

## CAPITOLO 4

### ELEMENTI CIRCUITALI A PIÙ TERMINALI

	Pagina	
4.1	Introduzione	206
4.1.1	Correnti descrittive, tensioni descrittive e leggi di Kirchhoff	207
4.1.2	Potenza elettrica assorbita da un N-polo	213
4.2	Doppi bipoli	215
4.3	Generatori controllati lineari	218
4.4	Il giratore	225
4.5	Il trasformatore ideale	226
4.5.1	Adattamento in potenza	228
4.6	Doppi bipoli di resistori lineari	229
4.6.1	Matrice delle resistenze	230
4.6.2	Matrice delle conduttanze	235
4.6.3	Matrice ibrida	238
4.6.4	Matrice di trasmissione	241
4.6.5	Doppi bipoli in cascata	243
4.7	Sintesi di un doppio bipolo lineare	244
4.7.1	Configurazione a “T”	244
4.7.2	Configurazione a “II”	246
4.7.3	Trasformazione stella-triangolo	247
4.8	Circuiti mutuamente accoppiati: trasformatore reale	251
4.8.1	Relazioni caratteristiche di due circuiti mutuamente accoppiati	251
4.8.2	Accoppiamento perfetto	256
4.8.3	Circuito equivalente di due circuiti perfettamente accoppiati	258
4.8.4	Circuito equivalente di due circuiti accoppiati non perfettamente	259

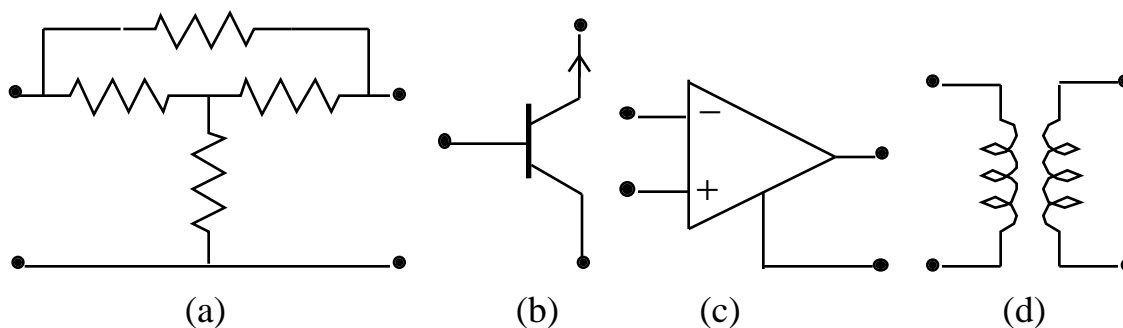
## 4.1 Introduzione

Sebbene i bipoli siano gli elementi circuitali più comuni, esistono numerosissimi elementi circuitali con  $N$  terminali ( $N > 2$ ). Il modello circuitale di un elemento con  $N$  terminali prende il nome di  $N$ -polo (*tripolo*,  $N = 3$ ; *quadripolo*,  $N = 4$ ).

Nella teoria dei circuiti gli elementi con più di due terminali hanno una duplice ruolo.

Primo, sono adoperati come modelli di parti di circuiti, composte da elementi con due o più terminali, che interagiscono con le restanti parti dei circuiti in cui sono inseriti attraverso più di due terminali. In Figura 4.1 è rappresentato un circuito costituito da resistori che ha quattro terminali (quadripolo di resistori). Come poi faremo vedere, anche per questi elementi è possibile introdurre il concetto di equivalenza. Come già abbiamo più volte avuto modo di verificare l'analisi dei circuiti può risultare enormemente semplificata e facilitata attraverso l'utilizzo di questo concetto.

Secondo e più importante, gli elementi con più di due terminali sono adoperati come modelli per componenti complessi come i transistori, gli amplificatori operazionali, i trasformatori, le linee di trasmissione, etc. Nelle Figure 4.1b, 4.1c e 4.1d sono riportati, rispettivamente, i simboli del transistor, dell'amplificatore operazionale (polarizzato) e del trasformatore.



**Fig. 4.1** (a) *Quadripolo di resistori*, (b) *transistore npn*, (c) *amplificatore operazionale (polarizzato)*, (d) *induttori accoppiati (trasformatore)*.

In questa introduzione vengono affrontati questi due problemi:

- (a) *come si caratterizza un elemento con  $N$  terminali?*
- (b) *come si estendono le leggi di Kirchhoff a un circuito che contiene anche elementi con più di due terminali?*

Il funzionamento di un  $N$ -polo è descritto, come nel caso del bipolo, dalle relazioni esistenti fra le tensioni tra i terminali e le correnti che attraversano i terminali. Merita, tuttavia, una breve discussione il modo in cui possono essere scelte tali correnti e tensioni. Per non appesantire l'esposizione si faccia riferimento all'esempio descritto in Figura 4.2a: esso rappresenta un circuito costituito da due bipoli e da un tripolo.

#### 4.1.1 Correnti descrittive, tensioni descrittive e leggi di Kirchhoff

Un tripolo è caratterizzato da tre correnti,  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ , e da tre tensioni,  $v_{12}$ ,  $v_{23}$  e  $v_{13}$  ( $v_{ij}$  è la tensione tra il terminale “i” e il terminale “j”, con il terminale “i” contrassegnato con il segno “+” e il terminale “j” contrassegnato con il segno “-”), Figura 4.2b. Il funzionamento del tripolo è descritto dalle relazioni tra le tensioni  $v_{12}$ ,  $v_{23}$  e  $v_{13}$  e le correnti  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ . Queste relazioni dipendono tutte dalla costituzione fisica del componente che si intende modellare? La risposta è no. Ora verrà mostrato che le tre correnti  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  non sono tra loro indipendenti, e così anche le tre tensioni  $v_{12}$ ,  $v_{23}$  e  $v_{13}$ .

Applicando la legge della conservazione della carica (vedi § 1.4.1) ad una superficie chiusa  $\Sigma$  che contiene il tripolo e taglia i tre terminali, si ottiene che

$$i_1 + i_2 + i_3 = \frac{dQ_\Sigma}{dt}, \quad (1)$$

dove  $Q_\Sigma$  è la carica elettrica libera racchiusa dalla superficie  $\Sigma$ . Essa si trova sotto forma di carica superficiale sulle superfici delle parti conduttrici del componente. Questa equazione è l'estensione a un componente con tre terminali dell'equazione (41) riportata nel Capitolo 1, che descrive la relazione tra le due correnti di un componente con due terminali.

In condizioni stazionarie abbiamo

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0. \quad (2)$$

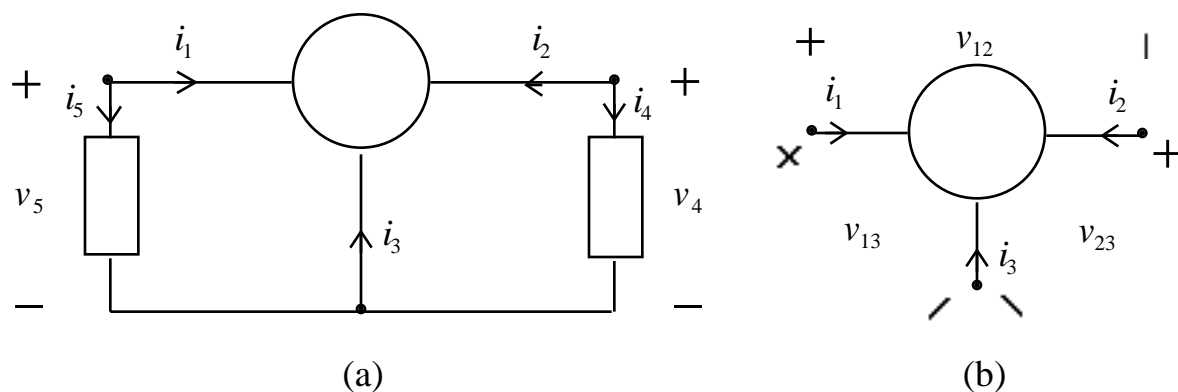
È evidente che questa proprietà non è più vera quando le grandezze circuitali variano nel tempo. Anche qui valgono tutte le considerazioni che abbiamo sviluppato nel Capitolo 1, quando abbiamo introdotto il concetto di bipolo. In particolare, in condizioni di funzionamento lentamente variabili, pur essendo

$dQ_\Sigma/dt \neq 0$ , la derivata  $dQ_\Sigma/dt$ , considerata in valore assoluto, è trascurabile se confrontata con le tre correnti del componente e, quindi, abbiamo

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) \cong 0. \quad (3)$$

Allora, in condizioni di funzionamento lentamente variabili la somma di tutte le correnti (le frecce che descrivono i versi di riferimento per le correnti hanno tutte verso entrante nella superficie limite del componente) del tripolo è, con buona approssimazione, uguale a zero. Come nel caso dei componenti a due terminali, le tre correnti  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  non sono mai tra loro indipendenti: solo due lo sono (nel caso di un componente a due terminali solo una corrente è indipendente).

È evidente che, in generale, per un componente con  $N$  terminali solo  $N-1$  correnti sono indipendenti tra loro.



**Fig. 4.2** Circuito costituito da un tripolo e due bipoli.

Si applichi, ora, la legge di Faraday-Neumann (vedi § 1.5.1) a una linea chiusa  $\Gamma$  orientata (ad esempio, in verso orario) che passa per i tre terminali del tripolo. Si ottiene

$$v_{12} + v_{23} - v_{13} = -\frac{d\Phi_\Gamma}{dt}, \quad (4)$$

dove  $\Phi_\Gamma$  è il flusso del campo magnetico concatenato con la linea chiusa orientata. In condizioni stazionarie abbiamo

$$v_{12} + v_{23} - v_{13} = 0. \quad (5)$$

È evidente che questa proprietà non è più vera quando le grandezze circuitali variano nel tempo. Anche in questo caso valgono tutte le considerazioni che abbiamo sviluppato nel Capitolo 1, quando abbiamo introdotto il concetto di bipolo. In particolare, in condizioni di funzionamento lentamente variabili, pur essendo  $d\Phi_{\Gamma}/dt \neq 0$ , la derivata  $d\Phi_{\Gamma}/dt$ , considerata in valore assoluto, è trascurabile se confrontata con le tre tensioni del componente e, quindi, abbiamo

$$v_{12}(t) + v_{23}(t) - v_{13}(t) \cong 0. \quad (6)$$

Allora, in condizioni di funzionamento lentamente variabili la somma algebrica di tutte le tensioni del tripolo è uguale a zero: nella somma le tensioni che hanno versi di riferimento concordi con il verso di percorrenza della curva chiusa compaiono con il segno positivo e le tensioni che hanno versi di riferimento discordi con il verso di percorrenza della curva chiusa compaiono con il segno negativo. Quindi, anche le tre tensioni  $v_{12}$ ,  $v_{23}$  e  $v_{13}$  non sono indipendenti: solo due lo sono (ricordate, il componente a due terminali è caratterizzato da una sola tensione).

L'estensione a un componente con  $N$  terminali è immediata. Le tensioni di un  $N$ -polo sono  $N(N-1)$  e solo  $(N-1)$  sono indipendenti.

Allo scopo di individuare un insieme di correnti e tensioni indipendenti, tra tutti i terminali del componente se ne scelga uno di riferimento; nell'esempio considerato viene scelto il terminale "3" come terminale di riferimento. A esso si attribuisca il nome di **terminale comune**. Si considerino le correnti  $i_1$  e  $i_2$  che attraversano gli altri 2 terminali. Esse sono indipendenti, cioè nessuna di esse è deducibile dalle altre. Esse, inoltre, soddisfano la condizione di completezza. Considerata infatti la corrente nel terminale comune, essa può essere espressa in funzione delle altre due attraverso la relazione (1), cioè

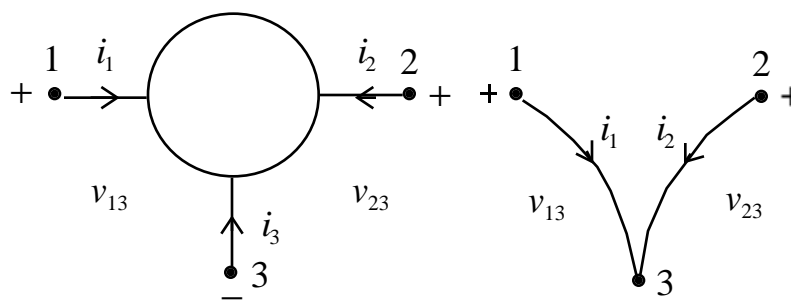
$$i_3 = -i_1 - i_2. \quad (7)$$

Si considerino, poi, le tensioni tra ciascuno dei terminali diversi da quello comune e quest'ultimo, orientate contrassegnando il terminale comune con il segno "-" e gli altri terminali con il segno "+". Esse sono indipendenti e soddisfano la condizione di completezza. La tensione tra due terminali diversi da quello comune può essere espressa in funzione delle altre due attraverso la relazione

$$v_{21} = v_{23} - v_{13}. \quad (8)$$

Tenendo conto dei vincoli imposti dalle (7) e (8), il tripolo è completamente descritto dalle due correnti  $i_1$  e  $i_2$  e dalle due tensioni  $v_{13}$  e  $v_{23}$ . Le correnti  $i_1$  e  $i_2$  sono le **correnti descrittive** del componente e le tensioni  $v_{13}$  e  $v_{23}$  sono le **tensioni descrittive**. (L'insieme delle correnti e delle tensioni descrittive dipende dalla scelta del terminale comune.) L'unione di questi due insiemi di grandezze è in grado di caratterizzare univocamente l'elemento e consente, inoltre, la determinazione di tutte le altre: esso costituisce un *insieme minimo fondamentale*. (Un bipolo ha una sola corrente e una sola tensione descrittiva).

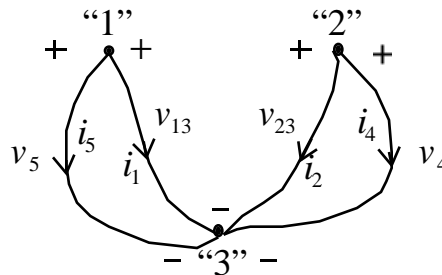
Il funzionamento di un tripolo è descritto attraverso due relazioni indipendenti tra le correnti e le tensioni descrittive: esse dipendono dalla costituzione fisica dell'oggetto e costituiscono le **relazioni caratteristiche** dell'elemento.



**Fig. 4.3** Grafo di un tripolo.

Una volta scelto il terminale comune e quindi l'insieme delle correnti e delle tensioni descrittive, è possibile associare a questo insieme un grafo orientato. Si consideri dapprima il tripolo illustrato in Figura 4.1 e si scelga il terminale “3” come terminale comune. Si costruisca il grafo a stella ottenuto collegando i morsetti “1” e “2” a quello comune “3”, Figura 4.3; i due lati sono orientati in modo tale che le frecce confluiscono nel terminale comune e quindi siano concordi con i versi di riferimento delle correnti descrittive. A ogni lato si associno la corrente e la tensione descrittive, corrispondenti. La freccia dell'arco è riferita alla corrente e gli estremi dell'arco alla tensione. Si può dare una immagine concreta a queste correnti e tensioni, pensandole come le correnti e le tensioni di bipoli fittizi collegati ai morsetti secondo gli archi del grafo (su ogni lato viene fatta la convenzione dell'utilizzatore). In questa rappresentazione non compaiono la corrente nel terminale comune e la tensione tra i terminali “1” e “2”. Ricordiamoci che esse possono essere determinate

dalle correnti e tensioni descrittive attraverso le (7) e (8). In Figura 4.4 è riportato il grafo del circuito rappresentato in Figura 4.2a.



