ALCUNI CONCETTI FONDAMENTALI

1.1 Introduzione

La *carica elettrica* è una proprietà fisica fondamentale della materia che si assume per acquisita. Le *correnti elettriche* sono cariche elettriche in moto. Le cariche e le correnti elettriche sono le grandezze fisiche che determinano l'*interazione elettromagnetica* [1].

L'*elettromagnetismo* studia l'interazione tra cariche e correnti elettriche. La *forza di Lorentz* dà la forza che agisce sulle cariche sia ferme che in moto in un *campo elettromagnetico*. Le *equazioni di Maxwell* esprimono le leggi che legano il campo elettromagnetico alle *sorgenti* "*elementari*" del campo, cioè alle cariche e alle correnti elettriche.

Le cariche elettriche possono essere positive o negative. Il segno della carica è distinguibile grazie alla forza di Coulomb, per cui cariche (ferme) dello stesso segno si respingono e cariche di segno opposto si attraggono. Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della carica elettrica è il "coulomb" (C).

Le cariche elettriche sono, in generale, <u>aggregati</u> di cariche elettriche <u>elementari</u>. La carica del protone

$$q_p = +e, \tag{1.1}$$

e la carica dell'elettrone

$$q_e = -e, \tag{1.2}$$

sono le cariche elettriche <u>elementari</u>, dove

$$e = 1.6021689 \cdot 10^{-19} C. \tag{1.3}$$

L'*elettromagnetismo macroscopico* si occupa delle interazioni tra aggregati di cariche con dimensioni *macroscopiche* (dimensioni lineari non inferiori al millimetro) con un elevatissimo numero di cariche elementari per unità di volume ($10^{13} \div 10^{23}$ particelle per cm^3).

È necessario distinguere tra l'interazione elettromagnetica nel vuoto e l'interazione elettromagnetica in presenza di materiali (conduttori, isolanti, dielettrici, materiali ferromagnetici, semiconduttori, superconduttori,...).

L'interazione elettromagnetica nel vuoto è descritta attraverso il *campo elettrico* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(P;\, t)$ e il *campo magnetico* $\mathbf{B} = \mathbf{B}(P;\, t)$ (detto anche *induzione magnetica*). In presenza di materiali bisogna introdurre altri due campi vettoriali, il *campo di spostamento elettrico* $\mathbf{D} = \mathbf{D}(P;t)$ e

---

[1] Ciascuna particella elementare (elettrone, protone, neutrone, ...) si comporta, dal punto di vista magnetico, come se fosse un *magnete elementare*. Di conseguenza gli elettroni e protoni oltre ad avere una carica elettrica hanno anche un momento magnetico proprio, detto *momento magnetico intrinseco*. Il ruolo del momento magnetico intrinseco degli elettroni è fondamentale in tutti i materiali ferromagnetici.

l'intensità di campo magnetico $\mathbf{H} = \mathbf{H}(P;t)$. Il concetto di campo è tra i concetti più importanti della fisica e costituisce il fondamento dell'intera teoria dell'elettromagnetismo, vedi **Appendice A1**.

1.2 Definizione dei campi E e B

Quale è il significato fisico del campo elettrico e del campo magnetico? Le forze con le quali le cariche "puntiformi" interagiscono nel vuoto (in un riferimento inerziale) dipendono, oltre che dalla loro posizione reciproca, anche dalle rispettive velocità.

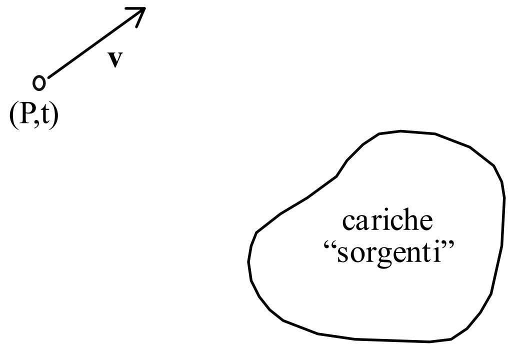

Figura 1.1

Si consideri l'interazione tra una carica "di prova" puntiforme q in moto con velocità $\mathbf{v}$ e una generica distribuzione di cariche "sorgenti", Fig. 1.1. Nelle condizioni in cui la carica di prova non modifichi le posizioni e il moto delle cariche sorgenti, l'espressione della forza (*forza di Lorentz*) che agisce sulla carica di prova al generico istante t quando si trova nel punto P è:

$$\mathbf{f} = q[\mathbf{E}(P;t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(P;t)]. \tag{1.4}$$

In questa espressione il simbolo " $\times$ " sta ad indicare il prodotto scalare tra due vettori.

Allora, il campo elettrico nel punto P, all'istante t, è la forza che agisce su una carica positiva di valore unitario, <u>ferma</u>, che all'istante t si trova nel punto P.

Su di una carica di prova in moto con velocità $\mathbf{v}$ agisce, oltre alla forza elettrica $q\mathbf{E}$, una forza magnetica, $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, definibile operativamente come differenza tra la forza agente sulla carica di prova e la sola forza elettrica:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B}(P;t) = \mathbf{f} - q\mathbf{E}(P;t). \tag{1.5}$$

Note q e $\mathbf{v}$, questa relazione consente di definire e misurare il campo magnetico $\mathbf{B}$ al generico istante t e nel punto P.

Nel Sistema Internazionale il modulo della forza si misura in "newton" (N), il modulo del campo elettrico si misura in "volt/metro" (V/m) e il modulo del campo magnetico in "tesla" (T). Il "volt" è l'unità di misura della *tensione elettrica*. Il "volt/metro" è, dunque, il valore di un campo elettrico che, agendo sulla carica unitaria, esercita una forza di 1 N. Analogamente, il tesla è il valore di un campo magnetico che, agendo sulla carica unitaria in moto con velocità di $1 m/s$, esercita una forza di 1 N. Dalla relazione (1.5) si ottiene che

$$1\mathrm{T} = 1\mathrm{Vs}/\mathrm{m}^2 \tag{1.6}$$

1.3 Le sorgenti "elementari" del campo elettromagnetico

Le sorgenti "elementari" del campo elettromagnetico sono le cariche e le correnti. Le distribuzioni di cariche sono descritte attraverso la densità di carica. Due sono le grandezze fondamentali che caratterizza una corrente elettrica: l'intensità di corrente elettrica e il campo di densità di corrente.

Le cariche elettriche possono essere, in generale, rappresentate come aggregati di particelle cariche (elementari o composte) di specie diversa: elettroni, nuclei atomici dotati di uno o più protoni, ioni positivi e negativi dotati di una o più cariche elementari. Ciascuna specie, quindi, è caratterizzata oltre che da una massa, anche da una carica elettrica, che è, in valore assoluto, uguale a un multiplo intero della carica elettrica elementare e, il cui valore è dato dalla (1.3).

