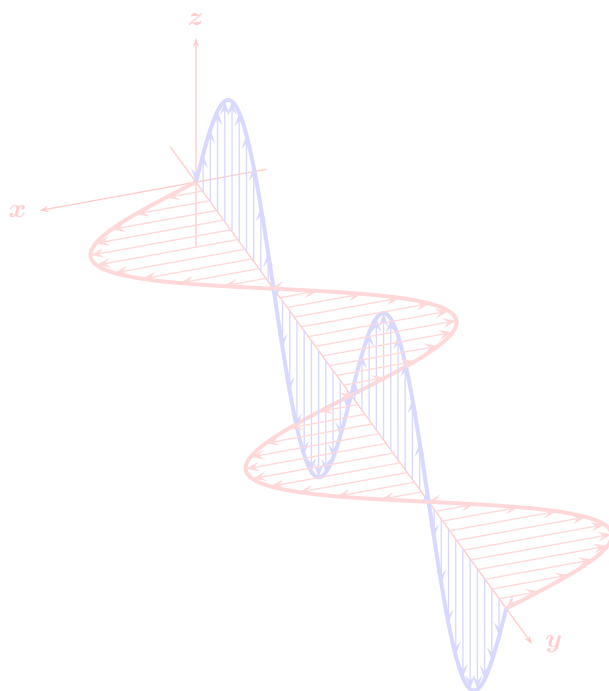


Pensare le reti elettriche



Dispense didattiche
e prove d'esame

Antonio Quercia

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA
Università degli Studi di Napoli Federico II



Indice

1	Richiami di analisi	4
1.1	Funzioni, derivate, inverse	4
1.2	Integrali	4
1.2.1	Integrazione per parti	4
1.2.2	Integrazione per sostituzione A	4
1.2.3	Integrazione per sostituzione B	5
1.3	Il campo complesso	5
1.3.1	Estensioni dei numeri complessi: i Quaternioni di Hamilton	7
1.3.2	Una luce moderna (ma in realtà antica): i multivectors	8
2	Richiami di algebra lineare	9
3	Misure ed errori	10
3.1	propagazione degli errori nelle misure indirette	10
3.2	cifre significative cookbook	11
3.3	Cancellazione numerica: equazione quadratica	11
4	Integrazioni al libro Circuiti	13
4.0.1	pag 23 Limiti del modello circuitale	13
4.0.2	pag 74 espressione della soluzione in termini dei generatori e delle variabili di stato	14
4.0.3	pag 82 esempio di regime sinusoidale: circuito serie e-R-C con generatore sinusoidale	14
4.0.4	pag 117 Indipendenza delle equazioni alle correnti	15
4.0.5	pag 117 Indipendenza delle equazioni topologiche per circuiti non connessi	15
4.0.6	pag 125 Equazioni circuitali in forma canonica, $Lx = d$	16
4.0.7	pag 128 Dualità nelle reti resistive	16
4.0.8	Metodi dei potenziali nodali e delle correnti di maglia	17
4.0.9	pag 133 Equazioni di tableau	17
4.0.10	pag 139 Trattamento dei generatori di tensione nel metodo dei potenziali di nodo	18
4.0.11	pag 143 Trattamento dei generatori di corrente nel metodo delle correnti di maglia	19
4.0.12	pag 206 Trasformazione stella-triangolo	20
4.0.13	pag 226-7 metodo simbolico	22
4.0.14	pag 242 potenze che si conservano in regime sinusoidale	22
4.0.15	pag 256 risonanza serie: equazione nel dominio del tempo	22
4.0.16	pag 259 risonanza parallelo	23
4.0.17	pag 274 Serie di Fourier ed FFT: proiezione e interpolazione	24
4.0.18	pag 277 Grandezze rappresentate in decibel	24
4.0.19	pag 283 Trasferimenti energetici, valore efficace, energia immagazzinata in L e C	24
4.0.20	pag 286 wattmetro ideale	27
4.0.21	pag 292 Circuito di Tesla con linea induttiva	28
4.0.22	pag 331 Adattamento in potenza con trasformatore per carico non puramente resistivo	28
4.0.23	pag 332 Giratore	29
4.0.24	pag 337 Resistenza/conduktanza equivalente (matriciale) e reciprocità	29
4.0.25	pag 337 Estensione di validità delle proprietà di reciprocità	30
4.0.26	pag 344,351,353 Matrici ibride equivalenti	30
4.0.27	pag 347 Matrice di trasmissione	30
4.0.28	pag 350 Sintesi di un doppio bipolo lineare non inerte	32
4.0.29	pag 357 mutuo accoppiamento	34
4.0.30	pag 361 equivalenza circuiti in fig 6.44 (a) e (b)	34
4.0.31	pag 362 accoppiamento non perfetto	35
4.0.32	pag 378 decomposizione della soluzione per circuiti del primo ordine	35
4.0.33	pag 396 dissipatività	36
4.0.34	pag 397 regime permanente	37
4.0.35	Esempi di circuiti non dissipativi	38
4.0.36	pag 411,415,434 circuito resistivo associato e modello ABCD	39
4.0.37	Circuiti di ordine n	42
4.0.38	Risposta a regime permanente TDS158	47

4.0.39	pag 463 equivalenze per induttore e capacitore inizialmente carichi	48
5	Cenni al mondo meraviglioso dei sistemi e dei circuiti non lineari	49
6	Argomenti selezionati	51
6.0.1	Validità generale del metodo simbolico	51
6.0.2	Operatori differenziali fondamentali ed equazioni di Maxwell	51
6.0.3	Espressione della potenza in regime lentamente variabile per bipoli ed N -poli	57
6.0.4	Semplici tecniche di eliminazione dei disturbi nei collegamenti elettrici	58
7	Impianti	59
7.1	Trasformatore	59
7.1.1	Mutuo accoppiamento induttivo	59
7.1.2	Trasformatore reale	59
7.1.3	Modello a L, prova a vuoto GSII.58	60
7.1.4	Modello a L, prova in cortocircuito GSII.59	61
7.1.5	Caduta di tensione	62
7.1.6	Rendimento	62
7.2	Linee elettriche	64
7.2.1	Caduta di tensione	65
7.2.2	Comportamento termico delle linee	68
7.2.3	Dimensionamento delle linee elettriche	68
7.2.4	Confronto tra linee elettriche	68
7.3	Impianti di terra	68
7.4	Interruttore automatico	68
7.4.1	Protezione dal cortocircuito	68
7.4.2	Corrente di guasto e resistenza di terra	68
7.4.3	Dati di targa dell'interruttore	69
7.4.4	Correnti di riferimento della caratteristica di intervento	69
7.4.5	Potere di interruzione	70
7.4.6	altro	70
8	Compendio	71
8.1	Classificazioni	71
8.1.1	Classificazione dei bipoli	71
8.1.2	Classificazione dei componenti a più terminali	72
8.1.3	Classificazione dei circuiti	72
8.2	Relazioni essenziali	73
8.2.1	Potenza scambiata da un bipolo in regime sinusoidale	73
8.2.2	Espressioni nel metodo dei fasori	73
8.2.3	Conservazione delle potenze in regime sinusoidale	73
8.2.4	Trasformazioni Triangolo $\leftrightarrow$ Stella ($\Delta \leftrightarrow Y$)	74
8.2.5	Formula di Millman	74
8.3	Trifase	74
8.3.1	Carico a Stella	74
8.3.2	Carico a Triangolo	75
8.3.3	Rifasamento di un carico trifase equilibrato	76
8.3.4	Misura della potenza	76
9	Convenzioni OCTAVE/MATLAB	79
10	Soluzioni di alcune prove d'esame	81
11	Checklist pre-esame	91
	Indice analitico	93

Capitolo 1

Richiami di analisi

1.1 Funzioni, derivate, inverse

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sign} x \quad x \neq 0 \text{ (la funzione } g(x) = |x| \text{ non è derivabile in } x = 0)$$

$$\frac{d}{dx}|f(x)| = \frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}f'(x) = \operatorname{sign} f(x)f'(x) \quad \begin{array}{l} \text{non vale nei punti in cui la } f(x) \text{ cambia segno,} \\ \text{cioè nei punti } x_i \text{ tali che } f(x_i) = 0 \text{ e } f'(x_i) \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{|x|} \frac{d|x|}{dx} = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{1}{|f(x)|} \frac{d|f(x)|}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad x = \sinh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}, y \geq 1; \quad x = \cosh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad x \geq 0, y \geq 1$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c = \sinh^{-1} x + c$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad x \geq 1; \quad \frac{d}{dx} \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad |x| \geq 1 \text{ caso più generale}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c \quad (= \cosh^{-1} x + c \text{ se } x \geq 1)$$

1.2 Integrali

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + c = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c$$

1.2.1 Integrazione per parti

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \int fg' dx = fg - \int f'g dx$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = (x - 1)e^x + c$$

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

$$\int \ln |x| dx = \int 1 \cdot \ln |x| dx = x \ln |x| - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln |x| - x + c = x(\ln |x| - 1) + c$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-) \sin x dx \right]$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \quad 2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) + c$$

1.2.2 Integrazione per sostituzione A

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + c = \left[F(x) + c \right]_{x=\phi(t)} = \left[\int f(x)dx \right]_{x=\phi(t)}$$

$$\int e^{\sin t} \sin 2t \, dt = \int e^{\sin t} 2 \sin t \cos t \, dt = \left[2 \int e^x x \, dx \right]_{x=\sin t} = \left[2e^x(x-1) + c \right]_{x=\sin t} = 2e^{\sin t}(\sin t - 1) + c$$

1.2.3 Integrazione per sostituzione B

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= F(x) + c = [F(\phi(t)) + c]_{t=\phi^{-1}(x)} = \left[\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt \right]_{t=\phi^{-1}(x)} \\ \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left[\int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt \right]_{t=\arcsin x} = \left[\int \cos^2 t \, dt \right]_{t=\arcsin x} = \left[\frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + c \right]_{t=\arcsin x} \\ &= \left[\frac{1}{2}(t + \sin t \sqrt{1-\sin^2 t}) + c \right]_{t=\arcsin x} = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c \end{aligned}$$

1.3 Il campo complesso

L'obiettivo *moderno* della introduzione dei numeri complessi è quello di poter descrivere efficacemente le rotazioni nel piano. Ciò viene fatto mediante la definizione di una operazione prodotto a cui corrisponde proprio una rotazione (e in aggiunta anche un eventuale allungamento o accorciamento) di una certa grandezza orientata.

Ricordiamo che un campo è informalmente un 'ambito aritmetico', ovvero un insieme (ad esempio l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, o l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, o l'insieme $\mathbb{Q}(s)$ delle funzioni razionali di una certa variabile s) sui cui elementi sono definite le quattro operazioni $(+, \cdot, -, /)$. Dal punto di vista formale si ha quanto segue.

Il *campo complesso* si costruisce munendo di opportuna struttura algebrica l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, ponendo

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad 1.1$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad 1.2$$

L'insieme $\mathbb{R}^2$ con tali operazioni si chiama *campo complesso* e si indica con $\mathbb{C}$. E' facile verificare che $\mathbb{C}$ è un *campo*, cioè che sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. L'operazione di addizione gode delle proprietà

- È associativa, cioè risulta $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}$
- È commutativa, cioè risulta $u + v = v + u \quad \forall u, v \in \mathbb{C}$
- È dotata di *elemento neutro*, cioè esiste un (unico) numero complesso, lo zero (complesso) $(0, 0)$, tale da risultare $u + (0, 0) = u \quad \forall u \in \mathbb{C}$
- Rispetto all'addizione ogni numero complesso è dotato di simmetrico (opposto) cioè, per ogni $u = (x, y) \in \mathbb{C}$ esiste un (unico) numero complesso, il numero $v = -u = -(x, y) = (-x, -y)$, tale che $u + (-u) = (0, 0)$

2. L'operazione di moltiplicazione gode delle proprietà

- È associativa, cioè risulta $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}$
- È commutativa, cioè risulta $u \cdot v = v \cdot u \quad \forall u, v \in \mathbb{C}$
- È dotata di *elemento neutro*, cioè esiste un (unico) numero complesso, l'unità (complessa) $(1, 0)$, tale da risultare $u \cdot (1, 0) = u \quad \forall u \in \mathbb{C}$
- Rispetto alla moltiplicazione ogni numero complesso diverso da zero è dotato di simmetrico (reciproco) cioè, per ogni $u \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$ esiste un (unico) numero complesso, il numero u' , tale che $u \cdot u' = (1, 0)$.
L'uguaglianza precedente, posto $u = (x, y)$ e $u' = (x', y')$, equivale al sistema delle due uguaglianze tra numeri reali $xx' - yy' = 1, yx' + xy' = 0$ che, nell'ipotesi $(x, y) \neq (0, 0)$ ammette l'unica soluzione $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.
Il numero u' , reciproco di u , si indica con u^{-1} , sicchè si ha

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad 1.3$$

Lo zero è l'unico elemento sprovvisto di reciproco

3. Vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, cioè risulta $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}$

Dalle uguaglianze $u = u \cdot (1, 0) = u \cdot [(1, 0) + (0, 0)] = u + u \cdot (0, 0)$ e dall'unicità dello zero segue $u \cdot (0, 0) = (0, 0) \quad \forall u \in \mathbb{C}$. Da cui si ha che $u \cdot v = (0, 0)$ e $u \neq (0, 0) \Rightarrow u^{-1} \cdot u \cdot v = u^{-1} \cdot (0, 0) = (0, 0) \Rightarrow (1, 0) \cdot v = (0, 0) \Rightarrow v = (0, 0)$. Cioè vale la

$$u \cdot v = (0, 0) \text{ e } u \neq (0, 0) \Rightarrow v = (0, 0) \quad \text{legge di annullamento del prodotto} \quad 1.4$$

cioè il prodotto di due numeri complessi si annulla se e solo se almeno uno dei due fattori è nullo.

Nel campo complesso si definiscono, come nel campo reale, le operazioni di *sottrazione* e *divisione*: la *differenza* di due numeri complessi è la somma del primo e dell'opposto del secondo; il *quoziente* è il prodotto del primo e del reciproco del secondo, sicché l'operazione di divisione è definita solo quando il divisore è diverso dallo zero.

Dalla definizione di prodotto si trae la definizione di potenza ad esponente intero positivo

$$(x, y)^n = (x, y) \cdot (x, y) \cdots (x, y) \quad (n \text{ fattori}) \quad 1.5$$

La potenza di esponente intero, nullo o negativo, si definisce quindi, per $(x, y) \neq (0, 0)$, ponendo

$$(x, y)^0 = (1, 0) \quad , \quad (x, y)^{-n} = [(x, y)^{-1}]^n \quad 1.6$$

È facile constatare che tali potenze godono delle stesse proprietà delle potenze ad esponente intero nel campo reale.

Forma algebrica dei numeri complessi

Integrare con Firenze

Osserviamo che $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$. Siano allora $\mathbb{R}'$ l'insieme dei numeri complessi di tipo $(x, 0)$, e $\mathbb{I}$ l'insieme dei numeri complessi di tipo $(0, y)$. Si ha

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \quad 1.7$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \quad 1.8$$

per cui si può identificare ogni elemento di tipo $(x, 0)$ di $\mathbb{R}'$ con la componente $x \in \mathbb{R}$. Allora si conviene porre $(x, 0) = x$. Quindi i numeri complessi di tipo $(x, 0)$ si chiamano ancora numeri reali. Invece l'insieme $\mathbb{I}$ non è un campo, infatti

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (-y_1 y_2, 0) \notin \mathbb{I}$$

Gli elementi di $\mathbb{I}$ si dicono numeri *numeri immaginari* (o *numeri immaginari puri*) e $(0, 1)$ si chiama *unità immaginaria*, e si pone

$$(0, 1) = i$$

così

$$(0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0) = iy$$

Si trae la rappresentazione

$$\boxed{(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy} \quad 1.9$$

che si chiama *forma algebrica* del numero complesso (x, y) . Risulta poi

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Integrare con Firenze

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Integrare con Firenze

Forma trigonometrica dei numeri complessi

Integrare con Firenze

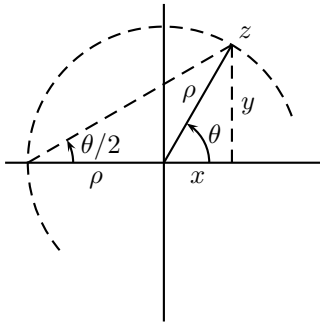
Radici n -me dei numeri complessi

Integrare con Firenze

excursus sui numeri complessi

- forma cartesiana, piano di Gauss, forma polare (definizione di ampiezza e argomento)

$$z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = [\rho, \theta] \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Per la determinazione dell'argomento θ vi sono due possibilità. La prima è universalmente utilizzata ma ha lo svantaggio di dover considerare diversi casi. In particolare, per ottenere il risultato nel range $\theta \in (-\pi, \pi]$ si ha

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y/\rho}{x/\rho} = \frac{y}{x} \quad \theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \frac{y}{|y|} & x = 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x} & x < 0, y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x \geq 0^+ \\ \pi \frac{y}{|y|} + \arctan \frac{y}{x} & x < 0 \end{cases}$$

La seconda è invece analitica ed è da considerarsi fondamentale:

$$\frac{y}{\rho+x} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho + \rho \cos \theta} = \frac{\frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}}{1 + \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}} = \tan \frac{\theta}{2} \quad \boxed{\theta = 2 \arctan \frac{y}{\rho+x} \quad \forall x, \forall y} \quad 1.10$$

Argomento avanzato: la precedente espressione, per $x < 0$ e $|\frac{y}{x}| \ll 1$, quindi per $\theta \cong \pi$, può esibire cancellazione numerica, come si vede dall'espressione

$$\frac{y}{\rho+x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} = \frac{y}{|x|\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}+x} \stackrel{x \leq 0}{=} \frac{y}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}-1} \stackrel{x \lesssim 0}{\approx} \frac{y}{|x|} \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^2} = \frac{2|x|}{y}$$

Una espressione numericamente più stabile si può ottenere manipolando la precedente espressione, in modo tale che la cancellazione avvenga per $\theta \cong 0$ anziché per $\theta \cong \pi$, la qual cosa si consegue mediante razionalizzazione, come segue

$$\frac{y}{\rho+x} = \frac{y}{\rho+x} \frac{\rho-x}{\rho-x} = \frac{y(\rho-x)}{\rho^2-x^2} = \frac{\rho-x}{y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} = \frac{|x|\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}-x}{y} \stackrel{x \geq 0}{=} \frac{x}{y} (\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}-1) \stackrel{x \gtrsim 0}{\approx} \frac{x}{y} \frac{1}{2} (\frac{y}{x})^2 = \frac{y}{2x}$$

In questo caso la cancellazione numerica si presenta dunque *al numeratore*, per $x > 0$ e $|\frac{y}{x}| \ll 1$. Nei moderni processori la cosa viene gestita direttamente in hardware con l'istruzione FPATAN, che valuta il numeratore mediante sviluppo in serie al verificarsi della condizione indicata.

- forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$
- $z = e^{i\theta}$ esponenziale di un numero immaginario puro: è un punto situato sul cerchio unitario del piano di Gauss
- legame tra le diverse forme
- somma e prodotto di numeri complessi nelle diverse forme
In particolare evidenziare che la forma cartesiana è conveniente per le somme e quella esponenziale per i prodotti (citare legame con le formule di De Moivre)

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$[\rho_1, \theta_1] \cdot [\rho_2, \theta_2] = [\rho_1 \rho_2, \theta_1 + \theta_2]$$

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$[\rho, \theta]^n = [\rho^n, n\theta]$$

$$[\rho, \theta]^{-1} = [\rho^{-1}, -\theta]$$

$$\frac{[\rho_1, \theta_1]}{[\rho_2, \theta_2]} = [\rho_1, \theta_1] \cdot [\rho_2, \theta_2]^{-1} = [\rho_1, \theta_1] \cdot [\rho_2^{-1}, -\theta_2] = [\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2]$$
- Complesso coniugato, e modulo quadro

1.3.1 Estensioni dei numeri complessi: i Quaternioni di Hamilton

I numeri complessi trovano numerose importanti applicazioni. Oltre a quelle che discuteremo in queste lezioni ve ne sono ovviamente altre. Ad esempio, nell'ambito della teoria delle funzioni complesse di variabile complessa è possibile individuare metodi per la soluzione elegante ed efficace di intere classi di equazioni differenziali a derivate parziali *in due variabili*. È quindi ad esempio possibile risolvere in tal modo problemi di campo elettrostatico in un certo dominio *bidimensionale*.

Vale la pena chiedersi se si può generalizzare la teoria in modo da risolvere problemi in più dimensioni rispetto al caso bidimensionale del piano di Gauss, ad esempio problemi definiti nello spazio-tempo, ove le variabili sono x, y, z, t .

L'algebra dei *quaternioni*, introdotta da Hamilton con successo dopo numerosi anni di tentativi, costituisce la prima importante generalizzazione dell'algebra dei numeri complessi. In particolare i quaternioni sono un esempio della più generale classe dei *numeri ipercomplessi*.

Il problema di Hamilton era che, mentre gli era chiaro come effettuare la somma e la moltiplicazione tra triple di numeri reali, non riusciva invece a risolvere il problema della divisione, ovvero non sapeva come valutare il quoziente di due punti dello spazio.