**Fig. 4.4** Grafo del circuito di Figura 4.2a.

Esistono numerosi componenti con tre terminali. Qui menzioniamo, ad esempio, i transistori (bipolari, MOSFET, ...), i generatori di tensione trifase e i motori trifase.

### Osservazione

Il transistorore bipolare ideale è un tripolo (cioè un elemento a tre terminali) adinamico, non lineare e tempo invariante. In Figura 4.1b è illustrato il simbolo del transistorore bipolare *npn*. Ogni terminale del transistorore ha un nome, che ricorda la parte del dispositivo fisico (del quale il tripolo in esame è il modello) a cui il conduttore terminale è collegato. Nei corsi di elettronica studierete le caratteristiche di funzionamento di questi componenti e le loro applicazioni. Qui ci limitiamo a osservare che quando si deve caratterizzare un transistorore, essendo un tripolo, bisogna scegliere un terminale comune. Sono possibili tre scelte: *caratterizzazione a base comune* (il terminale comune è il terminale di base), *caratterizzazione a emettitore comune* (il terminale comune è il terminale di emettitore) e *caratterizzazione a collettore comune* (il terminale comune è il terminale di collettore).



### Osservazione

L'estensione a un componente con  $N$  terminali è immediata. Si ordinino i terminali etichettandoli (ad arbitrio) con i numeri naturali che vanno da "1" a " $N$ " e, si scelga il terminale " $N$ " come terminale comune. Allora le correnti e le tensioni descrittive sono, rispettivamente,

$$i_1, i_2, \dots, i_{N-1} \text{ e} \\ v_{1N}, v_{2N}, \dots, v_{N-1N};$$

$i_h$  è la corrente che attraversa il terminale  $h$ -esimo e  $v_{hN}$  è la tensione tra il terminale “ $h$ ” e il terminale comune “ $N$ ”. La corrente  $i_N$  nel terminale comune vale

$$i_N = -\sum_{h=1}^{N-1} i_h, \quad (9)$$

e la tensione  $v_{hk}$  tra il terminale “ $h$ ” e il terminale “ $k$ ” (con  $h$  e  $k$  diversi da  $N$ ) vale

$$v_{hk} = v_{hN} - v_{kN}. \quad (10)$$

Il funzionamento di un  $N$ -polo è descritto da  $N - 1$  relazioni tra le correnti e le tensioni descrittive, relazioni che dipendono solo dalla costituzione fisica del componente che l'elemento rappresenta. L'insieme di queste relazioni costituiscono le **relazioni caratteristiche** del  $N$ -polo.

Ogni volta che in un circuito sono presenti uno o più componenti con  $N$  terminali, il grafo del circuito può essere costruito sostituendo a ciascun componente con  $N$  terminali un grafo simile a quello di un tripolo (vedi Figura 4.3a) con  $N$  nodi e  $N - 1$  lati incernierati nel nodo comune.

◆

A questo punto è immediata l'estensione delle leggi di Kirchhoff a circuiti costituiti da bipoli e  $N$ -poli. Si costruisca il grafo del circuito in esame secondo le regole che abbiamo appena definito.

Per ogni nodo del grafo la somma algebrica delle correnti descrittive e per ogni maglia del grafo la somma algebrica delle tensioni descrittive devono essere istante per istante uguali a zero. descrittive devono verificare la legge di Kirchhoff per le tensioni per ogni maglia del grafo.



Anche in questo caso la legge di Kirchhoff per le correnti discende dalla legge della conservazione della carica e quella per le tensioni discende dalla legge di Faraday Neumann, con la solita ipotesi di “condizione di funzionamento lentamente variabile”.

### Esempio

Si scrivano le equazioni di Kirchhoff del circuito illustrato in Figura 4.2a. Un’insieme massimale di equazioni indipendenti per le correnti si ottiene applicando la prima legge di Kirchhoff ai nodi “1” e “2”, Figura 4.3b. Invece, un insieme massimale di equazioni indipendenti per le tensioni si ottiene applicando la seconda legge di Kirchhoff alle due maglie del grafo del circuito, Figura 4.3b. Allora si ha

$$\begin{aligned} i_1 + i_4 = 0, \quad i_2 + i_5 = 0, \quad -i_1 - i_2 - i_4 - i_5 = 0, \\ v_{13} - v_4 = 0, \quad v_{23} - v_5 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

A queste equazioni bisogna aggiungere le equazioni caratteristiche dei due bipoli e le due equazioni caratteristiche che descrivono il funzionamento del tripolo. In questo modo si ottengono otto equazioni indipendenti nelle otto incognite  $i_1, i_2, i_4, i_5, v_{13}, v_{23}, v_4$  e  $v_5$ . Osserviamo, ancora una volta, che la corrente  $i_3$  e la tensione  $v_{12}$  non appaiono direttamente; esse possono essere determinate attraverso le relazioni (7) e (8) una volta note le grandezze descrittive.

◆

Per un circuito costituito da  $N$ -poli valgono tutte le proprietà delle equazioni di Kirchhoff che sono state illustrate fino ad ora. Le equazioni di Kirchhoff possono essere espresse attraverso la matrice di incidenza e la matrice di maglia fondamentale. Per un circuito costituito da  $N$ -poli è possibile introdurre i potenziali di nodo e le correnti di maglia così come è stato fatto per i circuiti di soli bipoli.

#### 4.1.2 Potenza elettrica assorbita da un N-polo

Per un  $N$ -polo è possibile definire la potenza elettrica assorbita così come è stato fatto per il bipolo. Si scelga il terminale comune, ad esempio, il terminale

“ $N$ ”, si costruisca il grafo del  $N$ -polo e si introducano le correnti e le tensioni descrittive adottando su ogni lato del grafo la convenzione dell’utente per i versi di riferimento. La **potenza elettrica assorbita** dal  $N$ -polo è definita come:

$$p = \sum_{h=1}^{N-1} i_h v_{hN}. \quad (12)$$

Questa espressione si riduce all’espressione della potenza elettrica assorbita da un bipolo per  $N = 2$ .

Per un tripolo l’espressione della potenza elettrica assorbita è (abbiamo scelto il terminale “3” come terminale di riferimento)

$$p = i_1 v_{13} + i_2 v_{23}. \quad (13)$$

In condizioni di funzionamento lentamente variabili l’espressione  $p(t)\Delta t$  è, con buona approssimazione, l’energia elettrica assorbita nell’intervallo di tempo infinitesimo  $\Delta t$  dal  $N$ -polo. La dimostrazione viene riportata in **Appendice**.

Ovviamente la potenza assorbita dal  $N$ -polo è indipendente dalla scelta del terminale comune. Per semplicità facciamo riferimento a un tripolo (il ragionamento che faremo si estende senza alcuna difficoltà a un generico  $N$ -polo). La (13) è l’espressione della potenza assorbita dal tripolo quando si sceglie il terminale “3” come terminale comune. Si consideri, ora, l’espressione della potenza assorbita che si ottiene scegliendo un altro terminale come terminale comune, ad esempio, il terminale “1”. In questo caso le correnti descrittive sono le correnti  $i_2$  e  $i_3$ , e le tensioni descrittive sono le tensioni  $v_{21}$  e  $v_{31}$ . Quindi, l’espressione della potenza assorbita è

$$\dot{p} = v_{21} i_2 + v_{31} i_3. \quad (14)$$

Le tensioni descrittive  $v_{21}$  e  $v_{31}$  possono essere rappresentate attraverso le tensioni descrittive  $v_{13}$  e  $v_{23}$ ,

$$v_{21} = v_{23} - v_{13}, \quad (15)$$

$$v_{31} = -v_{13}. \quad (16)$$

Sostituendo queste due relazioni nella (14) si ha, allora,

$$\dot{p} = (v_{23} - v_{13})i_2 + (-v_{13})i_3 = v_{23}i_2 + v_{13}(-i_2 - i_3). \quad (17)$$

Utilizzando la (7) si ha

$$\dot{p} = v_{21}i_2 + v_{31}i_3 = v_{23}i_2 + v_{13}(-i_2 - i_3) = v_{23}i_2 + v_{13}i_1 = p. \quad (18)$$

Un'immediata conseguenza di questa estensione è la generalizzazione del teorema della conservazione delle potenze virtuali e delle potenze elettriche a circuiti costituiti da bipoli e  $N$ -poli.

La somma delle potenze elettriche assorbite da tutti gli elementi di un circuito è istante per istante uguale a zero.

## 4.2 Doppoli bipoli

In molte applicazioni i terminali di un  $N$ -polo possono essere associati naturalmente a due a due. Ad esempio, in un amplificatore audio la coppia dei terminali di “ingresso” è collegata a un microfono e la coppia dei terminali di “uscita” a una cassa acustica, Figura 4.5; anche i quattro terminali di un trasformatore sono raggruppati naturalmente in due coppie, Figura 4.1d. Può anche accadere che, pur non essendo possibile raggruppare naturalmente i quattro terminali dell'elemento in due coppie, essi lo siano per come sono effettivamente collegati al resto del circuito in cui l'elemento è inserito. Un esempio di ciò è illustrato in Figura 4.6a, dove il quadripolo di resistori riportato in Figura 4.1a è collegato a due bipoli. In tutti questi casi le quattro correnti  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$ , oltre a verificare la relazione (9), cioè

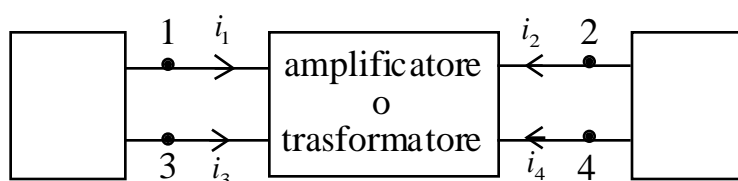
$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0, \quad (19)$$

verificano le relazioni

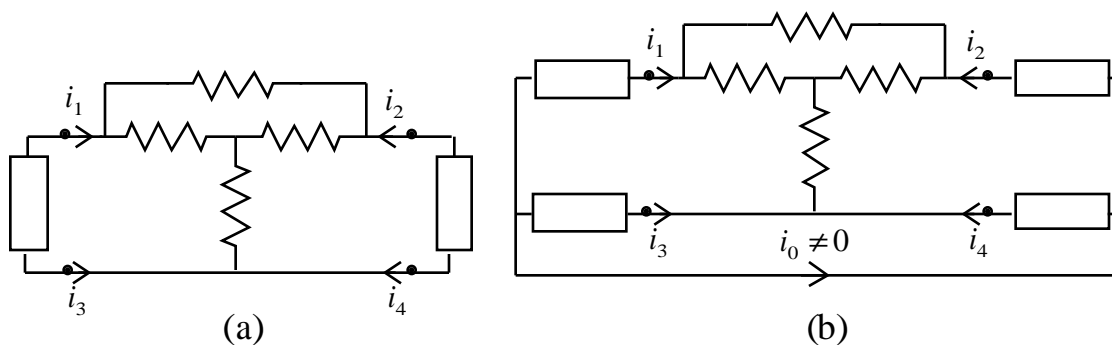
$$i_1 + i_3 = 0, \quad (20)$$

$$i_2 + i_4 = 0, \quad (21)$$

qualsiasi siano le condizioni di funzionamento. (Si osservi che le relazioni (20) e (21) implicano la relazione (19).) Tali vincoli riducono il numero di correnti effettivamente indipendenti (correnti descrittive) da tre a due: un possibile insieme completo di correnti descrittive è costituito dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$ . In questi casi, inoltre, per descrivere l'interazione dell'elemento in esame con il resto del circuito in cui è effettivamente inserito è sufficiente considerare solo le tensioni  $v_1$  e  $v_2$ . Il funzionamento è descritto da due relazioni indipendenti tra le due correnti  $i_1$  e  $i_2$  e le due tensioni  $v_1$  e  $v_2$ , relazioni che dipendono unicamente dalla natura fisica del componente.



**Fig. 4.5** *Un esempio di doppio bipolo.*

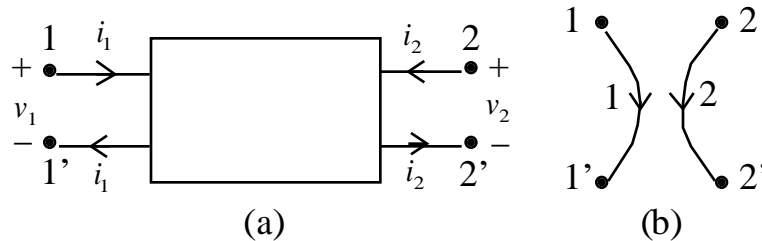


**Fig. 4.6** *(a) Il quadrupolo riportato in Figura 4.1a è collegato in modo tale da funzionare come doppio bipolo; (b) lo stesso quadrupolo in questo circuito non si comporta come doppio bipolo.*

Una coppia di terminali è detta **porta** se la somma delle correnti che li attraversano è uguale a zero. A ciascuna porta è associata una corrente e una tensione.

Un **doppio bipolo** è un elemento circuitale a due porte, Figura 4.7. Con i due terminali di sinistra designeremo la prima porta, sicché tensione e corrente associate a questi terminali saranno marcate con il pedice “1”:  $v_1$ ,  $i_1$ . Analogamente, con i due terminali di destra designeremo la seconda porta, sicché tensione e corrente associate a questi terminali saranno marcate con il pedice “2”:  $v_2$ ,  $i_2$ . Per entrambe le porte i versi di riferimento per la corrente e la tensione sono stati scelti concordemente con la convenzione dell'utilizzatore.

Il funzionamento di un doppio bipolo è descritto da due relazioni indipendenti tra le due correnti e le due tensioni di porta.



**Fig. 4.7** (a) Doppio bipolo; (b) il grafo elementare di un doppio bipolo.

Il grafo di un doppio bipolo può essere rappresentato da due lati e quattro nodi come illustrato in Figura 4.7b. Esso non è connesso. Ciò implica che le tensioni delle due porte e le correnti delle due porte non sono correlate tra loro attraverso le leggi di Kirchhoff, ma tramite le relazioni caratteristiche (ad esempio, le tensioni di porta di un trasformatore sono accoppiate magneticamente). Pertanto i grafi dei circuiti che contengono doppi bipoli sono non connessi.

La potenza elettrica assorbita da un doppio bipolo è

$$p = i_1 v_1 + i_2 v_2. \quad (22)$$

Essa è uguale alla somma delle potenze elettriche assorbite dalle singole porte. L'espressione (22) può essere ottenuta a partire dall'espressione della potenza elettrica assorbita dal quadripolo corrispondente. Lasciamo al lettore la dimostrazione.