La carica elettrica totale (netta) contenuta in una data regione di spazio è la somma delle cariche di tutte le specie di particelle contenute in essa: ciascuna carica deve essere sommata con il proprio segno. Si ha cioè:

$$Q_t = Q_+ + Q_-, \tag{1.7}$$

dove Q_+ e Q_- indicano, rispettivamente, la carica positiva totale e la carica negativa totale contenute nella regione di spazio in considerazione. Se $Q_t = 0$ si dice che la regione è globalmente neutra.

1.3.1 Densità volumetrica di carica

Si assuma che in una regione macroscopica Ω dello spazio sia distribuita una carica elettrica. Si consideri un generico punto P di questa regione, e sia dV un volume "fisicamente infinitesimo" baricentrato in P, Figura 1.2. Con volume fisicamente infinitesimo si intende un volume "microscopico", quindi molto più piccolo del volume della regione macroscopica in cui la carica è distribuita, sufficientemente grande, però, da contenere un numero elevatissimo di cariche elementari.

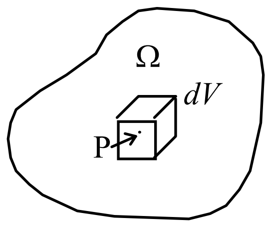

Figura 1.2

Sia dQ la quantità di carica elettrica contenuta nel volume fisicamente infinitesimo dV. La densità di carica volumetrica nel punto P è il rapporto tra la carica dQ contenuta nel volume fisicamente infinitesimo dV centrato in P [2] e il volume dV,

[2] Nello scrivere la (1.8) ci si è riferiti a un processo al limite del tipo $\rho(P) = \lim_{\Delta V \to 0}(\Delta Q/\Delta V)$ valutando in corrispondenza al generico volumetto ΔV centrato in P, la carica ΔQ in esso contenuta. Se, partendo da una scala macroscopica, ad esempio, dell'ordine del centimetro cubo, si passa a considerare valori sempre più piccoli di ΔV, si constata che il rapporto $\Delta Q/\Delta V$ in generale varia. Si vede pure, però, che quando ΔV diviene abbastanza piccolo, ad esempio, dell'ordine del millesimo di millimetro cubo (scala microscopica), il valore di $\Delta Q/\Delta V$ tende a stabilizzarsi. La situazione non muta fino a quando ΔV non si riduce a valori tanto piccoli da far apparire in maniera significativa la granularità della materia. Affinché il limite sia calcolabile e la funzione $\rho = \rho(P)$ così definita abbia il grado di regolarità richiesta dalla fisica matematica, è necessario non spingersi oltre il livello

$$\rho(P)=\frac{dQ}{dV}. \tag{1.8}$$

Al variare di P varia la carica dQ contenuta in dV (in generale, in alcune zone di Ω la carica è più densa, in altre è più diradata). Dunque, la densità di carica è una funzione del punto P, quindi è un campo scalare, vedi **Appendice A1**. Se dQ varia anche nel tempo si ha che $\rho=\rho(P;t)$. Nel Sistema Internazionale la densità volumetrica di carica si misura in "*coulomb/metro*^{3}" (C/m^3).

Una volta assegnata la densità volumetrica $\rho=\rho(P;t)$ della distribuzione di carica è possibile determinare la carica totale contenuta all'interno di una regione assegnata dello spazio. La carica contenuta all'istante t in un volume fisicamente infinitesimo dV baricentrato nel punto P è, ovviamente, data da

$$dQ(t)=\rho(P;t)dV. \tag{1.9}$$

La carica totale contenuta in una regione finita di spazio V è data dall'integrale di volume,

$$Q_V(t)=\iiint_V \rho(P;t)dV. \tag{1.10}$$

Osservazione

Nell'ambito dell'elettromagnetismo macroscopico è possibile concepire la presenza contemporanea, in una stessa regione spaziale, di due distribuzioni volumetriche di cariche di segno opposto: una, positiva di densità $\rho_+=\rho_+(P;t)$, l'altra, negativa di densità $\rho_-=\rho_-(P;t)$. In tale caso, è ovvio che la densità di carica totale (o "netta") risulta pari a

$$\rho=\rho_+(P;t)+\rho_-(P;t) \tag{1.11}$$

Quando accade che $|\rho_-|=\rho_+$, risulta $\rho=0$ e si dice che la regione è <u>localmente neutra</u>.

Le densità ρ_+ e ρ_- possono essere espresse in funzione delle densità numeriche di cariche elementari positive e negative delle due distribuzioni. Le densità numeriche di cariche elementari positive n_+ e negative n_- sono definite come,

$$n_+(P;t)=\frac{dN_+}{dV},\quad n_-(P;t)=\frac{dN_-}{dV}, \tag{1.12}$$

dove dN_+ e dN_- sono, rispettivamente, il numero di cariche elementari positive e negative presenti all'istante t all'interno del volume fisicamente infinitesimo dV, baricentrato nel punto P. Nel Sistema Internazionale la densità numerica si misura in "1/metri^3" (1/m^3). Allora si ha che

$$\rho_+(P;t)=en_+(P;t),\quad \rho_-(P;t)=-en_-(P;t), \tag{1.13}$$

quindi

$$\rho=e(n_+-n_-). \tag{1.14}$$

Quando la densità numerica di cariche elementari positive e uguale alla densità numerica di cariche elementari negative, la densità di carica netta è uguale a zero e, quindi, si ha la neutralità locale. Questo è lo stato ordinario della materia.

---

precedentemente considerato (ovvero non giungere al livello in cui la materia manifesta la sua natura granulare), che è quello del cosiddetto "infinitesimo fisico".

♦

1.3.2 Intensità di corrente elettrica

Si consideri in una regione in cui sono presenti correnti elettriche una generica superficie (immateriale) S (aperta o chiusa), orientata arbitrariamente. In Figura 1.3 le due possibili orientazioni della superficie sono indicate attraverso i due possibili versi della normale: in Figura 1.3a la superficie è orientata con la normale che va dal basso verso l'alto, invece in Figura 1.3b la stessa superficie è orientata con la normale che va dall'alto verso il basso.

Si "contino" le cariche elementari che la attraversano la superficie S concordemente con il verso prescelto per la normale. La carica elettrica netta dq_S che attraversa la superficie S orientata, ad esempio, come in Figura 1.3a, nell'intervallo di tempo "fisicamente infinitesimo" $(t, t+dt)$ è la somma di tutte le cariche elementari che attraversano S in quell'intervallo

$$dq_S = \sum_i (\pm) q_i \,, \tag{1.15}$$

sommando con il segno "$+$" le cariche che l'attraversano concordemente con il verso prescelto per la normale e con il segno "$-$" le cariche che l'attraversano nel verso opposto. L'esperienza mostra che il moto di una carica positiva è equivalente a quello di una carica negativa in verso opposto. Con l'espressione intervallo di tempo "fisicamente infinitesimo" vogliamo intendere un intervallo di tempo molto piccolo rispetto alla scala dei tempi macroscopica, in cui le grandezze macroscopiche variano apprezzabilmente, e tuttavia abbastanza grande di modo che S sia attraversata da un numero elevatissimo di cariche elementari.

