'utilizzatore e  $I_u$  è il valore efficace della corrente che attraversa la linea. Se  $R_L$  è piccola confrontata con il modulo dell'impedenza equivalente dell'utilizzatore, possiamo ritenere praticamente  $\bar{V}_u$  uguale alla tensione  $\bar{E}$ .

Una certa parte della potenza media prodotta dal generatore sarà assorbita dalla linea di trasmissione stessa a causa della dissipazione per effetto joule. Questa potenza è data dall'espressione

$$P_{\text{persa}} = R_L I_u^2. \quad (241)$$

Un conduttore di rame con la sezione di  $1 \text{ cm}^2$  e lungo  $1 \text{ km}$  ha una resistenza elettrica di circa  $0.2 \Omega$  (alla temperatura ambiente); pertanto un collegamento (realizzato con due conduttore) di  $100 \text{ Km}$  è caratterizzato da una resistenza elettrica di circa  $40 \Omega$  !!!



**Fig. 5.46** Schema semplificato di trasmissione dell'energia elettrica.

Per minimizzare questa perdita di potenza si hanno due alternative:

- minimizzare la corrente  $I_u$ . Poiché la potenza media trasmessa è fissa, ciò implica che si può aumentare (a) il fattore di potenza (il massimo è uno,  $\cos(\varphi_u) = 1$ ), (b) la tensione  $V_u$ . La prima possibilità si basa sul rifasamento, la seconda possibilità è basilare nella trasmissione di potenza attraverso linee ad alta tensione.

- ridurre  $R_L$ , cosa che può essere realizzata aumentando la sezione trasversale dei conduttori o il numero di conduttori. Questa seconda possibilità è alla base dei sistemi trifase di distribuzione dell'energia elettrica.

### 5.14.2 Rifasamento

Si consideri il circuito rappresentato in Figura 5.47. Esso è stato ottenuto aggiungendo al circuito riportato in Figura 5.46 un condensatore in parallelo all'utilizzatore. In questo modo la tensione dell'utilizzatore  $\bar{V}_u$  non cambia di molto e il funzionamento dell'utilizzatore resta praticamente inalterato,  $\bar{V}_u \cong \bar{E}$ . Di conseguenza resterà praticamente inalterata la corrente  $\bar{I}_u$ . L'obiettivo è minimizzare la potenza dissipata lungo la linea minimizzando il valore efficace della corrente di linea senza alterare il funzionamento dell'utilizzatore.

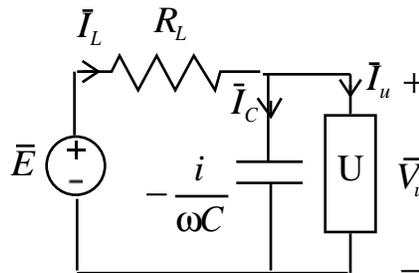


Fig. 5.47 Circuito rifasato.

Indichiamo con  $P_u$  la potenza media assorbita dall'utilizzatore, con  $Q_u$  la potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore, che nella quasi totalità dei casi è positiva, e con  $Q_c$  la potenza reattiva assorbita dal condensatore. La potenza complessa assorbita dal parallelo costituito dall'utilizzatore e dal condensatore è data da (la potenza reattiva assorbita dal condensatore è negativa)

$$\hat{P} = P_u + i(Q_u - |Q_c|) \Rightarrow |\hat{P}| = \sqrt{P_u^2 + (Q_u - |Q_c|)^2}. \quad (242)$$

D'altra parte siccome  $\bar{I}_L$  è la corrente totale che attraversa questo parallelo, abbiamo anche ( $E$  è il valore efficace della tensione del generatore)

$$\hat{P} = \bar{V}_u \bar{I}_L^* \cong \bar{E} \bar{I}_L^* \Rightarrow |\hat{P}| = E I_L. \quad (243)$$