### Osservazione

Il tripolo può essere descritto come se fosse un doppio bipolo una volta scelto il terminale comune. Ciò è evidente se si considera il grafo corrispondente: esso è costituito da due lati e tre nodi. Ad esempio, se si sceglie il terminale “3” come terminale comune (Figura 4.3), il terminale “1” e il terminale “2” possono essere formalmente considerati come due porte e, quindi, il componente come un doppio bipolo: una porta è definita dalla coppia  $(i_1, v_{13})$  e l'altra porta è definita dalla coppia  $(i_2, v_{23})$ . Anche in questo caso abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore per ciascuna porta. A differenza del grafo

riportato in Figura 4.7b, esso è connesso per la presenza di un nodo comune (grafo incernierato).



### Osservazione

Nel circuito illustrato in Figura 4.6b lo stesso quadrupolo riportato in Figura 4.1a è collegato a quattro bipoli in maniera tale che non sia possibile raggruppare i suoi terminali a coppie. In questo caso essendo  $i_0 \neq 0$  si ha  $i_1 \neq -i_3$  e  $i_2 \neq -i_4$ , e l'unico vincolo per le correnti  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$  è quello espresso dalla relazione (19). In questo caso, quindi, tre sono le correnti indipendenti; le correnti  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  sono un insieme di correnti descrittive e le tensioni  $v_{14}$ ,  $v_{24}$  e  $v_{34}$  sono le corrispondenti tensioni descrittive (è stato scelto come terminale di riferimento il terminale “4”).

Se il quadrupolo illustrato in Figura 4.1a funziona in modo tale da non potere essere descritto come doppio bipolo, come, ad esempio, nel caso riportato in Figura 4.3b, esso può essere rappresentato come un **tre-porte**. Scegliendo, ad esempio, il terminale “4” come terminale comune, le tre porte sono associate formalmente alle tre coppie di grandezze descrittive  $(i_1, v_{14})$ ,  $(i_2, v_{24})$  e  $(i_3, v_{34})$ .



Esistono numerosi elementi circuitali descrivibili come doppi bipoli che rivestono un ruolo fondamentale nella creazione di modelli di dispositivi fisici. I *doppi bipoli dinamici* sono quegli elementi il cui funzionamento è descritto da relazioni caratteristiche di tipo “istantaneo”. Nei prossimi paragrafi descriveremo i *generatori controllati*, il *giratore* e il *trasformatore ideale* e illustreremo alcune applicazioni. Nell'ultimo paragrafo di questo Capitolo descriveremo il doppio bipolo di natura dinamica più importante, cioè il *trasformatore reale*. Ricordiamo che c'è un altro doppio bipolo molto importante, esso è l'*amplificatore operazionale ideale* (il simbolo è riportato in Figura 4.1c). Questo elemento verrà descritto nei corsi di elettronica.

## 4.3 Generatori controllati lineari

Finora abbiamo considerato due tipi fondamentali di generatori, i generatori indipendenti di tensione e i generatori indipendenti di corrente. La tensione di un generatore indipendente di tensione e la corrente di un generatore indipendente di corrente sono assegnate, quindi sono indipendenti dalle altre grandezze del circuito. In questo paragrafo studiamo i generatori controllati (dipendenti): essi sono generatori i cui valori, invece, dipendono da altre del circuito. Questi generatori, che di solito si identificano come modelli lineari per transistori ed altri dispositivi a semiconduttore, sono usati anche per modellare circuiti notevolmente complessi, caratterizzati da due coppie di terminali.

I generatori controllati sono doppi bipoli ideali, statici e lineari, nei quali una delle grandezze - tensione o corrente - ad una delle due porte è direttamente proporzionale a una delle grandezze - tensione o corrente - all'altra porta. Per convenzione, la porta che funziona da generatore è la porta "2" e la porta che controlla il generatore è la porta "1". Considerando tutte le possibili combinazioni si hanno i seguenti generatori controllati.

### **Generatore di tensione controllato in tensione**

Il *generatore di tensione controllato in tensione* è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni caratteristiche

$$i_1 = 0, \quad (23)$$

$$v_2 = \alpha v_1, \quad (24)$$

dove  $\alpha$  è una costante detta *rapporto di trasferimento di tensione*. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Figura 4.8a. La porta "1" è equivalente a un circuito aperto e la porta "2" è equivalente a un generatore di tensione che impone una tensione dipendente linearmente dalla tensione sulla porta "1".

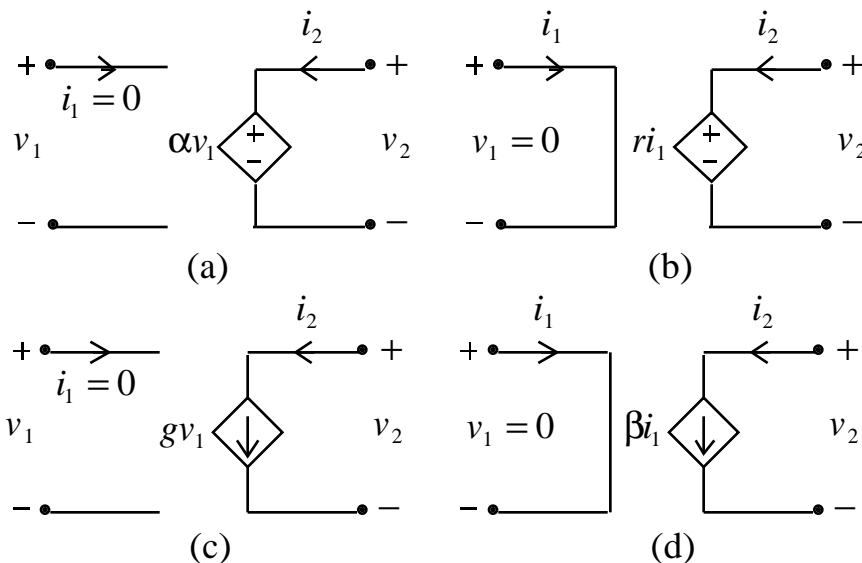
### **Generatore di tensione controllato in corrente**

Il *generatore di tensione controllato in corrente* è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni caratteristiche

$$v_1 = 0, \quad (25)$$

$$v_2 = r i_1, \quad (26)$$

dove  $r$  è una costante, che prende il nome di *transresistenza* del generatore controllato. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Figura 4.8b. La porta “1” è equivalente a un corto circuito e la porta “2” è equivalente a un generatore di tensione che impone una tensione dipendente linearmente dalla corrente che circola nella porta “1”.



**Fig. 4.8** Simboli dei quattro tipi di generatori controllati lineari.

### Generatore di corrente controllato in tensione

Il *generatore di corrente controllato in tensione* è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni costitutive

$$i_1 = 0, \quad (27)$$

$$i_2 = gv_1, \quad (28)$$

dove  $g$  è una costante, che prende il nome di *transconduttanza*. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Figura 4.8c. La porta “1” è equivalente a un circuito aperto e la porta “2” è equivalente a un generatore di corrente che impone una corrente dipendente linearmente dalla tensione della porta “1”.



## Generatore di corrente controllato in corrente

Il *generatore di corrente controllato in corrente* è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni costitutive

$$v_1 = 0, \quad (29)$$

$$i_2 = \beta i_1, \quad (30)$$

dove  $\beta$  è una costante, che prende il nome di *rapporto di trasferimento di corrente*. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Figura 4.8d. La porta “1” è equivalente a un corto circuito e la porta “2” è equivalente a un generatore di corrente che impone una corrente dipendente linearmente dalla corrente che circola nella porta “1”.

### Osservazione

Il fatto che le porte di controllo dei generatori controllati siano equivalenti a corto circuiti o circuiti aperti rende possibile isolare o accoppiare unidirezionalmente (almeno nella situazione ideale) parti di un circuito utilizzando generatori controllati.



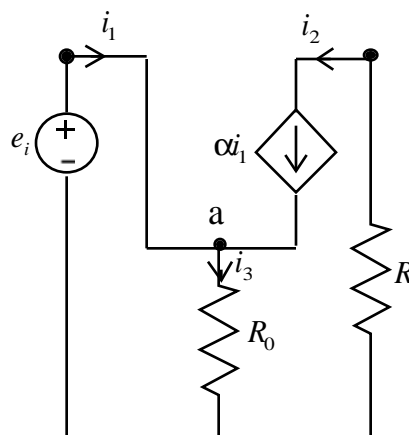
La potenza elettrica assorbita dai generatori controllati può essere negativa, quindi i generatori controllati sono doppi bipoli attivi. Quando in un circuito ci sono generatori controllati lineari, continua a valere la proprietà della sovrapposizione degli effetti, ma non vale più la proprietà della non amplificazione delle tensioni e delle correnti. Il lettore verifichi queste affermazioni.

### Esercizio

Il lettore dimostri che, connettendo in maniera opportuna un generatore di corrente controllato in tensione e un generatore di tensione controllato in corrente, è possibile realizzare gli altri due tipi di generatori controllati.

### Applicazione: amplificatore di potenza

Si consideri il circuito di Figura 4.9 in cui il generatore di corrente controllato in corrente ha un terminale della porta “1” (porta di controllo) e un terminale della porta “2” (porta attiva) collegati ad un nodo comune “a” con un resistore lineare di resistenza  $R_0$ . Un generatore indipendente di tensione  $e_i$  agisce da ingresso e si desidera determinare il rapporto tra la potenza assorbita dal resistore lineare  $R$  e la potenza erogata dal generatore indipendente di tensione  $e_i$ .



**Fig. 4.9** *Un amplificatore di potenza che impiega un generatore di corrente controllato in corrente.*

Applicando la legge di Kirchhoff per le correnti al nodo “a” abbiamo

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0; \quad (31)$$

inoltre, dalla relazione caratteristica del generatore controllato abbiamo

$$i_2 = \beta i_1, \quad (32)$$

dove  $\beta$  è il rapporto di trasferimento di corrente. La corrente  $i_3$  nel resistore  $R_0$  è data da

$$i_3 = \frac{e_i}{R_0}. \quad (33)$$

Combinando queste tre relazioni immediatamente si ottiene

$$i_1 = \frac{e_i}{\alpha R_0} \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right), \quad (34)$$

$$i_2 = \frac{e_i}{R_0} \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right). \quad (35)$$

La potenza erogata dal generatore di tensione vale, allora,

$$p_i = e_i i_1 = e_i^2 \frac{1}{\beta R_0} \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right), \quad (36)$$

mentre la potenza assorbita dal resistore  $R$  vale

$$p = Ri^2 = e_i^2 \frac{R}{R_0^2} \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right)^2. \quad (37)$$

Quindi il guadagno di potenza è

$$\frac{p}{p_i} = \frac{\beta^2}{1 + \beta} \frac{R}{R_0}. \quad (38)$$

Scegliendo opportunamente  $R$  e  $R_0$  si può ottenere un guadagno di potenza arbitrariamente grande per un valore fissato di rapporto di trasferimento  $\beta$ . L'amplificazione di potenza è resa possibile dal fatto che il generatore controllato è un elemento attivo.

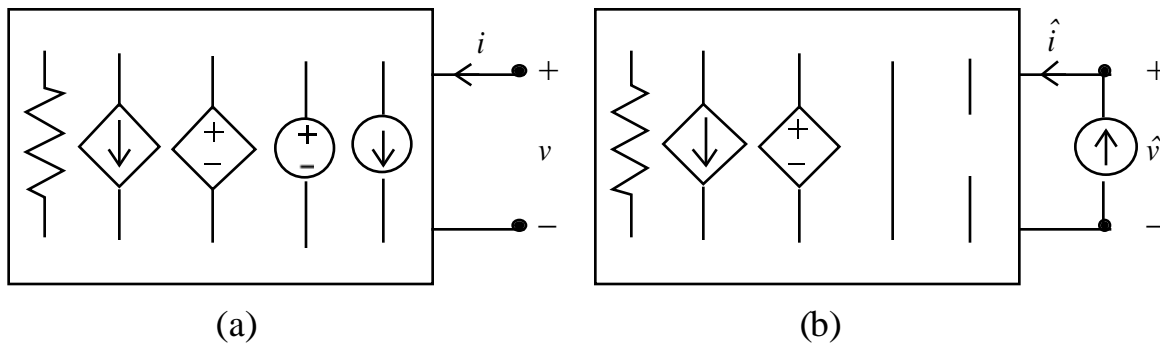
### Osservazione

I bipoli costituiti da resistori lineari, generatori controllati lineari e generatori indipendenti (Figura 4.10a) possono essere rappresentati attraverso il generatore equivalente di Thévenin-Norton, perché vale ancora la proprietà della sovrapposizione degli effetti. La tensione a vuoto si determina calcolando il valore della tensione  $v$  quando  $i = 0$  e la corrente di corto circuito si determina calcolando il valore della corrente  $i$  quando  $v = 0$ . Attenzione, però, a come si calcola la resistenza (conduttanza) equivalente. La resistenza (conduttanza) equivalente deve essere calcolata spegnendo solo i generatori indipendenti. La resistenza equivalente, essendo, per definizione, il rapporto tra la tensione  $v$  e

la corrente  $i$  del bipolo (avendo fatto la convenzione dell'utente) quando tutti i generatori indipendenti sono spenti,

$$R_{eq} = \frac{\hat{v}}{\hat{i}}, \quad (39)$$

deve essere determinata risolvendo, ad esempio, il circuito illustrato in Figura 4.10b. In questo circuito il bipolo è alimentato da un generatore di corrente indipendente  $\hat{i}$ ; lo stesso risultato può essere ottenuto alimentando il bipolo con un generatore di tensione indipendente  $\hat{v}$ . Per la soluzione del circuito di Figura 4.10b potrebbero non essere sufficienti le tecniche di riduzione serie-parallelo che abbiamo illustrato nel precedente capitolo a causa della presenza dei generatori controllati. Comunque esso può essere risolto, senza alcuna difficoltà, utilizzando, ad esempio, il metodo dei potenziali di nodo.



**Fig. 4.10** (a) Bipolo costituito da resistori e generatori controllati lineari e generatori indipendenti; (b) lo stesso bipolo con i generatori indipendenti spenti.

Infine, osserviamo che la resistenza equivalente può essere determinata anche utilizzando l'espressione

$$R_{eq} = \frac{v|_{i=0}}{i|_{v=0}}, \quad (40)$$

cioè come rapporto tra la tensione a vuoto e la corrente di corto circuito del bipolo in esame.

◆

## 4.4 Il giratore

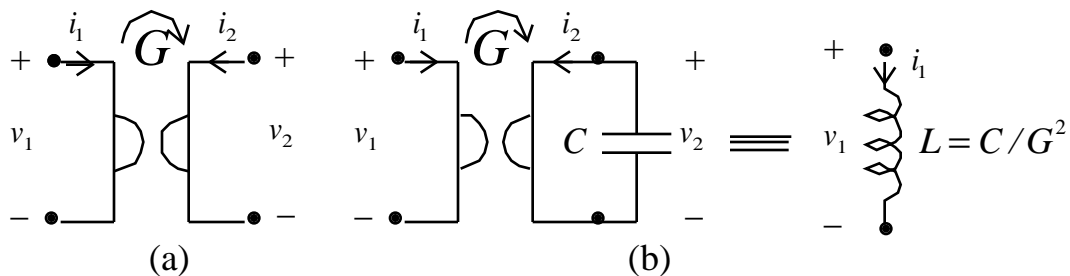
Il giratore è un doppio bipolo lineare definito dalle seguenti relazioni

$$i_1 = Gv_2, \quad (41)$$

$$i_2 = -Gv_1, \quad (42)$$

dove la costante  $G$  è detta *conduttanza di girazione*; il simbolo del giratore è illustrato in Figura 4.11.

