Università degli Studi di Cassino

Esercitazioni di Elettrotecnica: doppi-bipoli

prof. Antonio Maffucci

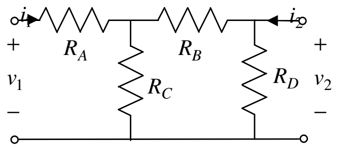
ver.1.1 – ottobre 2009

1. Doppi-bipoli in regime stazionario

ES. 1.1 – Con riferimento al seguente doppio-bipolo:

a) **calcolare la matrice delle resistenze;**

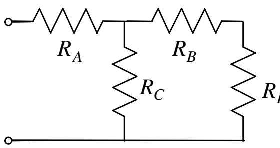
b) **calcolare la matrice delle conduttanze.**



$R_A = 2\,\Omega,\quad R_B = 1\,\Omega,$
$R_C = 2.5\,\Omega,\; R_D = 0.5\,\Omega.$

a) L'elemento R_{11} è la resistenza di ingresso alla porta 1 della rete descritta in basso. Applicando le regole di equivalenza serie e parallelo si ottiene:

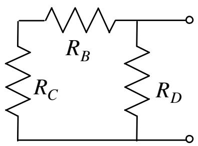
$$R_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0}$$



$$R_{11} = R_A + \frac{R_C(R_B + R_D)}{R_C + R_B + R_D} = 2.94\ \Omega$$

Analogamente, l'elemento R_{22} è la resistenza di ingresso alla porta 2 della rete seguente (nella quale si è trascurata R_A che si trova in serie ad un circuito aperto):

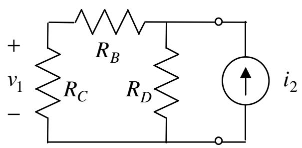
$$R_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$



$$R_{22} = \frac{R_D(R_B + R_C)}{R_D + R_B + R_C} = 0.44\ \Omega$$

Infine l'elemento R_m si può valutare dalla rete seguente, utilizzando un partitore di corrente:

$$R_m = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

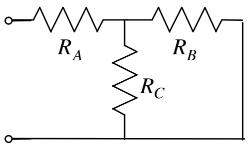


$$v_2 = R_C i_2 \frac{R_D}{R_D + R_B + R_C}$$

$$R_m = \frac{R_C R_D}{R_D + R_B + R_C} = 0.31\ \Omega$$

b) L'elemento G_{11} è la conduttanza di ingresso alla porta 1 della rete seguente, nella quale si è tenuto conto del fatto che R_D si trova in parallelo ad un corto-circuito:

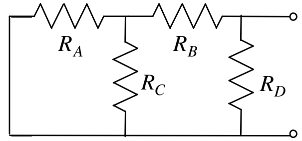
$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$$



$$G_{11} = \frac{G_A(G_B + G_C)}{G_A + G_B + G_C} = 0.37\ S$$

L'elemento G_{22} è la conduttanza di ingresso alla porta 2 della rete seguente:

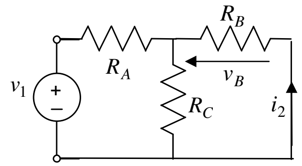
$$G_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0}$$



$$G_{22} = G_D + \frac{G_B(G_A + G_C)}{G_B + G_A + G_C} = 2.47\ S$$

Infine l'elemento G_m si può valutare dalla rete seguente, utilizzando un partitore di corrente:

$$G_m = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$



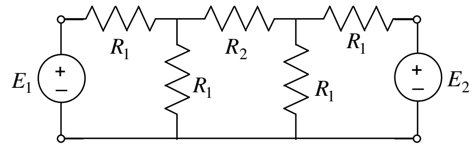
$$i_2 = -\frac{v_B}{R_B} = -\frac{1}{R_B} v_B \frac{R_C // R_B}{R_A + R_C // R_B}$$

$$G_m = -\frac{R_C}{R_A R_C + R_A R_B + R_B R_C} = -0.26\ S$$

ES. 1.2 - Con riferimento alla seguente rete:

a. valutare la matrice G il doppio bipolo resistivo visto ai capi dei generatori;

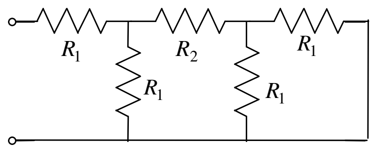
b. utilizzare la matrice G per calcolare la potenza assorbita dal doppio-bipolo;