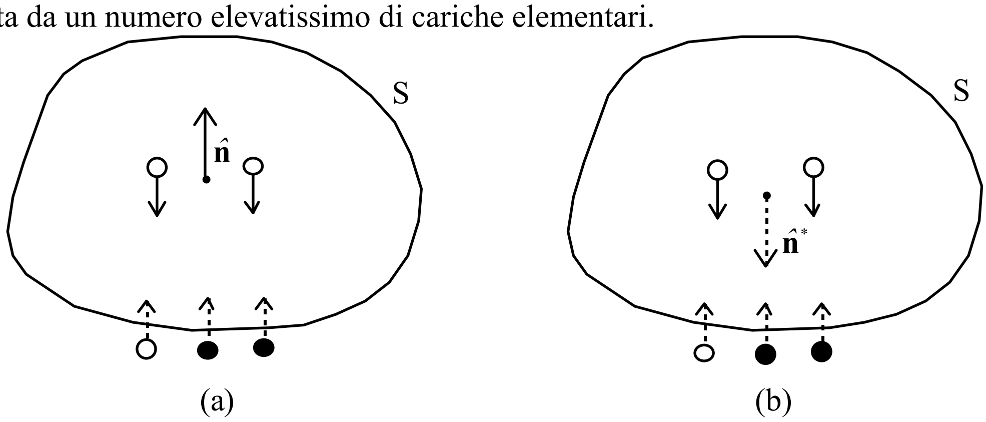

Figura 1.3

Il rapporto

$$i_S(t) = \frac{dq_S}{dt} \tag{1.16}$$

è l'*intensità di corrente elettrica* che attraversa la superficie orientata S.

Nel Sistema Internazionale l'intensità della corrente elettrica si misura in "ampere" (A) [3]. Di conseguenza si ha che "coulomb = ampere · secondo": la carica di 1 C è la carica netta che attraversa una superficie durante l'intervallo di tempo di 1 s quando la superficie è attraversata da una intensità di corrente di 1 A.

Indichiamo i_S^* l'intensità di corrente attraverso la superficie S orientata così come illustrato in Figura 1.3b. E' immediato che

---

[3] Questa è una delle sei unità di misura fondamentali del Sistema Internazionale: il metro, il secondo, il kilogrammo, l'ampere, il grado Kelvin e la candela. Il metro è l'unità di misura della lunghezza, il secondo è l'unità di misura dell'intervallo di tempo, il kilogrammo è l'unità di misura della massa, il grado Kelvin è l'unità di misura della temperatura termodinamica e la candela è l'unità di misura dell'intensità luminosa.

$$i_S^*(t) = -i_S(t). \tag{1.17}$$

Una volta assegnata l'intensità di corrente $i_S = i_S(t)$ che attraversa la superficie orientata S è possibile determinare la quantità di carica netta che attraversa S in un generico intervallo di tempo. La quantità di carica (netta) che attraversa S in un intervallo di tempo fisicamente infinitesimo dt baricentrato all'istante t è, ovviamente,

$$dq_S = i_S(t)dt. \tag{1.18}$$

La quantità di carica (netta) che attraversa la superficie orientata S in un generico intervallo di tempo (t_1, t_2) è data dall'integrale definito

$$q_S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt. \tag{1.19}$$

3.3 Densità volumetrica di corrente

Si vuole ora definire il campo di densità di corrente elettrica $\mathbf{J} = \mathbf{J}(P;t)$ e metterlo in relazione alla intensità di corrente $i_S = i_S(t)$.

A tale scopo, si consideri una situazione particolarmente semplice in cui i portatori di cariche in moto, anche se di tipo diverso, abbiano pressoché tutti la stessa velocità $\mathbf{v}$ nel punto P all'istante t; sia, inoltre, ρ il valore della densità volumetrica di carica netta all'istante t nel punto P. Questo tipo di corrente prende il nome di *corrente di convezione* [4].

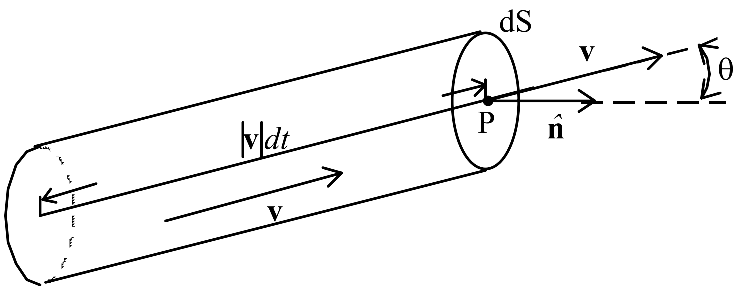

Figura 1.4

Con riferimento alla Figura 1.4, le cariche che attraversano la superficie "fisicamente infinitesima"[5], orientata, dS, nell'intervallo di tempo $(t, t+dt)$ sono tutte e sole quelle contenute nel cilindro <u>obliquo</u> di base dS, superficie laterale di direttrice parallela a $\mathbf{v}$ e di lunghezza $|\mathbf{v}|dt$. Infatti, le cariche esterne a questo volume o non incontrano mai dS o non riescono a raggiungerla nell'intervallo $(t, t+dt)$.

La quantità di carica che attraversa dS nell'intervallo di tempo $(t, t+dt)$ è allora:

$$dq_{dS} = (\pm)\rho d\Omega, \tag{1.20}$$

[4] È, ad esempio, il caso dei fasci elettronici nei tubi a raggi catodici o dei fasci di particelle negli acceleratori di particelle. Tipiche correnti di questo tipo sono quelle legate rigidamente al moto di corpi carichi (come, ad esempio, quelle associate ai movimenti di masse d'aria durante i temporali).

[5] Come al solito, con l'espressione "superficie fisicamente infinitesima" intendiamo una superficie microscopica, quindi con dimensioni lineari molto più piccole delle dimensioni della regione macroscopica in cui è presente la corrente, però sufficientemente grandi da garantire che la superficie sia attraversata, istante per istante, da un numero elevatissimo di cariche elementari.

dove $d\Omega$ è il volume del cilindro obliquo; nella (1.20) si considera il segno "+" se il verso di $\mathbf{v}$ è concorde con quello di $\hat{\mathbf{n}}$, cioè se $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}>0$, e il segno "−" se il verso di $\mathbf{v}$ è discorde con quello di $\hat{\mathbf{n}}$, cioè se $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}<0$; il simbolo " $\cdot$ " sta ad indicare il prodotto scalare tra due vettori.