La potenza elettrica assorbita dal giratore è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento, quindi è un doppio bipolo globalmente passivo che non dissipa e né immagazzina energia. Per questo doppio bipolo non vale la non amplificazione delle tensioni e delle correnti pur essendo globalmente passivo. Pertanto deve essere costituito necessariamente da elementi attivi. Se in un circuito è presente un giratore, continua a valere la sovrapposizione degli effetti.



**Fig. 4.11** (a) Simbolo del giratore; (b) un giratore terminato alla porta con un condensatore è equivalente a un induttore.

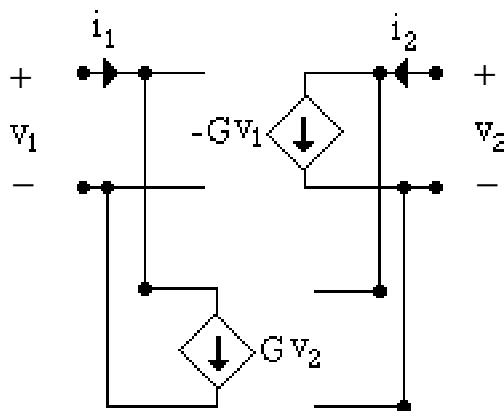
La proprietà più importante del giratore può essere illustrata considerando il circuito illustrato Figura 4.11b (alla porta “2” del giratore è connesso un condensatore lineare tempo-invariante con capacità  $C$ ). In questo caso si ha

$$v_1 = -\frac{i_2}{G} = \frac{C}{G} \frac{dv_2}{dt} = \frac{C}{G^2} \frac{di_1}{dt}. \quad (43)$$

Allora, quando alla porta di un giratore è collegato un condensatore lineare e tempo invariante di capacità  $C$ , l'altra porta si comporta come se fosse un induttore lineare e tempo invariante di induttanza  $C/G^2$ . Pertanto il giratore consente di realizzare un bipolo induttore a partire da un condensatore. Vale

anche la proprietà duale: tramite un giratore è possibile realizzare un bipolo condensatore a partire da un induttore.

Abbiamo già accennato al fatto che uno stesso bipolo può descrivere il funzionamento di oggetti completamente diversi. Il bipolo induttore descrive sia il funzionamento del componente induttore realizzato tramite un avvolgimento descritto nel capitolo 1, sia il funzionamento del circuito di Figura 4.11b.



**Fig. 4.12** Realizzazione di un giratore attraverso generatori di corrente controllati in tensione.

Il lettore dimostri che se in uscita al giratore è connesso un resistore lineare di resistenza  $R$  allora la porta di ingresso si comporta come un resistore lineare di resistenza  $1/RG^2$ ; inoltre, il lettore dimostri che se in uscita al giratore è collegato un bipolo controllato in tensione (corrente), allora la porta di ingresso si comporta come se fosse un resistore controllato in corrente (tensione).

Sono disponibili commercialmente, sotto forma di circuiti integrati, dispositivi che approssimano il funzionamento di un giratore. Un giratore può essere realizzato attraverso due generatori di corrente controllati in tensione, così come illustrato in Figura 4.12.

## 4.5 Il trasformatore ideale

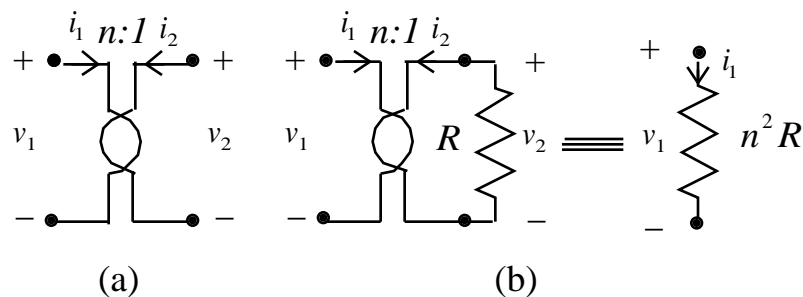
Il trasformatore ideale è un doppio bipolo lineare definito dalle seguenti relazioni

$$v_1 = nv_2, \quad (44)$$

$$i_2 = -ni_1; \quad (45)$$

la costante positiva  $n$  è detta rapporto di trasformazione. Il simbolo del trasformatore è illustrato in Figura 4.13a.

La potenza elettrica assorbita dal trasformatore ideale è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento, quindi è un doppio bipolo globalmente passivo che non dissipa e né immagazzina energia. Per questo doppio bipolo non vale la non amplificazione delle tensioni o la non amplificazione delle correnti pur essendo globalmente passivo. Se in un circuito è presente un trasformatore continua a valere la sovrapposizione degli effetti.



**Fig. 4.13** (a) Simbolo del trasformatore ideale; (b) trasformatore terminato con un resistore.

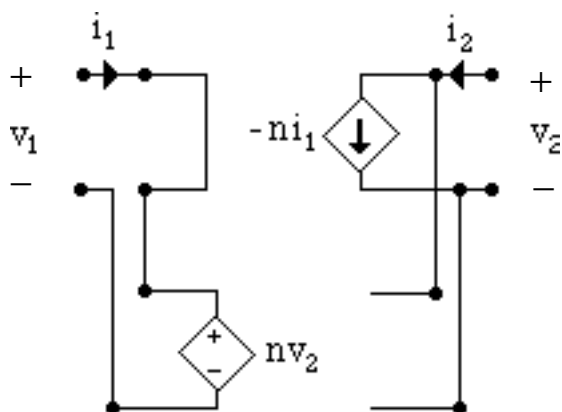
La proprietà più importante del trasformatore può essere illustrata considerando il circuito di Figura 4.13b (alla porta “2” del trasformatore è connesso un resistore lineare con resistenza  $R$ ). In questo caso si ha

$$v_1 = nv_2 = -nRi_2 = n^2 Ri_1. \quad (46)$$

Quando alla porta “2” del trasformatore ideale è collegato un resistore lineare di resistenza  $R$ , la porta “1” si comporta come se fosse un resistore lineare di resistenza  $n^2 R$  ( $n$  è adimensionale). Pertanto il trasformatore consente di variare la resistenza di un resistore senza alterarne la costituzione fisica.

Il lettore dimostri che, quando alla porta “2” è collegato un induttore lineare di induttanza  $L$  (condensatore lineare di capacità  $C$ ), la porta “1” si comporta come se fosse un induttore di induttanza  $n^2 L$  (condensatore di capacità  $C/n^2$ ).

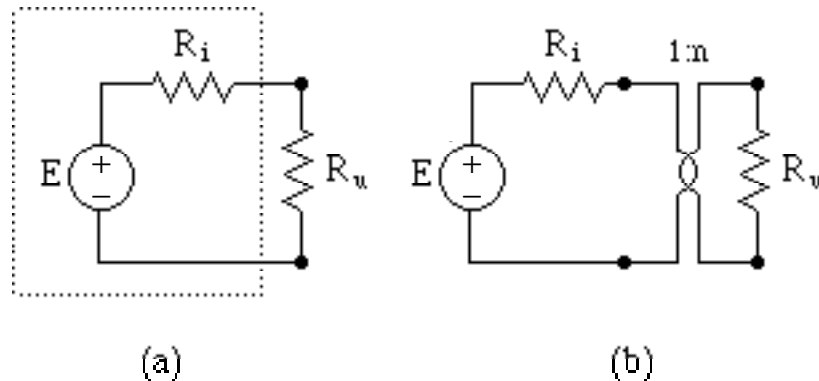
Un trasformatore ideale può essere realizzato attraverso un generatore di corrente controllato in corrente e un generatore di tensione controllato in tensione, così come illustrato in Figura 4.14.



**Fig. 4.14** Realizzazione di un trasformatore ideale attraverso generatori controllati.

### 4.5.1 Adattamento in potenza

Si consideri il circuito illustrato in Figura 4.15. La tensione  $E$  e la resistenza  $R_i$  sono fissate. Si valuti il valore della resistenza  $R_u$  che rende massima la potenza assorbita dal resistore.



**Fig. 4.15** Adattamento in potenza attraverso un trasformatore ideale.

La potenza  $p_u$  assorbita dal resistore di resistenza  $R_u$  vale

$$p_u(R_u/R_i) = E^2 \frac{R_u/R_i}{(1 + R_u/R_i)^2}. \quad (47)$$

Il massimo della funzione  $p_u = p_u(R_u/R_i)$  si ha per  $R_u/R_i = 1$ . Dunque, la potenza  $p_u$  assorbita dal resistore di resistenza  $R_u$  è massima quando

$$R_u = R_i. \quad (48)$$



Il generatore di tensione  $E$  in serie con il resistore di resistenza  $R_i$  potrebbe rappresentare, ad esempio, il circuito equivalente secondo Thévenin (con tensione a vuoto  $E$  e resistenza interna  $R_i$ ) di un amplificatore di potenza. Il resistore di resistenza  $R_u$  potrebbe rappresentare la “resistenza equivalente” di un utilizzatore (ad esempio un altoparlante). Al fine di massimizzare la potenza assorbita dall'utilizzatore (ad esempio, la potenza del segnale sonoro irradiato dall'altoparlante) bisognerebbe realizzare la condizione (32). Molto spesso essa non può essere realizzata a causa della costituzione fisica dei due sistemi. Cosa è possibile fare in questi casi? È evidente che serve a poco aggiungere un altro resistore in serie (la potenza assorbita in più sarebbe in parte dissipata dal resistore che viene aggiunto in serie).

È possibile modificare la resistenza dell'utilizzatore senza alterarne la costituzione fisica e senza “dissipare” potenza utilizzando un trasformatore ideale. Si interponga tra il generatore reale di tensione e l'utilizzatore (ad esempio, tra l'amplificatore e l'altoparlante) un trasformatore ideale così come illustrato in Figura 4.15. In questo caso la potenza assorbita dal resistore  $R_u$  (la resistenza equivalente alla porta “1” vale  $R_u/n^2$  e la potenza elettrica assorbita dal trasformatore ideale è uguale a zero) vale

$$p_u(R_u/n^2 R_i) = E^2 \frac{R_u/n^2 R_i}{(1 + R_u/n^2 R_i)^2}, \quad (49)$$

ed è massima se

$$n = \sqrt{\frac{R_u}{R_i}}. \quad (50)$$

Tipicamente è  $R_u > R_i$ , quindi c'è bisogno di un trasformatore con  $n > 1$ .

#### 4.6 Doppi bipoli di resistori lineari

In questo paragrafo, esamineremo i doppi bipoli costituiti da elementi lineari adinamici: ad esempio, da resistori lineari, generatori controllati lineari, giratori, trasformatori ideali. Con elementi “adinamici” intendiamo tutti quegli elementi che sono caratterizzati da relazioni caratteristiche di tipo algebrico, per

cui il legame tra le tensioni e le correnti è di tipo istantaneo. Nel Capitolo 6 prenderemo in considerazione i doppi bipoli lineari e passivi costituiti anche da elementi dinamici lineari, come induttori e condensatori, oltre che da elementi adinamici, in un regime di funzionamento particolare, quello sinusoidale.

Le equazioni caratteristiche tensione-corrente dei doppi bipoli adinamici lineari sono descritte da equazioni algebriche lineari e omogenee. Esse possono essere scritte in molte forme diverse, a seconda di quali grandezze si considerano come variabili indipendenti (le cosiddette *grandezze di controllo*), dando origine a diverse rappresentazioni del doppio bipolo (Figura 4.16):

- (a) rappresentazione su **base corrente**: le correnti  $i_1$  e  $i_2$  sono le variabili indipendenti e le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  sono le variabili dipendenti;
- (b) rappresentazione su **base tensione**: le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  sono le variabili indipendenti e le correnti  $i_1$  e  $i_2$  sono le variabili dipendenti;
- (c) rappresentazione **ibrida**: la tensione  $v_1$  e la corrente  $i_2$  sono le variabili indipendenti e la corrente  $i_1$  e la tensione  $v_2$  sono le variabili dipendenti o il duale;
- (d) rappresentazione di **trasmissione**: la tensione  $v_1$  e la corrente  $i_1$  sono le variabili indipendenti e la tensione  $v_2$  e la corrente  $i_2$  sono le variabili dipendenti o il duale.



**Fig. 4.16** Doppio bipolo di elementi adinamici lineari.

#### 4.6.1 Matrice delle resistenze

Nella rappresentazione in base corrente di un doppio bipolo lineare senza generatori indipendenti le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  vengono espresse in funzione delle correnti  $i_1$  e  $i_2$  attraverso le relazioni lineari omogenee

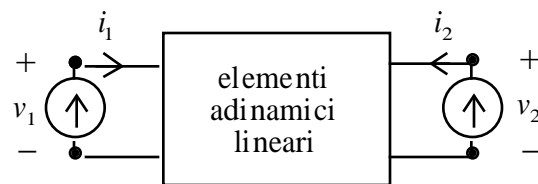
$$v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2, \quad (51)$$

$$v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2. \quad (52)$$

I coefficienti  $R_{11}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{21}$  e  $R_{22}$  sono delle costanti dimensionalmente omogenee con una resistenza. Il doppio bipolo controllato in corrente può essere pensato

come un doppio bipolo alimentato da due generatori ideali di corrente, Figura 4.17.

La linearità delle relazioni (51) e (52) è conseguenza della linearità degli elementi che costituiscono il doppio bipolo. Siccome il circuito è lineare, per la proprietà della sovrapposizione degli effetti ci si aspetta che la tensione di ciascuna porta sia una combinazione lineare delle correnti impresse dai due generatori ideali. L'omogeneità delle equazioni (51) e (52) è conseguenza del fatto che, per ipotesi, il doppio bipolo non contiene al suo interno generatori indipendenti<sup>1</sup>. Qualora il doppio bipolo contenesse anche generatori indipendenti, bisognerebbe aggiungere due termini noti alle espressioni a secondo membro nelle (51) e (52). Questi termini rappresentano le tensioni a vuoto alla porta "1" e alla porta "2" dovute ai generatori indipendenti interni al doppio bipolo.



**Fig. 4.17** Caratterizzazione di un doppio bipolo su base corrente.

I parametri  $R_{11}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{21}$  e  $R_{22}$  del doppio bipolo possono essere determinati attraverso le due prove in circuito aperto illustrate in Figura 4.18. I coefficienti  $R_{11}$  e  $R_{22}$ , sono le due *resistenze proprie* del doppio bipolo:  $R_{11}$  è la resistenza equivalente alla porta "1" quando la porta "2" è connessa a un circuito aperto,

$$R_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{v_{11}}{i_1}; \quad (53)$$

$R_{22}$  è la resistenza equivalente alla porta "2" quando la porta "1" è connessa a un circuito aperto,

$$R_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v_{22}}{i_2}. \quad (54)$$

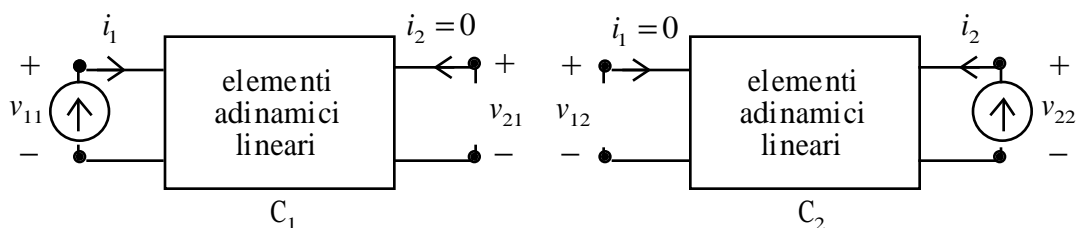
<sup>1</sup> Quando il doppio bipolo contiene generatori controllati potrebbe accadere che le tensioni alle due porte siano diverse da zero anche se le due correnti sono entrambe nulle. In realtà, qualora ciò si verificasse, il circuito ammetterebbe infinite soluzioni. Per determinare quale si realizza nel "circuito fisico" bisognerebbe portare in conto gli effetti che sono stati ignorati in fase di modello, ad esempio gli effetti dovuti alle non linearità sempre presenti si hanno componenti modellati attraverso generatori controllati.