Dopo un lungo periodo di non ampia popolarità (periodo caratterizzato invece da una grande popolarità della *analisi vettoriale*), i quaternioni sono stati recentemente riscoperti, primariamente (ma non solo) grazie alla loro maggiore efficacia nel descrivere le *rotazioni spaziali*. Le rappresentazioni di rotazioni mediante quaternioni sono più compatte e veloci da calcolare rispetto alle rappresentazioni matriciali e, contrariamente al caso di descrizione mediante gli *angoli di Eulero*, non presentano ad esempio l'importante problema del cosiddetto *gimbal lock* (*letteralmente, blocco della sospensione cardanica*), ovvero la perdita di uno dei 3 gradi di libertà che avviene quando 2 dei 3 assi che definiscono gli angoli convergono verso la medesima direzione, cosa che in termini matematici corrisponde alla indeterminatezza di uno degli angoli stessi e quindi ad una singolarità nel codice di calcolo. Nessuno vorrebbe probabilmente trovarsi in un aereo in volo sopra il polo nord (o sud), che avesse il codice di navigazione basato sulle classiche rotazioni matriciali in termini degli angoli di Eulero. Si noti che non si tratta di una speculazione, un problema di questo genere si verificò durante la *missione lunare Apollo 11*, e gli astronauti furono costretti ad escludere il pilota automatico.

Per esemplificare il problema della rappresentazione mediante angoli, si consideri in particolare il moto di un punto materiale su una superficie sferica di assegnato raggio r_0 . Ciò può agevolmente essere descritto con due sole variabili, ad esempio in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , con $r = r_0$ costante. Supponiamo che il punto si stia muovendo sul meridiano descritto dal semipiano $x > 0, y = 0$ e si diriga verso nord. Quando si trova molto vicino al polo nord risulta $\theta \rightarrow 0^+$, $\phi = 0$, mentre quando si trova esattamente al polo nord $\theta = 0$ e ϕ è indeterminato, dopodiché proseguendo oltre si ha di nuovo $\theta > 0$, ma $\phi = \pi$. Come si vede la variabile ϕ subisce una discontinuità. Nel caso in cui il punto non transiti esattamente per il polo nord, ma ci passi *molto vicino*, non vi saranno discontinuità ma, in corrispondenza del passaggio vicino al polo, a piccoli spostamenti del punto materiale corrisponderanno grandi variazioni della variabile ϕ , la quale cambierà bruscamente il suo valore da un certo $\phi \cong \phi_0$ ad un successivo $\phi \cong \phi_0 + \pi$, con conseguenti problemi numerici per il codice di calcolo che implementi tale rappresentazione.

I quaternioni sono utilizzati in computer grafica, visione computerizzata, teoria dei controlli, robotica, signal processing, controllo di assetto, fisica, bioinformatica, dinamica molecolare, simulazioni computerizzate, meccanica orbitale, teoria dei numeri. I sistemi di controllo di assetto dei velivoli sono ovviamente comunemente implementati in termini di quaternioni.

... work in progress

$$w = a + bi + cj + dk \quad a, b, c, d \text{ numeri reali, } i, j, k \text{ simboli letterali} \quad 1.11$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad 1.12$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \quad 1.13$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \quad \text{prodotto non commutativo} \quad 1.14$$

1.3.2 Una luce moderna (ma in realtà antica): i multivectors

... work in progress

Capitolo 2

Richiami di algebra lineare

da completare, e aggiungere brevi richiami sulle dimostrazioni

<i>A</i> matrice $n \times n$ non singolare	<i>A</i> matrice $n \times n$ singolare
<i>A</i> è invertibile	<i>A</i> non è invertibile
Le colonne sono indipendenti	Le colonne sono dipendenti
Le righe sono indipendenti	Le righe sono dipendenti
$\det(A) \neq 0$	$\det(A) = 0$
$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$	$Ax = 0$ ha infinite soluzioni
$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$	$Ax = b$ ammette nessuna o infinite soluzioni
<i>A</i> ha n elementi pivot diversi da 0	<i>A</i> ha r elementi pivot, con $r < n$
$\text{rank}(A) = n$	$\text{rank}(A) = r < n$
La forma ridotta di Echelon è $R = I$	<i>R</i> ha almeno una riga nulla
Lo spazio generato dalle colonne è $\mathbb{R}^n$	Lo spazio generato dalle colonne ha dimensione $r < n$
Lo spazio generato dalle righe è $\mathbb{R}^n$	Lo spazio generato dalle righe ha dimensione $r < n$
Tutti gli autovalori sono non nulli, $\lambda_i \neq 0$	Almeno un autovalore è nullo
<i>A</i> reale simmetrica ha autovalori reali, e in generale <i>A</i> Hermitiana ha autovalori reali. Infatti $Au = \lambda u \Rightarrow A^*u^* = \lambda^*u^* \Rightarrow (\lambda I - A)u = 0, (\lambda^*I - A^*)u^* = 0 \Rightarrow u^H(\lambda I - A)u = 0, u^T(\lambda^*I - A^*)u^* = 0$. Trasponendo l'ultima si ha $u^H(\lambda^*I - A^H)u = 0$, e sottraendo questa alla prima: $(\lambda - \lambda^*)u^H u - u^H(A - A^H)u = 0$. Dunque $\lambda - \lambda^* = \frac{u^H(A - A^H)u}{u^H u}$, da cui segue che se <i>A</i> è reale e simmetrica oppure complessa Hermitiana allora $\lambda = \lambda^*$, ovvero λ è reale. La somma degli autovalori è uguale alla somma degli elementi diagonali: $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = a_{11} + \dots + a_{nn} = \text{tr}(A)$ Infatti due matrici simili hanno la stessa traccia e gli stessi autovalori, ed <i>A</i> è simile alla sua forma di Jordan, che è una matrice triangolare superiore avente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sulla diagonale principale. Gli autovalori di una matrice triangolare coincidono con i suoi elementi diagonali.	
$B = A^T A$ è una matrice simmetrica definita positiva	$B = A^T A$ è simmetrica, semidefinita positiva
Infatti $x^T Bx = x^T A^T A x = (Ax)^T Ax = Ax ^2 \geq 0$, ed essendo le colonne di <i>A</i> indipendenti si ha $x \neq 0 \Rightarrow Ax \neq 0 \Rightarrow x^T Bx > 0$	
<i>A</i> ha n valori singolari, positivi	<i>A</i> ha $r < n$ valori singolari, positivi

Aggiungere tabella strang 299 su parallelismo tra matrici reali e complesse

Aggiungere fattorizzazioni di matrici: qualsiasi, quadrate, quadrate invertibili, quadrate simmetriche, ... Strang 487

Aggiungere glossario con definizioni tecniche Strang 489

Capitolo 3

Misure ed errori

Sia data una determinata grandezza, il cui valore vero sia x_v e della quale sia stato determinato un valore approssimato x . Esprimendo l'errore assoluto Δx come aliquota e_x del valore vero, si ha

$$x = x_v + \Delta x = x_v + e_x x_v = (1 + e_x) x_v$$

$$e_x = \frac{x - x_v}{x_v} = \frac{\Delta x}{x_v} = \frac{x}{x_v} - 1 \quad \text{errore relativo} \quad 3.1$$

$$e_{x\%} = 100 e_x = 100 \left(\frac{x}{x_v} - 1 \right) \quad \text{errore relativo percentuale} \quad 3.2$$

Ragionando in termini di rappresentazione decimale, l'errore tipico che si può commettere per effetto dell'arrotondamento del risultato di ogni singola operazione algebrica, facendo calcoli numerici con 1, 2, 3, 4 o 5 cifre significative, è esemplificato dalla seguente tabella

cifre significative	caso peggiore			caso migliore		
	x_v	x	$e_{x\%}$	x_v	x	$e_{x\%}$
1	1	2	100	8	9	~ 10
2	10	11	10	98	99	1
3	100	101	1	998	999	0.1
4	1000	1001	0.1	9998	9999	0.01
5	10000	10001	0.01	99998	99999	0.001

Nell'ipotesi quindi che i dati iniziali di un determinato problema siano forniti con *elevata* precisione (cosa in genere implicitamente assunta per i problemi assegnati agli esami), facendo i conti portandosi dietro 5 cifre significative, per poi arrotondare alla fine in modo da ottenere numeri finali con 4 cifre, garantisce risultati numerici corretti entro l' 1 per mille.

... work in progress

NR 1.4 p31

forse meglio NR 3ed 1.1 p8 cut-paste-translate

3.1 propagazione degli errori nelle misure indirette

... work in progress

Si considerino k grandezze $m_1, \dots, m_k$. Siano $dm_1, \dots, dm_k$ i corrispondenti errori assoluti, derivanti dai processi con cui tali grandezze sono state determinate o misurate. Sia m_i una grandezza misurata indirettamente, ottenuta dalle suddette grandezze mediante una funzione f

$$m_i = f(m_1, m_2, m_3, \dots, m_k) \quad m_i \text{ grandezza misurata indirettamente} \quad 3.3$$

Si ha

$$dm_i = \frac{\partial f}{\partial m_1} dm_1 + \frac{\partial f}{\partial m_2} dm_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial m_k} dm_k \quad \text{errore assoluto} \quad 3.4$$

$$e_{m_i} = \frac{dm_i}{m_i} \quad \text{errore relativo} \quad 3.5$$

$$e_{m_i\%} = 100 \frac{dm_i}{m_i} \quad \text{errore relativo percentuale} \quad 3.6$$

Esempi

- Elevazione a potenza

$$m_i = f(m) = m^n \quad \text{caso frequente } n = 2$$

$$dm_i = nm^{n-1}dm$$

$$\frac{dm_i}{m_i} = n \frac{dm}{m} \quad \text{l'errore relativo risulta moltiplicato per l'esponente, nel caso } n = 2 \text{ raddoppia}$$

- Esponenziale

$$m_i = f(m) = e^m$$

$$dm_i = e^m dm$$

$$\frac{dm_i}{m_i} = dm = m \frac{dm}{m} \quad \text{l'errore relativo risulta amplificato di un fattore pari alla grandezza direttamente misurata}$$

- Somma

$$v = f(v_1, v_2) = v_1 + v_2$$

$$dv = dv_1 + dv_2$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dv_1 + dv_2}{v_1 + v_2} = \frac{v_1}{v_1 + v_2} \frac{dv_1}{v_1} + \frac{v_2}{v_1 + v_2} \frac{dv_2}{v_2} \quad \text{gli errori relativi } pesati \text{ si sommano, in modulo e segno}$$

- Prodotto

$$v = f(R, i) = Ri$$

$$dv = idR + Rdi$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{idR + Rdi}{Ri} = \frac{dR}{R} + \frac{di}{i} \quad \text{gli errori relativi si sommano, in modulo e segno}$$

- Potenza assorbita

$$p = f(R, i) = Ri^2$$

$$dp = i^2 dR + 2Ridi$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{i^2 dR + 2Ridi}{Ri^2} = \frac{dR}{R} + 2 \frac{di}{i}$$

3.2 cifre significative cookbook

IMPORTANTE: si veda la dispensa di 2 pagine che al momento è disponibile separatamente sul sito www.elettrotecnica.unina.it

3.3 Cancellazione numerica: equazione quadratica

Sembrerà strano, ma ancora molti non sanno qual è il modo corretto di risolvere numericamente l'equazione quadratica (e a maggior ragione la cubica e la quartica). Infatti se $b^2 \gg 4ac$ con la tipica espressione risolutiva si può avere un errore di arrotondamento inaccettabile nel calcolo di una delle due radici. Richiamiamo innanzitutto il metodo risolutivo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \mp \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \mp \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mediante razionalizzazione è possibile trovare espressioni alternative per le due radici

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{1}{2a} \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad c \neq 0 \text{ se } b > 0$$

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{1}{2a} \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad c \neq 0 \text{ se } b < 0$$

Dunque oltre alle note espressioni $x_{\mp} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, abbiamo a disposizione quelle alternative $x_{\mp} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$, le quali soffrono anch'esse del problema della cancellazione numerica, ma in maniera duale rispetto alle prime. Le nuove espressioni, quando usate nel modo errato, cioè quando c'è cancellazione numerica, cadono anche in difetto se $c = 0$. Infatti $b > 0$ e $c = 0 \Rightarrow x_- = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{0}{0}$, mentre $b < 0$ e $c = 0 \Rightarrow x_+ = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{0}{0}$. Operando come segue si superano le varie difficoltà

$$\begin{cases} b \geq 0 & \Rightarrow & x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & x_+ = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} & \Rightarrow & q = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} & x_- = \frac{q}{a} & x_+ = \frac{c}{q} \\ b < 0 & \Rightarrow & x_- = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} & x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \Rightarrow & q = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} & x_- = \frac{c}{q} & x_+ = \frac{q}{a} \end{cases}$$

$$\text{sign}_m(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ m & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{sign}_1(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$q = \frac{-b - \text{sign}_1(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-\text{sign}_1(b)|b| - \text{sign}_1(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = -\text{sign}_1(b) \frac{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

In definitiva si ha

$$\begin{cases} q = -\text{sign}_1(b) \frac{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = -\text{sign}_1(b) \left(\left| \frac{b}{2} \right| + \sqrt{\left(\frac{b}{2} \right)^2 - ac} \right) \\ x_1 = \frac{q}{a} \quad x_2 = \frac{c}{q} \end{cases} \quad 3.7$$

L'unico problema che persiste corrisponde al caso $a = 0$, ma in tale situazione l'equazione non è più di secondo grado. Notiamo che da questa espressione e dai segni di a , b e c si può dedurre in maniera un po' più diretta se x_1 e x_2 sono a parte reale negativa. Ad esempio se $b > 0$ allora q è a parte reale negativa, e se anche $a > 0$ e $c > 0$ allora anche x_1 e x_2 saranno a parte reale negativa. In particolare quando le radici sono reali, dato il segno di b , i segni di x_1 e di x_2 sono rispettivamente determinati dai segni di a e di c .

Nel caso in cui i coefficienti a, b, c fossero complessi il problema persiste, e viene risolto estendendo i ragionamenti qui presentati: si veda ad esempio il testo *Numerical Recipes* di Press ad altri.

Capitolo 4

Integrazioni al libro Circuiti

Per poter essere agevolmente comprese, le note riportate nel presente capitolo vanno lette unitamente ai contenuti riportati alle corrispondenti pagine del testo del corso: de Magistris, Miano, Circuiti, Springer, edizione 2007. Le edizioni successive di tale testo non cambiano molto rispetto alla edizione a cui si fa qui riferimento.

4.0.1 pag 23 Limiti del modello circuitale

La classica relazione che esprime il campo elettrico alla posizione $\mathbf{r}$, dovuto ad una carica sorgente (puntiforme) q_s posta in $\mathbf{r}_s$ è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \quad (|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)| = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2})$$

a cui corrisponde l'espressione della forza agente su una carica (puntiforme) q posta in $\mathbf{r}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{qq_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \quad (|\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)| = \frac{qq_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2})$$

dove le formule tra parentesi evidenziano la dipendenza secondo l'inverso del quadrato della distanza. Espressioni perfettamente analoghe valgono per l'attrazione gravitazionale tra masse (puntiformi).

Queste espressioni sono approssimate, ovvero valgono quando si possono trascurare i fenomeni di propagazione. Infatti esse sono relazioni istantanee a distanza (e il tempo non compare, non ha un ruolo). Lo stesso Newton asseriva che la sua teoria, nonostante avesse avuto grande successo, appariva in principio errata perchè non gli sembrava convincente il concetto di azione istantanea a distanza.

... la velocità finita di propagazione delle interazioni costituisce la motivazione alla base della irradiazione di energia associata alle onde gravitazionali [Taylor-Wheeler, Spacetime physics, 2nd edition, 1992, pag. 290], così come alle onde elettromagnetiche

Per curiosità si riporta di seguito l'espressione non approssimata dei campi, che può ricavarsi facendo ricorso ai potenziali di Liénard-Wiechert (per chiarimenti e approfondimenti si veda [Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd edition, 1999, chap. 14])

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t_r)|^2} + \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t_r)|} \right]_{t_r}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{n}(t_r)}{c} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Queste espressioni sono concettualmente meno complicate di quanto sembra. Il primo termine è inversamente proporzionale al 'quadrato della distanza' ed è sostanzialmente l'espressione classica (meglio specificata nei dettagli). Il secondo termine è invece inversamente proporzionale 'alla distanza' (senza il quadrato) ed è il termine propagativo.

.....

Sempre come nota di curiosità, si fa notare che queste espressioni dei campi contengono ancora un livello di approssimazione, perchè non tengono in conto la curvatura dello spazio, che ad esempio fa curvare 'i raggi di luce'.

Le equazioni di Maxwell correttamente tengono conto del tempo finito di propagazione....

ipotesi: propagazione in un mezzo privo di cariche e correnti ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$) e con ϵ e μ costanti

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \frac{\rho}{\epsilon} - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla (\mu \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$c = v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \text{velocità di fase o velocità della luce nel mezzo di costanti } \epsilon, \mu$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E} \quad \text{equazione delle onde 3D per il campo elettrico nell'ipotesi } \epsilon \text{ e } \mu \text{ costanti in } t \text{ e in } x, y, z$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \quad \text{caso 1D}$$

La soluzione del caso 1D si esprime come

$$E_x(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad f \text{ e } g \text{ funzioni arbitrarie}$$

o equivalentemente come

$$E_x(x, t) = F(\omega t - kx) + G(\omega t + kx) \quad F \text{ e } G \text{ funzioni arbitrarie } (\omega t \text{ e } kx \text{ adimensionali})$$

dove

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\omega = \text{pulsazione} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad k = \text{numero d'onda} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$T = \text{periodo} = \text{tempo caratteristico delle variazioni temporali dei segnali} \quad \lambda = \text{lunghezza d'onda corrispondente.}$$

Ora si consideri

$$\ell_c = \text{lunghezza caratteristica del circuito (dimensione massima)}$$

$$t_r = \frac{\ell_c}{c} = \text{tempo di ritardo introdotto dalla velocità finita di propagazione.}$$

Allora gli effetti dovuti alla propagazione sono trascurabili se il ritardo t_r , dovuto alla velocità finita di propagazione, è molto piccolo confrontato con T . Infatti in tal caso i segnali si propagano molto rapidamente, nel senso che la variazione di una generica grandezza in un punto qualsiasi del circuito raggiunge tutti gli altri componenti del circuito molto più rapidamente rispetto ai tempi caratteristici di variazione della stessa grandezza. Le variazioni vengono sentite ovunque in maniera quasi istantanea. In formule

$$t_r \ll T \Rightarrow \frac{\ell_c}{c} \ll \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \ell_c \ll \lambda$$

... work in progress ...

... a simple way to see the role of the electrical length concept is as reported at pag 109 of [Paul, Inductance, loop and partial, 2010]:

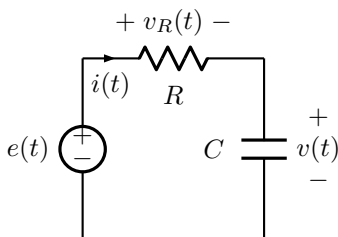
$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(t - \frac{R}{v})}{R} d\tau \\ \mathbf{A}(\omega) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\omega) e^{-i\beta R}}{R} d\tau \quad \beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon f}} \\ e^{-i\beta R} &= 1 - i2\pi \frac{R}{\lambda} - \frac{(2\pi)^2}{2} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 + i \frac{(2\pi)^3}{6} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^3 + \dots \\ \mathbf{B} &= \nabla \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = \frac{\mu \mathbf{J} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon} \end{aligned}$$

4.0.2 pag 74 espressione della soluzione in termini dei generatori e delle variabili di stato

Proprietà: In un circuito dinamico lineare una qualunque grandezza può sempre essere espressa come combinazione lineare delle grandezze di stato e dei generatori indipendenti.

Infatti, immaginando di conoscere la tensione $v_k(t)$ sul generico condensatore e la corrente $i_h(t)$ nel generico induttore, possiamo pensare di sostituire ai condensatori dei generatori indipendenti di tensione di valore $e_k(t) = v_k(t)$ e agli induttori dei generatori indipendenti di corrente di valore $j_k(t) = i_k(t)$; la tesi segue immediatamente dalla proprietà di sovrapposizione degli effetti.

4.0.3 pag 82 esempio di regime sinusoidale: circuito serie e-R-C con generatore sinusoidale



$$\begin{aligned} e(t) &= v_R + v = Ri + v = RC \frac{dv}{dt} + v \\ v(t_0) &= V_0 \end{aligned}$$

Si tratta di un circuito dissipativo, essendo $RC\lambda + 1 = 0$ e $\lambda = -\frac{1}{\tau} < 0$

$$e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \gamma)$$

$$\text{Ipotizziamo } v_p(t) = \sqrt{2}V_p \cos(\omega t + \alpha) \quad \frac{dv_p}{dt} = -\sqrt{2}V_p\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$-\sqrt{2}\omega RC V_p \sin(\omega t + \alpha) + \sqrt{2}V_p \cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \gamma)$$

$$-\omega\tau V_p \sin(\omega t + \alpha) + V_p \cos(\omega t + \alpha) = E \cos(\omega t + \alpha + \gamma - \alpha)$$

$$\begin{cases} \omega t_1 + \alpha = 0 & \Rightarrow & V_p = E \cos(\gamma - \alpha) \\ \omega t_2 + \alpha = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow & -\omega\tau V_p = E \cos(\frac{\pi}{2} + \gamma - \alpha) = -E \sin(\gamma - \alpha) \quad \omega\tau V_p = E \sin(\gamma - \alpha) \end{cases}$$

$$\tan(\gamma - \alpha) = \omega\tau \quad \gamma - \alpha = \arctan(\omega\tau) \quad \alpha = \gamma - \arctan(\omega\tau)$$

$$V_p^2 + (\omega\tau V_p)^2 = E^2 \quad V_p = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$v_p(t) = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos[\omega t + \gamma - \arctan(\omega\tau)]$$

4.0.4 pag 117 Indipendenza delle equazioni alle correnti

Altro punto di vista [Barozzi-Gasparini p197].