$E_1 = E_2 = 10\,V$
$R_1 = 2\,\Omega \quad R_2 = 1\,\Omega$

a) L'elemento G_{11} è la conduttanza di ingresso della rete descritta in seguito. Applicando le regole di equivalenza serie e parallelo di conduttanze si ottiene:

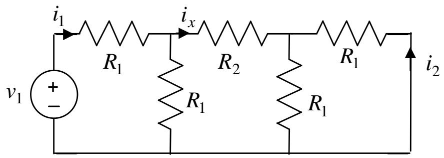
$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$$



$$G_{11} = \frac{G_1\left(G_1 + \dfrac{2G_1G_2}{2G_1 + G_2}\right)}{2G_1 + \dfrac{2G_1G_2}{2G_1 + G_2}} = 0.33\ S$$

Per la simmetria della rete rispetto alle due porte, si ha anche $G_{11} = G_{22}$ (si provi a dimostrarlo). L'elemento G_{12} è definito come:

$$G_{12} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$



Il circuito per il calcolo di tale parametro è disegnato in alto. Si osservi che:

$$G_{12} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0} \cdot \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0} = G_{11} \cdot \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$

quindi ci si riporta al calcolo di $\left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$, che può essere effettuato con l'applicazione reiterata del partitore di corrente:

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{-i_x/2}{i_1} = -\frac{1}{2i_1} i_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_1/2} = -0.25$$

da cui: $G_{12} = -0.25 \cdot G_{11} = -0.08\ S$ **.**

Si provi a verificare che $G_{12} = G_{21} = G_m$, proprietà valida per tutti i doppi-bipoli reciproci.

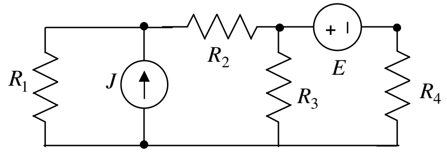
b) Tenuto conto delle convenzioni adottate sui generatori, la potenza assorbita dal doppio-bipolo è esprimibile come:

$$P = E_1 I_1 + E_2 I_2 = G_{11} E_1^2 + G_{22} E_2^2 + 2 G_m E_1 E_2 = 50\ W.$$

Introdotti i vettori-colonna di tensioni e correnti $\mathbf{E}, \mathbf{I}$, la potenza assorbita si esprime anche come $P = \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E}^T \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \mathbf{E}$.

<u>ES. 1.3</u> - Con riferimento alla seguente rete:

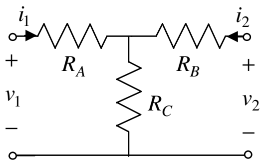
a) caratterizzare attraverso la matrice H il doppio bipolo resistivo visto ai capi dei generatori;
b) utilizzare la matrice H per calcolare la potenza assorbita da tale doppio-bipolo;



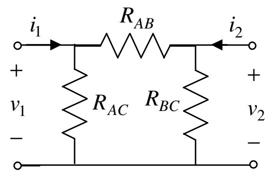
$E = 50\,V \quad J = 20\,A$
$R_1 = 1\,\Omega \quad R_2 = 5\,\Omega$
$R_3 = R_4 = 10\,\Omega$

Risultato: a) $H_{11} = 0.909\,\Omega,\ H_{22} = 0.073\,S,\ H_{12} = -H_{21} = 0.045$; b) $P = 0.546\,kW$.

<u>ES. 1.4</u> - Analizzando i seguenti doppi-bipoli:



schema a T (stella)



schema a Π (triangolo)

a) **verificare che lo schema a T realizza una qualunque matrice R con le posizioni seguenti (formule di sintesi):** $R_A = R_{11} - R_m,\ R_B = R_{22} - R_m, R_C = R_m$;

b) **verificare che lo schema a Π realizza una qualunque matrice G con le posizioni seguenti (formule di sintesi):** $G_{AC} = G_{11} + G_m,\ G_{BC} = G_{22} + G_m,\ G_{AB} = -G_m$;

c) **verificare le seguenti formule di trasformazione stella-triangolo (suggerimento: imporre l'equivalenza tra gli schemi a T e a Π):**

$Y \rightarrow \Delta$

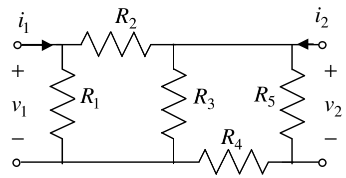
$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}$$
$$R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$
$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$

$\Delta \rightarrow Y$

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$
$$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$
$$R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

<u>ES. 1.5</u> - Con riferimento al seguente doppio-bipolo:

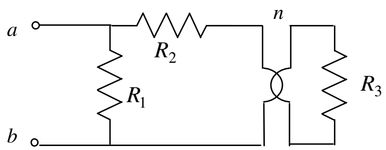
a) caratterizzarlo attraverso la matrice R;
b) sintetizzare un doppio-bipolo equivalente con uno schema a T;



$R_1 = R_3 = R_4 = R$
$R_2 = 4R \quad R_5 = 2R$
$R = 8\,\Omega$

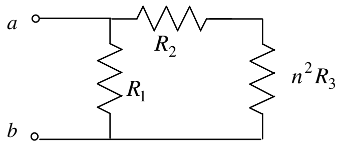
Risultato: a) $R_{11} = 24\,\Omega,\ R_{22} = 12\,\Omega,\ R_m = 8\,\Omega$; b) $R_A = 16\,\Omega,\ R_B = 4\,\Omega,\ R_C = 8\,\Omega$.

ES. 1.6 - Con riferimento alla seguente rete in regime stazionario valutare la resistenza equivalente vista ai capi dei morsetti a-b.



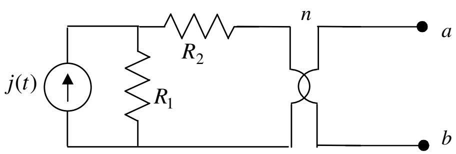
$n = 10$
$R_1 = 2\ \Omega,\ R_2 = 1\ \Omega$
$R_3 = 0.02\ \Omega$

Applicando la formula del trasporto di impedenza, la rete in esame è equivalente a:



$$R_{eq} = \frac{R_1(R_2 + n^2 R_3)}{R_1 + (R_2 + n^2 R_3)} = 1.20\ \Omega$$

ES. 1.7 - Con riferimento alla seguente rete in regime stazionario valutare il generatore equivalente di Norton visto ai capi dei morsetti a-b



$J = 10\ A, n = 5$
$R_1 = 0.32\ \text{k}\Omega,$
$R_2 = 0.2\ \text{k}\Omega.$

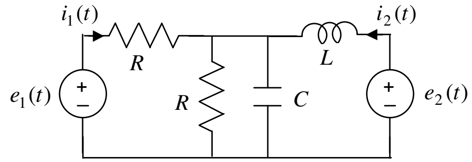
Risultato: a) $R_{eq} = 20.80\ \Omega,\ |I_{cc}| = 30.77\ A$.

A. Maffucci: *Esercitazioni sui doppi-bipoli* ver1.1-2009

2. Doppi-bipoli in regime sinusoidale.

ES. 2.1 - Con riferimento al seguente circuito, valutare:

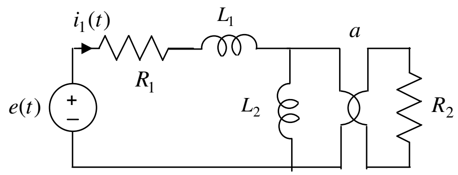
a) la matrice delle ammettenze $\dot{Y}$ del doppio-bipolo visto ai capi dei generatori;
b) la potenza complessa $\dot{A}$ erogata dai generatori;



$e_1(t) = 10\cos(1000t)\ V$
$e_2(t) = 20 sin(1000t)\ V$
$R = 1\ \Omega \quad L = 1\ mH \quad C = 1\ mF$

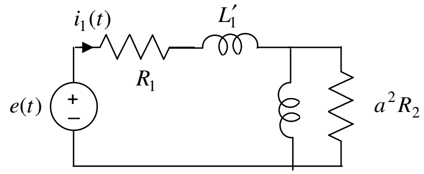
Risultato: a) $\dot{Y}_{11} = 0.5\ \Omega^{-1},\ \dot{Y}_m = 0.5 j\ \Omega^{-1},\ \dot{Y}_{22} = 0.5 - j\ \Omega^{-1}$;
b) $\dot{A}_1^{er} = 75 W,\ \dot{A}_2^{er} = 50 W + j200 VAr$.

ES. 2.2 - Con riferimento al seguente circuito valutare la corrente $i_1(t)$ nel circuito primario.