I coefficienti  $R_{12}$  e  $R_{21}$ , sono le due *resistenze mutue* del doppio bipolo:  $R_{12}$  è il rapporto tra la tensione  $v_{12}$  della porta “1” quando essa è connessa a un circuito aperto e la corrente  $i_2$  (circuito  $C_2$  Figura 4.18),

$$R_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v_{12}}{i_2}; \quad (55)$$

invece,  $R_{21}$  è il rapporto tra la tensione  $v_{21}$  della porta “2” quando essa è connessa a un circuito aperto e la corrente  $i_1$ , (circuito  $C_1$  Figura 4.18),

$$R_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{v_{21}}{i_1}. \quad (56)$$



**Fig. 4.18** Due prove in circuito aperto per identificare i parametri  $\mathbf{R}$ .

Le relazioni caratteristiche (51) e (52) possono essere rappresentate in forma matriciale. Introdotti i due vettori colonna  $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^T$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ , le (51) e (52) possono essere riscritte come

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i}, \quad (57)$$

dove  $\mathbf{R}$  è la matrice quadrata  $2 \times 2$  data da

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Alla matrice  $\mathbf{R}$  si dà il nome di **matrice delle resistenze del doppio bipolo**. La potenza assorbita dal doppio bipolo vale

$$p = i_1 v_1 + i_2 v_2 = \mathbf{v}^T \mathbf{i}. \quad (59)$$

Utilizzando la (57), si ha

$$p = \mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i}. \quad (60)$$

### Osservazione: reciprocità e passività

Nel circuito  $C_1$  di Figura 4.18 è possibile considerare la corrente  $i_1$  impressa dal generatore di corrente come “causa” e come “effetto” la tensione  $v_{21}$  della porta “2” collegata a un circuito aperto. Dualmente, nel circuito  $C_2$  di Figura 4.18 è possibile considerare la corrente  $i_2$  impressa dal generatore di corrente come “causa” e come “effetto” la tensione  $v_{12}$  della porta “1” collegata a un circuito aperto. Il doppio bipolo si dice che è reciproco se il rapporto tra effetto e causa nel circuito  $C_1$  è uguale al rapporto tra effetto e causa nel circuito  $C_2$ . In altre parole, un doppio bipolo si dice che è reciproco se il rapporto tra causa e effetto resta lo stesso malgrado lo scambio tra causa e effetto.

Se il doppio bipolo è reciproco dalle (55) e (56) abbiamo che

$$R_{12} = R_{21}. \quad (61)$$

Ciò significa che le matrici delle resistenze dei doppi bipoli reciproci sono simmetriche.

I doppi bipoli che contengono resistori lineari e trasformatori ideali sono reciproci. La dimostrazione di questa proprietà, che qui non riportiamo (è riportata in **Appendice**), si basa sul Teorema di Tellegen.

La proprietà della reciprocità non vale se il doppio bipolo contiene giratori e generatori controllati. A differenza del trasformatore ideale, i generatori controllati e i giratori sono doppi bipoli non reciproci.

Per i doppi bipoli di resistori passivi (resistori con resistenze positive) si hanno le proprietà

$$R_{11} > 0, R_{22} > 0, |R_{21}| \leq R_{11}, |R_{12}| \leq R_{22}. \quad (62)$$

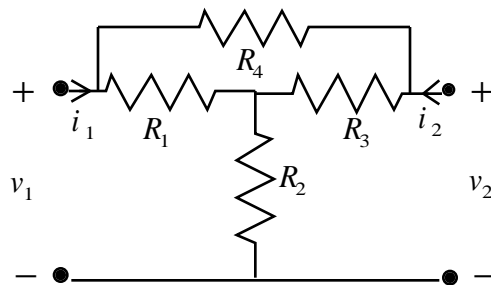
Le prime due sono diretta conseguenza del fatto che  $R_{11}$  e  $R_{22}$  sono resistenze proprie, mentre le ultime due sono una diretta conseguenza della proprietà della non amplificazione delle tensioni. Il lettore provi a dimostrarle.



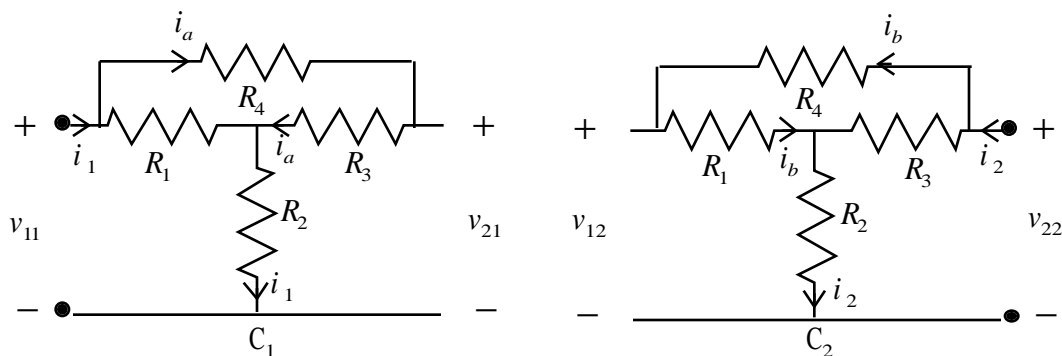
### Esempio

Si consideri il doppio bipolo di resistori lineari di Figura 4.19. Vogliamo determinare la matrice delle resistenze.

Dalla Figura 4.19 e dalle formule (53) e (54) risulta evidente che  $R_{11}$  e  $R_{22}$  sono le resistenze equivalenti dei due bipoli riportati in Figura 4.20.



**Fig. 4.19** Un doppio bipolo di resistori.



**Fig. 4.20** Due circuiti ausiliari per la determinazione della matrice delle resistenze.

Nel circuito  $C_1$  i resistori  $R_3$  e  $R_4$  sono in serie (ricordiamo che questo circuito è stato ottenuto ponendo uguale a zero la corrente  $i_2 = 0$ , di conseguenza le correnti nei due resistori  $R_3$  e  $R_4$  sono uguali, con un'opportuna scelta dei versi di riferimento). A sua volta la serie  $R_3$ - $R_4$  è in parallelo con il resistore  $R_1$  e il risultante gruppo di resistenze è in serie con il resistore  $R_2$ . Sicché  $R_{11}$  è data da

$$R_{11} = R_2 + \frac{(R_3 + R_4)R_1}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (63)$$

Invece, nel circuito  $C_2$  i resistori  $R_1$  e  $R_4$  sono in serie (ricordiamo che questo circuito è stato ottenuto ponendo uguale a zero la corrente  $i_1 = 0$ , di conseguenza le correnti nei due resistori  $R_1$  e  $R_4$  sono uguali, con un'opportuna scelta dei versi di riferimento). A sua volta la serie  $R_1 - R_4$  è in parallelo con il resistore  $R_3$  e il risultante gruppo di resistenze è in serie con il resistore  $R_2$ . Sicché  $R_{22}$  è data da

$$R_{22} = R_2 + \frac{(R_1 + R_4)R_3}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (64)$$

Per determinare  $R_{12}$  bisogna usare l'equazione (55), quindi bisogna determinare  $v_{12}$  nel circuito  $C_2$ . In questo caso è chiaro che

$$v_{12} = i_b R_1 + i_2 R_2. \quad (65)$$

Siccome la serie  $R_1 - R_4$  è in parallelo con il resistore  $R_3$ , la corrente  $i_b$  può essere determinata applicando il partitore di corrente. Troviamo

$$i_a = i_2 \frac{R_3}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (66)$$

Sostituendo la (66) nella (65) e dividendo tutto per  $i_2$  troviamo

$$R_{12} = R_2 + R_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (67)$$

Il lettore determini il parametro  $R_{21}$  procedendo in modo analogo e verifichi che è uguale a  $R_{12}$  a causa della proprietà della reciprocità.

◆

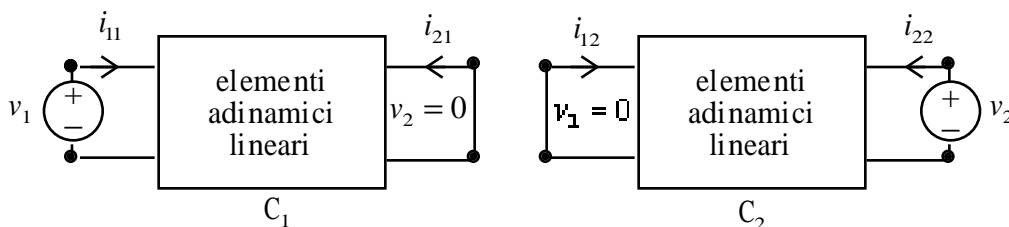
#### 4.6.2 Matrice delle conduttanze

Nella rappresentazione in base tensione di un doppio bipolo lineare senza generatori indipendenti le correnti  $i_1$  e  $i_2$  vengono espresse in funzione delle tensioni  $v_1$  e  $v_2$  come funzioni lineari omogenee

$$i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2, \quad (68)$$

$$i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2. \quad (69)$$

I coefficienti  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$  e  $G_{22}$  sono delle costanti dimensionalmente omogenee con una conduttanza. Il doppio bipolo controllato in tensione può essere visto come un doppio bipolo alimentato da due generatori ideali di tensione. Qualora il doppio bipolo contenesse anche generatori indipendenti, bisognerebbe aggiungere due termini noti alle espressioni a secondo membro nelle (68) e (69). Questi termini rappresentano le correnti di corto circuito alla porta “1” e alla porta “2” dovute ai generatori indipendenti interni al doppio bipolo.



**Fig. 4.21** Due prove in corto circuito per identificare i parametri  $G$ .

Per trovare i parametri  $G$  possiamo usare le due prove di corto circuito riportate in Figura 4.19. I coefficienti  $G_{11}$  e  $G_{22}$  sono le due *conduttanze proprie* del doppio bipolo:

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_{11}}{v_1}, \quad G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i_{22}}{v_2}. \quad (70)$$

I coefficienti  $G_{12}$  e  $G_{21}$  sono le due *conduttanze mutue* del doppio bipolo:

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i_{12}}{v_2}, \quad G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_{21}}{v_1}. \quad (71)$$

Le relazioni caratteristiche (68) e (69) possono essere rappresentate in forma matriciale. Introdotti i due vettori colonna  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$  e  $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^T$ , le (68) e (69) possono essere riscritte come

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v}, \quad (72)$$



dove  $G$  è la matrice quadrata  $2 \times 2$  data da

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}. \quad (73)$$

Alla matrice  $G$  si dà il nome di **matrice delle conduttanze del doppio bipolo**. È immediato che la matrice delle resistenze e la matrice delle conduttanze sono legate dalle relazioni

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}. \quad (74)$$

La potenza assorbita dal doppio bipolo può essere espressa come

$$p = \mathbf{v}^T \mathbf{G} \mathbf{v}. \quad (75)$$

### Osservazione

Se il doppio bipolo è reciproco si ha

$$G_{12} = G_{21}. \quad (76)$$

La dimostrazione di questa proprietà per i doppi bipoli di resistori lineari e trasformatori ideali, che qui non riportiamo (è riportata in **Appendice**), si basa sul Teorema di Tellegen.

Per i doppi bipoli di resistori passivi (resistori con resistenze positive) si hanno le proprietà

$$G_{11} > 0, \quad G_{22} > 0, \quad |G_{21}| \leq G_{11}, \quad |G_{12}| \leq G_{22}. \quad (77)$$

Le prime due sono diretta conseguenza del fatto che  $G_{11}$  e  $G_{22}$  sono conduttanze proprie, mentre le ultime due sono una diretta conseguenza della proprietà della non amplificazione delle correnti. Il lettore provi a dimostrarle.



**Esercizio**

Si determini la matrice delle conduttanze del doppio bipolo di resistori riportato in Figura 4.19 risolvendo i corrispondenti circuiti di prova in corto circuito e si verifichi la (76). Si verifichi, poi, che la matrice così ottenuta è l'inversa della matrice delle resistenze calcolata in precedenza.

**4.6.3 Matrice ibrida**

Nella rappresentazione ibrida di un doppio bipolo lineare senza generatori indipendenti la tensione  $v_1$  e la corrente  $i_2$  vengono espresse in funzione della corrente  $i_1$  e della tensione  $v_2$  (o viceversa) attraverso le relazioni lineari omogenee

$$v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2, \quad (78)$$

$$i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2. \quad (79)$$

Il coefficiente  $H_{11}$  è una costante dimensionalmente omogenea con una resistenza, il coefficiente  $H_{22}$  è una costante dimensionalmente omogenea con una conduttanza e i due coefficienti  $H_{12}$  e  $H_{21}$  sono costanti adimensionali. Un doppio bipolo caratterizzato in maniera ibrida può essere visto come un doppio bipolo alimentato da un generatore di corrente ideale alla porta "1" e da un generatore di tensione alla porta "2".

Qualora il doppio bipolo contenesse anche generatori indipendenti, bisognerebbe aggiungere due termini noti alle espressioni a secondo membro nelle (78) e (79). Questi termini rappresentano, rispettivamente, la tensione a vuoto alla porta "1" e la corrente di corto circuito alla porta "2" dovute ai generatori indipendenti interni al doppio bipolo.