- *Equazioni indipendenti ai nodi*

Le $n - 1$ correnti che interessano i lati dell'albero sono implicate in altrettante equazioni indipendenti ai nodi, come si riconosce via via che si scrivono le equazioni passando da un nodo all'altro lungo un albero (conviene ragionare partendo dai nodi più periferici dell'albero, si vedano gli esempi riportati nelle slides manoscritte mostrate a lezione). Ciascuna di queste contiene infatti una corrente in esclusiva rispetto alle precedenti. L'equazione per il restante nodo n -mo risulta una combinazione lineare di tutte le altre: la somma membro a membro delle equazioni ai nodi fornisce infatti la identità $0 = 0$.

- *Equazioni indipendenti ai tagli (o 'macronodi')*

Un insieme completo di equazioni indipendenti per le correnti può ottenersi associando a ciascun lato d'albero un 'taglio' completo della rete: una superficie (chiusa) che, sezionando in particolare il lato in questione, lascia da una parte tutti i nodi connessi ad un estremo del lato tramite l'albero e dall'altra tutti gli altri (si vedano gli esempi riportati nelle slides manoscritte mostrate a lezione). Per i lati tagliati vale senz'altro la legge delle correnti: è immediato riconoscere che le $n - 1$ equazioni che così si possono scrivere sono tra di loro indipendenti (ciascuna contiene un lato d'albero in esclusiva) e che ogni altra equazione di nodo o di taglio è combinazione lineare delle precedenti.

4.0.5 pag 117 Indipendenza delle equazioni topologiche per circuiti non connessi

I circuiti non connessi sono molto importanti nelle applicazioni. Si consideri che la presenza di doppi bipoli in un circuito (ad esempio la presenza di un trasformatore) lo rende non connesso. È quindi importante individuare le equazioni topologiche indipendenti anche nei casi di assenza della proprietà di connessione.

Si consideri un circuito $\mathcal{C}$ con grafo connesso o non connesso, costituito di k parti connesse (per $k = 1$ il grafo è connesso), avente n nodi ed ℓ lati. La j -ma ($j = 1, \dots, k$) parte connessa comprenda n_j nodi ed ℓ_j lati (risulta quindi $n = n_1 + \dots + n_k$ ed $\ell = \ell_1 + \dots + \ell_k$). In base a quanto visto, per la j -ma parte connessa, $n_j - 1$ equazioni di Kirchhoff per le correnti, scelte in maniera arbitraria tra le possibili n_j , sono linearmente indipendenti. Analogamente, $\ell_j - (n_j - 1)$ equazioni di Kirchhoff per le tensioni, relative ad un insieme di maglie fondamentali della j -ma parte connessa, sono linearmente indipendenti.

Allora, essendo $\sum_{j=1}^k (n_j - 1) = n - k$ e $\sum_{j=1}^k [\ell_j - (n_j - 1)] = \ell - (n - k)$ si ha, per il circuito $\mathcal{C}$

- $n - k$ equazioni di Kirchhoff per le correnti sono linearmente indipendenti. Tali $n - k$ equazioni possono essere scelte, nella j -ma parte connessa, in maniera arbitraria in numero pari a $n_j - 1$ tra le possibili n_j ;
- $\ell - (n - k)$ equazioni di Kirchhoff per le tensioni sono linearmente indipendenti. work in progress

4.0.6 pag 125 Equazioni circuitali in forma canonica, $Lx = d$

Le 2ℓ equazioni nelle 2ℓ incognite (nel caso dell'esempio considerato è $\ell = 5$), nel caso lineare possono essere messe nella *forma canonica* $Lx = d$, ovvero esplicitando (nei posti lasciati vuoti si sottintende esserci 0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -R_1 & & & & & 1 & & & & \\ & -R_2 & & & & & 1 & & & \\ & & -R_3 & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ j(t) \\ -e(t) \end{bmatrix}$$

Riconosciamo nel primo blocco in alto a sinistra la matrice di incidenza ridotta A e nel secondo blocco la matrice delle maglie fondamentali B ovvero, in notazione Matlab-like, $A=L(1:2,1:5)$, $B=L(3:5,6:10)$, e in generale $A=L(1:n-1,1:\ell)$, $B=L(n:\ell,\ell+1:2\ell)$.

Indichiamo con $M = L^{-1} = [m_1 m_2 \dots m_{2\ell-1} m_{2\ell}]$, essendo m_k le colonne di M . Moltiplicando ambo i membri dell'equazione $Lx = d$ a sinistra per M si ottiene la soluzione $x = L^{-1}d = Md$. Ricordando che il prodotto Md si può pensare anche come prodotto colonne per righe (oltre che come prodotto righe per colonne) e notando che solo gli ultimi due elementi del vettore d sono non nulli, si ha

$$x(t) = L^{-1}d(t) = Md(t) = m_{2\ell-1}j(t) - m_{2\ell}e(t)$$

Questo risultato esprime la proprietà di sovrapposizione degli effetti delle reti lineari, nel caso attuale in cui sono presenti i due soli generatori $j(t)$ e $-e(t)$.

Nel caso in cui i generatori sono costanti (ma, come vedremo, la stessa cosa si estende al regime sinusoidale utilizzando il metodo simbolico, ed anche al caso generale mediante una interpretazione più estesa del metodo simbolico stesso (serie e trasformata di Fourier)), la soluzione $x = L^{-1}d$, in ambiente Matlab, si calcola mediante l'unica istruzione $x=L \backslash d$. È anche possibile usare l'istruzione $x=inv(L)*d$, la quale però implica il calcolo esplicito della matrice inversa L^{-1} , risultando quindi meno efficiente e meno accurata, specialmente per sistemi di grande dimensione.

4.0.7 pag 128 Dualità nelle reti resistive

La relazione costitutiva di un resistore controllato in tensione è esplicitabile nella forma $i = \pm g(v)$, mentre per un resistore controllato in corrente sarà $v = \pm r(i)$ (nel seguito considereremo la convenzione dell'utilizzatore e quindi prenderemo il segno +). Il seguente prospetto mostra il concetto di dualità per le reti resistive.

(convenzione utilizzatore)	Incognite	$n - 1$ equazioni ai nodi	$l - (n - 1)$ equazioni alle maglie
Rete alimentata da soli generatori di <i>corrente</i> $j_h(t)$. Resistori controllati in tensione $i_k = g_k(v_k)$	$v_1, \dots, v_l$	$\sum_k \pm g_k(v_k) = \sum_h \mp j_h$	$\sum_p \pm v_p = 0$
Rete alimentata da soli generatori di <i>tensione</i> $e_q(t)$. Resistori controllati in corrente $v_p = r_p(i_p)$	$i_1, \dots, i_l$	$\sum_k \pm i_k = 0$	$\sum_p \pm r_p(i_p) = \sum_q \mp e_q$

Nel caso delle reti lineari si ha

(convenzione utilizzatore)	Incognite	$n - 1$ equazioni ai nodi	$l - (n - 1)$ equazioni alle maglie
Rete alimentata da soli generatori di <i>corrente</i> $j_h(t)$	$v_1, \dots, v_l$	$\sum_k \pm G_k v_k = \sum_h \mp j_h$	$\sum_p \pm v_p = 0$
Rete alimentata da soli generatori di <i>tensione</i> $e_q(t)$	$i_1, \dots, i_l$	$\sum_k \pm i_k = 0$	$\sum_p \pm R_p i_p = \sum_q \mp e_q$

4.0.8 Metodi dei potenziali nodali e delle correnti di maglia

Nel caso delle reti alimentate da soli generatori di corrente, introducendo le nuove incognite potenziali nodali u_j , risulta che le LKT sono automaticamente soddisfatte (vedi libro).

Per le reti alimentate da soli generatori di tensione, introducendo le nuove incognite correnti di maglia k_j , queste rispettano automaticamente le LKC, poiché ciascuna di esse entra ed esce dallo stesso nodo.

	Incognite	$n - 1$ equazioni ai nodi	$l - (n - 1)$ equazioni alle maglie
Rete alimentata da soli generatori di corrente $j_h(t)$. Resistori controllati in tensione $i_k = g_k(v_k)$	$u_1, \dots, u_{n-1}$	$\sum_k \pm g_k(u_{r_k} - u_{s_k}) = \sum_h \mp j_h$ Metodo dei potenziali nodali	automaticamente soddisfatte
Rete alimentata da soli generatori di tensione $e_q(t)$. Resistori controllati in corrente $v_p = r_p(i_p)$	$k_1, \dots, k_{l-(n-1)}$	automaticamente soddisfatte Metodo delle correnti di maglia	$\sum_p \pm r_p(\sum_m \pm k_{p_m}) = \sum_q \mp e_q$

Nel caso delle reti lineari si ha

	Incognite	$n - 1$ equazioni ai nodi	$l - (n - 1)$ equazioni alle maglie
Rete alimentata da soli generatori di corrente $j_h(t)$.	$u_1, \dots, u_{n-1}$	$\sum_k G_k(u_{r_k} - u_{s_k}) = \sum_h \mp j_h$ Metodo dei potenziali nodali	automaticamente soddisfatte
Rete alimentata da soli generatori di tensione $e_q(t)$.	$k_1, \dots, k_{l-(n-1)}$	automaticamente soddisfatte Metodo delle correnti di maglia	$\sum_p R_p \sum_m \pm k_{p_m} = \sum_q \mp e_q$

4.0.9 pag 133 Equazioni di tableau

Metodo dei potenziali nodali (per reti resistive lineari alimentata da soli generatori di corrente $j_k(t)$)

$$\left\{ \begin{array}{llll} \mathbf{A}\mathbf{i} = 0 & \text{equazioni} & \text{incognite} & \\ \mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} = 0 & n - 1 & \ell & \\ v_k - R_k i_k = 0 & k = 1, \dots, \ell - b & \ell - b & \ell + n - 1 \\ i_k = j_k & k = \ell - b + 1, \dots, \ell & b & \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{già contate} \\ \text{già contate} \\ \text{totale } 2\ell + n - 1 \text{ equazioni} \\ \text{ed altrettante incognite} \end{array}$$

Sostituendo le equazioni $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$ nelle relazioni dei resistori si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{llll} \mathbf{A}\mathbf{i} = 0 & \text{equazioni} & \text{incognite} & \\ i_k = \frac{u_{p_k} - u_{q_k}}{R_k} & k = 1, \dots, \ell - b & \ell - b & \ell \\ i_k = j_k & k = \ell - b + 1, \dots, \ell & b & \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n - 1 \\ n - 1 \text{ aggiuntive} \\ \text{già contate} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{totale } \ell + n - 1 \text{ equazioni} \\ \text{ed altrettante incognite} \end{array}$$

Sostituendo infine le equazioni $i_k = \frac{u_{p_k} - u_{q_k}}{R_k}$ e $i_k = j_k$ nelle equazioni $\mathbf{A}\mathbf{i} = 0$ si ottengono $\boxed{n - 1}$ equazioni negli $n - 1$ potenziali nodali incogniti u_j .

Metodo delle correnti di maglia (per reti resistive lineari alimentate da soli generatori di tensione $e_k(t)$)

$$\left\{ \begin{array}{llll} B\mathbf{v} = 0 & \text{equazioni} & \text{incognite} & \\ \mathbf{i} - B^T \mathbf{k} = 0 & \ell - (n - 1) & \ell & \text{totale } 3\ell - (n - 1) \text{ equa-} \\ v_h - R_h i_h = 0 & \ell & \ell + \ell - (n - 1) & \text{zioni ed altrettante inco-} \\ v_h = e_h & h = 1, \dots, \ell - b & \ell - b & \text{gnite} \\ & h = \ell - b + 1, \dots, \ell & b & \text{già contate} \end{array} \right.$$

Sostituendo le equazioni $\mathbf{i} = B^T \mathbf{k}$ nelle relazioni dei resistori si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{llll} B\mathbf{v} = 0 & \text{equazioni} & \text{incognite} & \\ v_h = R_h \sum_h (\pm) k_{p_h} & h = 1, \dots, \ell - b & \ell - b & \text{totale } 2\ell - (n - 1) \text{ equa-} \\ v_h = e_h & h = \ell - b + 1, \dots, \ell & b & \text{zioni ed altrettante inco-} \\ & & & \text{gnite} \end{array} \right.$$

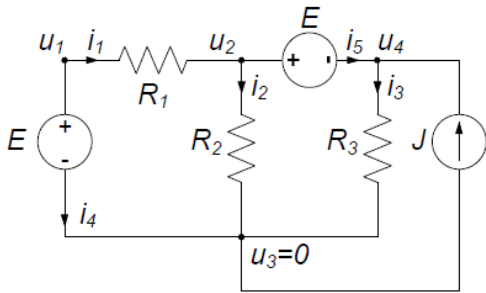
Sostituendo infine le equazioni $v_h = R_h \sum_h (\pm) k_{p_h}$ e $v_h = e_h$ nelle equazioni $B\mathbf{v} = 0$ si ottengono $\boxed{\ell - (n - 1)}$ equazioni nelle $\ell - (n - 1)$ correnti di maglia incognite k_j .

4.0.10 pag 139 Trattamento dei generatori di tensione nel metodo dei potenziali di nodo**Metodo dei potenziali nodali modificato**

Nell'applicare il metodo dei potenziali di nodo nel caso in cui siano presenti anche dei generatori di tensione nasce un problema, perchè nella scrittura delle LKC ai nodi le correnti circolanti nei generatori di tensione costituiscono altrettante ulteriori incognite. In realtà il metodo si può applicare alla stessa maniera, immaginando che al posto di ciascun generatore di tensione ci sia invece un generatore di corrente. Le $n - 1$ equazioni diventeranno $\sum_k G_k (u_{r_k} - u_{s_k}) = \sum_h \mp j_h + \sum_p \mp i_p$, dove le i_p sono ulteriori incognite, in quantità pari al numero, b , di generatori di tensione presenti. Le ulteriori b equazioni che serviranno sono specificate dai valori dei generatori di tensione stessi. In definitiva avremo $\boxed{n - 1 + b}$ equazioni del tipo indicato di seguito nelle $n - 1 + b$ incognite $u_1, \dots, u_{n-1}, i_{p_1}, \dots, i_{p_b}$

$$\sum_k G_k (u_{r_k} - u_{s_k}) + \sum_p \pm i_p = \sum_h \mp j_h \quad n - 1 \text{ equazioni} \quad 4.1$$

$$u_r - u_s = e_{rs} \quad b \text{ equazioni} \quad 4.2$$



Il verso scelto per i_4 e i_5 serve per far sì che la matrice risolvente venga simmetrica

Si può scrivere direttamente il sistema esattamente come prima per ispezione, considerando la matrice delle conduttanze di nodo. Nel caso dell'esempio in figura si ha

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_4 \\ -i_5 \\ i_5 + J \end{bmatrix}$$

Aggiungendo a questo punto le b equazioni che specificano le tensioni impresse dai generatori di tensione

$$\left\{ \begin{array}{llll} G_1 u_1 & -G_1 u_2 & & +i_4 = 0 \\ -G_1 u_1 & +(G_1 + G_2) u_2 & & +i_5 = 0 \\ & & +G_3 u_4 & -i_5 = J \\ u_1 & & & = E \\ & u_2 & -u_4 & = E \end{array} \right.$$

Nel sistema completo la matrice è quindi di ordine $n - 1 + b$; ciascuna delle b colonne aggiuntive ha un 1 ed un -1 nei posti corrispondenti ai nodi in cui un generatore di tensione incide (oppure soltanto un 1 o soltanto un -1 nel caso in cui uno dei 2 nodi in cui il generatore di tensione incide sia il nodo posto a potenziale nullo), e le b righe aggiuntive si costruiscono per simmetria

$$\begin{array}{l} \text{nodo 1} \rightarrow \\ \text{nodo 2} \rightarrow \\ \text{nodo 4} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J \\ E \\ E \end{bmatrix}$$

Metodo dei potenziali nodali ridotto

Esiste un ulteriore metodo per l'analisi mediante potenziali nodali nel caso in cui siano presenti anche dei generatori (indipendenti) di tensione. Con tale metodo si riduce ulteriormente il numero di equazioni necessarie, che diventa $n - 1 - b$, con la conseguenza che le correnti nei generatori di tensione non vengono direttamente determinate. Il metodo si basa sulla seguente circostanza. Se un generatore di tensione e_j è connesso a due nodi p e q , risulta $e_j = u_{p_j} - u_{q_j}$. Di conseguenza, dato u_{p_j} , u_{q_j} risulta determinato, ovvero u_{p_j} ed u_{q_j} non sono indipendenti. Ciascun generatore di tensione riduce di una unità il numero di potenziali nodali indipendenti, che passano da $n - 1$ a $n - 1 - b$.

Invece di scrivere le LKC ai nodi in termini dei potenziali nodali, andranno scritte le LKC a dei particolari macronodi (insiemi di taglio). Ciascuno di tali macronodi sarà tale da comprendere i due soli nodi ai quali è connesso il generico generatore di tensione (ovvero sarà tale da racchiudere al suo interno il solo generatore di tensione). Eventuali nodi a cui non fosse connesso alcun generatore di tensione andrà invece trattato come fatto precedentemente. Le ulteriori b equazioni che specificano i valori dei generatori di tensione ($e_j = u_{p_j} - u_{q_j}$) andranno ovviamente comunque considerate, nel senso che le si potrà convenientemente e banalmente sostituire nelle LKC stesse. Con riferimento allo stesso esempio di cui sopra risulta $n - 1 - b = 1$, quindi avremo una sola equazione, quella al macronodo comprendente i nodi 2 e 4

$$\frac{u_2 - u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_4}{R_3} = J$$

che, sostituendo le informazioni relative ai generatori di tensione $u_1 = E$ e $u_2 - u_4 = E$, diventa

$$\frac{u_2 - E}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 - E}{R_3} = J$$

che risolta fornisce

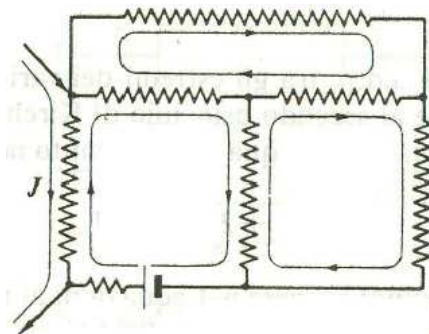
$$u_2 = \frac{J + E(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3})}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

4.0.11 pag 143 Trattamento dei generatori di corrente nel metodo delle correnti di maglia

Metodo delle correnti di maglia ridotto

Come visto, per reti lineari resistive alimentate da soli generatori di tensione, il metodo delle correnti di maglia permette di ottenere la soluzione mediante un sistema di $l - (n - 1)$ equazioni del tipo $\sum_p R_p \sum_m \pm k_{pm} = \sum_q \mp e_q$, ove le incognite sono le correnti di maglia $k_1, \dots, k_{l-(n-1)}$.

Nel caso in cui siano presenti anche dei generatori di corrente, diciamo in numero pari a b , si può assegnare a ciascuna delle relative correnti impresse $j_1, \dots, j_b$ un percorso arbitrario nella rete purché appoggiato ai nodi di ingresso e di uscita (come mostrato ad esempio in figura); esse andranno considerate come ulteriori correnti circolanti nella rete, di valore noto. Ne consegue che la corrente totale in un lato si esprime come somma algebrica di tutte le correnti, di maglia ($\sum k$) e impresse ($\sum j$), che interessano quel lato.