Combinando le (242) e (243) si ha

$$I_L \cong \frac{1}{E} \sqrt{P_u^2 + (Q_a - |Q_c|)^2}. \quad (244)$$

Da questa relazione è evidente che il valore efficace della corrente di linea  $I_L$  quando  $|Q_c| \neq 0$ , cioè quando è presente il condensatore, è inferiore al valore efficace nella situazione in cui il condensatore è assente ( $Q_c = 0$ ). In questo caso la corrente di linea è uguale proprio alla corrente che attraversa l'utilizzatore. Certamente con  $|Q_c| \neq 0$  abbiamo

$$I_L \cong \frac{1}{E} \sqrt{P_u^2 + (Q_a - |Q_c|)^2} < I_u. \quad (245)$$

C'è un valore di capacità, per fissata pulsazione, in corrispondenza della quale la potenza reattiva erogata dal condensatore è uguale a quella che assorbe l'utilizzatore,

$$|Q_c| = \omega C E^2 = Q_u, \quad (246)$$

e, quindi,

$$I_L = I_L^{rif} \cong \frac{1}{E} \sqrt{P_u^2} < I_u. \quad (247)$$

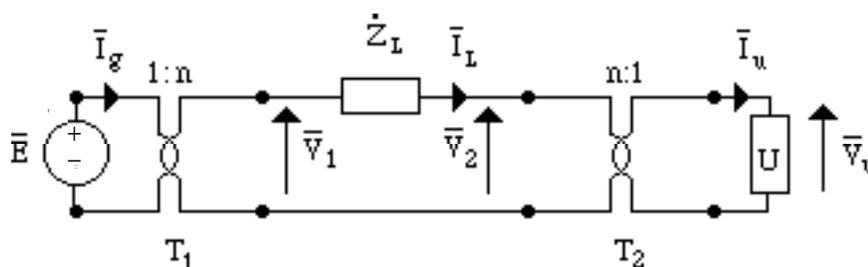
$I_L^{rif}$  è il valore minimo che il valore efficace della corrente di linea può assumere collegando in parallelo all'utilizzatore un condensatore.

Questo è il principio su cui si basa il rifasamento di un bipolo costituito da resistori e induttori. Rifasare un bipolo di tale genere significa introdurre una capacità in parallelo a esso in modo tale da ridurre la potenza apparente erogata dal generatore e lasciare inalterata la potenza media. In questo modo si riduce il valore efficace della corrente di linea e, quindi, la potenza dissipata per effetto joule lungo i conduttori con cui è realizzata la linea di trasmissione di energia elettrica.

Il bipolo equivalente al parallelo condensatore-utilizzatore ha un fattore di potenza più grande del fattore di potenza dell'utilizzatore (se la potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore è positiva).

### 5.14.3 Trasmissione dell'energia elettrica in alta tensione

Si consideri il circuito rappresentato in Figura 5.48. Determinare la potenza media e la potenza reattiva assorbita dal bipolo di impedenza  $\dot{Z}_L$ . Il bipolo utilizzatore è caratterizzato dal valore efficace nominale  $V_u$  della tensione, dalla potenza media assorbita  $P_u$  e dal fattore di potenza  $\cos\varphi_u$  (si assuma che la potenza reattiva da esso assorbita sia positiva). Pertanto è fissato il valore efficace nominale della corrente  $I_{eff_u}$  dell'utilizzatore e il ritardo del fasore della corrente rispetto a quello della tensione. Il circuito è alimentato con un generatore di tensione ( $\bar{E}$  è il fasore rappresentativo della tensione).



**Fig. 5.48** Modello semplificato di un sistema per la trasmissione dell'energia elettrica.

Nel circuito sono presenti due trasformatori ideali con rapporto di trasformazione  $n$  ( $n > 1$ ). Il primo trasformatore eleva il valore efficace della tensione di un fattore  $n$ , il secondo lo abbassa dello stesso fattore.