Per trovare i parametri  $H$  possiamo fare riferimento ai due circuiti riportati in Figura 4.22. Nel circuito  $C_1$  la porta "2" è connessa a un cortocircuito,  $v_2 = 0$ , mentre nel circuito  $C_2$  la porta "1" è collegata a un circuito aperto,  $i_1 = 0$ . Il coefficiente  $H_{11}$  è la resistenza equivalente alla porta "1" quando la porta "2" è in corto circuito,

$$H_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} = \frac{v_{11}}{i_1}; \quad (80)$$

il coefficiente  $H_{22}$  è la conduttanza equivalente alla porta “2” con la porta “1” aperta,

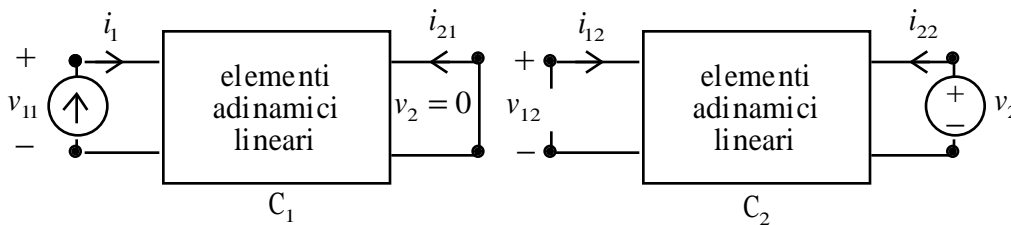
$$H_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{i_{22}}{v_2}; \quad (81)$$

il coefficiente  $H_{12}$  è il *guadagno di tensione* con la porta “1” aperta,

$$H_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v_{12}}{v_2}; \quad (82)$$

infine, il coefficiente  $H_{21}$  è il *guadagno di corrente* con la porta “2” in corto circuito,

$$H_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_{21}}{i_1}. \quad (83)$$



**Fig. 4.22** Due circuiti ausiliari per l'identificazione dei parametri  $H$ .

Le relazioni caratteristiche (78) e (79) possono essere rappresentate in forma matriciale. Introdotti i due vettori colonna  $\mathbf{x} = (i_1, v_2)^T$  e  $\mathbf{y} = (v_1, i_2)^T$ , le (78) e (79) possono essere riscritte come

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \quad (84)$$

dove  $\mathbf{H}$  è la matrice quadrata  $2 \times 2$  data da

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Alla matrice  $\mathbf{H}$  si dà il nome di **matrice ibrida del doppio bipolo**. La potenza assorbita dal doppio bipolo può essere espressa come

$$p = \mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{x}. \quad (86)$$

### Esercizio

Si determini la matrice ibrida del doppio bipolo di resistori riportato in Figura 4.19 risolvendo i corrispondenti circuiti ausiliari.

### Osservazione

Se il doppio bipolo è reciproco si ha

$$H_{12} = -H_{21}. \quad (87)$$

La dimostrazione di questa proprietà per i doppi bipoli di resistori lineari e trasformatori ideali, che qui non riportiamo (è riportata in **Appendice**), si basa sul Teorema di Tellegen.

Per i doppi bipoli di resistori passivi (resistori con resistenze positive) si hanno le proprietà

$$H_{11} > 0, H_{22} > 0, |H_{21}| = |H_{12}| \leq 1. \quad (88)$$

Le prime due sono diretta conseguenza del fatto che  $H_{11}$  e  $H_{22}$  sono, rispettivamente, una resistenza propria e una conduttanza propria, mentre l'ultima è una diretta conseguenza della proprietà della non amplificazione delle correnti e delle tensioni. Il lettore provi a dimostrarle.



### Esercizio

Si determini la relazione tra gli elementi della matrice ibrida e gli elementi della matrice delle conduttanze di un doppio bipolo. Si verifichi, poi, che per un doppio bipolo reciproco vale la relazione (87).

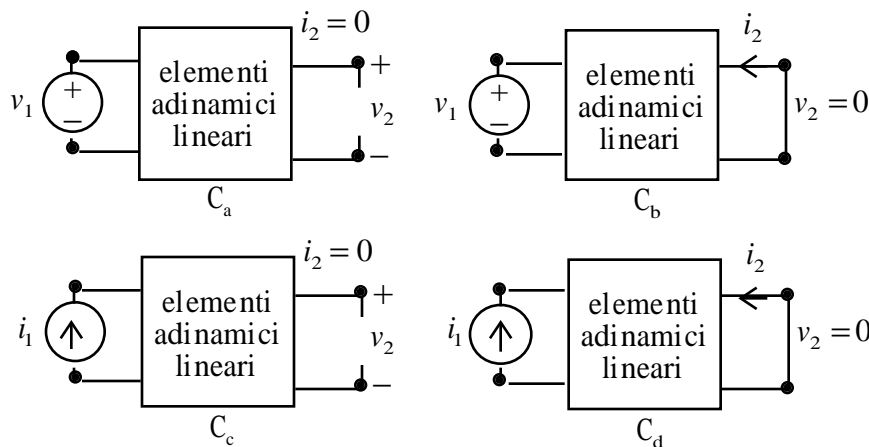
#### 4.6.4 Matrice di trasmissione

Nella *rappresentazione di trasmissione* di un doppio bipolo lineare senza generatori indipendenti la tensione  $v_1$  e la corrente  $i_1$  vengono espresse in funzione della tensione  $v_2$  e della corrente  $-i_2$  (o viceversa) attraverso le relazioni lineari omogenee

$$v_1 = T_{11}v_2 + T_{12}(-i_2), \quad (89)$$

$$i_1 = T_{21}v_2 + T_{22}(-i_2). \quad (90)$$

I coefficiente  $T_{11}$  e  $T_{22}$  sono due costanti adimensionali. Il coefficiente  $T_{12}$  è una costante dimensionalmente omogenea con una resistenza, mentre il coefficiente  $T_{21}$  è una costante dimensionalmente omogenea con una conduttanza. Questa rappresentazione, chiamata anche *rappresentazione ABCD*, è molto utile nell'analisi di cascate di doppi bipoli.



**Fig. 4.23** Circuiti ausiliari per l'identificazione dei parametri  $T$ .

Dalle relazioni (89) e (90) si ha che

$$T_{11} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_2=0}, \quad T_{12} = \left. \frac{v_1}{-i_2} \right|_{v_2=0}, \quad T_{21} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{i_2=0}, \quad T_{22} = \left. \frac{i_1}{-i_2} \right|_{v_2=0}. \quad (91)$$

Per trovare questi parametri possiamo fare riferimento ai quattro circuiti riportati in Figura 4.23.

Le relazioni caratteristiche (89) e (90) possono essere rappresentate in forma matriciale. Introdotti i due vettori colonna  $\mathbf{x}_2 = (v_2, -i_2)^T$  e  $\mathbf{x}_1 = (v_1, i_1)^T$ , le (89) e (90) possono essere riscritte come

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{T}\mathbf{x}_1, \quad (92)$$

dove  $\mathbf{T}$  è la matrice quadrata  $2 \times 2$  data da

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (93)$$

### Osservazione

Alla matrice  $\mathbf{T}$  si dà il nome di **matrice di trasmissione del doppio bipolo**. Se il doppio bipolo è reciproco si può dimostrare che (**Appendice**)

$$\det(\mathbf{T}) = 1. \quad (94)$$

Per i doppi bipoli di resistori passivi (resistori con resistenze positive) si hanno le seguenti proprietà

$$|T_{11}| \leq 1, \quad |T_{22}| \leq 1. \quad (95)$$

Queste proprietà sono una diretta conseguenza della proprietà della non amplificazione delle correnti e delle tensioni. Il lettore provi a dimostrarle. ◆

### Esercizio

Si determini la relazione tra gli elementi della matrice di trasmissione e gli elementi della matrice delle conduttanze di un doppio bipolo. Si verifichi, poi, che per un doppio bipolo reciproco vale la relazione (94).

### Esercizio

Si determinino i parametri  $T$  del doppio bipolo di resistori riportato in Figura 4.19 risolvendo i corrispondenti circuiti ausiliari.

#### 4.6.5 Doppi bipoli in cascata

Consideriamo, ora, due doppi bipoli in cascata, come nella Figura 4.24. Siano  $T'$  e  $T''$  le rispettive matrici di trasmissione. Intendiamo trovare la matrice di trasmissione  $T$  per il doppio bipolo equivalente alla cascata.

Siccome per la natura stessa della connessione abbiamo

$$V_1'' = V_2', \quad I_1'' = -I_2', \quad (96)$$

utilizzando la definizione di matrice di trasmissione si ha che

$$\begin{vmatrix} v_1' \\ i_1' \end{vmatrix} = T' \begin{vmatrix} v_2' \\ -i_2' \end{vmatrix} = T' \begin{vmatrix} v_1'' \\ i_1'' \end{vmatrix} = T' T'' \begin{vmatrix} v_2'' \\ -i_2'' \end{vmatrix}, \quad (97)$$

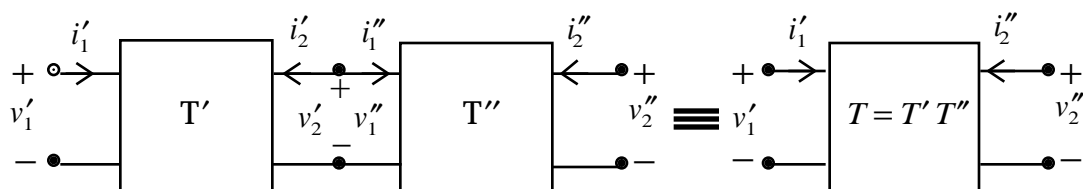
quindi

$$\begin{vmatrix} v_1' \\ i_1' \end{vmatrix} = T' T'' \begin{vmatrix} v_2'' \\ -i_2'' \end{vmatrix}. \quad (98)$$

Pertanto, la matrice di trasmissione della cascata di due doppi bipoli con matrici di trasmissione  $T'$  e  $T''$  è data da

$$T = T' T''. \quad (99)$$

La rappresentazione duale in cui le grandezze indipendenti sono la tensione  $v_1$  e la corrente  $i_1$  è possibile. Per essa valgono tutti le considerazioni e i risultati che abbiamo appena descritto.



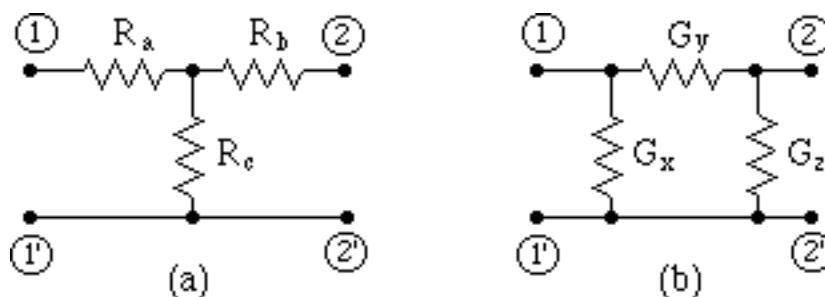
**Fig. 4.24** Due doppi bipoli connessi in cascata.

## 4.7 Sintesi di un doppio bipolo lineare

Nel paragrafo precedente abbiamo analizzato circuiti adinamici lineari che si comportano come doppi bipoli. È interessante a questo punto considerare il problema inverso. Dato un doppio bipolo, definito, ad esempio, attraverso la matrice delle resistenze (o conduttanze), vogliamo individuare il circuito più semplice che abbia quella matrice delle resistenze. È evidente che in questo modo possiamo estendere il concetto di equivalenza a strutture più complesse del semplice bipolo.

Per risolvere questo problema dobbiamo distinguere i casi in cui la matrice delle resistenze (o conduttanze) è simmetrica dai casi in cui non lo è.

Si assuma che la matrice delle resistenze (o delle conduttanze) sia simmetrica. In questi casi la matrice delle resistenze (o conduttanze) è caratterizzata da tre parametri indipendenti, di conseguenza bastano tre resistori per costruire il doppio bipolo di resistori equivalente.



**Fig. 4.25** (a) Configurazione a “T”, (b) configurazione a “Π”.

Il circuito equivalente di un doppio bipolo di soli resistori lineari può essere costruito considerando un doppio bipolo del tipo illustrato in Figura 4.25: alla configurazione rappresentata in Figura 4.25a si dà il nome di configurazione a “T”, invece a quella rappresentata in Figura 4.25b si dà il nome di configurazione a “Π”. Conviene rappresentare la matrice delle resistenze tramite la configurazione a “T” e la matrice delle conduttanze tramite la configurazione a “Π”.

### 4.7.1 Configurazione a “T”

Gli elementi della matrice delle resistenze del doppio bipolo di Figura 4.25a sono



$$R_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = R_a + R_c, \quad (100)$$

$$R_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = R_b + R_c, \quad (101)$$

$$R_{21} = R_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = R_c. \quad (102)$$

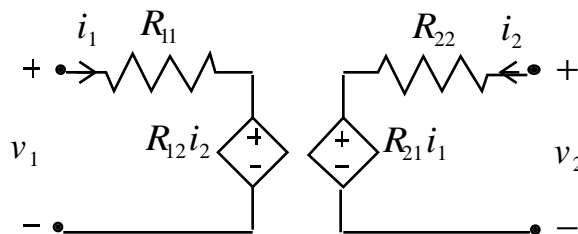
Allora, le resistenze dei resistori della configurazione a “T” che sintetizza una data matrice delle resistenze, che sia simmetrica, sono date da

$$R_a = R_{11} - R_{12}, \quad (103)$$

$$R_b = R_{22} - R_{12}, \quad (104)$$

$$R_c = R_{12}. \quad (105)$$

Si osservi che, affinché una assegnata matrice delle resistenze sia fisicamente realizzabile con resistori aventi resistenze positive (resistori passivi), devono essere verificate le condizioni (62). Il segno degli elementi fuori diagonale può essere qualsiasi. Se  $R_{12}$  è negativo, bisogna invertire la coppia di terminali di una delle due porte per ottenere una resistenza  $R_c$  positiva.



**Fig. 4.26** Realizzazione di un doppio bipolo non reciproco attraverso due generatori di tensione controllati in corrente.

### Osservazione

Una matrice delle resistenze che non è simmetrica e/o non verifica le condizioni (62), non può essere sintetizzata con un doppio bipolo di soli resistori. In questi casi è necessario utilizzare, oltre ai resistori, anche generatori controllati per realizzare il doppio bipolo corrispondente alla matrice assegnata, Figura 4.26.



I parametri ibridi della configurazione a “T” sono:

$$H_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{i_2=0} = (R_a + R_c)^{-1}, \quad (106)$$

$$H_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{v_1=0} = R_b + \frac{R_a R_c}{R_a + R_c}, \quad (107)$$

$$-H_{12} = H_{21} = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0} = \frac{R_c}{R_a + R_c}. \quad (108)$$

#### 4.7.2 Configurazione a “Π”

Per il doppio bipolo di Figura 4.25b si ottiene la matrice delle conduttanze

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = G_x + G_y, \quad (109)$$

$$G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = G_y + G_z, \quad (110)$$

$$G_{21} = G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = -G_y. \quad (111)$$

Allora, le resistenze dei resistori della configurazione a “Π” che sintetizza una data matrice delle conduttanze, che sia simmetrica, sono date da

$$G_x = G_{11} + G_{12}, \quad (112)$$

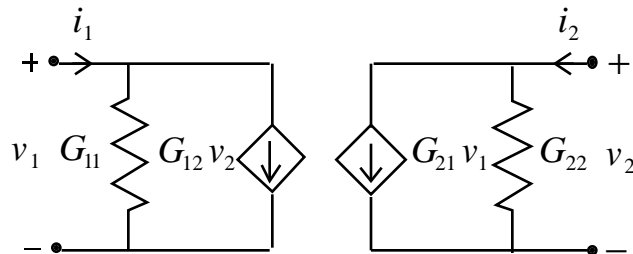
$$G_y = -G_{12}, \quad (113)$$

$$G_z = G_{22} + G_{12}. \quad (114)$$

Si osservi che, affinché una assegnata matrice delle conduttanze sia fisicamente realizzabile con resistori aventi resistenze positive (resistori passivi), devono essere verificate le condizioni (77). Il segno degli elementi fuori diagonale può essere qualsiasi. Se  $G_{12}$  è negativo, bisogna invertire la coppia di terminali di una delle due porte per ottenere una conduttanza  $G_y$  positiva.