Il volume del cilindro obliquo è uguale al prodotto della sua lunghezza, per l'area della base, per il valore assoluto del coseno dell'angolo che la normale alla base forma con la sua direttrice. Pertanto, nel nostro caso si ha:

$$d\Omega = |\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\,dSdt. \tag{1.21}$$

Combinando le (1.20) e (1.21) si ottiene che

$$dq_{dS} = (\rho\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dSdt. \tag{1.22}$$

Posto

$$\mathbf{J} \equiv \rho\mathbf{v}. \tag{1.23}$$

si ha che l'intensità di corrente che attraversa la superficie "fisicamente infinitesima" dS all'istante t è data da

$$\frac{dq_{dS}}{dt} = \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS. \tag{1.24}$$

Data ora una generica superficie orientata S, l'intensità di corrente che l'attraversa può essere espressa nel seguente modo:

$$i_S(t) = \iint_S \mathbf{J}(P;t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(P)\,dS. \tag{1.25}$$

Si noti come il segno di i_S dipende dal verso scelto arbitrariamente per la normale $\hat{\mathbf{n}}$ a S.

Il vettore $\mathbf{J}$ definito dalla (1.23) è detto <u>densità volumetrica di corrente</u> nel punto P all'istante t. Esso è un campo vettoriale. Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della densità volumetrica di corrente è "ampere/metro^2" ($\mathrm{A/m^2}$). Dunque, l'intensità di corrente elettrica che attraversa una data superficie orientata è il <u>flusso</u> (vedi **§ 2.4.1**) attraverso di essa del campo di densità di corrente elettrica.

La (1.23) esprime la densità di corrente nel caso in cui i portatori di cariche siano tutti dello stesso segno o, pur essendo di segno diverso, hanno pressoché la stessa velocità. In caso contrario si avrà

$$\mathbf{J} = \rho_+\langle\mathbf{v}_+\rangle + \rho_-\langle\mathbf{v}_-\rangle; \tag{1.26}$$

con $\langle\mathbf{v}_+\rangle$ e $\langle\mathbf{v}_-\rangle$ indichiamo la <u>velocità media</u> [6] (cosiddetta di *migrazione*) dei portatori di carica positiva e negativa, rispettivamente (per semplicità ci si è limitati a due soli tipi di portatori).

---

[6] Si consideri un elemento di volume fisicamente infinitesimo dV centrato nel punto P e i portatori di carica positiva, che supporremo tutti eguali, che nel generico istante t si trovano nell'elemento; si indichi con N_{dV} il loro numero. La velocità media dei portatori di carica positiva $\langle\mathbf{v}_+\rangle$ è data da

$$\langle\mathbf{v}_+\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N_{dV}}\mathbf{v}_i^{(+)}}{N_{dV}}$$

dove $\mathbf{v}_i^{(+)}$ è la velocità dello i-esimo portatore di carica positiva che all'istante t si trova nell'elemento dV; analogamente per $\langle\mathbf{v}_-\rangle$.

Osserviamo che la (1.26) rende conto di come possa aversi corrente in una situazione in cui vi sia una neutralità locale, cioè $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$. La $\mathbf{J}$ è in questo caso

$$\mathbf{J} = \rho_-\left(\langle \mathbf{v}_- \rangle - \langle \mathbf{v}_+ \rangle\right) \tag{1.27}$$

per cui basterà che $\langle \mathbf{v}_- \rangle \neq \langle \mathbf{v}_+ \rangle$ per avere $\mathbf{J} \neq 0$. È quanto si verifica nei metalli e negli elettroliti dove la corrente (detta di *conduzione*) è dovuta allo scorrimento relativo tra i due portatori sostenuto, come poi vedremo, da campi di forze.

Esempio: conduttori metallici

Consideriamo un conduttore metallico, ad esempio, un conduttore di rame. In un cm^3 di rame ci sono circa 10^{23} atomi, che formano il reticolo cristallino. Ciascun atomo contiene 29 protoni (cariche positive del nucleo) e 29 elettroni (cariche negative "attorno" al nucleo). Per ogni atomo vi è, mediamente, all'incirca un elettrone libero di muoversi nel reticolo cristallino: quindi, in un cm^3 di rame ci sono circa 10^{23} elettroni liberi. Con <u>elettroni liberi</u> intendiamo quegli elettroni che possano risentire dell'azione di un campo elettrico esterno e quindi migrare nel reticolo del metallo su lunghezze macroscopiche senza risentire del legame con i rispettivi atomi. Le altre particelle cariche del materiale, gli ioni e i restanti elettroni, non sono in grado di migrare perché legate al reticolo e, quindi, la loro velocità media è uguale a zero. In conseguenza di ciò possiamo rappresentare il metallo come un reticolo di ioni positivi immobili in cui c'è un "mare" di elettroni liberi in grado di migrare su lunghezze macroscopiche sotto l'azione di un campo elettrico esterno [7].

♦

Nei conduttori metallici solo gli <u>elettroni liberi</u> contribuiscono, dunque, alle correnti, i portatori di carica positiva hanno velocità media uguale a zero. Di conseguenza si ha

$$\mathbf{J} = -e n_{el} \langle \mathbf{v}_{el} \rangle, \tag{1.28}$$

dove n_{el} è la densità numerica di elettroni liberi e $\langle \mathbf{v}_{el} \rangle$ è la loro velocità media ($n_{el} \approx 10^{23} / \text{cm}^3$).

Esercizio

Si consideri un filo conduttore di rame con una sezione trasversale di $S = 1\ \text{cm}^2$, percorso da una corrente uniformemente distribuita con intensità $I_0 = 1\text{A}$, diretta parallelamente all'asse, Figura 1.5. Si determini la velocità media degli elettroni liberi.

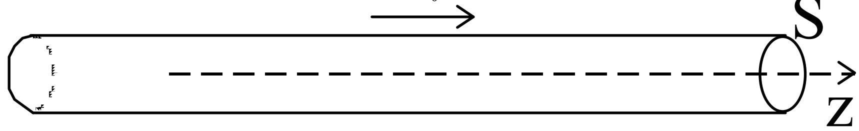

Figura 1.5

In questo caso per l'intensità di corrente si ha

[7] In assenza di un campo elettrico esterno, gli elettroni liberi si muovono in maniera <u>completamente disordinata</u> a causa dell'agitazione termica (con velocità dell'ordine di 100 km/s a temperature ordinarie). In conseguenza di ciò, il numero di ioni positivi e il numero di elettroni liberi che si trovano, mediamente, in un cm^3 sono uguali, la carica netta nel volume è zero e il campo elettrico macroscopico risulta essere praticamente zero.

$$I_0 = -en_0 \langle v_z \rangle S, \tag{1.29}$$

dove $n_0 = 10^{23}/\text{cm}^3$ e $\langle v_z \rangle$ è la velocità media degli elettroni liberi lungo la direzione z. Dalla (1.23) si ha che

$$\langle v_z \rangle = -\frac{I_0}{en_0 S} = -10^{-6}\text{m/s}. \tag{1.30}$$

La velocità è negativa ed è in modulo uguale a 10^{-6}m/s. La velocità associata all'agitazione termica, a temperatura ambiente, è dell'ordine di 100 km/s.