Questo circuito è il più semplice modello del sistema di trasmissione dell'energia elettrica: l'impedenza  $\dot{Z}_L$  porta in conto gli effetti dovuti ai conduttori delle linee elettriche con i quali viene trasmessa l'energia elettrica dalle centrali di produzione ai luoghi dove deve essere utilizzata (queste linee possono essere lunghe parecchie centinaia di chilometri, anche migliaia di chilometri).

Posto  $\dot{Z}_L = R_L + iX_L$  (la parte reale è legata alle perdite per effetto joule nei conduttori che trasportano l'energia elettrica e la parte immaginaria è legata al valore medio dell'energia del campo magnetico immagazzinata nella regione di spazio attorno ai conduttori), la potenza media e la potenza reattiva assorbite dal bipolo di impedenza  $\dot{Z}_L$  sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} P_L &= R_L I_{eff L}^2, \\ Q_L &= X_L I_{eff L}^2. \end{aligned} \quad (248)$$

Usando le equazioni caratteristiche del trasformatore ideale, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{V}_u &= \frac{\bar{V}_2}{n}, & \bar{V}_1 &= n\bar{E}, \\ \bar{I}_L &= \frac{\bar{I}_u}{n}, & \bar{I}_g &= n\bar{I}_L. \end{aligned} \quad (249)$$

Pertanto la potenza attiva e la potenza reattiva assorbite da  $\dot{Z}_L$  sono

$$P_L = \frac{1}{n^2} (R_L I_{eff u}^2), \quad Q_L = \frac{1}{n^2} (X_L I_{eff u}^2). \quad (250)$$

Allora tra la tensione del generatore di tensione e la tensione del bipolo utilizzatore c'è la relazione ( $\dot{Z}_u$  è l'impedenza dell'utilizzatore):

$$\bar{V}_u - \bar{E} = \frac{1}{n^2} (\dot{Z}_L \bar{I}_u) = \frac{1}{n^2} \left( \frac{\dot{Z}_L}{\dot{Z}_u} \bar{V}_u \right). \quad (251)$$

Un conduttore di rame con la sezione di  $1 \text{ cm}^2$  e lungo  $1 \text{ km}$  ha una resistenza elettrica di circa  $0.2 \Omega$  (alla temperatura ambiente); pertanto un collegamento (realizzato con due conduttore) di  $100 \text{ Km}$  è caratterizzato da una resistenza elettrica di circa  $40 \Omega$ . Il modulo dell'impedenza equivalente di un'utenza domestica è dell'ordine di  $10 \Omega$ , quella di un condominio è molto più piccola perché è l'equivalente di tante "impedenze" equivalenti in parallelo, e così via. Allora è chiaro che la resistenza del collegamento e così anche la reattanza possono essere molto più grandi di quelle dell'utilizzatore. Se  $n$  fosse uguale a uno, il che è equivalente ad un sistema senza trasformatori, avremmo che, la maggior parte della potenza prodotta dal generatore sarebbe assorbita dal conduttore di collegamento e la tensione sull'utilizzatore sarebbe molto diversa da quella del generatore. La cosa più grave sarebbe che la tensione dell'utilizzatore dipenderebbe sensibilmente dalla sua impedenza (ad esempio, se il vicino di casa accendesse in questo istante la lavatrice o il forno elettrico la

tensione potrebbe ridursi in modo tale da non potere far funzionare il computer con cui sto scrivendo). È, allora, evidente che se si utilizzano due trasformatori, così come descritto in Figura 5.51, con un rapporto di trasformazione  $n$  molto elevato ( $n$  può essere anche dell'ordine di 1000), si riduce drasticamente la potenza assorbita dai conduttori di collegamento (essa deve essere molto più piccola di quella realmente utilizzata) e la tensione sull'utilizzatore si discosta di poco dalla tensione del generatore, perché viene ridotto drasticamente il valore efficace della corrente nei conduttori di collegamento rispetto alla corrente dell'utilizzatore. In questo modo, dovendo restare inalterata la potenza elettrica assorbita dal bipolo utilizzatore, viene aumentato notevolmente il valore efficace della tensione tra i conduttori di collegamento (si raggiungono valori dell'ordine delle centinaia di kV). Siccome non è possibile realizzare generatori di tensione sinusoidale di potenza con valori efficaci così elevati, c'è bisogno del trasformatore  $T_1$  che eleva la tensione. Tipicamente in una stazione di potenza la tensione prodotta da un generatore in alternata varia tra 10 e 30 kV. Viene, poi, aumentata fino a centinaia di kV per trasmissioni a lunga distanza e infine diminuita per le fabbriche, per i laboratori, gli uffici, le abitazioni, ... .