$e(t) = 10\sqrt{2}\sin(1000t) V$
$a = 0.1,\ R_1 = 1\Omega,\ R_2 = 200\Omega,$
$L_1 = 1\ \text{mH},\ L_2 = 2\ \text{mH}$

Per la formula del trasporto dell'impedenza in un trasformatore ideale, il circuito è anche equivalente al seguente:



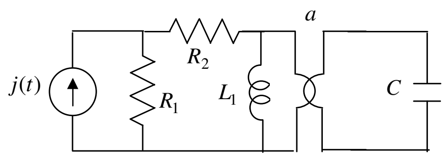
Trasformato il circuito in una rete di impedenze, nella quale si è introdotto il fasore $\overline{E} = 10\,V$, l'impedenza equivalente vista dal generatore è:

$$\dot{Z}_{eq} = R_1 + j\omega L_1' + \frac{a^2 R_2\, j\omega L_1''}{a^2 R_2 + j\omega L''} = 2 + 2j\ \Omega$$

da cui

$$\bar{I}_1 = \frac{\overline{E}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{5}{2}(1-j) = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4}\ A \quad \Rightarrow \quad i_1(t) = 5 sin(1000t - \pi/4)\ A\ .$$

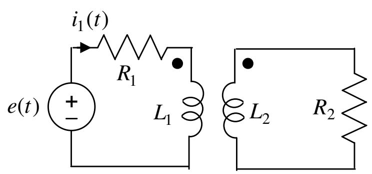
<u>ES. 2.3</u> - Con riferimento al seguente circuito valutare la potenza complessa assorbita dal condensatore.



$j(t) = 10\sqrt{2}\cos(100t)\ A$
$R_1 = R_2 = 5\ \Omega$
$L_1 = 1\,mH,\ \ C = 12.5\,mF$
$a = 0.5$

Risultato: $\dot{A} = -j5\ \ VAr$.

<u>ES. 2.4</u> - Con riferimento al seguente circuito valutare la corrente $i_1(t)$ nel circuito primario.

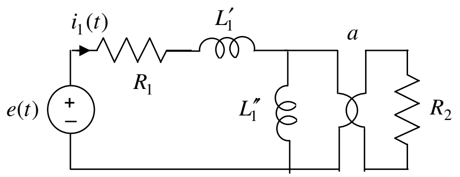


$e(t) = 10\sqrt{2} sin(1000t)\ V$
$R_1 = 1\ \Omega \quad R_2 = 200\ \Omega$
$L_1 = 3\,mH \qquad L_2 = 200\,mH$
$|M| = 20\,mH$

Poiché $L_1 L_2 \neq M^2$ l'accoppiamento non è perfetto.
Posto $L_1 = L_1' + L_1''$, possiamo scegliere L_1'' in modo che l'aliquota L_1'' verifichi le condizioni di accoppiamento perfetto $L_1'' L_2 = M^2$:

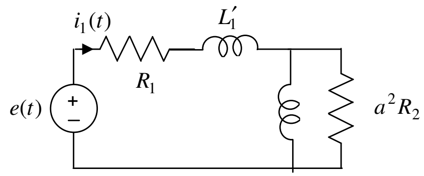
$$L_1'' L_2 = M^2 \quad \Rightarrow \quad L_1'' = M^2 / L_2 = 2\ mH\ .$$

A questo punto il circuito equivalente sarà il seguente



$$a = \frac{L_1''}{M} = 0.1$$

Per la formula del trasporto dell'impedenza in un trasformatore ideale, il circuito è anche equivalente al seguente:



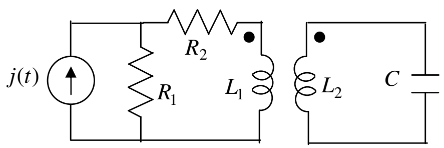
Trasformato il circuito in una rete di impedenze, nella quale si è introdotto il fasore $\overline{E} = 10\,V$, l'impedenza equivalente vista dal generatore è:

$$\dot{Z}_{eq} = R_1 + j\omega L_1' + \frac{a^2 R_2\, j\omega L_1''}{a^2 R_2 + j\omega L''} = 2 + 2j\ \Omega$$

da cui

$$\bar{I}_1 = \frac{\overline{E}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{5}{2}(1-j) = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4}\ A \quad \Rightarrow \quad i_1(t) = 5 sin(1000t - \pi/4)\ A\ .$$

<u>ES. 2.5</u> - Con riferimento al seguente circuito valutare la potenza complessa assorbita dal condensatore.



$j(t) = 10\sqrt{2}\cos(100t)\ A$
$R_1 = R_2 = 5\ \Omega$
$L_1 = 1\,mH,\quad L_2 = 4\,mH$
$|M| = 2\,mH,\quad C = 12.5\,mF$

Risultato: $\dot{A} = -j5\ \ VAr$.