Le equazioni alle maglie saranno del tipo indicato di seguito, e saranno in numero pari a $\boxed{l - (n - 1) - b}$, perchè non vanno considerate quelle maglie, in numero pari a b , che si chiudono sui generatori di corrente

$$\sum_p R_p \left(\sum_m \pm k_{p_m} + \sum_t \pm j_{p_t} \right) = \sum_q \mp e_q \quad 4.3$$

Una volta risolto il sistema precedente e ottenute le incognite $k_1, \dots, k_{l-(n-1)-b}$, la corrente nel generico resistore R_p sarà data da

$$i_p = \sum_m \pm k_{p_m} + \sum_t \pm j_{p_t} \quad 4.4$$

Esempio: Soluzione della rete di figura 3.28 del libro assegnando alla corrente impressa J il percorso nella R_3

$$\begin{aligned} i_1 &= k_3 & i_2 &= k_3 - k_2 & i_3 &= k_2 + J \\ \begin{cases} v_1 + v_2 = E \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} & \begin{cases} R_1 i_1 + R_2 i_2 = E \\ R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 \end{cases} & \begin{cases} R_1 k_3 + R_2 (k_3 - k_2) = E \\ R_2 (k_3 - k_2) - R_3 (k_2 + J) = 0 \end{cases} & \begin{cases} -R_2 k_2 + (R_1 + R_2) k_3 = E \\ -(R_2 + R_3) k_2 + R_2 k_3 = R_3 J \end{cases} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{cases} -k_2 + 2k_3 = 10 \\ -3k_2 + k_3 = 2 \end{cases}$$

da cui

$$k_3 = \frac{28}{5} \quad k_2 = \frac{6}{5} \quad i_1 = \frac{28}{5} \quad i_2 = \frac{28}{5} - \frac{6}{5} = \frac{22}{5} \quad i_3 = \frac{6}{5} + 1 = \frac{11}{5}$$

Esempio: Soluzione della rete di figura 3.28 del libro assegnando alla corrente impressa J il percorso nella R_2

$$\begin{aligned} i_1 &= k_3 & i_2 &= k_3 - k_2 + J & i_3 &= k_2 \\ \begin{cases} R_1 k_3 + R_2 (k_3 - k_2 + J) = E \\ R_2 (k_3 - k_2 + J) - R_3 k_2 = 0 \end{cases} & \begin{cases} -R_2 k_2 + (R_1 + R_2) k_3 = E - R_2 J \\ -(R_2 + R_3) k_2 + R_2 k_3 = -R_2 J \end{cases} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{cases} -k_2 + 2k_3 = 10 - 1 \\ -3k_2 + k_3 = -1 \end{cases}$$

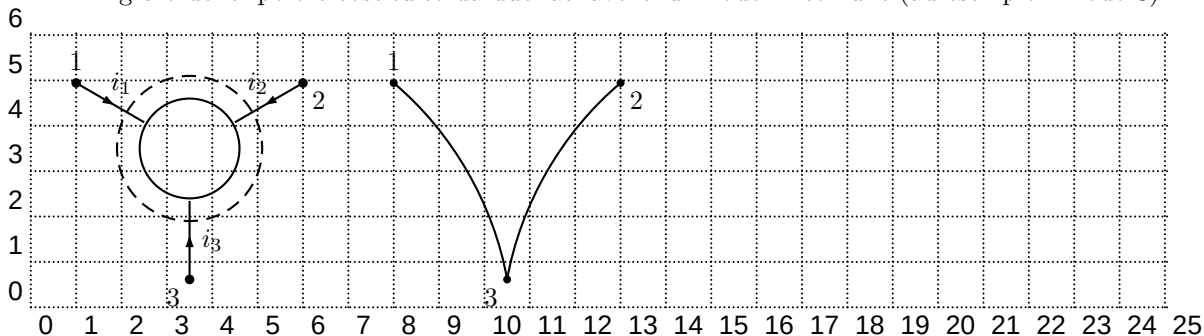
da cui

$$k_3 = \frac{28}{5} \quad k_2 = \frac{11}{5} \quad i_1 = \frac{28}{5} \quad i_2 = \frac{28}{5} - \frac{11}{5} + 1 = \frac{22}{5} \quad i_3 = \frac{11}{5}$$

4.0.12 pag 206 Trasformazione stella-triangolo

Si consideri un componente avente tre terminali, che chiameremo tripolo. Se i_1 , i_2 e i_3 sono le correnti, ad esempio entranti, nei terminali del tripolo, la LKC applicata ad un macronodo (linea tratteggiata in figura) che racchiude tutto il tripolo impone $i_1 + i_2 + i_3 = 0$, ovvero due correnti determinano la terza. Di conseguenza per la caratterizzazione del tripolo su base corrente è sufficiente considerare due soli generatori di corrente, che imporranno ad esempio i valori delle correnti i_1 e i_2 . Dette poi u_1, u_2, u_3 i potenziali ai terminali, $v_{13} = u_1 - u_3$ e $v_{23} = u_2 - u_3$, la LKT applicata ad una maglia che comprende i tre nodi terminali del tripolo impone che la tensione tra i nodi 1 e 2 non è una grandezza indipendente ma determinabile come $v_{12} = u_1 - u_2 = v_{13} - v_{23}$. In definitiva, adottando per compattezza le notazioni $v_1 = v_{13}$, $v_2 = v_{23}$, il tripolo è caratterizzabile mediante le due coppie di grandezze (v_1, i_1) , (v_2, i_2) , soddisfacenti due relazioni caratteristiche del tipo $f_1(v_1, i_1, v_2, i_2) = 0$, $f_2(v_1, i_1, v_2, i_2) = 0$.

Il grafo del tripolo è costituito da due lati aventi un nodo in comune (ad esempio il nodo 3).



... inserire figura tripoli astratti s e t con caratterizzazione in corrente ...

$$\begin{cases} f_1^s(v_1^s, i_1^s, v_2^s, i_2^s) = 0 \\ f_2^s(v_1^s, i_1^s, v_2^s, i_2^s) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_1^t(v_1^t, i_1^t, v_2^t, i_2^t) = 0 \\ f_2^t(v_1^t, i_1^t, v_2^t, i_2^t) = 0 \end{cases}$$

I due tripoli sono equivalenti quando $f_1^s = f_1^t$ e $f_2^s = f_2^t$.

Supponiamo ora che i due tripoli siano a-dinamici, cioè le f_k^s e f_k^t ($k = 1, 2$) implicino relazioni algebriche o trascendenti tra le variabili da cui dipendono e non vi figurino derivazioni o integrazioni rispetto al tempo. L'applicazione del teorema delle funzioni (vettoriali) implicite comporta (escludendo situazioni patologiche) che esistono delle funzioni r_k^s, r_k^t tali che le precedenti relazioni possono essere esplicitate come

$$\begin{cases} v_1^s = r_1^s(i_1^s, v_2^s, i_2^s) \\ v_2^s = r_2^s(v_1^s, i_1^s, i_2^s) \end{cases} \quad \begin{cases} v_1^t = r_1^t(i_1^t, v_2^t, i_2^t) \\ v_2^t = r_2^t(v_1^t, i_1^t, i_2^t) \end{cases}$$

che in realtà risulteranno (nel caso di tripoli costituiti di resistori lineari) più semplici e cioè delo tipo

$$\begin{cases} v_1^s = r_1^s(i_1^s, i_2^s) \\ v_2^s = r_2^s(i_1^s, i_2^s) \end{cases} \quad \begin{cases} v_1^t = r_1^t(i_1^t, i_2^t) \\ v_2^t = r_2^t(i_1^t, i_2^t) \end{cases}$$

I due tripoli sono quindi equivalenti quando $r_1^s = r_1^t$ e $r_2^s = r_2^t$.

... work in progress ...

... inserire figura tripoli stella e triangolo con unico generatore di caratterizzazione j_a ...

... work in progress ...

Applicando ora la sovrapposizione si ha $v_k^s = v_{ka}^s + v_{kb}^s$ e $v_k^t = v_{ka}^t + v_{kb}^t$ ($k = 1, 2$), dove

$$\begin{cases} \text{per } i_2 = j_b = 0 \\ \begin{cases} v_{1a}^s = r_1^s(j_a, 0) \\ v_{2a}^s = r_2^s(j_a, 0) \end{cases} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_{1a}^t = r_1^t(j_a, 0) \\ v_{2a}^t = r_2^t(j_a, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{per } i_1 = j_a = 0 \\ \begin{cases} v_{1b}^s = r_1^s(0, j_b) \\ v_{2b}^s = r_2^s(0, j_b) \end{cases} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_{1b}^t = r_1^t(0, j_b) \\ v_{2b}^t = r_2^t(0, j_b) \end{cases}$$

Nel caso specifico dei due tripoli costituiti da una stella e da un triangolo di resistori (vedi figura), definiamo

$$G_s = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad R_t = R_{12} + R_{23} + R_{31} \quad 4.5$$

e risulta

$$\begin{cases} \text{per } i_2 = j_b = 0 \\ \begin{cases} v_{1a}^s = (R_1 + R_3)j_a \\ v_{2a}^s = R_3j_a \end{cases} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_{1a}^t = \frac{R_{31}(R_{12}+R_{23})}{R_t}j_a \\ v_{2a}^t = R_{23}i_{23} = R_{23}\frac{R_{31}}{R_t}j_a \end{cases} \quad \begin{cases} \text{per } i_1 = j_a = 0 \\ \begin{cases} v_{1b}^s = r_1^s(0, j_b) \\ v_{2b}^s = r_2^s(0, j_b) \end{cases} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_{1b}^t = r_1^t(0, j_b) \\ v_{2b}^t = r_2^t(0, j_b) \end{cases}$$

Se i due tripoli sono equivalenti, tali sono in ogni condizione di funzionamento, quindi anche nel caso in cui $i_2 = 0$, così come nel caso $i_1 = 0$. Risulta dunque

$$\begin{array}{lcl} v_{1a}^s = v_{1a}^t & \Rightarrow & R_1 + R_3 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_t} + \frac{R_{23}R_{31}}{R_t} \Rightarrow R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_t} \\ v_{2a}^s = v_{2a}^t & \Rightarrow & R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_t} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} v_{1b}^s = v_{1b}^t \\ v_{2b}^s = v_{2b}^t \end{array} \right.$$

Le trasformazioni da triangolo a stella sono

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_t} \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_t} \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_t} \quad 4.6$$

Le trasformazioni da stella a triangolo si ottengono invertendo le precedenti relazioni. Considerando il prodotto $G_s R_1 R_2$ e sostituendo le 4.6 si ha

$$G_s R_1 R_2 = R_2 + R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = \frac{R_{12} R_{23}}{R_t} + \frac{R_{12} R_{31}}{R_t} + \frac{R_{12}^2 R_{23} R_{31}}{R_t^2} \frac{R_t}{R_{31} R_{23}} = R_{12} \left(\frac{R_{23}}{R_t} + \frac{R_{31}}{R_t} + \frac{R_{12}}{R_t} \right) = R_{12}$$

Analogamente si ottengono le altre due relazioni. Le trasformazioni da stella a triangolo sono quindi

$$R_{12} = G_s R_1 R_2 \quad R_{23} = G_s R_2 R_3 \quad R_{31} = G_s R_3 R_1 \quad 4.7$$

4.0.13 pag 226-7 metodo simbolico

Con riferimento ad una grandezza sinusoidale

$$\begin{aligned} a(t) &= A_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (\text{valore massimo } A_m \text{ in evidenza}) \\ &= \sqrt{2} A \cos(\omega t + \alpha) \quad (\text{valore efficace } A = A_{\text{eff}} = A_m / \sqrt{2} \text{ in evidenza}) \end{aligned}$$

è possibile considerare due distinte definizioni di valore efficace $\bar{A}$, come segue

$$\begin{aligned} \text{convenzione maggiormente utilizzata per sistemi elettrici:} \quad \bar{A} &= A e^{i\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad a(t) = \Re(\sqrt{2} \bar{A} e^{i\omega t}) \\ \text{convenzione adottata dal testo Circuiti:} \quad \bar{A} &= A_m e^{i\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad a(t) = \Re(\bar{A} e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

Considerando ad esempio la prima convenzione, dimostriamo le seguenti tre fondamentali proprietà del metodo simbolico.

- Proprietà di unicità $a(t) = b(t) \quad \forall t \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$

$$\begin{aligned} c(t) &= a(t) - b(t) = \Re(\sqrt{2} \bar{A} e^{i\omega t}) - \Re(\sqrt{2} \bar{B} e^{i\omega t}) = \Re[\sqrt{2}(\bar{A} - \bar{B}) e^{i\omega t}] \\ &= \Re(\sqrt{2} \bar{C} e^{i\omega t}) = \Re(\sqrt{2} C e^{i\gamma} e^{i\omega t}) = \sqrt{2} C \cos(\omega t + \gamma) \\ a(t) &= b(t) \quad \forall t \Leftrightarrow c(t) = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow C = 0 \Leftrightarrow \bar{C} = 0 \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B} \end{aligned}$$

- Proprietà di linearità $c(t) = ha(t) + kb(t) \Leftrightarrow \bar{C} = h\bar{A} + k\bar{B}$

$$c(t) = ha(t) + kb(t) = h\Re(\sqrt{2} \bar{A} e^{i\omega t}) + k\Re(\sqrt{2} \bar{B} e^{i\omega t}) = \Re[\sqrt{2}(h\bar{A} + k\bar{B}) e^{i\omega t}] = \Re(\sqrt{2} \bar{C} e^{i\omega t}) = \sqrt{2} C \cos(\omega t + \gamma)$$

- Proprietà di derivazione $b(t) = \frac{da(t)}{dt} \Leftrightarrow \bar{B} = i\omega \bar{A}$

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{d}{dt} [\sqrt{2} A \cos(\omega t + \alpha)] = -\sqrt{2} A \omega \sin(\omega t + \alpha) = -\sqrt{2} A \omega \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} A \omega \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \Re(\sqrt{2} A \omega e^{i(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})}) = \Re(\sqrt{2} A \omega e^{i\alpha} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t}) = \Re(\sqrt{2} i \omega \bar{A} e^{i\omega t}) = \Re(\sqrt{2} \bar{B} e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

4.0.14 pag 242 potenze che si conservano in regime sinusoidale

Potenza ...	Si conserva?
attiva o media	si
reattiva	si
complessa	si
fluttuante	si (perchè?)
apparente	no

4.0.15 pag 256 risonanza serie: equazione nel dominio del tempo

Essendo la corrente i comune ai tre bipoli e ricordando le relazioni caratteristiche si ha

$$\begin{aligned} e(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + v_C(t) = RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C(t) \\ &= Ri(t) + L \frac{di}{dt} + v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{e}{LC} & \text{se la funzione incognita cercata è } v_C(t) \text{ (condiz. iniziali } v_C(t_0^+) \text{ e } \frac{dv_C}{dt}|_{t_0^+} = \frac{i(t_0^+)}{C}) \\ \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L} \frac{de}{dt} & \text{se la funzione incognita cercata è } i(t) \text{ (condiz. iniziali } i(t_0^+) \text{ e } \frac{di}{dt}|_{t_0^+} = \frac{v_L(t_0^+)}{L} = \frac{e(t_0^+) - Ri(t_0^+) - v_C(t_0^+)}{L}) \end{cases}$$

Ricordando le proprietà del metodo dei fasori, e in particolare che alle derivate prima e seconda rispetto al tempo corrispondono rispettivamente la moltiplicazione per $j\omega$ e per $(j\omega)^2 = -\omega^2$, si ha che queste equazioni si possono ottenere direttamente a partire dalle equazioni fasoriali. Ad esempio per la seconda, essendo $\bar{E} = \dot{Z}\bar{I} = [R + j\omega L + 1/(j\omega C)]\bar{I}$, moltiplicando per $\frac{j\omega}{L}$ si ha $\frac{j\omega\bar{E}}{L} = [\frac{R}{L}j\omega + (j\omega)^2 + \frac{1}{LC}]\bar{I}$, da cui tornando nel dominio del tempo si ottiene il risultato.

4.0.16 pag 259 risonanza parallelo

Dualità rispetto alla risonanza serie: generatore di corrente (al posto del generatore di tensione) che alimenta il parallelo (anziché la serie) di R , L e C (figura 5.28 del libro)

$$j(t) = \sqrt{2}J \cos(\omega t + \beta)$$

Calcolo di $\bar{V}(\omega)$ e $v(t)$

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{2}V(\omega) \cos(\omega t + \alpha(\omega)) \\ \frac{1}{\bar{Z}} &= \frac{1}{\bar{Z}e^{i\phi}} = \dot{Y} = \frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_C} = \frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = G + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = Y e^{-i\phi} \\ Y(\omega) &= \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad -\phi(\omega) = \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \\ \bar{V} &= V e^{i\alpha} = \dot{Z}\bar{J} = \frac{\bar{J}}{\dot{Y}} = \frac{\bar{J}}{G + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{J e^{i\beta}}{Y e^{-i\phi}} = \frac{J}{Y} e^{i(\beta+\phi)} \\ V(\omega) &= \frac{J}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \quad \alpha(\omega) = \beta + \phi(\omega) = \beta - \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \end{aligned} \quad 4.8$$

$$\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \begin{cases} V(\omega_r) = \max_{\omega} V(\omega) = \frac{J}{G} = RJ \\ \alpha(\omega_r) = \beta \end{cases} \quad v(t) \text{ è in fase con } j(t) \quad \bar{V}(\omega_r) = R J e^{i\beta} \quad 4.9$$

Definendo il fattore di qualità come

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{\omega_r L} = \omega_r R C = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{è il reciproco di quello definito per il caso della risonanza serie} \quad 4.10$$

si ha

$$\begin{aligned} \bar{I}_L(\omega_r) &= \dot{Y}_L \bar{V}(\omega_r) = -iQ J e^{i\beta} \quad \bar{I}_C(\omega_r) = \dot{Y}_C \bar{V}(\omega_r) = iQ J e^{i\beta} \\ \frac{I_L(\omega_r)}{J} &= \frac{I_C(\omega_r)}{J} = Q \quad \text{amplificazione quando } Q > 1 \\ Y(\omega) &= G \sqrt{1 + Q^2 \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2} \quad \phi(\omega) = -\arctan \left[Q \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right) \right] \end{aligned} \quad 4.11$$

da cui si ottengono le curve universali di risonanza:

$$\frac{V(\omega)}{V(\omega_r)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2}} \quad \alpha(\omega) = \beta - \arctan \left[Q \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right) \right] \quad 4.12$$

Definizione energetica di Q . Alla risonanza ($\omega = \omega_r$) si ha:

$$\begin{aligned} \begin{cases} v_C(t) = v(t) = \sqrt{2}V(\omega_r) \cos(\omega_r t + \alpha(\omega_r)) = \sqrt{2}RJ \cos(\omega_r t + \beta) \\ i_L(t) = \sqrt{2}I_L(\omega_r) \cos(\omega_r t + \beta_L(\omega_r)) = \sqrt{2}QJ \cos(\omega_r t + \beta - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}QJ \sin(\omega_r t + \beta) \end{cases} \\ W \stackrel{\text{def}}{=} LQ^2 J^2 = CR^2 J^2 \\ w^{(i)} = \frac{1}{2} L i_L^2(t) + \frac{1}{2} C v_C^2(t) = LQ^2 J^2 \sin^2(\omega_r t + \beta) + CR^2 J^2 \cos^2(\omega_r t + \beta) = W = \text{costante} \end{aligned}$$

$$\frac{W_R^{(a)}(t, t+T)}{w^{(i)}} = \frac{TP_R^{(a)}}{W} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_r} RJ^2}{CR^2 J^2} = \frac{2\pi}{\omega_r CR} = \frac{2\pi}{Q} \quad Q = 2\pi \frac{w^{(i)}}{W_R^{(a)}(t, t+T)}$$

4.0.17 pag 274 Serie di Fourier ed FFT: proiezione e interpolazione

Si consideri una funzione $f(t)$ periodica di periodo T e la sua serie di Fourier troncata ad N termini $f_N(t)$. Tale troncamento corrisponde ad una proiezione in un sottospazio dello spazio delle funzioni periodiche di periodo T . I coefficienti della serie troncata sono definiti mediante integrali. Ciò comporta che, quando essi vengono calcolati numericamente, tipicamente non è efficiente usare la loro definizione integrale. Fissata l'accuratezza numerica desiderata, conviene spesso determinarli usando l'algoritmo FFT (studiato in dettaglio in altri corsi). I coefficienti così determinati non coincidono esattamente con quelli della serie di Fourier, ma dal punto di vista numerico la differenza è trascurabile. La funzione data dalla serie trigonometrica i cui coefficienti sono quelli determinati con la FFT non è la proiezione in un sottospazio delle funzioni periodiche di periodo T , ma è invece una interpolazione della funzione data $f(t)$.

4.0.18 pag 277 Grandezze rappresentate in decibel

Quando una grandezza di interesse assume valori in un intervallo che comprende diversi ordini di grandezza è conveniente usare la rappresentazione in decibel.

Per una grandezza 'di tipo quadratico', come una potenza o un'energia, ad esempio $P = V^2/R$, la relativa rappresentazione in decibel si definisce come $P_{dB} = 10 \log_{10}(P/P_0)$, dove P_0 è un valore di riferimento. Si considerino le seguenti istruzioni Matlab

```
>> format short g
>> format compact
>> n = [-2:1:4]
n =
    -2    -1     0     1     2     3     4
>> P = 10.^n
P =
    0.01    0.1     1    10   100  1000 10000
>> P_0 = 10
P_0 =
    10
>> P/P_0
ans =
    0.001    0.01    0.1     1    10   100  1000
>> P_dB = 10*log10(P/P_0)
P_dB =
   -30   -20   -10     0    10    20    30
```

e si noti che, mentre i valori assunti da P coprono sei ordini di grandezza (e sono quindi difficilmente rappresentabili in un grafico), quelli assunti da P_{dB} coprono invece un intervallo limitato (e sono facilmente raffigurabili, come nei diagrammi in scala logaritmica o semilogaritmica).

Per grandezze 'di tipo non quadratico', ad esempio una tensione, nella definizione di rappresentazione in decibel il logaritmo viene premoltiplicato non per 10 ma per 20. La motivazione si evince, considerando ad esempio la potenza assorbita da un resistore, dalle seguenti uguaglianze

$$\boxed{P_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P}{P_0}} = 10 \log_{10} \frac{V^2/R}{V_0^2/R} = \boxed{20 \log_{10} \frac{V}{V_0}} = V_{dB}$$

4.0.19 pag 283 Trasferimenti energetici, valore efficace, energia immagazzinata in L e C

Al fine di evitare la possibile confusione tra il concetto di *energia* e quello di *trasferimento energetico*, è opportuno ricordare brevemente alcuni concetti generali.

La descrizione macroscopica di un sistema è fatta in termini di *proprietà* fisiche che possono essere in linea di principio misurate con l'aiuto di appropriati strumenti di laboratorio. Le proprietà sono delle *funzioni puntuali*, nel senso che il loro valore è solo funzione dello stato e che quindi la loro variazione conseguente ad un cambiamento di stato è univocamente determinata dagli stati iniziali e finali. Sono sinonimi di proprietà: *funzione (o parametro, o grandezza, o variabile) di stato*, e *coordinata* (termodinamica).