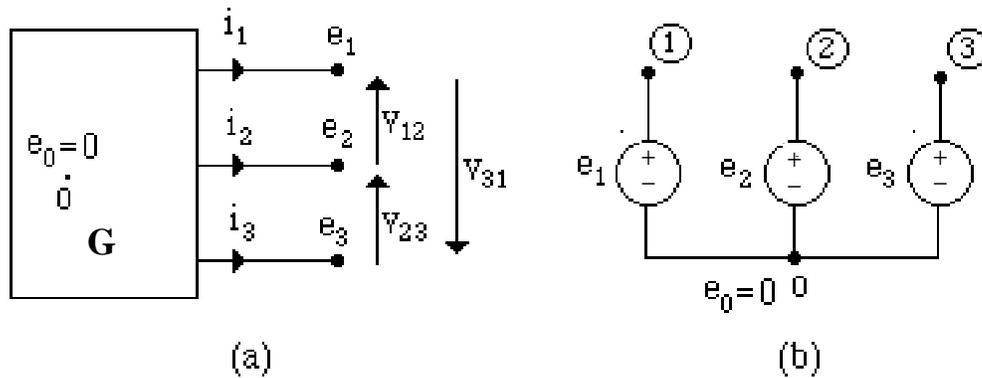
Le perdite lungo la linea si riducono, anche, mantenendo il fattore di potenza dell'utilizzatore quanto più possibile prossimo a uno (vedi esempio sul rifasamento). Per ridurre il fattore di potenza, a parità di potenza media assorbita, basta collegare un condensatore in parallelo all'utilizzatore se l'utilizzatore assorbe potenza reattiva (vedi l'esempio del rifasamento).

Un sistema di potenza con tensioni sinusoidali, quindi, è più conveniente di un sistema con tensioni costanti poiché con esso è più facile aumentare e diminuire la tensione con trasformatori (questi trasformatori devono essere necessariamente realizzati con induttori accoppiati perché le grandezze elettriche in gioco sono molto elevate). Inoltre i generatori di tensioni sinusoidali (alternatori) sono più facili da costruire rispetto alla apparecchiature che producono tensioni costanti (generatori in continua o dinamo), perché gli avvolgimenti ad alta tensione e quindi ad elevate correnti sono sulla parte fissa dell'apparecchiatura (statore), invece che sulla parte rotante (rotore) come in una dinamo.

#### **5.14.4 Sistemi trifase**

In questo paragrafo spiegheremo il motivo per cui i generatori trifase e più in generale le reti trifase sono impiegati nei sistemi di potenza.

Un bipolo generatore di tensione sinusoidale di un sistema di potenza prende il nome di **generatore monofase**. Oltre ai generatori monofase, nei sistemi di potenza in regime sinusoidale sono molto diffusi i **generatori trifase**.



**Fig. 5.49** (a) Generatore trifase, (b) circuito equivalente.

Si consideri un tripolo  $\mathbf{G}$  e lo si caratterizzi attraverso i potenziali di nodo, Figura 5.52 (il nodo di riferimento per il potenziale è all'interno del tripolo). Si assuma che i tre potenziali  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$  siano indipendenti dalle tre correnti  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$ . Questo è un **tripolo generatore indipendente di tensione**. In Figura 5.52b è illustrato un circuito equivalente a stella costituito da tre bipoli generatori indipendenti di tensione (è possibile anche considerare un circuito equivalente a triangolo).