## Osservazione

Una matrice delle conduttanze che non è simmetrica e/o non verifica le condizioni (61), non può essere sintetizzata con un doppio bipolo di soli resistori. In questi casi è necessario utilizzare, oltre ai resistori, anche generatori controllati per realizzare il doppio bipolo corrispondente alla matrice assegnata, Figura 4.25.



**Fig. 4.27** Realizzazione di un doppio bipolo non reciproco attraverso due generatori di corrente controllati in tensione.



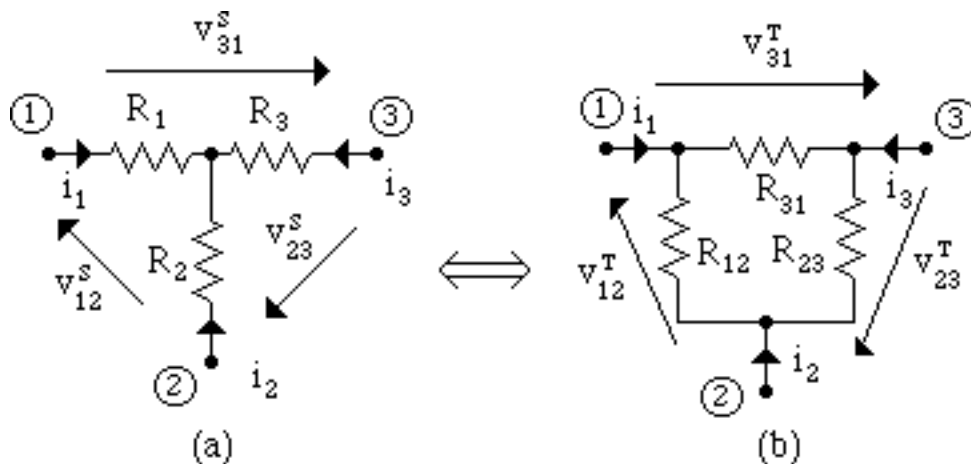
### 4.7.3 Trasformazione stella-triangolo

Si considerino i due circuiti illustrati in Figura 4.28. Ognuno di essi ha tre terminali ed è costituito da tre resistori: sono gli esempi più semplici di tripoli di resistori. In Figura 4.28a i resistori sono connessi in modo tale da ricordare una “stella” (**connessione a stella**), mentre in Figura 4.28b sono connessi in modo tale da ricordare un “triangolo” (**connessione a triangolo**). Il tripolo a stella può essere visto come un doppio bipolo a “T”, mentre il tripolo a triangolo può essere visto come un doppio bipolo a “Π”.

Il tripolo costituito da tre resistori connessi a stella (Figura 4.28a) può essere sempre “rappresentato” attraverso un tripolo equivalente in cui i resistori sono connessi a triangolo (Figura 4.28b), e viceversa. Stiamo estendendo il concetto di equivalenza al caso di elementi circuitali con più di due terminali.

Per determinare la relazione di equivalenza tra il tripolo a stella e quello a triangolo si può operare in diversi modi. Ad esempio, ciascun tripolo prima viene caratterizzato come doppio bipolo, determinando, ad esempio, le rispettive matrici delle resistenze e, poi, si impone che esse siano uguali. Esiste, però, un modo molto più semplice per determinare le relazioni tra le resistenze

della configurazione a stella  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  e le resistenze della configurazione a triangolo  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  e  $R_{31}$  che assicurano l'equivalenza delle due configurazioni. Esso si basa sull'applicazione diretta della proprietà della sovrapposizione degli effetti.



**Fig. 4.28** (a) Tre resistori connessi a stella e (b) connessi a triangolo. Le frecce indicano i versi di riferimento delle tensioni: la punta della freccia indica il terminale contrassegnato con il segno “+” e la coda indica il terminale contrassegnato con il segno “-”.

Per determinare il legame tra  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  e  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  e  $R_{31}$  conviene, allo scopo di ridurre la complessità di calcolo, imporre l'equivalenza per delle terne particolari di correnti. Si imponga l'equivalenza per la terna di correnti

$$i_1 = I^{(1)}, \quad i_2 = -I^{(1)}, \quad i_3 = 0. \quad (115)$$

Le tensioni  $v_{31}^s$  e  $v_{31}^T$  valgono (vedi Figure 4.28)

$$v_{31}^s = -R_1 I^{(1)}, \quad (116)$$

$$v_{31}^T = -\frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I^{(1)}. \quad (117)$$

Imponendo  $v_{31}^s = v_{31}^T$ , si ottiene la relazione

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (118)$$

Imponendo, ora, l'equivalenza per le due terne indipendenti

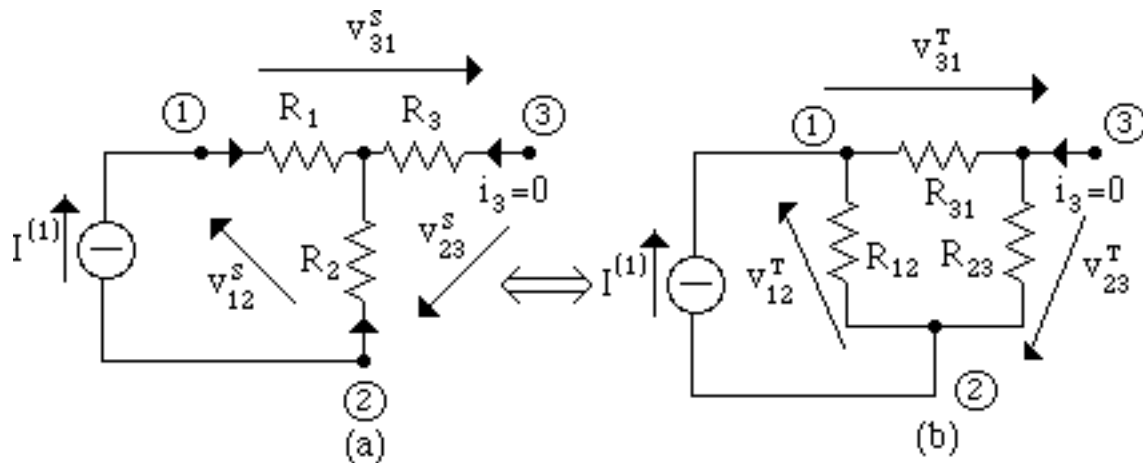
$$i_1 = 0, i_2 = I^{(2)}, i_3 = -I^{(2)}, \quad (119)$$

$$i_1 = I^{(3)}, i_2 = 0, i_3 = -I^{(3)}, \quad (120)$$

si ottengono le altre due relazioni

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (121)$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (122)$$



**Fig. 4.29** Circuiti ausiliari per determinare le relazioni di equivalenza. Le frecce indicano i versi di riferimento delle tensioni: la punta della freccia indica il terminale contrassegnato con il segno “+” e la coda indica il terminale contrassegnato con il segno “-”.

Il lettore verifichi che, dalle (121) e (122), si ottiene anche  $v_{12}^T = v_{12}^s$  e  $v_{23}^T = v_{23}^s$ . Le relazioni (118), (121) e (122) sono state ottenute imponendo l’equivalenza per tre particolari terne di correnti. Per la proprietà della sovrapposizione degli effetti l’equivalenza è assicurata per qualsiasi altra terna di correnti (il lettore dimostri che è sempre possibile scomporre una terna arbitraria di correnti nella sovrapposizione di tre terne del tipo (115), (119) e (120)).

### Formule per la trasformazione triangolo → stella

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (123)$$

### Formule per la trasformazione stella → triangolo

La trasformazione inversa è descritta dalle relazioni (formule della **trasformazione stella → triangolo**)

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, \quad R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}. \quad (124)$$

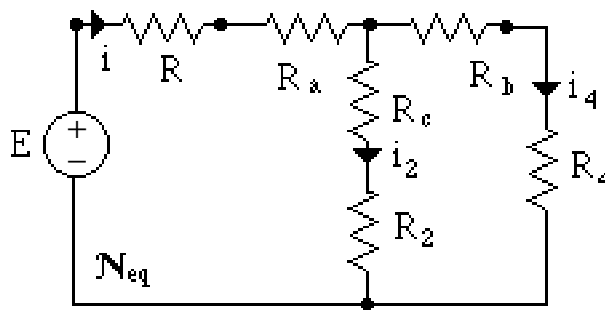
Il lettore determini le relazioni (123) e (124) imponendo che la matrice delle conduttanze della configurazione a triangolo e della configurazione a stella siano uguali.

### Esempio

La soluzione del circuito illustrato nella Figura 3.13 può essere semplificata notevolmente se si sostituisce il triangolo costituito dai resistori di resistenze  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  con la stella equivalente  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  e  $R_{31}$ :

$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1, \quad R_b = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1, \quad R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 1. \quad (125)$$

Così facendo si ottiene il circuito equivalente  $N_{eq}$  illustrato in Figura 4.28. Esso può essere risolto attraverso l'equivalenza serie e parallelo e le formule dei partitori. Il lettore determini la corrente  $i$  che circola nel resistore  $R$  in questo modo e la confronti con quella ottenuta applicando il metodo dei potenziali di nodo.



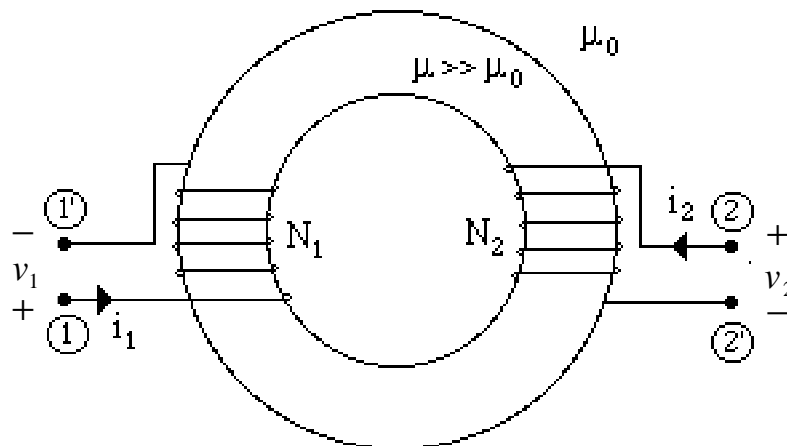
**Fig. 4.30** Circuito equivalente al circuito di Figura 3.13.

## 4.8 Circuiti mutuamente accoppiati: trasformatore reale

Se un avvolgimento di filo conduttore di elettricità viene posto nelle immediate vicinanze di un altro elemento analogo, accade che il flusso del campo magnetico concatenato con le spire di ognuno dei due dipende sia dalla corrente elettrica che circola nel primo avvolgimento che da quella che circola nel secondo. Siamo in presenza, quindi, di un doppio bipolo che chiameremo “*circuiti mutuamente accoppiati*” o *trasformatore reale*. Gli induttori mutuamente accoppiati sono diffusamente impiegati nei circuiti di comunicazione, nelle apparecchiature di misura e nei sistemi di potenza. I trasformatori che si utilizzano nelle reti di potenza che trasmettono e distribuiscono l’energia elettrica sono induttori accoppiati. Anche i motori e i generatori elettrici possono essere rappresentati tramite induttori accoppiati tempo-varianti. Ci limiteremo a descrivere il caso più semplice, ma non per questo meno significativo, in cui ci sono due avvolgimenti e l’accoppiamento mutuo è tempo-invariante.

### 4.8.1 Relazioni caratteristiche di due circuiti mutuamente accoppiati

Si consideri un toro di materiale ferromagnetico: tipicamente ferrite o lamine sottili di acciaio speciale. Si avvolgano su di esso due bobine (avvolgimenti di “filo” conduttore smaltato con vernice isolante), come illustrato in Figura 4.31; si ottiene un doppio bipolo. Questo è un esempio di *circuiti mutuamente accoppiati* (*induttori accoppiati*).



**Fig. 4.31** Due circuiti, avvolti attorno a un nucleo toroidale, accoppiati magneticamente.

Si assuma che l'intensità della corrente elettrica lungo ciascun avvolgimento sia uniforme. Ciò è verificato esattamente solo in regime stazionario. In condizioni di funzionamento lentamente variabili questa ipotesi può essere ritenuta, con buona approssimazione, ancora valida.

Applicando la legge di Faraday-Neumann a due linee chiuse, in parte coincidenti con i due avvolgimenti, si ottengono per le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  del doppio bipolo le relazioni

$$v_1 = \frac{d\phi_1}{dt}, v_2 = \frac{d\phi_2}{dt}, \quad (126)$$

dove  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono, rispettivamente, i flussi del campo magnetico concatenati con la bobina "1" e la bobina "2" prodotti dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$  che circolano nelle due bobine. Abbiamo supposto che la conducibilità del conduttore con cui sono realizzati i due avvolgimenti sia infinita.

Si assuma che l'anello toroidale sia costituito da un materiale magnetico ideale (isotropo), in cui siano trascurabili gli effetti dovuti ai fenomeni non lineari (come la saturazione e l'isteresi magnetica) e con permeabilità magnetica  $\mu$  molto grande rispetto a quella del vuoto,  $\mu \gg \mu_0$ . Inoltre, si assuma che siano trascurabili anche gli effetti delle correnti indotte nell'anello toroidale a causa della variazione nel tempo del campo magnetico (un materiale magnetico può essere un buon conduttore di corrente elettrica).

Sotto queste ipotesi: (a) vale la sovrapposizione degli effetti; (b) solo le correnti di conduzione nelle due bobine producono campo magnetico; (c) la relazione tra i flussi e le correnti è di tipo algebrico. La relazione è di tipo algebrico perché si suppone che siano trascurabili i fenomeni di isteresi magnetica e gli effetti delle correnti indotte nel nucleo. Inoltre, in condizioni di funzionamento lentamente variabili il legame tra le correnti e il campo  $\mathbf{H}$  è di tipo istantaneo (**legge di Ampere**). Allora per i flussi  $\phi_1$  e  $\phi_2$  si ha

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2, \\ \phi_2 &= \phi_{21} + \phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2, \end{aligned} \quad (127)$$

dove  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M_{12}$  e  $M_{21}$  sono quattro parametri costanti nel tempo e indipendenti dalle due correnti  $i_1$  e  $i_2$ . Il flusso  $\phi_{11} = L_1 i_1$  è il flusso concatenato con la prima bobina quando la corrente  $i_2$  nella seconda bobina è uguale a zero, e  $\phi_{22} = L_2 i_2$  è il flusso concatenato con la seconda bobina quando la corrente  $i_1$  nella prima



bobina è uguale a zero. Quindi  $L_1$  e  $L_2$  sono, rispettivamente, i coefficienti di autoinduzione della bobina “1” e della bobina “2”. I coefficienti  $M_{12}$  e  $M_{21}$  sono detti coefficienti di mutua induzione:  $M_{12}$  rappresenta il flusso del campo magnetico concatenato con la bobina “1” prodotto da una corrente unitaria che circola nella bobina “2” quando  $i_1 = 0$ , mentre  $M_{21}$  rappresenta il flusso del campo magnetico concatenato con la bobina “2” prodotto da una corrente unitaria che circola nella bobina “1” quando  $i_2 = 0$ .