L'energia E di un sistema è una *proprietà estensiva* del sistema stesso. Il *contenuto di energia* può essere variato secondo due differenti modalità: in un caso si parla di *lavoro* L , nell'altro di *calore* Q . L e Q sono pertanto grandezze connesse al *trasferimento di energia (rappresentano flussi di energia)* e non sono delle proprietà (non sono delle funzioni dello stato del sistema). Secondo la convenzione usualmente adottata in termodinamica, il lavoro è ritenuto positivo se attraversa il sistema verso l'ambiente (lavoro erogato dal sistema), mentre il calore è ritenuto positivo se è in ingresso per il sistema (calore assorbito). Con questa convenzione la prima legge della termodinamica si scrive

$$\Delta E = Q - L$$

Significato dell'energia: *L'energia può pensarsi come la capacità di un sistema di fare lavoro (nella forma di lavoro meccanico, elettrico, chimico, calore, etc.)*

Nello studio della termodinamica classica è consueta la divisione dell'energia di un sistema in energia cinetica E_c ed energia potenziale E_p , che sono aliquote di E direttamente misurabili dall'esterno del sistema in relazione allo stato di moto ed alla posizione nel campo gravitazionale del sistema, nonché in energia interna U , che rappresenta la somma di tutti i contributi microscopici di energia associati alle particelle elementari costituenti il sistema, e che quindi è detta interna poiché non è connessa ad un riferimento esterno, come nel caso di E_c ed E_p . Si ha pertanto

$$\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U = Q - L$$

e, nei casi in cui non vi sono variazioni di energia cinetica e potenziale

$$\Delta U = Q - L$$

Ribadiamo che il lavoro, pur essendo dimensionalmente omogeneo ad un'energia, *non è una proprietà* o variabile di stato del sistema considerato.

Analogamente, il calore Q non è una variabile di stato. Tuttavia torna utile avere a disposizione una variabile di stato che rappresenti una 'capacità del sistema associata al calore'. Dal punto di vista dell'ingegnere del settore elettrico un tale concetto risulta rilevante in varie applicazioni, ad esempio per il dimensionamento del raffreddamento dei sistemi basati sulla superconduttività. Il concetto in questione è quello di entalpia H di un sistema (ad esempio un fluido refrigerante), esprimibile come

$$H = U + pV$$

dove p e V rappresentano pressione e volume (che sono, come U , variabili di stato). È intuitivamente utile associare all'entalpia il significato di *contenuto in calore* del sistema (il simbolo H è infatti l'iniziale di 'heat content'). Occorre tuttavia precisare che tale interpretazione è corretta *soltanto* per *trasformazioni a pressione costante* del sistema (processi nei quali la pressione non cambia, mentre le altre variabili di stato possono variare). Per tali trasformazioni risulta $\Delta H = Q$, ovvero ad un flusso di calore verso il sistema corrisponde un eguale incremento in entalpia. Si noti che una gran parte di trasformazioni chimiche e fisiche avvengono a pressione costante.

Il lavoro può essere di vari tipi, ad esempio *lavoro meccanico* o *lavoro elettrico*.¹

Nello studio dei sistemi elettrici considereremo senza particolare preferenza il lavoro elettrico *erogato* oppure quello *assorbito*.²

Si consideri un bipolo di una rete elettrica e si scelgano su di esso versi di riferimento per la tensione $v(t)$ e la corrente $i(t)$ corrispondenti alla convenzione dell'utilizzatore. Come sarà provato in § 6.0.3 a partire dalle equazioni generali dell'elettromagnetismo, risulta che, nell'ipotesi in cui la rete operi in *regime lentamente variabile*, il *lavoro elettrico* elementare dL *assorbito* dal bipolo nell'intervallo elementare $(t, t + dt)$ vale

$$dL = v(t)i(t)dt \quad 4.13$$

Se la convenzione adottata fosse quella del generatore la 4.13 esprimerebbe invece il lavoro elettrico elementare *erogato* dal bipolo. Si parlerà in generale di *lavoro scambiato* intendendo con ciò lavoro assorbito o erogato a seconda del caso specifico. Si definisce *potenza istantanea* il lavoro elettrico scambiato per unità di tempo (*riferito all'istante t*)

$$p(t) \triangleq \frac{dL}{dt} = v(t)i(t)$$

¹Una definizione abbastanza generale di lavoro è la seguente: *Il trasferimento di energia come lavoro tra due sistemi si ha quando l'interazione è tale che l'effetto conseguente in ciascuno avrebbe potuto essere ottenuto, per entrambi, con il solo cambiamento di quota di un peso in un campo gravitazionale.*

²Spesso si parla impropriamente di "lavoro generato" o di "energia generata", intendendo con ciò lavoro erogato. La dicitura è impropria in quanto la legge di conservazione afferma proprio che l'energia non può essere generata né distrutta.

Il lavoro elettrico $L(t_1, t_2)$ scambiato dal bipolo in un intervallo *finito* (t_1, t_2) si ottiene sommando i contributi elementari

$$L(t_1, t_2) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} dL = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt \quad 4.14$$

e il lavoro elettrico scambiato *per unità di tempo* risulta pari al valore medio della potenza istantanea (*potenza media*) $P(t_1, t_2)$

$$\frac{L(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt}{\Delta t} \triangleq P(t_1, t_2) \quad 4.15$$

Ricordiamo che si definisce *valore efficace, relativamente all'intervallo* (t_1, t_2) , di una grandezza $a(t)$ *comunque variabile nel tempo*, la quantità

$$A_{\text{eff}}(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} a^2(t)dt}{\Delta t}} \quad \text{per grandezze comunque variabili nel tempo} \quad 4.16$$

Se come bipolo si considera in particolare un *resistore lineare e tempo invariante*, si ottiene che la potenza media *assorbita* $P^{\text{as}}(t_1, t_2)$ è pari alla resistenza moltiplicata per il quadrato del valore efficace della corrente

$$P^{\text{as}}(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt}{\Delta t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)dt}{\Delta t} = RI_{\text{eff}}^2(t_1, t_2) \quad 4.17$$

Nel caso in cui la corrente è costante, $i(t) = I$, risulta

$$P^{\text{as}}(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} RI^2 dt}{\Delta t} = \frac{RI^2(t_2 - t_1)}{\Delta t} = RI^2 = P^{\text{as}} \quad 4.18$$

ovvero, come è ovvio, il valore efficace coincide con il valore costante I e la potenza media P^{as} coincide con la potenza istantanea e non dipende dagli istanti t_1 e t_2 .

Nel caso di grandezze periodiche di periodo T , il valore efficace ovviamente ha particolare significato se definito con riferimento ad un intervallo di durata pari al periodo

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_1+T} a^2(t)dt}{T}} \quad \text{per grandezze periodiche di periodo } T \quad 4.19$$

In particolare, per grandezze periodiche di tipo *sinusoidale* con periodo T , del tipo $a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$, risulta

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_1+T} a^2(t)dt}{T}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \quad \text{per grandezze sinusoidali di periodo } T \quad 4.20$$

Stante la definizione 4.15 di potenza media, in termini di trasferimenti energetici si ha

$$L^{\text{as}}(t_1, t_1 + \Delta t) = RI_{\text{eff}}^2(t_1, t_1 + \Delta t)\Delta t \quad \text{per corrente comunque variabile} \quad 4.21$$

$$L^{\text{as}}(t_1, t_1 + T) = L^{\text{as}}(T) = RI_{\text{eff}}^2 T \quad \text{per corrente periodica (in particolare sinusoidale)} \quad 4.22$$

$$L^{\text{as}}(t_1, t_1 + \Delta t) = L^{\text{as}}(\Delta t) = RI^2 \Delta t \quad \text{per corrente costante} \quad 4.23$$

Si verifica facilmente (libro p240) che nel caso sinusoidale (e in generale anche nel caso periodico) risulta inoltre

$$\Delta t \gg T \Rightarrow L^{\text{as}}(t_1, t_1 + \Delta t) \cong RI_{\text{eff}}^2 \Delta t \quad \text{per corrente periodica (in particolare sinusoidale)} \quad 4.24$$

Abbiamo quindi la seguente

interpretazione del valore efficace: *il valore efficace di una corrente comunque variabile (in particolare periodica o sinusoidale) è uguale al valore di una corrente continua che attraversando una stessa resistenza produce un'eguale quantità di calore nell'intervallo di tempo considerato.*

L'unità di misura del lavoro elettrico è il kilowattora (kWh), e risulta $1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}$. Per avere un termine di paragone si consideri il lavoro meccanico richiesto per tipici spostamenti di masse nel campo di gravità terrestre, $E = mgh$. In particolare 200 persone ($m = 200 \cdot 70 \text{ kg} = 14000 \text{ kg}$) che salgono 9 piani di scale ($h = 9 \cdot 3 \text{ m} = 27 \text{ m}$) svolgono complessivamente un lavoro $L = 3.7 \text{ MJ}$. Come si vede da questo confronto, a dispetto del suo 'basso costo relativo' (tipicamente intorno a 0.15 € per una comune utenza domestica), il kWh corrisponde ad una quantità di energia consistente.

Si consideri ora un capacitore tempo-invariante e si faccia su di esso la convenzione dell'utilizzatore. La potenza assorbita è

$$p(t) = v(t)i(t) = vC \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2(t) \right)$$

e dunque una possibile funzione primitiva della $p(t)$ è la seguente

$$w_e(t) \triangleq \frac{1}{2} C v^2(t) \quad 4.25$$

che prende il nome di energia (elettrica) immagazzinata dal capacitore. La giustificazione di tale denominazione deriva dal fatto che il lavoro elettrico assorbito dal capacitore tra due istanti t_1 e t_2 è pari alla differenza tra i valori assunti dalla funzione w_e

$$L^{\text{as}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dw_e = w_e(t_2) - w_e(t_1) \quad 4.26$$

ovvero ad un lavoro netto positivo effettuato sul capacitore corrisponde un eguale incremento nella funzione w_e . In particolare per un istante iniziale t_0 e il generico istante t

$$L^{\text{as}}(t_0, t) = w_e(t) - w_e(t_0) \quad 4.27$$

Se come istante iniziale si assume $t_0 = -\infty$, e si considera che sul capacitore all'inizio della sua vita non era ancora stato fatto alcun lavoro elettrico, si può assumere energia elettrica immagazzinata iniziale $w_e(-\infty) = 0$ e risulta

$$L^{\text{as}}(-\infty, t) = w_e(t) \quad 4.28$$

cioè il lavoro elettrico netto complessivo che è stato fatto sul capacitore ce lo si ritrova in energia immagazzinata nel capacitore stesso. L'assunzione $w_e(-\infty) = 0$ correttamente corrisponde a $v(-\infty) = 0$, ovvero a carica elettrica iniziale sulle armature del capacitore $Q(-\infty) = C v(-\infty) = 0$.

Conservatività del capacitore

Il fatto che il lavoro elettrico assorbito dal capacitore ce lo si ritrova in energia immagazzinata nel capacitore stesso, eq. 4.26 e 4.28, si esprime dicendo che il capacitore è un *bipolo conservativo*.

Passività del capacitore

Si consideri ora un capacitore tempo-invariante fisicamente realizzabile (cioè $C > 0$). Il lavoro elettrico da esso erogato in un intervallo (t_1, t_2) è $L^{\text{er}}(t_1, t_2) = w_e(t_1) - w_e(t_2)$. Data l'energia immagazzinata all'istante iniziale, $w_e(t_1)$, si ha che, essendo l'energia w_e definita positiva (perchè $C > 0$), il lavoro massimo erogato corrisponde al caso $w_e(t_2) = 0$ e vale $L_{\text{max}}^{\text{er}}(t_1, t_2) = w_e(t_1)$, ovvero il capacitore non può erogare lavoro elettrico in quantità maggiore dell'energia immagazzinata all'istante iniziale, o in altre parole non può erogarne di più di quanto ne abbia assorbito in precedenza. Cioè il capacitore è un *bipolo dinamico passivo*.

In maniera perfettamente duale si ripetono le medesime considerazioni per un induttore tempo-invariante, in particolare l'energia (magnetica) immagazzinata è

$$w_m(t) \triangleq \frac{1}{2} L i^2(t) \quad 4.29$$

4.0.20 pag 286 wattmetro ideale

inserire figura wattmetro ideale e sua inserzione

Il *wattmetro ideale* è un doppio bipolo che consente la misura di diverse grandezze. Mediante opportuna inserzione in un circuito, può ad esempio misurare la potenza media assorbita da un bipolo. Altro esempio di grandezza che può misurare, sempre previa opportuna inserzione, è la potenza *reattiva* assorbita da un carico trifase. È dotato di un quadrante di lettura che visualizza la misura effettuata (nella strumentazione moderna la misura effettuata può anche essere registrata su opportuno supporto di memorizzazione). La sua prima coppia di morsetti (A e B) prende il nome di *porta voltmetrica* o linea voltmetrica ed è definita da una relazione caratteristica identica a quella del voltmetro ideale ($i_{\text{AB}}(t) = 0$, circuito aperto). La sua seconda coppia di morsetti prende invece il nome di *porta amperometrica* o linea amperometrica ed è definita da una relazione caratteristica identica a quella dell'amperometro ideale ($v_{\text{CD}}(t) = 0$, corto circuito). La misura effettuata, W , è *per definizione* il valore medio della grandezza $v_{\text{AB}}(t)i_{\text{CD}}(t)$. In particolare in regime sinusoidale si ha quindi

$$v_1(t) = v_{\text{AB}}(t) = \sqrt{2} V_{\text{AB}} \cos(\omega t + \alpha_{\text{AB}}) \quad i_2(t) = i_{\text{CD}}(t) = \sqrt{2} I_{\text{CD}} \cos(\omega t + \beta_{\text{CD}})$$

$$W \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_{AB}(t) i_{CD}(t) dt = V_{AB} I_{CD} \cos(\alpha_{AB} - \beta_{CD}) = V_{AB} I_{CD} \cos \phi_{ABCD}$$

Se si utilizza il metodo simbolico, si riconosce che l'espressione $V_{AB} I_{CD} \cos \phi_{ABCD}$ è il prodotto scalare tra i vettori $\bar{V}_{AB}$ e $\bar{I}_{CD}$, e che W può calcolarsi nel seguente modo

$$W = V_{AB} I_{CD} \operatorname{Re}[e^{i(\alpha_{AB} - \beta_{CD})}] = \operatorname{Re}[V_{AB} e^{i\alpha_{AB}} I_{CD} e^{-i\beta_{CD}}] = \operatorname{Re}[\bar{V}_{AB} \check{I}_{CD}]$$

4.0.21 pag 292 Circuito di Tesla con linea induttiva

La figura 5.49b del libro si riferisce al caso semplificativo in cui la linea viene schematizzata come un resistore. Nella realtà risulta più corretto rappresentare la linea come comprendente anche una induttanza L , nel qual caso avremo una figura come la 5.49b ma con una impedenza $\check{Z}_\ell = R_\ell + i\omega L$ al posto della sola R_ℓ .

inserire figura come la 5.49b del libro ma aggiungendo X_ℓ in serie ad R_ℓ

$$\frac{\bar{E}}{\bar{V}_1} = \frac{1}{n} \quad \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_u} = n \quad \frac{\bar{I}_g}{\bar{I}_\ell} = n \quad \frac{\bar{I}_\ell}{\bar{I}_u} = \frac{1}{n} \quad 4.30$$

$$P_\ell = R_\ell I_\ell^2 = R_\ell \left(\frac{I_u}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \underbrace{R_\ell I_u^2}_{\text{potenza dissipata sulla linea in assenza dei trasformatori}} \quad 4.31$$

$$-\bar{V}_1 + \check{Z}_\ell \bar{I}_\ell + \bar{V}_2 = 0 \quad -n\bar{E} + \check{Z}_\ell \frac{\bar{I}_u}{n} + n\bar{V}_u = 0 \quad \check{Z}_\ell \frac{\bar{I}_u}{n} = n(\bar{E} - \bar{V}_u) \quad 4.32$$

$$\bar{E} - \bar{V}_u = \frac{1}{n^2} \underbrace{\check{Z}_\ell \bar{I}_u}_{\text{scostamento tra } \bar{V}_u \text{ ed } \bar{E} \text{ in assenza dei trasformatori}} \quad \bar{V}_u = \bar{E} - \frac{\check{Z}_\ell \bar{I}_u}{n^2} \cong \bar{E} \quad 4.33$$

Per linee molto lunghe le ipotesi del limite lentamente variabile non sono soddisfatte e può risultare necessario tenere conto della velocità finita di propagazione dei segnali elettrici. In tal caso per ottenere risultati accurati si può fare ricorso alla teoria delle linee di trasmissione, che viene tipicamente trattata nell'ambito degli insegnamenti di campi elettromagnetici.

Cenni sui trasformatori trifase, impiego del collegamento a stella al secondario per il recupero del neutro nel circuito di Tesla trifase (vedi anche acdc.ps pag 38).

4.0.22 pag 331 Adattamento in potenza con trasformatore per carico non puramente resistivo

Inserire figura come quella a pag 338 del libro ma con due impedenze generiche $\check{Z}_i$ e $\check{Z}_u$ al posto di R_i ed R_u .

La derivazione si può fare riportando $\check{Z}_u$ al primario e notando che la sua potenza assorbita non cambia, oppure riportando E e $\check{Z}_i$ al secondario. Seguendo ad esempio la prima strada si ha

$$\begin{aligned} \check{Z}_{up} &= n^2 \check{Z}_u = n^2 R_u + i n^2 X_u & \bar{I}_1 &= \frac{\bar{E}}{\check{Z}_i + \check{Z}_{up}} & I_1 &= \frac{E}{\sqrt{(R_i + R_{up})^2 + (X_i + X_{up})^2}} \\ \bar{V}_1 &= \text{tensione al primario del trasformatore} = \text{tensione ai capi di } \check{Z}_{up} \\ \dot{A}_u &= \dot{A}_{up} = \bar{V}_1 \check{I}_1 = \check{Z}_{up} \bar{I}_1 \check{I}_1 = \check{Z}_{up} I_1^2 & P_u &= \Re\{\dot{A}_u\} = R_{up} I_1^2 = n^2 R_u I_1^2 = E^2 \frac{R_{up}}{(R_i + R_{up})^2 + (X_i + X_{up})^2} \end{aligned}$$

Se si considera P_u come funzione delle due variabili R_{up} e X_{up} e se ne cerca il massimo, si può notare che, quale che sia il valore di R_{up} , il massimo di P_u si avrà sempre quando $X_{up} = -X_i$. Di conseguenza si ha

$$\max_{R_{up}, X_{up}} P_u = \max_{R_{up}} E^2 \frac{R_{up}}{(R_i + R_{up})^2} = \max_{R_{up}} \frac{E^2}{R_i} \frac{R_{up}/R_i}{(1 + R_{up}/R_i)^2} = \frac{E^2}{R_i} \max_x \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{E^2}{R_i} \frac{x}{(1+x)^2} \Big|_{x=1} = \frac{E^2}{4R_i}$$

$$\text{Conclusione:} \quad n^2 R_u = R_i \quad n^2 X_u = -X_i \quad n^2 \dot{Z}_u = \dot{Z}_i \quad n = \sqrt{\frac{R_i}{R_u}}$$

4.0.23 pag 332 Giratore

L'equivalenza mostrata in fig 6.19(b) a pag 332 del testo si può stabilire nel dominio del tempo o anche convenientemente, e con maggiore generalità, nel dominio della frequenza (invocando la validità generale del metodo simbolico, discussa a pag 51).

Se alla porta 2 del giratore è collegata una generica impedenza $\bar{Z}$ (che nel caso della figura 6.19(b) del libro varrebbe $\bar{Z} = 1/(i\omega C)$), nel dominio della frequenza la relazione caratteristica, che lega $\bar{V}_1$ ed $\bar{I}_1$ si determina come segue

$$\bar{V}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{G} = \frac{\bar{V}_2}{G\bar{Z}} = \frac{\bar{I}_1}{G^2\bar{Z}} = \dot{Z}_{eq}\bar{I}_1 \quad \dot{Z}_{eq} = \frac{1}{G^2\bar{Z}}$$

Quando $\bar{Z} = 1/(i\omega C)$ si ha $\dot{Z}_{eq} = \frac{i\omega C}{G^2} = i\omega L_{eq}$, con $L_{eq} = \frac{C}{G^2}$, ovvero $\bar{V}_1 = i\omega L_{eq}\bar{I}_1$ e, tornando nel dominio del tempo, $v_1 = L_{eq} \frac{di_1}{dt}$. Il giratore si può quindi usare per ottenere un induttore (con induttanza L_{eq} che cresce al decrescere della conduttanza di girazione G) quando si hanno a disposizione solo capacitori. Ciò è molto utile nella progettazione di circuiti integrati.

Dualmente, se $\bar{Z} = i\omega L$ si ha $\dot{Z}_{eq} = \frac{1}{i\omega LG^2} = \frac{1}{i\omega C_{eq}}$, con $C_{eq} = LG^2$. Quindi il giratore consente anche di ottenere un condensatore a partire da un induttore.

4.0.24 pag 337 Resistenza/conduttanza equivalente (matriciale) e reciprocità

Un modo efficace per ricordare le proprietà di reciprocità e la loro derivazione consiste nel fare riferimento alle tre caratterizzazioni di un doppio bipolo di resistori lineari (caratterizzazione in tensione, in corrente e ibrida) e per ciascuna considerare i due circuiti che risultano nell'applicare la sovrapposizione.

Nel caso di caratterizzazione in corrente si ottiene la relazione vettoriale $\mathbf{v} = R\mathbf{i}$, che è l'analogo vettoriale della relazione scalare $v = R_{eq}i$ che si era ottenuta per un bipolo di resistori lineari. La matrice R è quindi chiaramente la generalizzazione vettoriale del concetto di resistenza equivalente (di un bipolo di resistori lineari) e quindi una sua denominazione più appropriata è *resistenza equivalente matriciale* oppure semplicemente ancora *resistenza equivalente* (invece di matrice delle resistenze) di un doppio bipolo di resistori lineari.