♦

Osservazione

La relazione (1.25) è generale, essa vale indipendentemente dal tipo di corrente elettrica: l'intensità di corrente i_S che attraversa una generica superficie orientata S può essere espressa, dunque, dal flusso, attraverso S, del campo vettoriale densità di corrente $\mathbf{J}$.

L'intensità di corrente di che attraversa la superficie "fisicamente infinitesima" orientata di area dS, baricentrata in un generico punto P (Figura 1.7) è data da

$$di = \mathbf{J}(P;t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \tag{1.31}$$

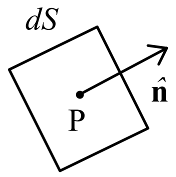

Figura 1.7

La (1.31) può essere allora riscritta come

$$J_n = \frac{di}{dS}, \tag{1.32}$$

dove $J_n = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ è la componente secondo la direzione $\hat{\mathbf{n}}$ della densità di corrente nel punto P.

La relazione (1.32) potrebbe essere considerata come la stessa definizione della densità volumetrica di corrente: il rapporto tra l'intensità di corrente che attraversa la superficie "fisicamente infinitesima" orientata di area dS centrata in P e l'area dS [8] varia a variare della normale $\hat{\mathbf{n}}$ come la componente, secondo $\hat{\mathbf{n}}$, di un vettore univocamente individuato, la densità volumetrica di corrente $\mathbf{J}$. Se la normale è parallela alla direzione di migrazione delle cariche elettriche nell'intorno del punto P e ha lo stesso verso, di è positiva ed assume il valore massimo (se $\hat{\mathbf{n}}$ ha verso opposto alla direzione di migrazione, di è negativo e assume il valore minimo). Invece, se $\hat{\mathbf{n}}$ è ortogonale alla direzione di migrazione, allora di è uguale a zero. Siccome di varia al variare del punto P, $\mathbf{J}$ è un campo vettoriale.

♦

[8] L'operazione di limite $\lim_{\Delta S \to 0} \Delta i / \Delta S$ attorno al punto P va effettuata facendo contrarre ΔS mantenendo fissa la normale $\hat{\mathbf{n}}$.

4. Le sorgenti puntiformi, filiformi e superficiali

In molte applicazioni può essere particolarmente conveniente descrivere le distribuzioni di carica e di corrente attraverso distribuzioni spazialmente "singolari" che, pur non avendo alcun significato fisico, consentono si semplificare notevolmente la trattazione di molti problemi di elettromagnetismo. Esse sono le cariche puntiformi, le distribuzioni di carica con densità lineare, le distribuzioni di carica con densità superficiale, le correnti filiformi e le distribuzioni di corrente con densità superficiale.

4.1 Carica puntiforme

La carica puntiforme è una astrazione matematica attraverso cui rappresentare una carica elettrica finita concentrata in una regione con dimensioni lineari talmente piccole rispetto alle lunghezze caratteristiche del problema in esame da poterle considerare, al limite, come se fossero nulle (un esempio di lunghezza caratteristica è la distanza dalla carica a cui bisogna valutare il campo elettromagnetico). Allo scopo di esemplificare si consideri una carica q uniformemente distribuita in una regione sferica S_R di raggio R, centrata in un punto P_0, Figura 1.8. La distribuzione della densità di carica volumetrica è

$$\rho(P)=\begin{cases}\rho_0 & \text{se } P \in S_R,\\ 0 & \text{all'esterno di } S_R,\end{cases} \tag{1.33}$$

dove

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi}\frac{q}{R^3}; \tag{1.34}$$

il volume della sfera di raggio R è uguale a $4\pi R^3/3$.

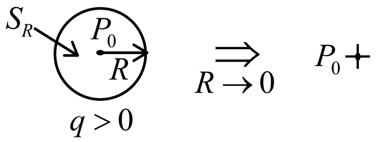

Figura 1.8 *Carica puntiforme*

La carica puntiforme q definita nel punto P_0 rappresenta la distribuzione di volume (1.33) nel limite $R \to 0$: in questo limite abbiamo una densità di carica "infinita" che occupa una regione di "volume zero", tuttavia la carica totale presente in S_R, $q = 4\pi R^3 \rho_0/3$, resta finita !!! E' come se avessimo concentrato tutta la carica q nel punto P_0.

Questo risultato si estende immediatamente a situazioni più generali nelle quali la forma della regione in cui è concentrata la carica q non è sferica e la carica non è distribuita uniformemente se si osserva che nel limite in cui il volume V della regione tende a zero, la distribuzione di carica tende ad essere uniforme, con densità

$$\rho_0 = \frac{q}{V} \text{ per } V \to 0. \tag{1.35}$$

In generale, la carica puntiforme q nel punto P_0 rappresenta il limite di una distribuzione di densità di carica di volume definita in una regione centrata nel punto P_0 quando il volume della regione tende a zero: si ha che la densità di carica di volume è infinita nel punto P_0, uguale a zero altrove e

$$q = \lim_{\substack{\rho \to \infty \\ V \to 0}} \iiint_V \rho dv \tag{1.36}$$

resta finito.

La carica puntiforme può variare nel tempo se una parte di essa (o l'intera carica) si muove. Una carica puntiforme in moto dà origine a una corrente "puntiforme". Il campo di densità di corrente corrispondente è, ad un dato istante di tempo, ovunque diverso da zero, ad eccezione del punto in cui la carica si trova in quell'istante, dove il campo di densità di corrente ha modulo infinito; la direzione e il verso del campo sono quelli della velocità della carica in quell'istante.

4.2 Distribuzioni di cariche con densità lineare e correnti filiformi

Anche la distribuzione di carica con densità lineare è una astrazione matematica attraverso cui rappresentare cariche distribuite in regioni filiformi con dimensioni trasversali talmente piccole se confrontate con le altre dimensioni caratteristiche del problema da poterle ritenere, al limite, uguali a zero. Solo allo scopo di esemplificare consideriamo una carica distribuita in una regione filiforme con densità volumetrica uniforme su qualsiasi sezione trasversale del filo, Figura 1.9. Indichiamo con A l'area della sezione trasversale del filo che, solo per semplicità, assumiamo uniforme lungo l'asse, e con Γ l'asse del filo.