Ai potenziali di nodo  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$  si dà il nome di **tensioni stellate** del generatore (esse sono proprio le tensioni su ciascun bipolo generatore del circuito equivalente a stella di Figura 5.52b). Alle tre tensioni  $v_{12}(t)$ ,  $v_{23}(t)$ ,  $v_{31}(t)$  si dà il nome di **tensioni concatenate**. Per esse si ha

$$\begin{aligned} v_{12} &= e_1 - e_2, \\ v_{23} &= e_2 - e_3, \\ v_{31} &= e_3 - e_1. \end{aligned} \quad (252)$$

Le tre tensioni stellate sono tra loro indipendenti, invece le tre tensioni concatenate non sono indipendenti tra di loro: per la legge di Kirchhoff per le tensioni la loro somma deve essere uguale a zero

$$v_{12} + v_{23} + v_{31} = 0. \quad (253)$$

Il tripolo **G** prende il nome di **generatore sinusoidale trifase simmetrico di tensione** se

$$\begin{aligned} e_1(t) &= E_m \cos(\omega t + \phi), \\ e_2(t) &= E_m \cos(\omega t + \phi - 2\pi/3), \\ e_3(t) &= E_m \cos(\omega t + \phi - 4\pi/3). \end{aligned} \quad (254)$$

I fasori rappresentativi delle tensioni stellate sono

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= E_{eff} e^{i\phi}, \\ \bar{E}_2 &= E_{eff} e^{i(\phi - 2\pi/3)}, \\ \bar{E}_3 &= E_{eff} e^{i(\phi - 4\pi/3)}, \end{aligned} \quad (255)$$

dove

$$E_{eff} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (256)$$

Si noti che per l'insieme delle tensioni stellate vale la relazione

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0 \quad (257)$$

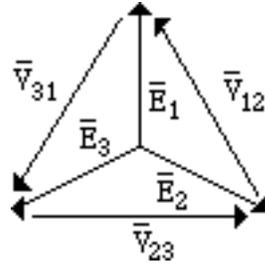
e, quindi,

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (258)$$

I fasori rappresentativi delle tensioni concatenate sono

$$\begin{aligned} \bar{V}_{12} &= \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \sqrt{3} \bar{E}_1 e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} E_{eff} e^{i(\phi - \pi/6)}, \\ \bar{V}_{23} &= \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \sqrt{3} \bar{E}_2 e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} E_{eff} e^{i(\phi - 5\pi/6)}, \\ \bar{V}_{31} &= \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = \sqrt{3} \bar{E}_3 e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} E_{eff} e^{i(\phi - 3\pi/2)}. \end{aligned} \quad (259)$$

Il diagramma fasoriale delle tensioni stellate e delle tensioni concatenate è illustrato in Figura 5.50. Sia per le tensioni stellate che per quelle concatenate i fasori rappresentativi formano una **terna simmetrica diretta** (l'aggettivo "diretta" sta a indicare che il fasore  $\bar{E}_1$  ( $\bar{V}_{12}$ ) è in ritardo rispetto al fasore  $\bar{E}_2$  ( $\bar{V}_{23}$ ) e così il fasore  $\bar{E}_2$  ( $\bar{V}_{23}$ ) è in ritardo rispetto al fasore  $\bar{E}_3$  ( $\bar{V}_{31}$ )).