Similmente, nel caso di caratterizzazione in tensione si ha la relazione vettoriale inversa $\mathbf{i} = G\mathbf{v}$, e una denominazione più appropriata per G è *conduttanza equivalente (matriciale)* (invece di matrice delle conduttanze) di un doppio bipolo di resistori lineari.

Si ricordi che la relazione $\mathbf{v} = R\mathbf{i}$ (oppure l'altra $\mathbf{i} = G\mathbf{v}$) è conseguenza del risultato generale $x = L^{-1}d$, più volte richiamato, in base al quale in una rete lineare qualunque grandezza (tensione o corrente) è combinazione lineare dei generatori indipendenti.

Proprietà di reciprocità:

- *Prima forma.* Scambiando tra loro le posizioni di un generatore di *tensione* e di un amperometro, la corrente che attraversa quest'ultimo rimane immutata (da Someda, Onde Elettromagnetiche). (Se invece si considera un generatore di *corrente* e un amperometro entra in gioco anche il rapporto R_{11}/R_{22} .)
- *Seconda forma.* Scambiando tra loro le posizioni di un generatore di *corrente* e di un voltmetro, la tensione ai capi di quest'ultimo rimane immutata. (Se invece si considera un generatore di *tensione* e un voltmetro entra in gioco anche il rapporto G_{11}/G_{22} .)
- *Terza forma.* Si colleghino, nella prima configurazione, un generatore di corrente alla porta 1 ed un amperometro alla porta 2, e si denoti con $\beta = i'_2/i'_1$ il corrispondente guadagno (o attenuazione) di corrente. Dualmente, nella seconda configurazione, si colleghino un generatore di tensione alla porta 2 ed un voltmetro alla porta 1, e si denoti con $\alpha = v''_1/v''_2$ il corrispondente guadagno (o attenuazione) di tensione. Risulta allora $\alpha = -\beta$. Si noti che la presenza del segno meno in tale relazione è dovuta al fatto che si è adottata la stessa convenzione (dell'utilizzatore) ad entrambe le porte. In un'ottica di tipo ingresso-uscita (porta 1-porta 2), per la quale cui si adottasse la convenzione del generatore alla porta 2, il suddetto segno meno scomparirebbe.

4.0.25 pag 337 Estensione di validità delle proprietà di reciprocità

Le relazioni (6.24) e (6.25) di pag 337 del libro restano valide anche in presenza di trasformatori ideali. Infatti, denotando con i pedici a e b le due porte del trasformatore ideale, si riconosce che la potenza virtuale assorbita da esso è zero

$$\frac{v'_a}{v'_b} = n \quad \frac{i''_a}{i''_b} = -\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}'_{ab} = v'_a i''_a + v'_b i''_b = v'_a i''_a + \frac{v'_a}{n} (-n i''_a) = 0.$$

Analogamente si riconosce che $\hat{p}''_{ab} = v''_a i'_a + v''_b i'_b = v''_a i'_a + \frac{v''_a}{n} (-n i'_a) = 0$.

Si noti che le relazioni caratteristiche che definiscono il trasformatore ideale ‘impersonano’ la tesi della terza forma della proprietà di reciprocità, così come sopra enunciata ($n = \alpha = -\beta$).

Le dimostrazioni viste riguardo la reciprocità restano inoltre valide in regime sinusoidale, come si vede facendo ricorso al metodo simbolico (e restano valide anche in generale, essendo il metodo simbolico valido anche per regimi qualsiasi (usando la Fourier transform)). Di conseguenza le proprietà di reciprocità valgono anche per reti contenenti capacitori e induttori lineari. Poichè poi un mutuo accoppiamento lo si può vedere come costituito da un trasformatore ideale e da induttori, si ha che le proprietà di reciprocità valgono anche in presenza di circuiti mutuamente accoppiati.

In definitiva, le proprietà di reciprocità valgono per reti costituite da componenti lineari, passivi e reciproci (resistori, induttori, capacitori e circuiti mutuamente accoppiati).

4.0.26 pag 344,351,353 Matrici ibride equivalenti

Nel seguito si fa riferimento parallelamente ai due tipi di matrici ibride equivalenti, corrispondenti alle due possibili (duali) caratterizzazioni.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caratterizzazione in } \textit{corrente} \text{ alla porta 1} \\ \text{e in } \textit{tensione} \text{ alla porta 2} \\ \left\{ \begin{array}{l} v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2 \\ i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2 \end{array} \right. \quad y = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = Hx \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Caratterizzazione in } \textit{tensione} \text{ alla porta 1} \\ \text{e in } \textit{corrente} \text{ alla porta 2} \\ \left\{ \begin{array}{l} i_1 = \mathcal{H}_{11}v_1 + \mathcal{H}_{12}i_2 \\ v_2 = \mathcal{H}_{21}v_1 + \mathcal{H}_{22}i_2 \end{array} \right. \quad x = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathcal{H} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathcal{H}y \end{array} \right.$$

Si noti che le matrici H e $\mathcal{H}$ sono banalmente una l'inversa dell'altra, come si vede moltiplicando l'equazione $y = Hx$ a sinistra per H^{-1}

$$H^{-1}y = H^{-1}Hx = x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = H^{-1}$$

Con riferimento al doppio bipolo a T (fig. 6.39a pag. 351 libro), nei due casi si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2=0} = R_a + R_b || R_c \\ -H_{12} = H_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{-R_c}{R_b + R_c} \\ H_{22} = \frac{i_2}{v_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{1}{R_b + R_c} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_{11} = \frac{i_1}{v_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{1}{R_a + R_c} \\ -\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{21} = \frac{v_2}{v_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{R_c}{R_a + R_c} \\ \mathcal{H}_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{v_1=0} = R_b + (R_a || R_c) \end{array} \right.$$

e invertendo tali sistemi si ottiene la sintesi

$$\left\{ \begin{array}{l} R_c = \frac{H_{12}}{H_{22}} = -\frac{H_{21}}{H_{22}} \\ R_b = \frac{1}{H_{22}} - R_c = \frac{1+H_{21}}{H_{22}} = \frac{1-H_{12}}{H_{22}} \\ R_a = H_{11} - (R_b || R_c) = H_{11} + \frac{H_{21}(1+H_{21})}{H_{22}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_c = \frac{\mathcal{H}_{12}}{\mathcal{H}_{22}} = -\frac{\mathcal{H}_{21}}{\mathcal{H}_{22}} \\ R_a = \frac{1}{\mathcal{H}_{22}} - R_c = \frac{1-\mathcal{H}_{21}}{\mathcal{H}_{22}} = \frac{1+\mathcal{H}_{12}}{\mathcal{H}_{22}} \\ R_b = \mathcal{H}_{11} - (R_a || R_c) = \mathcal{H}_{11} - \frac{\mathcal{H}_{21}(1-\mathcal{H}_{21})}{\mathcal{H}_{22}} \end{array} \right.$$

Queste espressioni consentono effettivamente la sintesi, mediante soli resistori passivi, rispettivamente nei casi $0 \leq H_{12} \leq 1$ e $0 \leq \mathcal{H}_{21} < 1$. Per $H_{12} < 0$ o $\mathcal{H}_{21} < 0$ si avrebbe la condizione (di non fisica realizzabilità mediante resistori passivi, ma possibile in presenza di generatori controllati) $R_c < 0$. Per $H_{12} > 1$ o $\mathcal{H}_{21} > 1$ (possibile in presenza di trasformatori o di generatori controllati) risulterebbe, rispettivamente $R_b < 0$ o $R_a < 0$. Nei casi $-1 \leq H_{12} < 0$ o $-1 \leq \mathcal{H}_{21} < 0$ la sintesi (mediante soli resistori passivi) può effettuarsi invertendo i terminali di una delle due porte (si veda più avanti).

4.0.27 pag 347 Matrice di trasmissione

Per mostrare la validità della rappresentazione mediante la matrice di trasmissione si può partire dalla matrice R

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad v_2 - R_{22}i_2 = R_{21}i_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{v_2}{R_{21}} - \frac{R_{22}}{R_{21}}i_2 = T_{21}v_2 + T_{22}(-i_2)$$

da cui

$$\begin{cases} v_1 = R_{11} \left(\frac{v_2}{R_{21}} - \frac{R_{22}}{R_{21}} i_2 \right) + R_{12} i_2 = \frac{R_{11}}{R_{21}} v_2 + \left(R_{12} - \frac{R_{11} R_{22}}{R_{21}} \right) i_2 & = T_{11} v_2 + T_{12} (-i_2) \\ i_1 = \frac{v_2}{R_{21}} - \frac{R_{22}}{R_{21}} i_2 & = T_{21} v_2 + T_{22} (-i_2) \end{cases}$$

ovvero

$$y = Tx \quad y = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

La ragione di esplicitare la grandezza $-i_2$ (invece di i_2) risiede nel fatto che, in tal modo, se si considera il sistema costituito da due doppi bipoli connessi in cascata, la sua matrice T coincide con il prodotto delle matrici T dei due doppi bipoli. Infatti avremo $y' = T'x'$, $y'' = T''x''$ e $-i_2' = i_1''$, da cui discende $x' = y''$ e quindi $y' = Tx''$, dove $T = T'T''$.

Nelle ipotesi di validità della proprietà di non amplificazione (resistori lineari con $R > 0$) si ha (vedi circuiti libro) $|T_{11}| \geq 1$, $|T_{22}| \geq 1$. Il determinante si ottiene come segue

$$|T| = \begin{vmatrix} \frac{R_{11}}{R_{21}} & \frac{R_{11}R_{22}}{R_{21}} - R_{12} \\ \frac{1}{R_{21}} & \frac{R_{22}}{R_{21}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{R_{21}} & R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} \\ 1 & R_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{R_{21}^2} (R_{11}R_{22} - R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21}) = \frac{R_{12}}{R_{21}}$$

Se il doppio bipolo è reciproco (la passività non è richiesta) risulta dunque $|T| = 1$.

La rappresentazione appena considerata, $y = Tx$, esprime le grandezze alla porta 1 in funzione di quelle alla porta 2. Dualmente, possiamo ottenere direttamente una rappresentazione del tipo $x = \mathcal{T}y$, come segue

.... da fare

Moltiplicando l'equazione $y = Tx$ a sinistra T^{-1} si riconosce che $\mathcal{T} = T^{-1}$.

4.0.28 pag 350 Sintesi di un doppio bipolo lineare non inerte

Teorema di Norton vettoriale, sintesi a Π e sintesi in generale

La caratterizzazione in base tensione di un doppio bipolo non inerte si effettua applicando la proprietà di sovrapposizione (si veda le figure 6.37 e 6.38 di pag 350-351 del testo), da cui si ottiene

$$\begin{aligned} i_1 &= i'_1 + i''_1 = \overbrace{G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + j_{cc1}}^{i'_1} \\ i_2 &= i'_2 + i''_2 = \overbrace{G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + j_{cc2}}^{i'_2} \end{aligned}$$

cioè il seguente teorema di Norton in forma vettoriale

$$\boxed{i = Gv + j_{cc}} \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad j_{cc} = \begin{bmatrix} j_{cc1} \\ j_{cc2} \end{bmatrix}$$

per il quale si hanno schemi equivalenti riportati in Fig. 4.1, che consentono la sintesi [Chua Desoer Khu 259].

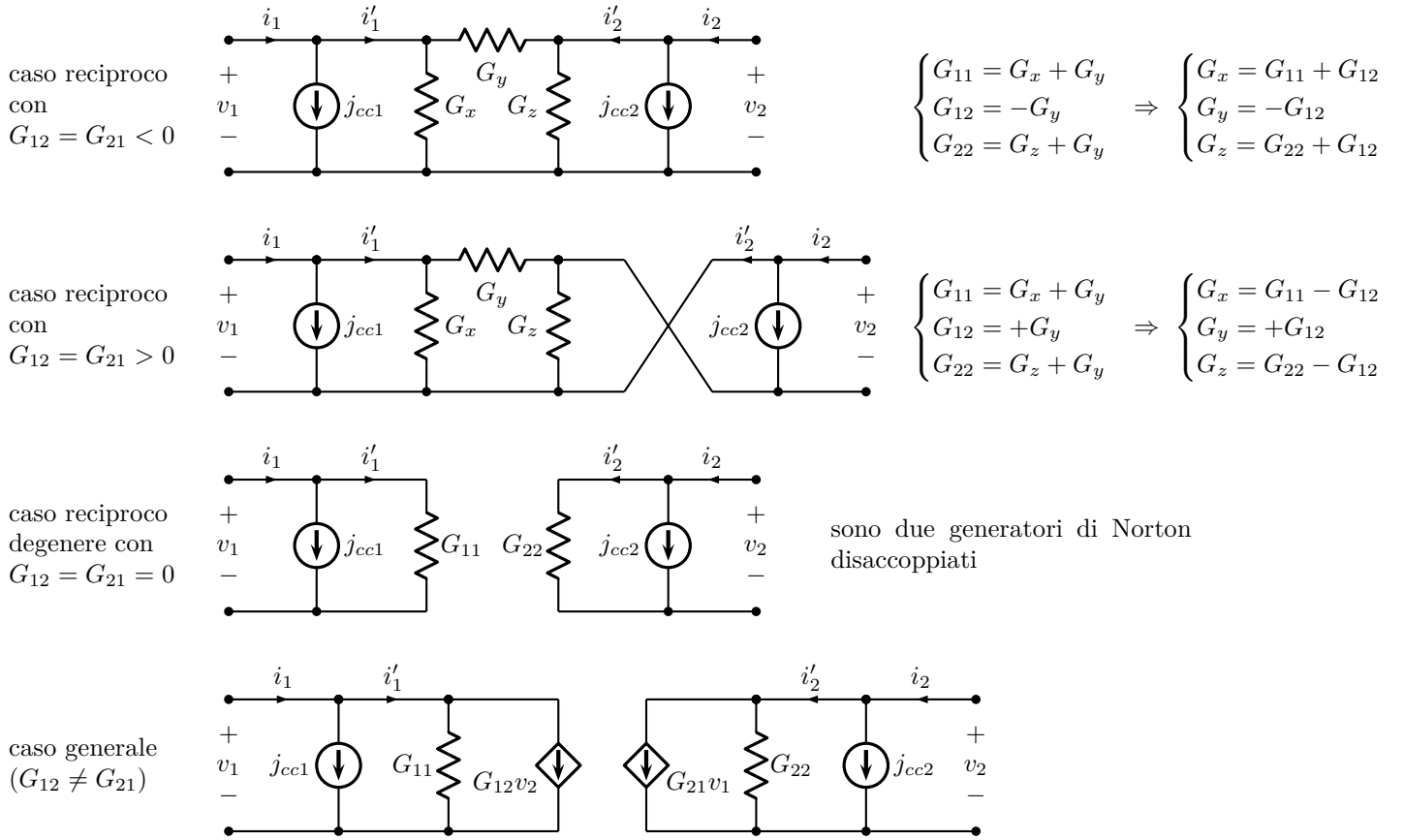


Figura 4.1 Sintesi di un doppio bipolo lineare non inerte definito dalla sua conduttanza equivalente (matriciale) G . Nei primi tre circuiti la sintesi è effettuata mediante la configurazione a Π (degenere nel terzo caso), valida nei casi di matrice G reciproca, mentre nel quarto si rappresenta lo schema generale, valido per matrice G qualsiasi.

Teorema di Thevenin vettoriale, sintesi a T e sintesi in generale

Dualmente, mediante la caratterizzazione in base corrente si ottiene

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 + v''_1 = \overbrace{R_{11}i_1 + R_{12}i_2}^{v'_1} + e_{01} \\ v_2 &= v'_2 + v''_2 = \overbrace{R_{21}i_1 + R_{22}i_2}^{v'_2} + e_{02} \end{aligned}$$

cioè il teorema di Thevenin in forma vettoriale

$$\boxed{v = Ri + e_0} \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad e_0 = \begin{bmatrix} e_{01} \\ e_{02} \end{bmatrix}$$

per il quale si hanno schemi equivalenti riportati in Fig. 4.2, che consentono la sintesi.

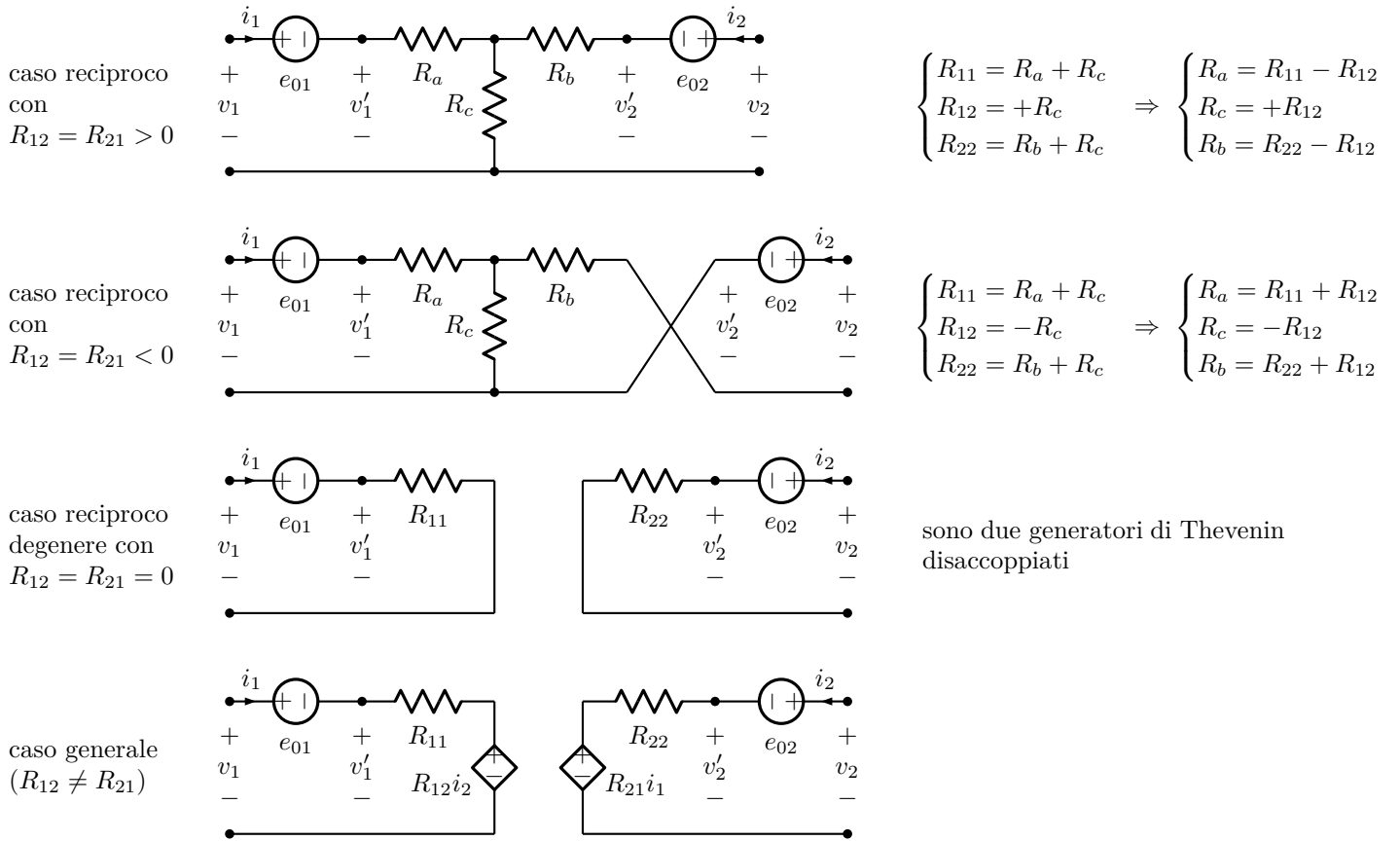


Figura 4.2 Sintesi di un doppio bipolo lineare non inerte definito dalla sua resistenza equivalente (matriciale) R . Nei primi tre circuiti la sintesi è effettuata mediante la configurazione a T (degenere nel terzo caso), valida nei casi di matrice R reciproca, mentre nel quarto si rappresenta lo schema generale, valido per matrice R qualsiasi.

Teorema di Thevenin-Norton ibrido vettoriale

.... work in progress

4.0.29 pag 357 mutuo accoppiamento

Quando $M^2 < L_1 L_2$ (accoppiamento non perfetto) si hanno due grandezze di stato, i_1 e i_2 , che è possibile esplicitare come segue in termini dei loro valori iniziali e della storia delle tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v_1 \\ M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = v_2 \end{cases} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & M \\ v_2 & L_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix}} = \frac{L_2 v_1 - M v_2}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} L_1 & v_1 \\ M & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix}} = \frac{L_1 v_2 - M v_1}{L_1 L_2 - M^2} \end{cases} \quad \begin{cases} i_1(t) = i_1(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{L_2 v_1(\tau) - M v_2(\tau)}{L_1 L_2 - M^2} d\tau \\ i_2(t) = i_2(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{L_1 v_2(\tau) - M v_1(\tau)}{L_1 L_2 - M^2} d\tau \end{cases}$$

Nel caso invece di accoppiamento perfetto il determinante della matrice L è nullo, quindi v_1 e v_2 non sono indipendenti, le precedenti espressioni non sono valide e vi è una sola grandezza di stato (libro pag 360). Inoltre, sempre nel caso di accoppiamento perfetto, si ha

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_1}{M^2/L_1} = n^2 = \frac{N_1^2}{N_2^2} \quad 4.34$$

Riguardo la potenza si ha in generale (ma al solito in ipotesi di limite lentamente variabile)

$$p(t) = \frac{dL}{dt} = v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt}) + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dw_m}{dt}$$

La reciprocità, ovvero il fatto che $M_{12} = M_{21} = M$, implica che dL è un differenziale esatto rispetto alle variabili i_1 e i_2 , essendo $dL = dw_m$ e $w_m = w_m(i_1, i_2)$, o in formule

$$\begin{aligned} dL &= (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt = (L_1 di_1 + M di_2) i_1 + (M di_1 + L_2 di_2) i_2 \\ &= (L_1 i_1 + M i_2) di_1 + (M i_1 + L_2 i_2) di_2 = d \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = dw_m \end{aligned}$$

Analogamente a quanto visto per induttore e capacitore, il mutuo accoppiamento è quindi (grazie alla reciprocità) conservativo.