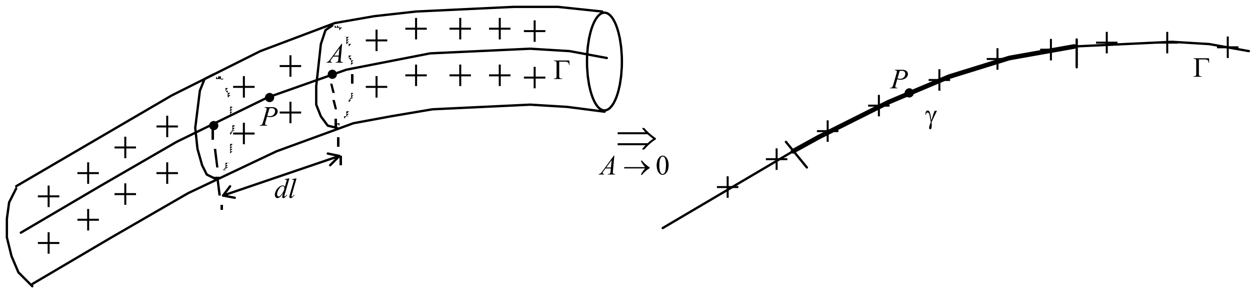

Figura 1.9 *Distribuzione di carica con densità lineare*

Si consideri, ora, un tratto elementare del filo di cariche di lunghezza dl centrato nel generico punto P dell'asse Γ, Figura 1.9. La carica elettrica contenuta nel tratto elementare di filo è data da

$$dQ = \rho(P)(Adl); \tag{1.37}$$

Adl è il volume del tratto elementare. Posto

$$\lambda(P) \equiv A\rho(P), \tag{1.38}$$

la (1.37) può essere così riscritta

$$dQ = \lambda(P)dl. \tag{1.39}$$

La grandezza λ, in generale, varia da punto a punto lungo Γ e ha le dimensioni di una carica per unità di lunghezza. Si consideri, ora, assegnata la funzione $\lambda = \lambda(P)$ lungo l'asse del filo. La corrispondente distribuzione di densità di carica volumetrica vale

$$\rho_0(P) = \frac{\lambda(P)}{A} \tag{1.40}$$

all'interno filo e zero altrove. La distribuzione di carica con densità lineare λ definita lungo la linea Γ (l'asse del filo di carica) rappresenta questa distribuzione di densità di carica volumetrica nel limite $A \rightarrow 0$: in questo limite abbiamo una densità di carica volumetrica "infinita" che occupa una regione di "volume zero" lungo l'asse del filo, tuttavia la densità di carica lineare $\lambda = \rho_0 A$ (la carica netta per unità di lunghezza) resta finita !!! E' come se avessimo compresso tutta la carica lungo l'asse del filo.

Nel Sistema internazionale la densità di carica lineare viene misurata in "coulomb/metro" (C/m).

Per determinare la carica netta di un generico tratto del filo di cariche con assegnata densità lineare non è necessario ricorrere all'integrale di volume della corrispondente densità di carica volumetrica sul tratto in esame, è sufficiente considerare l'integrale di linea della densità lineare lungo il corrispondente tratto dell'asse del filo (Figura 1.9). Dalla (1.39) si ha che la carica elettrica netta lungo il tratto γ (γ è una parte di Γ o tutta Γ) è

$$Q_\gamma = \int_\gamma \lambda(P) dl . \tag{1.41}$$

Questo risultato si estende immediatamente a situazioni più generali nelle quali la carica non è distribuita uniformemente nella sezione trasversale e la stessa sezione trasversale non è uniforme lungo l'asse del filo se si osserva che nel limite in cui l'area $A(P)$ della generica sezione trasversale tende a zero, la distribuzione di carica tende ad essere uniforme su di essa, con densità

$$\rho_0(P) = \frac{\lambda(P)}{A(P)} \text{ per } A \rightarrow 0 . \tag{1.42}$$

In generale, la distribuzione di densità di carica lineare λ definita lungo la linea Γ rappresenta il limite di una distribuzione di densità di carica di volume definita in un filo che ha come asse la linea Γ quando l'area della sezione trasversale del filo tende a zero: si ha che la densità di carica di volume è infinita sull'asse Γ del filo, è uguale a zero fuori dall'asse del filo e l'integrale

$$\lambda(P) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ A(P) \rightarrow 0}} \iint_{A(P)} \rho dS \tag{1.43}$$

resta finito. La densità di carica lineare può variare nel tempo se le cariche distribuite nella regione filiforme si muovono.

Quando le cariche di una distribuzione con densità lineare si muovono si ha una corrente elettrica, che può essere rappresentata attraverso un'altra astrazione matematica, la corrente filiforme (lineare). Come al solito, solo allo scopo di esemplificare, consideriamo una corrente uniformemente distribuita su qualsiasi sezione trasversale del filo, Figura 1.10. E' evidente che in questi casi la direzione del campo di densità di corrente è determinata dal fatto che le cariche possono muoversi solo lungo il filo e quindi essa deve coincidere punto per punto con la direzione della tangente all'asse del filo. Indichiamo con $\hat{\mathbf{t}}(P)$ il versore tangente a Γ nel generico punto P, orientato, ad esempio, come illustrato in Figura 1.10.

Si consideri la sezione trasversale del filo centrata nel generico punto P e la si orienti concordemente con il verso di $\hat{\mathbf{t}}$. L'intensità di corrente che attraversa la sezione trasversale è data da (si noti che $\hat{\mathbf{t}}$ è normale alla generica sezione trasversale del filo)

$$i(P) = \mathbf{J}(P) \cdot \hat{\mathbf{t}}(P) A . \tag{1.44}$$

Si consideri, ora, assegnata la distribuzione dell'intensità di corrente i che attraversa la sezione trasversale del filo. La corrispondente distribuzione di densità di corrente vale

$$\mathbf{J}_0 = \frac{i(P)}{A}\hat{\mathbf{t}}(P) \tag{1.45}$$

all'interno del filo e zero altrove. La <u>corrente filiforme</u> di intensità i definita lungo Γ rappresenta questa distribuzione di densità di corrente volumetrica nel limite $A \to 0$: in questo limite abbiamo una densità di corrente <u>volumetrica</u> "infinita" che occupa una regione di "volume zero" lungo l'asse del filo, tuttavia l'intensità di corrente $i = \mathbf{J}_0 \cdot \hat{\mathbf{t}}A$ resta <u>finita</u> !!! E' come se avessimo compresso tutta la corrente lungo l'asse del filo.