**Fig. 5.50** Diagramma fasoriale delle tensioni stellate e concatenate di un sistema trifase simmetrico diretto.

Si supponga di avere un generatore che produca tensioni sinusoidali trifase, come specificato dalle equazioni (254). Si connetta al tripolo **G** un tripolo *utilizzatore* **U** rappresentabile, ad esempio, attraverso una configurazione a stella di tre bipoli con le tre impedenze  $\dot{Z}_1$ ,  $\dot{Z}_2$ ,  $\dot{Z}_3$  (in Figura 5.54 è rappresentato il circuito di impedenze corrispondente); è possibile considerare anche una rappresentazione equivalente a triangolo attraverso le impedenze  $\dot{Z}_{12}$ ,  $\dot{Z}_{23}$ ,  $\dot{Z}_{31}$  (queste impedenze sono legate a quelle della rappresentazione a stella attraverso le relazioni di trasformazione stella-triangolo che valgono per i resistori).

Applicando il metodo dei potenziali di nodo si ottiene

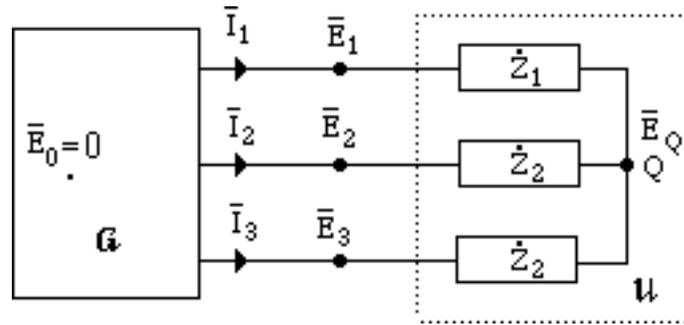
$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_0}{\dot{Z}_1}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_0}{\dot{Z}_2}, \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_0}{\dot{Z}_3}, \quad (260)$$

dove  $\bar{E}_0$  è il potenziale del centro stella dell'utilizzatore. Dovendo essere

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0, \quad (261)$$

utilizzando le (260) si ottiene l'espressione per il potenziale  $\bar{E}_0$ ,

$$\bar{E}_Q = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}. \quad (262)$$



**Fig. 5.51** Sistema trifase.

Se le tre impedenze  $\dot{Z}_1$ ,  $\dot{Z}_2$ ,  $\dot{Z}_3$  sono diverse tra di loro, non c'è nessuna relazione particolare tra i fasori rappresentativi delle tre correnti (in questo caso si dice che le tre correnti sono **squilibrato** e l'utilizzatore è **squilibrato**).

Si consideri ora il caso in cui le tre impedenze siano uguali,

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z}. \quad (263)$$

In questo caso, essendo  $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$ , si ottiene dalla (262)

$$\bar{E}_Q = 0. \quad (264)$$

e quindi

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}}, \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}}. \quad (265)$$

Posto

$$\dot{Z} = Ze^{i\varphi_u}, \quad (266)$$

dalle (265) si ha

$$\bar{I}_1 = \frac{E_{eff}}{Z} e^{i(\varphi - \varphi_u)}, \quad \bar{I}_2 = \frac{E_{eff}}{Z} e^{i(\varphi - \varphi_u - 2\pi/3)}, \quad \bar{I}_3 = \frac{E_{eff}}{Z} e^{i(\varphi - \varphi_u - 4\pi/3)} \quad (267)$$

e quindi le correnti nel dominio del tempo sono

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t + \phi - \varphi_u), \\ i_2(t) &= \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t + \phi - \varphi_u - 2\pi/3), \\ i_3(t) &= \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t + \phi - \varphi_u - 4\pi/3). \end{aligned} \quad (268)$$

Quando le tre impedenze sono uguali, le tre correnti costituiscono anche esse una terna simmetrica diretta. In questo caso si dice che il sistema trifase è equilibrato nelle correnti e si dice che l'utilizzatore è un **carico equilibrato**. Si osservi che le tre correnti (268) (o (267)) sono le stesse che si avrebbero se i due centri stella fossero collegati con un corto circuito (cioè con un conduttore ideale).