4.0.30 pag 361 equivalenza circuiti in fig 6.44 (a) e (b)

L'equivalenza tra i due circuiti in fig 6.44 (a) e (b) del testo si può stabilire nel dominio del tempo o anche convenientemente nel dominio della frequenza (invocando la validità generale del metodo simbolico, discussa a pag 51), ad esempio caratterizzando i due doppi bipoli in base corrente.³

Nel dominio del tempo si ha

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{v_1}{v_2} = n \\ i_{L_1} = i_1 + \frac{i_2}{n} \\ v_1 = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \frac{v_1}{v_2} = n \\ i_{L_2} = n i_1 + i_2 \\ v_2 = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} \end{cases}$$

ovvero le relazioni caratteristiche dei due doppi bipoli sono

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{v_1}{v_2} = n \\ v_1 = L_1 \frac{d}{dt} (i_1 + \frac{i_2}{n}) \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \frac{v_1}{v_2} = n \\ v_2 = L_2 \frac{d}{dt} (n i_1 + i_2) \end{cases} \quad 4.35$$

Sostituendo la prima delle relazioni (b) nella seconda e mettendo in evidenza n al secondo membro si ottiene $\frac{v_1}{n} = n L_2 \frac{d}{dt} (i_1 + \frac{i_2}{n})$. Moltiplicando quest'ultima per n ed essendo $n^2 = L_1^2 / M^2 = L_1 / L_2$ ovvero $n^2 L_2 = L_1$ (cioè la regola di riporto al primario), si ottiene la seconda relazione del caso (a). Dunque le relazioni caratteristiche dei casi (a) e (b) sono identiche, ovvero i due circuiti sono equivalenti.

Come anticipato, in base alla validità generale del metodo simbolico (pag 51) l'equivalenza tra i due circuiti in fig 6.44 (a) e (b) del testo si può convenientemente stabilire, con validità più generale, nel dominio della frequenza. La maggiore

³Si noti che, essendoci il vincolo $v_1(t) = n v_2(t)$, la caratterizzazione in base tensione in questo caso non è praticabile, mentre sarebbe viceversa possibile una caratterizzazione ibrida.

generalità riflette il fatto che, in luogo delle induttanze L_1 e L_2 , si possono considerare due generiche impedenze $\dot{Z}_1$ e $\dot{Z}_2$, legate dallo stesso vincolo $n^2 \dot{Z}_2 = \dot{Z}_1$ (riporto al primario). Caratterizzando sempre i due doppi bipoli in base corrente abbiamo

$$(a) \begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = n \\ \bar{I}_{Z_1} = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{n} \\ \bar{V}_1 = \dot{Z}_1 \bar{I}_{Z_1} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = n \\ \bar{I}_{Z_2} = n \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = \dot{Z}_2 \bar{I}_{Z_2} \end{cases} \Rightarrow \quad (a) \begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = n \\ \bar{V}_1 = \dot{Z}_1 (\bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{n}) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = n \\ \frac{\bar{V}_1}{n} = n \dot{Z}_2 (\bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{n}) \end{cases}$$

cioè, dato il vincolo tra le impedenze, le relazioni caratteristiche dei due doppi bipoli sono identiche.

4.0.31 pag 362 accoppiamento non perfetto

inserire figure vari circuiti equivalenti trasformatore senza perdite

$$M^2 < L_1 L_2 \quad 4.36$$

$$k \triangleq \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1 \quad \text{coefficiente di accoppiamento} \quad 4.37$$

$$L_1 = L_1^* + \Delta L_1 \quad L_2 = L_2^* + \Delta L_2 \quad 4.38$$

$$L_1^* L_2^* = M^2 \quad \text{iperbole equilatera nel piano } (L_1^*, L_2^*) \text{ passante per il punto } (L_1^*, L_2^*) = (M, M) \quad 4.39$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1^* = i\omega L_1^* \bar{I}_1 + i\omega M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2^* = i\omega M \bar{I}_1 + i\omega L_2^* \bar{I}_2 \end{cases} \quad \text{trasformatore ad accoppiamento perfetto} \quad 4.40$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = i\omega L_1 \bar{I}_1 + i\omega M \bar{I}_2 = (i\omega L_1^* \bar{I}_1 + i\omega M \bar{I}_2) + i\omega \Delta L_1 \bar{I}_1 = \bar{V}_1^* + \Delta \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 = i\omega M \bar{I}_1 + i\omega L_2 \bar{I}_2 = (i\omega M \bar{I}_1 + i\omega L_2^* \bar{I}_2) + i\omega \Delta L_2 \bar{I}_2 = \bar{V}_2^* + \Delta \bar{V}_2 \end{cases} \quad 4.41$$

$$\frac{\bar{V}_1^*}{\bar{V}_2^*} = \frac{L_1^* \bar{I}_1 + \frac{M}{L_2^*} \bar{I}_2}{M \bar{I}_1 + \frac{L_1^*}{M} \bar{I}_2} = \frac{L_1^*}{M} = n = \frac{M}{L_2^*} \quad 4.42$$

Le possibili coppie (L_1^*, L_2^*) soddisfacenti la relazione $L_1^* L_2^* = M^2$ sono infinite ma non arbitrarie. In particolare il punto (L_1^*, L_2^*) deve appartenere all'arco di iperbole definito come segue

$$L_1^*, L_2^* : \begin{cases} L_1^* \leq L_1 & \text{arco di iperbole equilatera nel piano } (L_1^*, L_2^*) \text{ delimitata dai} \\ L_2^* \leq L_2 & \text{punti } (L_1, \frac{M^2}{L_1}) \text{ (a cui corrisponde } \Delta L_1 = 0 \text{ e } \Delta L_2 = L_2 - \frac{M^2}{L_1}) \\ L_1^* L_2^* = M^2 & \text{e } (\frac{M^2}{L_2}, L_2) \text{ (a cui corrisponde } \Delta L_2 = 0 \text{ e } \Delta L_1 = L_1 - \frac{M^2}{L_2}) \end{cases} \quad 4.43$$

4.0.32 pag 378 decomposizione della soluzione per circuiti del primo ordine

La soluzione generale della equazione differenziale completa che governa il circuito in termini di una qualsiasi grandezza incognita y (tensione o corrente), a partire dalla condizione iniziale y_0 all'istante t_0 può scriversi come

$$y(t) = f_y(t, t_0, y_0, u_{[t_0, t)})$$

dove u è una funzione vettoriale del tempo le cui componenti sono le tensioni e le correnti impresse dai generatori indipendenti (gli ingressi del sistema) e con $u_{[t_0, t)}$ si intende *tutti i valori assunti dalla* restrizione della funzione $u(t)$ nell'intervallo $[t_0, t)$.

Come noto, $y(t)$ si può ottenere come somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e di una qualsiasi soluzione particolare (integrale particolare) dell'equazione completa

$$y(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\text{integrale generale}} + \underbrace{y_{p,t_0}(t)}_{\text{integrale particolare}} = \underbrace{[y_0 - y_{p,t_0}(t_0)]}_{A} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + y_{p,t_0}(t)$$

dove si è aggiunto il pedice t_0 al simbolo che rappresenta la soluzione particolare considerata, per evidenziare che essa in generale può dipendere anche dall'istante iniziale di riferimento (si veda ad esempio il caso della risposta forzata, riportata di seguito), e l'espressione di A si ricava imponendo la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$.

Nei casi in cui esiste, come integrale particolare è particolarmente conveniente considerare la soluzione di regime permanente, che, per circuiti dissipativi (si veda più avanti, anche riguardo le condizioni di esistenza del regime), non dipende da t_0 ed è concettualmente definibile come

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} f_y(t, t_0, y_0, u_{[t_0, t)})$$

Regimi permanenti già studiati sono il regime stazionario e il regime sinusoidale.

Quando il regime esiste si definisce la risposta transitoria come differenza tra la soluzione completa e il regime

$$y_t(t) \stackrel{\text{def}}{=} y(t) - y_r(t)$$

e si ha dunque, in tali casi, la decomposizione

$$y(t) = \underbrace{A_t e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\text{risposta transitoria}} + \underbrace{y_r(t)}_{\text{regime permanente}} = \underbrace{[y_0 - y_r(t_0)]}_{A_t} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + y_r(t)$$

dove, al solito, A_t si ricava imponendo la condizione iniziale.

Si può dimostrare in generale (per circuiti dissipativi di ordine qualsiasi) che la soluzione di regime permanente (quando esiste) non dipende dalle condizioni iniziali, e quindi non dipende dall'istante t_0 . Un generico integrale particolare invece può dipendere da t_0 . Come qualsiasi altra soluzione, esso può infatti scriversi come (si veda la risposta forzata)

$$y_{p,t_0}(t) = A_p e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + y_r(t)$$

In sintesi, ricordando anche la definizione di evoluzione libera e risposta forzata (vedi testo), per una generica incognita y si hanno le seguenti decomposizioni

$$\left\{ \begin{aligned} y(t) &= [y_0 - y_{p,t_0}(t_0)] e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + y_{p,t_0}(t) = \underbrace{y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{[-y_{p,t_0}(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + y_{p,t_0}(t)]}_{\text{risposta forzata}} \\ &= \underbrace{[y_0 - y_r(t_0)] e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\text{risposta transitoria}} + \underbrace{y_r(t)}_{\text{regime permanente}} = \underbrace{y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{[-y_r(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + y_r(t)]}_{\text{risposta forzata}} \end{aligned} \right.$$

in cui notiamo che, mentre risposta transitoria, regime permanente ed evoluzione libera si scrivono formalmente in un unico modo, invece la risposta forzata si può scrivere in più modi, a seconda della specifica soluzione particolare considerata (ma, al solito, come soluzione particolare conviene considerare il regime).

Si noti che la sovrapposizione degli effetti rispetto ai generatori indipendenti in condizioni dinamiche si può applicare solo per il calcolo del regime permanente e dell'evoluzione forzata (perchè non dipendono dalla condizione iniziale y_0), e non per la soluzione completa (che dipende da y_0).

Per la definizione generale di regime permanente e di risposta transitoria si rimanda all'approfondimento riportato a pag. 47.

4.0.33 pag 396 dissipatività

Un circuito si dice *dissipativo* se, nell'evoluzione libera, l'energia immagazzinata negli elementi dinamici tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$: essa viene completamente assorbita dagli elementi a-dinamici passivi (e quindi dissipata in calore e/o trasdotta in altra forma).

Un circuito del primo ordine è dissipativo se e solo se la frequenza naturale è minore di zero (cioè la costante di tempo è maggiore di zero).

Per un circuito del secondo ordine dissipativo le frequenze naturali devono essere entrambe negative (se reali) o entrambe con parte reale negativa (se complesse coniugate).

In generale un circuito di ordine qualsiasi è dissipativo se e solo se tutte le frequenze naturali sono a parte reale negativa.

I circuiti dissipativi sono *asintoticamente stabili* perchè la soluzione in evoluzione libera tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$ indipendentemente dai valori iniziali dello stato: due soluzioni (non necessariamente in evoluzione libera, e corrispondenti allo stesso forzamento) che differiscono solo per le condizioni iniziali tendono a coincidere per $t \rightarrow +\infty$.

4.0.34 pag 397 regime permanente

Per *regime permanente* si intende il comportamento di un circuito dissipativo per $t \rightarrow +\infty$. Più correttamente, si intende il comportamento dopo che sia trascorso un tempo sufficientemente lungo a partire da un certo istante iniziale t_0 nel quale sono specificate le condizioni iniziali, ovvero, in termini ingegneristici, per tempi t tali che $t - t_0 > 5\tau_{\max}$, dove $\tau_{\max}$ è la massima costante di tempo del circuito. Tale comportamento, per via della dissipatività, non dipende dai valori iniziali delle grandezze di stato ma solo dalle grandezze impresse dai generatori indipendenti e dai parametri degli elementi lineari del circuito.

Da un punto di vista formale, come anticipato per i circuiti del primo ordine e, come si vedrà, anche per circuiti di ordine qualsiasi, il regime permanente si definisce come limite della espressione generale della soluzione per $t_0 \rightarrow -\infty$.

Si ricordano i seguenti importanti tipi di regime:

- **Regime stazionario**

In un circuito lineare tempo-invariante dissipativo con soli generatori stazionari, il regime di funzionamento che si instaura è anch'esso stazionario

- **Regime polinomiale** (utile ad esempio anche in robotica e nei sistemi economici)

In un circuito lineare tempo-invariante dissipativo con soli generatori polinomiali di grado massimo pari ad n , il regime di funzionamento che si instaura è anch'esso polinomiale di grado n (Celentano 167)

- **Regime sinusoidale**

In un circuito lineare tempo-invariante dissipativo con soli generatori sinusoidali ed isofrequenziali, il regime di funzionamento che si instaura è anch'esso sinusoidale con la stessa pulsazione dei generatori

- **Regimi periodico ed aperiodico**

Per un circuito lineare tempo-invariante dissipativo contenente generatori costanti e generatori sinusoidali con diverse pulsazioni, il regime risultante è dato dalla sovrapposizione dei regimi che si avrebbero se i generatori agissero singolarmente. Esso è periodico se tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro, è invece aperiodico se non tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro

Esempio di calcolo della soluzione per il regime polinomiale

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \quad x(t) \text{ tensione o corrente} \quad 4.44$$

$$f(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n = \sum_{k=0}^n b_k t^k \quad 4.45$$

Cercheremo una soluzione del tipo

$$x(t) = \sum_{k=0}^m c_k t^k \quad \text{con } m = n \text{ se } a_0 \neq 0 \quad 4.46$$

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^m k c_k t^{k-1} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=2}^m k(k-1) c_k t^{k-2} \quad 4.47$$

Se fosse $a_0 = 0$ occorrerebbe assumere $m = n + 1$, ma in tal caso ci sarebbe un autovalore nullo, e il circuito non sarebbe dissipativo.

Per illustrare il metodo è già sufficiente considerare il caso semplice di circuito del primo ordine e forzamento di secondo grado

$$\begin{aligned} a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x &= f(t) & f(t) &= b_0 + b_1t + b_2t^2 \\ x(t) &= c_0 + c_1t + c_2t^2 & \frac{dx}{dt} &= c_1 + 2c_2t \end{aligned} \quad 4.48$$

$$\begin{aligned}
 a_1(c_1 + 2c_2t) + a_0(c_0 + c_1t + c_2t^2) &= b_0 + b_1t + b_2t^2 \\
 \begin{cases} a_0c_0 + a_1c_1 = b_0 \\ a_0c_1 + 2a_1c_2 = b_1 \\ a_0c_2 = b_2 \end{cases} &\quad \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ & a_0 & 2a_1 \\ & & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\
 c_2 = \frac{b_2}{a_0} \quad c_1 = \frac{b_1 - 2a_1c_2}{a_0} \quad c_0 = \frac{b_0 - a_1c_1}{a_0} &
 \end{aligned}
 \tag{4.49}$$

$$\tag{4.50}$$

4.0.35 Esempi di circuiti non dissipativi

Circuito serie R - C_1 - C_2 (due condensatori in serie)

inserire figura circuito semplice con C_1 , C_2 ed R in serie

In questa configurazione le due tensioni sui condensatori v_1 e v_2 non tendono asintoticamente a zero, salvo che per il caso di particolari combinazioni dei valori delle capacità e delle condizioni iniziali.

$$\begin{aligned}
 v_1(0) &= V_{10} \quad v_2(0) = V_{20} \quad v(0) = V_0 = V_{10} + V_{20} \quad C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad \tau = RC_s \\
 v_l(t) &= V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{evoluzione libera} \\
 i_l(t) &= -\frac{v_l(t)}{R} \quad \frac{dv_{l1}}{dt} = \frac{i_l}{C_1} = -\frac{v_l(t)}{RC_1} = -\frac{V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{RC_1} \quad v_{l1}(t) - V_{10} = -\frac{V_0}{RC_1} \int_0^t e^{-\frac{u}{\tau}} du = -\frac{V_0}{RC_1} \left[-\tau e^{-\frac{u}{\tau}} \right]_0^t \\
 v_{l1}(t) &= V_{10} - \frac{\tau V_0}{RC_1} [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] = V_{10} - \frac{C_2 V_0}{C_1 + C_2} [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] \\
 v_{l1}(+\infty) &= V_{10} - \frac{C_2 V_0}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_{10} - C_2 V_{20}}{C_1 + C_2} \quad v_{l2}(+\infty) = V_{20} - \frac{C_1 V_0}{C_1 + C_2} = -\frac{C_1 V_{10} - C_2 V_{20}}{C_1 + C_2}
 \end{aligned}$$

Nel seguente caso semplificato risulta

$$C_1 = C_2 \Rightarrow v_{l1}(+\infty) = \frac{V_{10} - V_{20}}{2} \quad v_{l2}(+\infty) = -\frac{V_{10} - V_{20}}{2}$$

e così ad esempio per $C_1 = C_2$ e $V_{10} = 8$, $V_{20} = 4$ si ha $v_{l1}(+\infty) = 2$ e $v_{l2}(+\infty) = -2$.

Dal punto di vista del teorema di conservazione delle potenze si ha

$$p_1 + p_2 = -p_R \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C_1 v_{l1}^2 + \frac{1}{2} C_2 v_{l2}^2 \right) = -\frac{(v_{l1} + v_{l2})^2}{R} \quad \frac{dw_i}{dt} = -\frac{(v_{l1} + v_{l2})^2}{R}$$

dove si vede che la funzione positiva w_i è asintoticamente decrescente, ma non tende a zero dato che il suo asintoto è determinato dalla condizione $v_{l1} + v_{l2} = 0$, per la quale la decrescita si arresta asintoticamente.

Circuito serie $R - L_1 // L_2$ (due induttori in parallelo)

Caso duale rispetto al precedente

pag 400 Circuito LC forzato sinusoidalmente in risonanza, e analogia con sistema meccanico (altalena)

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} e(t) = v_L + v_C \\ v_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases} &\quad \begin{cases} v_L = L \frac{d}{dt} \left(C \frac{dv_C}{dt} \right) = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} \\ e(t) = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C \end{cases} \\
 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{v_C}{LC} &= \frac{e(t)}{LC} \quad \text{se qui si prova ad usare il metodo simbolico alla risonanza } (\omega = \omega_r) \text{ il primo membro} \\
 &\quad \text{si annulla, poiché alla derivata seconda corrisponde } (i\omega_r)^2 = -\omega_r^2 = -\frac{1}{LC}
 \end{aligned}$$

Oppure $\frac{de}{dt} = \frac{dv_L}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C}$, da cui

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_r^2 i &= \frac{1}{L} \frac{de}{dt} \quad \omega_r^2 = \frac{1}{LC} \\
 e(t) &= \sqrt{2} E \cos(\omega t) \quad \frac{de}{dt} = -\sqrt{2} E \omega \sin(\omega t) = -\sqrt{2} E \omega \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} E \omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})
 \end{aligned}$$

Ragionando nel dominio del tempo, ipotizziamo una soluzione particolare del tipo $i_p(t) = \sqrt{2}I_p \cos(\omega t + \beta_p)$, da cui

$$\begin{aligned}\frac{d^2 i_p}{dt^2} &= -\sqrt{2}\omega^2 I_p \cos(\omega t + \beta_p) = -\omega^2 i_p \\ -\omega^2 i_p + \omega_r^2 i_p &= \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} \\ (\omega_r^2 - \omega^2) \sqrt{2} I_p \cos(\omega t + \beta_p) &= \sqrt{2} \frac{\omega E}{L} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

e si vede che per $\omega = \omega_r$ il circuito non possiede una soluzione di regime sinusoidale (l'impedenza equivalente della serie LC alla pulsazione di risonanza è nulla). Per $\omega \neq \omega_r$ la soluzione di regime è

$$i_p(t) = \sqrt{2} \frac{\omega E}{(\omega_r^2 - \omega^2)L} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad \omega \neq \omega_r$$

Quando $\omega = \omega_r$ si ipotizza una soluzione particolare del tipo $i_{pr}(t) = (a + bt) \cos(\omega_r t + \beta_p)$ e se ne determinano i parametri sostituendola nell'equazione (alternativamente si può usare il metodo della trasformazione di Laplace, vedi tabella libro pag 460). Si ha

$$\begin{aligned}\frac{di_{pr}}{dt} &= b \cos(\omega_r t + \beta_p) - (a + bt) \omega_r \sin(\omega_r t + \beta_p) \\ \frac{d^2 i_{pr}}{dt^2} &= -2b\omega_r \sin(\omega_r t + \beta_p) - \omega_r^2 i_{pr} \\ -2b\omega_r \sin(\omega_r t + \beta_p) &= -\sqrt{2} \frac{\omega_r E}{L} \sin(\omega_r t) \quad 2b = \sqrt{2} \frac{E}{L} \quad \beta_p = 0 \\ i_{pr}(t) &= (i_{pr}(0) + \frac{E}{\sqrt{2}L} t) \cos(\omega_r t) \quad \omega = \omega_r\end{aligned}$$

Riguardo la soluzione in evoluzione libera (o l'integrale generale dell'equazione omogenea associata), essa sarà del tipo $i_l(t) = \sqrt{2}I_l \cos(\omega_r t + \beta_l)$.