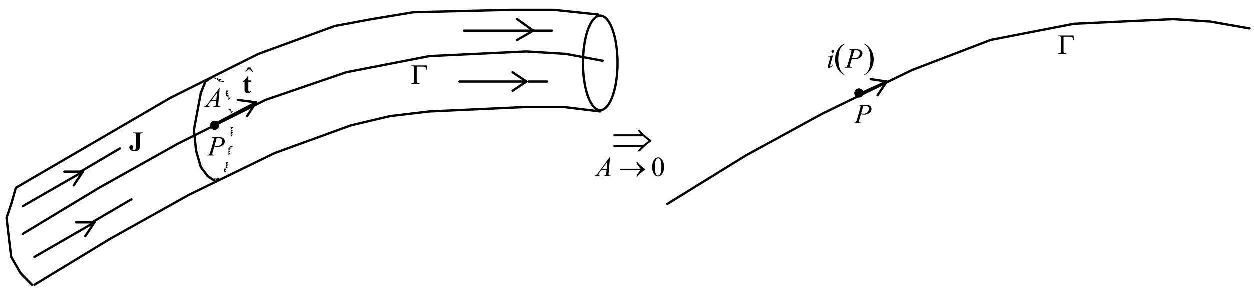

Figura 1.10 *Corrente filiforme(lineare)*

Questo risultato si estende immediatamente a situazioni più generali nelle quali la corrente non è uniformemente distribuita nella sezione trasversale del filo e la sezione stessa non è uniforme lungo l'asse.

In generale, una corrente filiforme definita lungo Γ rappresenta il limite di una distribuzione di densità di corrente di volume definita in un filo che ha come asse la linea Γ, diretta lungo l'asse del filo, quando l'area della sezione trasversale del filo tende a zero: si ha che il modulo della densità di corrente di volume è infinita sull'asse Γ del filo, è uguale a zero fuori dall'asse del filo e

$$i(P) = \lim_{\substack{|\mathbf{J}| \to \infty \\ S(P) \to 0}} \iint_{S(P)} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \tag{1.46}$$

resta finito. L'intensità di corrente i può variare nel tempo.

4.3 Distribuzioni di cariche con densità superficiale

Anche la distribuzione di carica con densità superficiale è una astrazione matematica attraverso cui rappresentare cariche distribuite in strati sottili con <u>spessori</u> talmente piccoli se confrontati con le altre dimensioni caratteristiche del problema da poterli ritenere, al limite, uguali a zero. Solo allo scopo di esemplificare consideriamo una carica distribuita in uno strato con densità volumetrica uniforme nello spessore, Figura 1.11. Indichiamo con h lo spessore dello strato che, solo per semplicità, assumiamo uniforme in tutto lo strato e con Σ la superficie mediana.

Si consideri, ora, una regione elementare dello strato di carica di area dS centrata nel generico punto P della superficie mediana Σ, Figura 1.11. La carica elettrica contenuta nello strato elementare è data da

$$dQ = \rho(P)(hdS); \tag{1.47}$$

hdS è il volume della regione elementare. Posto

$$\sigma(P) \equiv h\rho(P), \tag{1.48}$$

la (1.47) può essere così riscritta

$$dQ = \sigma(P)dS. \tag{1.49}$$

La grandezza σ, in generale, varia da punto a punto sulla superficie mediana Σ dello strato e ha le dimensioni di una carica per unità di superficie. Si consideri, ora, assegnata la funzione $\sigma = \sigma(P)$ su Σ. La corrispondente distribuzione di densità di carica volumetrica vale

$$\rho_0(P) = \frac{\sigma(P)}{h} \tag{1.50}$$

all'interno dello strato e zero altrove. La distribuzione di carica con densità superficiale σ definita sulla superficie Σ rappresenta questa distribuzione di densità di carica volumetrica nel limite $h \to 0$: in questo limite abbiamo una densità di carica volumetrica "infinita" che occupa una regione di "volume zero" lungo la superficie mediana Σ dello strato, tuttavia la densità di carica superficiale $\sigma = \rho_0 h$ (la carica netta per unità di superficie) resta finita !!! E' come se in questo caso avessimo spalmato tutta la carica sulla superficie mediana Σ dello strato di cariche. Nel Sistema internazionale la densità di carica superficiale è misurata in "coulomb/metro^2" (C/m^2).

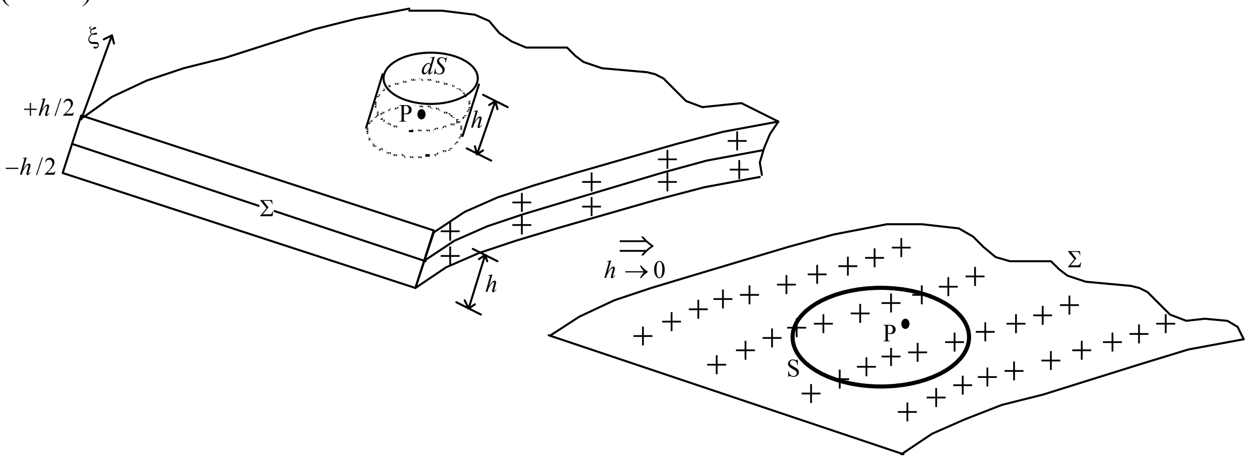

Figura 1.11 *Distribuzione di carica con densità superficiale*

Per determinare la carica netta in una generica parte dello strato per assegnata densità superficiale σ sulla superficie mediana non è necessario ricorrere all'integrale di volume della corrispondente densità di carica volumetrica, è sufficiente considerare solo l'integrale di superficie della densità superficiale sulla corrispondente parte della superficie mediana (Figura 1.11). Dalla (1.49) si ha chela carica elettrica netta sulla superficie S (S è una parte o tutta la superficie mediana Σ) è

$$Q_S = \iint_S \sigma(P)dS. \tag{1.51}$$

Questo risultato si estende immediatamente alle situazioni più generali nelle quali la carica non è distribuita uniformemente nello spessore dello strato e lo strato non ha spessore uniforme se si osserva che nel limite in cui lo spessore $h(P)$ tende a zero la distribuzione di carica tende ad essere uniforme nello spessore,

$$\rho_0(P)=\frac{\sigma(P)}{h(P)} \text{ per } h\to 0. \tag{1.52}$$

In generale, la distribuzione di densità di carica superficiale σ definita sulla superficie Σ rappresenta il limite di una distribuzione di densità di carica di volume definita in uno strato sottile che ha come superficie mediana la superficie Σ quando lo spessore dello strato tende a zero: si ha che la densità di carica di volume è infinita su Σ, è uguale a zero fuori da Σ e l'integrale

$$\sigma(P)=\lim_{\substack{\rho\to\infty \\ h(P)\to 0}} \int_{-h/2}^{h/2}\rho d\xi \tag{1.53}$$

resta finito; ξ è la coordinata lungo l'asse parallelo alla normale alla superficie Σ nel punto P con l'origine nello stesso punto P, Figura 1.11.