Si calcoli ora la potenza istantanea fornita dal generatore trifase **G** all'utilizzatore quando esso è equilibrato. Si ottiene

$$p(t) = i_1(t)e_1(t) + i_2(t)e_2(t) + i_3(t)e_3(t). \quad (269)$$

Utilizzando le espressioni (268) dalla (269) si ottiene

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{E_{eff}^2}{Z} [\cos \varphi_u + \cos(2\omega t + 2\phi - \varphi_u)] + \\ &\quad \frac{E_{eff}^2}{Z} [\cos \varphi_u + \cos(2\omega t + 2\phi - \varphi_u - 4\pi/3)] + \\ &\quad \frac{E_{eff}^2}{Z} [\cos \varphi_u + \cos(2\omega t + 2\phi - \varphi_u - 8\pi/3)]. \end{aligned} \quad (270)$$

È facile verificare, tramite il calcolo diretto, che la somma dei tre termini sinusoidali a pulsazione  $2\omega$  è identicamente nulla (anche ad essi corrisponde una terna simmetrica di fasori rappresentativi), e quindi la potenza istantanea erogata dal generatore trifase è costante nel tempo ed è

$$p(t) = 3 \frac{E_{eff}^2}{Z} \cos \varphi_u. \quad (271)$$

Pertanto la potenza erogata da un generatore trifase, quando il sistema delle correnti è equilibrato (carico equilibrato), è costante in regime sinusoidale. Di conseguenza la coppia meccanica richiesta dall'alternatore trifase è anche essa costante nel tempo (quindi non si hanno vibrazioni nell'intero sistema meccanico che fornisce l'energia che l'alternatore trasforma in energia elettrica). In questi casi la potenza istantanea è uguale a quella media e quindi è uguale alla parte reale della potenza complessa assorbita dal tripolo utilizzatore. Invece, negli alternatori monofase la coppia è variabile nel tempo perché la potenza istantanea varia periodicamente.

### Osservazione

Nel sistema trifase con carico equilibrato la potenza trasmessa, data dall'espressione (271), è tre volte la potenza media che potremmo trasmettere, a parità di tensione  $E_{eff}$ , con un sistema monofase. Per trasmettere la stessa potenza con sistemi monofase avremmo bisogno di tre sistemi monofase in parallelo, quindi sei conduttori, invece dei tre del sistema trifase. È un notevole risparmio.



Nelle industrie, nei laboratori, ... la società per l'energia elettrica fornisce un'alimentazione trifase con una tensione concatenata a 380 volt e quindi una tensione stellata a circa 220 volt (380 e 220 sono i valori efficaci e la frequenza è sempre 50 Hz).

Per i carichi equilibrati i valori nominali di tensione e di corrente che assicurano il corretto funzionamento (ad esempio, un motore trifase, l'alimentatore di un sistema di calcolo o di un impianto di telecomunicazione, ...) sono espressi tramite i valori efficaci. In generale la caratteristica può essere specificata, allo stesso modo del caso monofase, cioè attraverso il valore efficace della tensione concatenata  $V_{eff}$  (o della tensione stellata), la potenza media nominale  $P_m$  assorbita dal carico (oppure la potenza apparente), il fattore di potenza  $\cos \varphi$  e il segno della potenza reattiva assorbita. Da queste grandezze è possibile ricavare tutte le altre, come nel caso dell'utilizzatore

monofase. Per il valore efficace nominale delle correnti, per lo sfasamento del fasore della corrente rispetto a quello della tensione stellata corrispondente e per l'impedenza del bipolo equivalente nella rappresentazione a stella si hanno le seguenti formule (essendo  $R \geq 0$  per gli elementi passivi)

$$I_{eff} = \frac{P_m}{\sqrt{3} V_{eff} \cos \varphi}, \quad \varphi = \operatorname{sgn}(Q) |\varphi| \quad (272)$$

$$R = \operatorname{Re}\{\dot{Z}\} = \frac{\sqrt{3} V_{eff}^2}{P_m} \cos^2 \varphi, \quad X = \operatorname{Im}\{\dot{Z}\} = R \tan \varphi. \quad (273)$$