I coefficienti di autoinduzione sono intrinsecamente positivi (con la convenzione dell’utente), mentre quelli di mutua induzione possono essere positivi o negativi. Consideriamo il flusso  $\phi_{12}$ . Esso è dato da  $\phi_{12} = \iint_{S_{\gamma_1}} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_1 dS$  dove  $S_{\gamma_1}$  è una qualsiasi superficie aperta che ha come orlo il primo avvolgimento e  $\mathbf{n}_1$  è il verso della normale orientata concordemente con il verso di riferimento della corrente  $i_1$ , secondo la regola del cavatappi. Nei due circuiti accoppiati illustrati in Figura 4.31 il verso del campo magnetico  $\mathbf{B}_2$  è orario se  $i_2$  è positiva e il verso di  $\mathbf{n}_1$  è orario, e quindi  $\phi_{12}$  e il coefficiente di mutua induzione sono positivi. Se si sceglie, ad esempio, il riferimento opposto per il verso di  $i_2$  (deve essere cambiato anche il riferimento per il verso della tensione  $v_2$  perché abbiamo scelto di fare la convenzione dell’utente su ciascuna porta), allora il segno del coefficiente di mutua induzione è negativo. Considerazioni simili valgono per  $\phi_{21}$ .

Per i flussi del campo magnetico e le correnti esiste una proprietà di reciprocità analoga a quella che esiste in un circuito resistivo per le tensioni e le correnti. Si considerino i due induttori accoppiati con  $i_1 \neq 0$  e  $i_2 = 0$ : la corrente  $i_1$  nell’avvolgimento “1” può essere considerata come “causa” e il flusso  $\phi_{12} = M_{12}i_1$ , concatenato con l’avvolgimento “2”, come effetto. Dualmente si considerino i due induttori accoppiati con  $i_2 \neq 0$  e  $i_1 = 0$ . In questo caso la corrente  $i_2$  nell’avvolgimento “2” può essere considerata come causa e il flusso  $M_{21}i_2$ , concatenato con l’avvolgimento “1”, come effetto. È possibile dimostrare, utilizzando le equazioni del modello quasi stazionario magnetico (**Appendice**), che il rapporto tra la causa e l’effetto nei due circuiti accoppiati con  $i_2 = 0$  è uguale al rapporto tra causa ed effetto nei due circuiti accoppiati con  $i_1 = 0$ , quindi

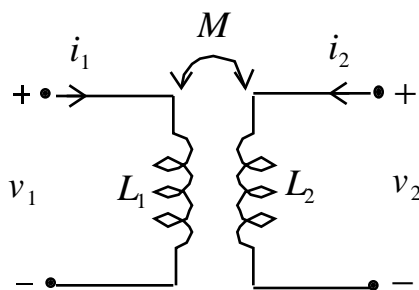
$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (128)$$

Il coefficiente di mutua induzione è stato indicato con  $M$  e si misura in *henry* [H], come i coefficienti di autoinduzione. In Figura 4.32 è riportato il simbolo del doppio bipolo trasformatore (circuiti accoppiati).

Le equazioni caratteristiche del doppio bipolo trasformatore (circuiti accoppiati magneticamente) sono (in questo corso sono presi in considerazione solo induttori accoppiati tempo-invarianti)

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \quad (129)$$

(Queste equazioni non valgono nel caso in cui  $M$  fosse variabile nel tempo).



**Fig. 4.32** Simbolo di due circuiti mutuamente accoppiati o trasformatore: se i due riferimenti per i versi delle correnti sono entrambi concordi o discordi con il contrassegno, allora  $M$  è positivo.

### Osservazione

I motori e i generatori elettrici (dinamo e alternatori) possono essere rappresentati da induttori accoppiati tempo-varianti (cioè con coefficienti di mutua induzione variabili nel tempo).



La potenza elettrica assorbita dai due induttori accoppiati (tempo invarianti) è

$$p(t) = i_1 v_1 + i_2 v_2 = \frac{dW_m}{dt}, \quad (130)$$

dove

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = \iiint_{\Omega} (B^2 / \mu) dv \geq 0 \quad (131)$$

è l'energia immagazzinata nel componente associata al campo magnetico; essa è positiva. Pertanto l'energia  $W(t_0, t)$  che il doppio bipolo assorbe nell'intervallo di tempo  $(t_0, t)$  vale

$$W(t_0, t) = W_m [i_1(t), i_2(t)] - W_m [i_1(t_0), i_2(t_0)]. \quad (132)$$

Come i condensatori e gli induttori, i circuiti accoppiati non dissipano l'energia elettrica che assorbono ma la immagazzinano. Essa può essere restituita, completamente, sotto forma di energia elettrica al circuito in cui sono inseriti. Per questa ragione si dice che essi sono conservativi. Siccome i circuiti accoppiati non possono erogare più energia elettrica di quanta ne abbiano assorbita in precedenza, essi sono passivi.

Il coefficiente di mutua induzione è spesso espresso in funzione del **coefficiente d'accoppiamento**  $k$  definito da

$$k \equiv \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (133)$$

Il coefficiente di accoppiamento non può assumere un qualsiasi valore, esso deve verificare la relazione

$$|k| \leq 1. \quad (134)$$

Quando  $k = 0$ , si ha  $M = 0$ , cioè non esiste interazione tra i due induttori (questa è la condizione che è stata invocata tra gli induttori di un circuito quando sono stati introdotti i bipoli induttori). Quando  $k = 1$  si dice che i due circuiti sono accoppiati perfettamente. Si intuisce che non può esistere una condizione di accoppiamento tra i due circuiti più favorevole di quella corrispondente all'accoppiamento perfetto.

La relazione (134) è una diretta conseguenza del fatto che l'espressione dell'energia immagazzinata è semi definita positiva in accordo con la relazione (131). L'energia immagazzinata può essere riscritta nel modo seguente

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 \left( i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) i_2^2 \geq 0. \quad (135)$$

Siccome  $L_1$   $L_2$  sono maggiori di zero, se fosse possibile  $|k| > 1$ , sarebbe possibile avere una energia immagazzinata minore di zero con una coppia di correnti che verificano la relazione  $i_1 = -(M/L_1)i_2$ .

#### 4.8.2 Accoppiamento perfetto

Se si definiscono i flussi medi di auto e mutua induzione

$$\phi_{11m} = \frac{L_1 i_1}{N_1}, \quad \phi_{12m} = \frac{M_{12} i_2}{N_1}, \quad \phi_{21m} = \frac{M_{21} i_1}{N_2}, \quad \phi_{22m} = \frac{L_2 i_2}{N_2}, \quad (136)$$

si può affermare che

$$\phi_{1d} = \phi_{11m} - \phi_{21m}, \quad \phi_{2d} = \phi_{22m} - \phi_{12m} \quad (137)$$

sono i flussi medi di dispersione al primario e secondario, rispettivamente. Si dimostra facilmente che tale condizione ideale in cui i flussi dispersi sono nulli dà luogo alla condizione di *accoppiamento perfetto*,

$$L_1 L_2 = M^2. \quad (138)$$

In questa situazione una corrente circolante nel primo avvolgimento produce, mediamente, lo stesso flusso concatenato per spira sia nel primo che nel secondo avvolgimento.

Si assuma che il toro di materiale magnetico sia un tubo di flusso per  $\mathbf{B}$ ; in questo caso il flusso del campo magnetico attraverso qualsiasi sezione del toro è costante e, quindi, si ha accoppiamento perfetto. Questa è, chiaramente, una situazione ideale. Con questa ipotesi è semplice calcolare i coefficienti di auto e di mutua induzione. Se le due bobine sono realizzate in modo tale da potere essere schematizzate come dei solenoidi lunghi, per i due coefficienti  $L_1$  e  $L_2$  si hanno le espressioni approssimate

$$L_1 = \mu \frac{N_1^2 S}{h}, \quad L_2 = \mu \frac{N_2^2 S}{h}. \quad (139)$$

Si è assunto che i due solenoidi cilindrici hanno la stessa lunghezza  $h$  e la stessa sezione  $S$ ;  $N_1$  e  $N_2$  sono, rispettivamente, i numeri di spire degli avvolgimenti “1” e “2”.

Dalle espressioni (139), applicando la condizione di accoppiamento perfetto (138) si ottiene per  $M$

$$M = \mu \frac{N_1 N_2 S}{h}. \quad (140)$$

Quando l'accoppiamento è perfetto, l'energia magnetica immagazzinata è data da

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 \left( i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2 \geq 0. \quad (141)$$

Pertanto l'energia immagazzinata è uguale a zero se

$$i_1 = -(M/L_1) i_2, \quad (142)$$

pur essendo  $i_1 \neq 0$  e  $i_2 \neq 0$ . Perché ciò accada, il campo magnetico prodotto dalle due correnti deve essere uguale a zero in ogni punto dello spazio, cioè il campo prodotto dalla corrente  $i_1$  deve cancellare il campo dovuto alla corrente  $i_2$  in ogni punto dello spazio. Ciò è chiaramente impossibile da realizzare in pratica, però è possibile avvicinarsi a questa condizione usando un toro di materiale ferromagnetico a elevata permeabilità magnetica,  $\mu \gg \mu_0$ . Quando è verificata questa condizione le linee di campo di  $\mathbf{B}$  sono praticamente confinate nel toro di materiale magnetico: il toro si comporta come se fosse un tubo di flusso per il campo  $\mathbf{B}$ , cioè si può ritenere che, la componente normale di  $\mathbf{B}$  alla superficie limite del toro è nulla. (È immediata l'analogia con il campo di corrente che si instaura in un toro conduttore con conducibilità elettrica molto più grande dello spazio materiale in cui è immerso).

### 4.8.3 Circuito equivalente di due circuiti perfettamente accoppiati

Si consideri il caso limite di accoppiamento perfetto,  $k = \pm 1$ . Un trasformatore è sempre progettato e realizzato in modo tale da essere quanto più possibile vicino a questa condizione di funzionamento.

Due induttori perfettamente accoppiati hanno una notevole proprietà. Le equazioni costitutive (129) possono essere sempre riscritte come

$$v_1 = L_1 \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right), \quad (143)$$

$$v_2 = M \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{M} \frac{di_2}{dt} \right). \quad (144)$$

Siccome nel caso di accoppiamento perfetto

$$L_1 / M = M / L_2, \quad (145)$$

dividendo membro a membro le (143) e (144) si ottiene

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M}. \quad (146)$$

Questa relazione ricorda la relazione caratteristica del trasformatore ideale con costante di trasformazione

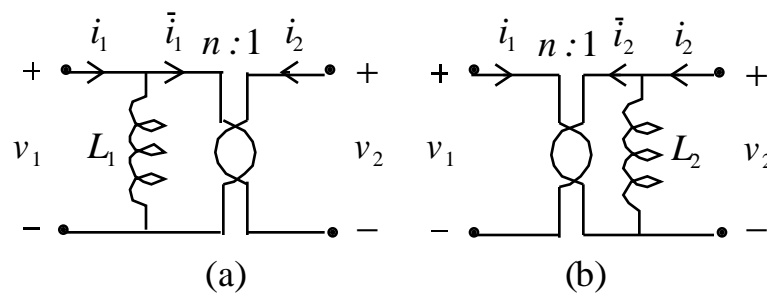
$$n = \frac{L_1}{M}. \quad (147)$$

Il doppio bipolo costituito da due circuiti accoppiati perfettamente è equivalente a un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da un induttore, così come illustrato in Figura 4.33. Ora verificheremo questa affermazione. Si consideri il circuito di Figura 4.33a. Applicando la relazione caratteristica del trasformatore ideale, si ottiene proprio la relazione costitutiva di due induttori accoppiati,

$$v_1 = L_1 \frac{d(i_1 - \bar{i}_1)}{dt} = L_1 \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{n} \frac{di_2}{dt} \right) = L_1 \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right), \quad (148)$$

$$v_2 = \frac{v_1}{n} = \frac{M}{L_1} v_1 = M \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right) = M \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{M} \frac{di_2}{dt} \right); \quad (149)$$

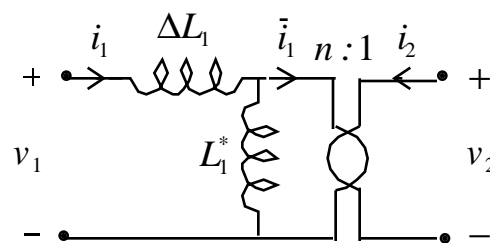
$\bar{i}_1$  è l'intensità della corrente elettrica che attraversa la porta "1" del trasformatore ideale. Si lascia al lettore la verifica che anche il circuito riportato in Figura 4.33b è un circuito equivalente del trasformatore ad accoppiamento perfetto.



**Fig. 4.33** Doppio bipolo equivalenti a due induttori accoppiati perfettamente:  $n = L_1 / M$ .

#### 4.8.4 Circuito equivalente di due circuiti accoppiati non perfettamente

Il doppio bipolo costituito da due induttori accoppiati non perfettamente è equivalente a un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da due induttori, così come illustrato in Figura 4.34.



**Fig. 4.34** Doppio bipolo equivalente a due induttori accoppiati con  $|k| < 1$ .

Si considerino due induttori accoppiati non perfettamente, cioè  $M^2 < L_1 L_2$ . Assegnata una qualsiasi terna  $L_1$ ,  $L_2$  e  $M$  è sempre possibile rappresentare  $L_1$  come

$$L_1 = L_1^* + \Delta L_1. \quad (150)$$

dove

$$L_1^* = \frac{M^2}{L_2}, \quad (151)$$

$$\Delta L_1 = L_1 - \frac{M^2}{L_2}. \quad (152)$$

Queste considerazioni giustificano il circuito equivalente di un accoppiamento non perfetto illustrato in Figura 4.34. L'induttanza  $\Delta L_1$  è legata ai flussi dispersi: essa descrive il contributo al flusso concatenato con la prima bobina dovuto alle “linee di campo di  $\mathbf{B}$ ” che non concatenano l'altro avvolgimento; per  $k^2 \rightarrow 1$ ,  $\Delta L_1 \rightarrow 0$ .  $L_1^*$  è detta induttanza magnetizzante: essa tiene conto del flusso comune a entrambe le bobine.

Se in un circuito ci sono due induttori accoppiati continua a valere la proprietà della sovrapposizione degli effetti; non valgono la proprietà di non amplificazione e la proprietà della reciprocità, perché il doppio bipolo è di tipo dinamico.

È interessante osservare che un trasformatore progettato e costruito per ottenere le migliori prestazioni possibili tende ad essere un “trasformatore ideale”. Infatti perché l'accoppiamento sia perfetto occorre che le due bobine siano strettamente avvolte su di un nucleo di materiale ferromagnetico ad elevata permeabilità relativa,  $\mu_r = (\mu/\mu_0) \gg 1$ . In tali condizioni, infatti,  $\Delta L_1 \rightarrow 0$  e  $k^2 \rightarrow 1$ . Inoltre nel limite  $\mu_r \rightarrow \infty$  si ha  $L_1^* \rightarrow \infty$  e quindi la corrente magnetizzante che circola nell'induttore di induttanza  $L_1^*$  deve tendere a zero e di conseguenza il circuito equivalente di Figura 4.34 si riduce al solo trasformatore ideale.