Quando le cariche di una distribuzione con densità superficiale si muovono si ha una corrente elettrica, che può essere rappresentata attraverso un'altra astrazione matematica, la distribuzione di corrente con densità superficiale. Come al solito, solo allo scopo di esemplificare, consideriamo una corrente uniformemente distribuita nello spessore dello strato, Figura 1.12. E' evidente che anche in questo caso la direzione del campo di densità di corrente è vincolata dal fatto che le cariche possono muoversi solo lungo lo strato e quindi deve essere tangente alla superficie mediana Σ dello strato.

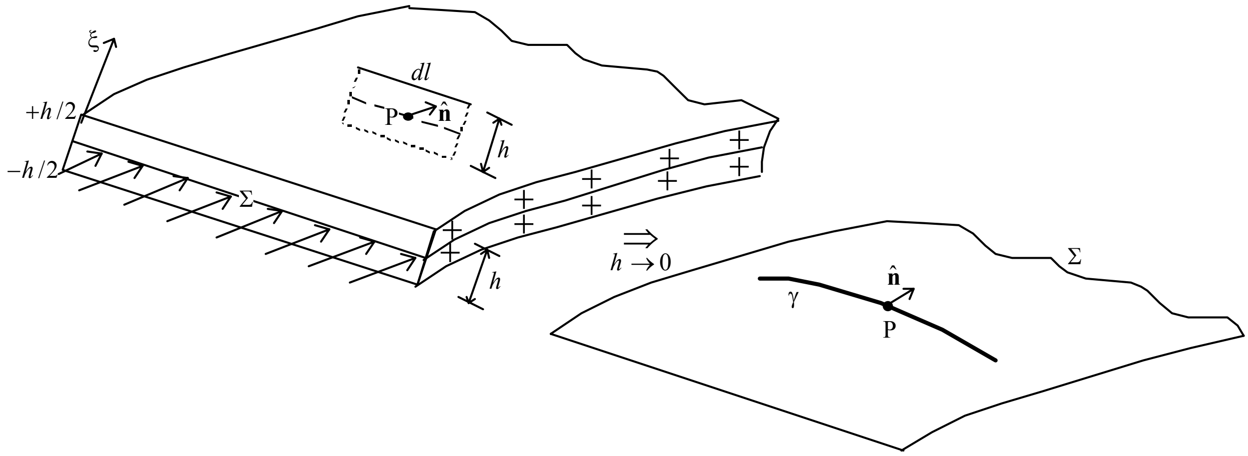

Figura 1.12 *Distribuzione di corrente con densità superficiale*

Si consideri una sezione trasversale elementare dello strato di corrente di lunghezza *dl* e centrata nel punto P della superficie Σ; l'altro lato è proprio lo spessore h, Figura 1.12. Si orienti questa superficie elementare, ad esempio, come riportato in Figura 1.12. L'intensità di corrente che attraversa la superficie elementare è

$$i(P)=\mathbf{J}(P)\cdot\hat{\mathbf{n}}(P)(hdl); \tag{1.54}$$

hdl è l'area della sezione trasversale elementare. Posto

$$\mathbf{J}_S(P)=\mathbf{J}(P)h, \tag{1.55}$$

la (1.54) diventa

$$i(P) = \mathbf{J}_S(P) \cdot \hat{\mathbf{n}}(P) dl. \tag{1.56}$$

La grandezza $\mathbf{J}_S$, in generale, varia da punto a punto lungo la superficie mediana Σ dello strato e ha le dimensioni di una corrente per unità di lunghezza. Si consideri, ora, assegnata la funzione $\mathbf{J}_S = \mathbf{J}_S(P)$ su Σ. La corrispondente distribuzione di densità di corrente volumetrica vale

$$\mathbf{J}(P) = \frac{\mathbf{J}_S(P)}{h} \tag{1.57}$$

all'interno dello strato e zero altrove. La distribuzione di corrente con densità superficiale $\mathbf{J}_S$ definita sulla superficie Σ rappresenta questa distribuzione di densità di corrente volumetrica nel limite $h \to 0$: in questo limite abbiamo una densità di corrente volumetrica con modulo "infinito" che occupa una regione di "volume zero" lungo la superficie mediana Σ dello strato, tuttavia la densità di corrente superficiale $\mathbf{J}_S = \mathbf{J}h$ resta finita !!! E' come se in questo caso avessimo spalmato tutta la corrente lungo la superficie mediana Σ dello strato di cariche.

Nel Sistema internazionale la densità di corrente superficiale è misurata in "ampere/metro" (A/m).

Per determinare l'intensità di corrente che attraversa una generica sezione trasversale orientata dello strato per assegnata densità di corrente superficiale $\mathbf{J}_S$ sulla superficie mediana Σ dello strato non è necessario ricorrere al flusso attraverso la sezione in esame della corrispondente densità di corrente volumetrica, è sufficiente considerare solo il flusso attraverso la linea che si ottiene dall'intersezione della sezione trasversale con la superficie Σ, orientata concordemente con l'orientazione della sezione trasversale (Figura 1.12). Dalla (1.56) si ha che l'intensità di corrente netta che attraversa la linea γ orientata, ad esempio, così come riportata in Figura 1.12 è

$$i_\gamma = \int_\gamma \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \tag{1.58}$$

Si noti che $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla linea γ giacente sulla superficie Σ.

Questo risultato si estende immediatamente a situazioni più generali nelle quali la corrente non è uniformemente distribuita nello spessore dello strato e la spessore stesso non sia uniforme nello strato.

In generale, una distribuzione di corrente con densità superficiale definita sulla superficie Σ rappresenta il limite di una distribuzione di densità di corrente di volume definita in uno strato sottile che ha come superficie mediana la superficie Σ , diretta tangenzialmente a Σ, quando lo spessore dello strato tende a zero: si ha che il modulo della densità di corrente di volume è infinita sulla superficie Σ, è uguale a zero fuori da Σ e

$$\mathbf{J}(P) = \lim_{\substack{|\mathbf{J}| \to \infty \\ h(P) \to 0}} \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{J} d\xi. \tag{1.59}$$

resta finito. Il campo di densità di corrente superficiale $\mathbf{J}_S$ può variare nel tempo, Figura 1.12.