Il disastro del Tacoma Narrows Bridge

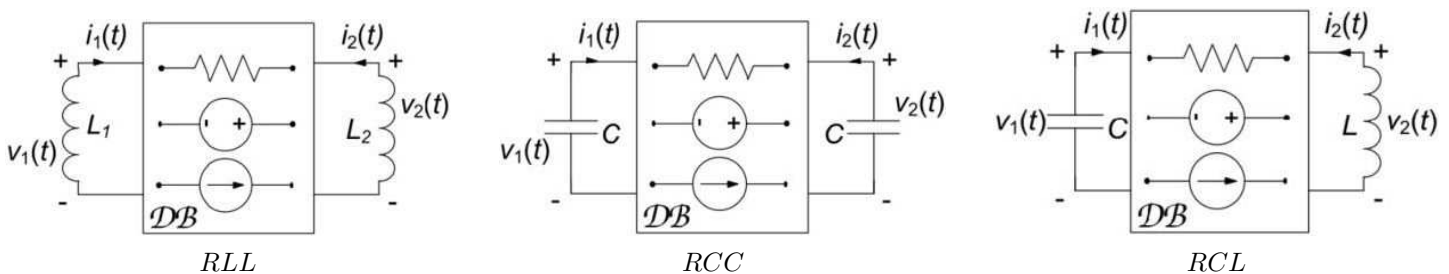
Il primo ponte Tacoma Narrows fu aperto al traffico dei veicoli nel Luglio 1940 e crollò quattro mesi più tardi per azione di un vento di 67 km/h. Il ponte era stato progettato per resistere a venti di intensità molto maggiore, ma crollò a causa di un fenomeno fisico ora noto come *flutter aer elastico*. In sintesi il flusso d'aria in direzione ortogonale alla estensione in lunghezza del ponte si traduce in un momento ad andamento periodico nel tempo con frequenza $f \gtrsim \frac{v}{\ell}$, ove v è la velocità del vento ed ℓ è la larghezza del ponte, che mette in *oscillazione torsionale* il ponte stesso.

A rigore il flutter aer elastico è un fenomeno fisico distinto da quello della *risonanza*, tuttavia risulta istruttivo fare un parallelo tra i due fenomeni.

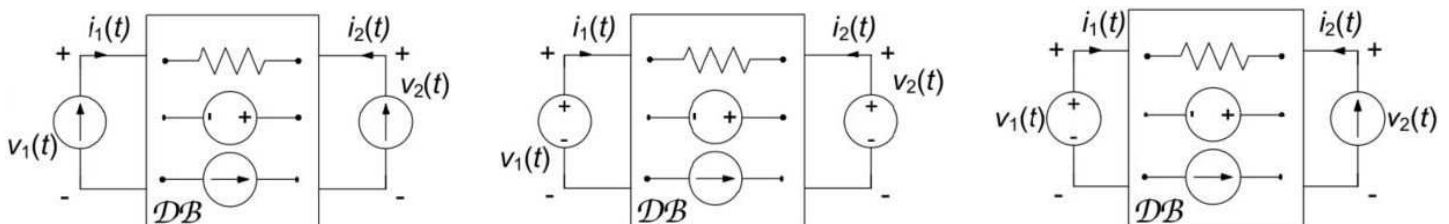
In rete sono presenti video che mostrano le vistosissime oscillazioni ed il crollo del ponte, li si trova facilmente, la visione è altamente consigliata. Il ponte era costruito in cemento armato, ma oscillava come fosse di carta.

4.0.36 pag 411,415,434 circuito resistivo associato e modello ABCD

Si considerino le 3 possibili tipologie di circuiti dinamici del secondo ordine



e i corrispondenti circuiti resistivi associati



per i quali le variabili di stato sono rispettivamente

$$i_1, i_2 \quad v_1, v_2 \quad v_1, i_2$$

e le variabili duali (delle variabili di stato)

$$v_1, v_2 \quad i_1, i_2 \quad i_1, v_2$$

Ricordiamo che le equazioni di stato costituiscono un sistema di equazioni differenziali del primo ordine (2 equazioni del primo ordine per un sistema dinamico di ordine 2) nel quale le uniche incognite sono le variabili di stato. Per determinarle si parte dalle relazioni caratteristiche degli elementi dinamici, che nei tre casi sono

$$\begin{aligned} -L_1 \frac{di_1}{dt} &= v_1 & -C_1 \frac{dv_1}{dt} &= i_1 & -C \frac{dv_1}{dt} &= i_1 \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} &= v_2 & -C_2 \frac{dv_2}{dt} &= i_2 & -L \frac{di_2}{dt} &= v_2 \end{aligned}$$

Sia b il numero di generatori indipendenti presenti all'interno del doppio bipolo non inerte, e si denoti con $u = [u_1, u_2, \dots, u_b]^T$ il vettore colonna il cui generico elemento $u_k = e_k$ (o $u_k = j_k$) rappresenta la tensione (o la corrente) impressa dal k -mo generatore. Adoperando il metodo del circuito resistivo associato (circuiti in basso nella figura) si riconosce che tutte le grandezze si esprimono come combinazione delle variabili di stato e dei generatori indipendenti. Ciò vale in particolare per le variabili duali, il che implica che le equazioni di stato sono del tipo

$$\begin{aligned} -L_1 \frac{di_1}{dt} &= r_1(i_1, i_2, u) & -C_1 \frac{dv_1}{dt} &= g_1(v_1, v_2, u) & -C \frac{dv_1}{dt} &= h_1(v_1, i_2, u) \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} &= r_2(i_1, i_2, u) & -C_2 \frac{dv_2}{dt} &= g_2(v_1, v_2, u) & -L \frac{di_2}{dt} &= h_2(v_1, i_2, u) \end{aligned}$$

Le funzioni r_i , g_i e h_i ci sono già note, in quanto corrispondono alla caratterizzazione del doppio bipolo non inerte rispettivamente in corrente (teorema di Thevenin vettoriale), in tensione (teorema di Norton vettoriale) e ibrida, e dunque

$$\begin{aligned} -L_1 \frac{di_1}{dt} &= R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + e_{01}(u) & -C_1 \frac{dv_1}{dt} &= G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + j_{cc1}(u) & -C \frac{dv_1}{dt} &= \mathcal{H}_{11}v_1 + \mathcal{H}_{12}i_2 + j_{cc1}^{\mathcal{H}}(u) \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} &= R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + e_{02}(u) & -C_2 \frac{dv_2}{dt} &= G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + j_{cc2}(u) & -L \frac{di_2}{dt} &= \mathcal{H}_{21}v_1 + \mathcal{H}_{22}i_2 + e_{02}^{\mathcal{H}}(u) \end{aligned}$$

Si noti che le funzioni j_{cc1} e $j_{cc1}^{\mathcal{H}}$ sono diverse: la prima (la seconda) è la corrente di corto circuito alla porta 1 quando la porta 2 è anch'essa in cortocircuito (è un circuito aperto). Analogamente e_{02} ed $e_{02}^{\mathcal{H}}$ sono funzioni differenti.

Per i 3 casi considerati, le equazioni di stato sono infine

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_{11}}{L_1}i_1 - \frac{R_{12}}{L_1}i_2 - \frac{e_{01}(u)}{L_1} & \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{G_{11}}{C_1}v_1 - \frac{G_{12}}{C_1}v_2 - \frac{j_{cc1}(u)}{C_1} & \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\mathcal{H}_{11}}{C}v_1 - \frac{\mathcal{H}_{12}}{C}i_2 - \frac{j_{cc1}^{\mathcal{H}}(u)}{C} \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{R_{21}}{L_2}i_1 - \frac{R_{22}}{L_2}i_2 - \frac{e_{02}(u)}{L_2} & \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{G_{21}}{C_2}v_1 - \frac{G_{22}}{C_2}v_2 - \frac{j_{cc2}(u)}{C_2} & \frac{di_2}{dt} &= -\frac{\mathcal{H}_{21}}{L}v_1 - \frac{\mathcal{H}_{22}}{L}i_2 - \frac{e_{02}^{\mathcal{H}}(u)}{L} \end{aligned} \quad 4.51$$

La discussione procede ora con lo scopo di giungere ad un formalismo unico valido per tutti e tre i casi RLL , RCC ed RCL . Le funzioni $e_{0i}(u)$, $j_{cci}(u)$ etc., si ottengono a seconda del caso collegando alle porte del doppio bipolo circuiti aperti/cortocircuiti. Applicando la sovrapposizione si vede quindi che esse si ottengono come combinazione lineare dei generatori indipendenti interni al doppio bipolo. Si può pertanto scrivere

$$\begin{bmatrix} e_{01} \\ e_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1b} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_b \end{bmatrix} = \Gamma u \quad \text{e analogamente} \quad \begin{bmatrix} j_{cc1} \\ j_{cc2} \end{bmatrix} = \Gamma u \quad \begin{bmatrix} j_{cc1}^{\mathcal{H}} \\ e_{02}^{\mathcal{H}} \end{bmatrix} = \Gamma u$$

dove Γ è la matrice contenente i coefficienti delle suddette combinazioni lineari, costituita di 2 righe e b colonne (per un

circuito con n elementi dinamici Γ avrebbe n righe e b colonne). Ponendo

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} & x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} & x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} -\frac{R_{11}}{L_1} & -\frac{R_{12}}{L_1} \\ -\frac{R_{21}}{L_2} & -\frac{R_{22}}{L_2} \end{bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} -\frac{G_{11}}{C_1} & -\frac{G_{12}}{C_1} \\ -\frac{G_{21}}{C_2} & -\frac{G_{22}}{C_2} \end{bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} -\frac{\mathcal{H}_{11}}{L} & -\frac{\mathcal{H}_{12}}{L} \\ -\frac{\mathcal{H}_{21}}{L} & -\frac{\mathcal{H}_{22}}{L} \end{bmatrix} \\
 &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} & &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} & &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{22} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{e_{01}}{L_1} \\ -\frac{e_{02}}{L_2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{01} \\ e_{02} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{j_{cc1}}{C_1} \\ -\frac{j_{cc2}}{C_2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{cc1} \\ j_{cc2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{j_{cc1}^H}{C} \\ -\frac{e_{02}^H}{L} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{cc1}^H \\ e_{02}^H \end{bmatrix} \\
 &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \Gamma u = Bu & &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \Gamma u = Bu & &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \Gamma u = Bu
 \end{aligned}$$

il sistema delle equazioni di stato si scrive per tutti e tre i casi come

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + f_1(u) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_2(u)
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Queste equazioni possono essere risolte in vari modi. Una possibilità consiste nell'eliminare una delle due incognite. Ad esempio, isolando x_2 dalla prima e sostituendola nella seconda si giunge a (il puntino rappresenta la derivata temporale, mentre tr e $\det$ denotano la traccia e il determinante)

$$\ddot{x}_1 - \text{tr}(A)\dot{x}_1 + \det(A)x_1 = A_{12}f_2 - A_{22}f_1 + \dot{f}_1 \quad (\text{prob. corretta, ma da ricontrollare})$$

che va risolta imponendo le condizioni iniziali $x_1(t_0)$ e $\dot{x}_1(t_0)$. Si faccia attenzione al fatto che, mentre x_1 è una variabile di stato, $\dot{x}_1$ non lo è (salvo casi fortuiti). Quindi in generale per imporre la seconda condizione iniziale bisogna usare la relativa equazione di stato. Date la condizione iniziale sulle variabili di stato $x_{10} = x_1(t_0)$ e $x_{20} = x_2(t_0)$, il problema di Cauchy nella funzione incognita $x_1(t)$ è quindi il seguente

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - \text{tr}(A)\dot{x}_1 + \det(A)x_1 = A_{12}f_2 - A_{22}f_1 + \dot{f}_1 \\ x_1(t_0) = x_{10} \\ \dot{x}_1(t_0) = A_{11}x_{10} + A_{12}x_{20} + f_1(u(t_0)) \end{cases} \tag{4.53}$$

Un secondo metodo per risolvere le equazioni di stato origina dal considerarne la forma vettoriale

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

Detta $x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$ la condizione iniziale, il problema di Cauchy da risolvere è in tal caso il seguente

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{formalmente identico al caso dei circuiti del primo ordine}) \tag{4.54}$$

La soluzione di questo problema ai valori iniziali matriciale ci fornisce *entrambe* le grandezze di stato.

Sono tipicamente di interesse anche altre grandezze *di uscita*, diverse dalle variabili di stato, che possiamo indicare con un *vettore delle uscite* y . Poichè al solito, qualunque grandezza si può esprimere come combinazione lineare delle variabili di stato e dei generatori, vi saranno due matrici C e D mediante le quali si esprime y in termini di x ed u . Avremo in definitiva il seguente cosiddetto *modello ABCD*

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu \\
 y &= Cx + Du
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Le matrici ABCD possono dipendere dal tempo (circuito tempo variante) nel qual caso, esplicitando tutte le dipendenze temporali, il sistema si scriverà in generale come

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\
 y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)
 \end{aligned}$$

L'analisi del caso tempo variante è in generale più complessa, e nel seguito ci limiteremo principalmente a considerare il caso tempo invariante. Semplici casi di circuiti tempo varianti (ad esempio chiusura e apertura di interruttori) possono essere trattati con le tecniche che seguono, che si riferiscono al caso tempo invariante, combinandole con l'*analisi ad intervalli* (si veda il testo, pag. 426, e si veda anche il semplice artificio della *traslazione temporale del forzamento*, pag. 424).

4.0.37 Circuiti di ordine n

La trattazione sin qui illustrata con riferimento ad un sistema generale del secondo ordine, può ovviamente ripetersi concettualmente inalterata con riferimento ad un sistema generale di ordine n , considerando gli n elementi dinamici connessi alla restante parte del circuito, che risulterà essere un n -porte (o sottorete n -bipolare). Il formalismo del modello ABCD è quindi generale, e la sua soluzione può esprimersi con espressioni del tipo

$$\begin{aligned}x(t) &= \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) \\ y(t) &= \eta(t, x(t), u(t))\end{aligned}\quad 4.56$$

dove con $u_{[t_0, t)}$ si intende *tutti i valori assunti dalla restrizione della funzione $u(t)$ nell'intervallo $[t_0, t)$* .

Rifereiamoci ora come detto al caso (lineare e) tempo invariante. Si verifica subito che una soluzione del problema omogeneo associato $\dot{x} = Ax$ è del tipo $x(t) = ue^{\lambda(t-t_0)}$, dove u è un opportuno vettore⁴ e λ un opportuno scalare. Infatti imponendo che essa sia soluzione si ottiene $\lambda ue^{\lambda(t-t_0)} = Aue^{\lambda(t-t_0)}$, ovvero $Au = \lambda u$. Quindi $x(t)$ è effettivamente soluzione a patto che λ sia un autovalore di A ed u sia un corrispondente autovettore (si ricorda che gli autovettori sono definiti a meno di un fattore moltiplicativo).

Comprendere autovalori e autovettori

- una matrice A (di dimensione $n \times n$) trasforma un vettore x in un vettore $y = Ax$
- A definisce implicitamente n direzioni privilegiate
- le direzioni privilegiate sono date dagli autovettori u_j ($j = 1, \dots, n$), a cui sono associati gli autovalori λ_j
- lungo le direzioni privilegiate la matrice A si comporta come un semplice numero: $Au_j = \lambda_j u_j$
- supponendo λ_j reale, l'applicazione di A ad u_j produce lo stesso u_j ma allungato ($\lambda_j > 1$), accorciato ($0 < \lambda_j < 1$) o riflesso ($\lambda_j < 0$)
- l'applicazione di A ad un generico vettore x produce in generale un vettore y ruotato e con modulo diverso rispetto ad x
- A sufficientemente regolare $\Rightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ è una base $\Rightarrow$ per ogni vettore x si ha $x = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$ e dunque $y = Ax = a_1 \lambda_1 u_1 + \dots + a_n \lambda_n u_n$
- È chiaro che gli autovettori corrispondenti agli autovalori aventi modulo maggiore sono quelli che contano maggiormente. Ad esempio se $|\lambda_1| \gg |\lambda_k|$ per $k \geq 2$ e a_1 non è piccolo rispetto agli altri a_k , allora $y \cong a_1 \lambda_1 u_1$. Considerazioni di questo tipo sono alla base degli algoritmi di compressione delle informazioni (ad esempio immagini jpeg), approssimazioni di funzioni (low rank approximation) e altro.

... da completare

.....

...

Se A possiede n autovalori distinti λ_j ($j = 1, \dots, n$), detti $u_j = [u_{j1} \dots u_{jn}]^T$ i corrispondenti autovettori (che sono indipendenti), le funzioni $x_j(t) = u_j e^{\lambda_j(t-t_0)}$ sono indipendenti e la soluzione generale del problema omogeneo associato sarà $x_g(t) = \sum_{j=1}^n k_j x_j(t)$, dove le k_j sono costanti arbitrarie. Detta $x_p(t)$ una soluzione particolare si ha la soluzione completa

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = \sum_{j=1}^n k_j u_j e^{\lambda_j(t-t_0)} + x_p(t) \quad \left(\begin{array}{l} \text{nel caso di circuito di ordine 2:} \\ x_1(t) = k_1 u_{11} e^{\lambda_1(t-t_0)} + k_2 u_{21} e^{\lambda_2(t-t_0)} + x_{p1}(t) \\ x_2(t) = k_1 u_{12} e^{\lambda_1(t-t_0)} + k_2 u_{22} e^{\lambda_2(t-t_0)} + x_{p2}(t) \end{array} \right) \quad 4.57$$

⁴non si faccia confusione tra il vettore degli ingressi e gli autovettori, entrambi (comunemente) denotati con la lettera u

Donotiamo con $T = [u_1 \dots u_n]$ la matrice (invertibile) le cui colonne sono gli autovettori e con $k = [k_1 \dots k_n]^T$ il vettore colonna delle costanti, e ricordiamo che il prodotto Tk è convenientemente interpretato come la combinazione lineare delle colonne di T mediante i coefficienti $k_1, \dots, k_n$, ossia come prodotto colonne per righe, anzichè righe per colonne. In formule $Tk = \sum_{j=1}^n u_j k_j$. Imponendo le condizioni iniziali, si determinano le costanti stesse risolvendo il sistema

$$x_0 = x(t_0) = \sum_{j=1}^n u_j k_j + x_p(t_0) = Tk + x_p(t_0) \quad \left(\begin{array}{l} \text{nel caso di circuito di ordine 2:} \\ k_1 u_{11} + k_2 u_{21} = x_1(t_0) - x_{p1}(t_0) \\ k_1 u_{12} + k_2 u_{22} = x_2(t_0) - x_{p2}(t_0) \end{array} \right)$$

la cui soluzione è

$$k = T^{-1}[x_0 - x_p(t_0)] \quad (\text{in Matlab: } k=T \backslash (x_0 - x_{p0})) \quad \mathbf{4.58}$$

In sintesi si è ottenuto quanto segue. Si supponga che A abbia n autovettori indipendenti e sia T la matrice le cui colonne sono gli autovettori u_j . Sia inoltre $x_p(t)$ un qualsiasi integrale particolare (vettoriale) dell'equazione $\dot{x} = Ax + Bu$. Allora la soluzione del problema di Cauchy, avente condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ è data dalla 4.57, dove le k_j sono le componenti del vettore k 4.58.

Matrice di transizione e^{At}

Esiste un formalismo compatto per rappresentare (e calcolare) la soluzione del problema di Cauchy vettoriale, e che risulta anche efficace per sviluppi teorici. Per vederlo, si noti anzitutto che l'equazione $\dot{x} = Ax + Bu$ è formalmente identica a quella relativa ad un generico circuito del primo ordine, nel qual caso x non è un vettore ma una singola variabile di stato (la tensione dell'unico capacitore o la corrente dell'unico induttore), A è uno scalare, e B è un vettore riga (cosicché $Bu(t)$ è uno scalare).

In particolare anche l'equazione omogenea associata vettoriale è quindi formalmente identica a quella scalare, e tale è anche la sua soluzione generale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax && \text{equazione omogenea associata vettoriale, per un circuito di ordine } n \\ x(t) &= e^{A(t-t_0)} h && \text{soluzione, con } h \text{ costante vettoriale da determinare} \end{aligned}$$

ove ovviamente bisogna precisare cosa si intende per esponenziale di una matrice. La definizione è data dalla seguente serie (convergente), esattamente analoga alla serie di Taylor della classica funzione esponenziale di variabile scalare

$$e^M \triangleq I + M + \frac{M^2}{2!} + \dots + \frac{M^k}{k!} + \dots \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots \quad \mathbf{4.59}$$

La matrice $\Phi(t) = e^{At}$ prende il nome di *matrice di transizione*. A dispetto della definizione, il calcolo di e^{At} è concettualmente semplice. In base a quanto su riportato e come già visto per i circuiti del primo e del secondo ordine, ci aspettiamo che in generale e^{At} si esprima in termini delle frequenze naturali del circuito (cioè gli autovalori di A) mediante combinazione lineare di funzioni del tipo $e^{\lambda_i t}$ (oppure, nel caso in cui A non sia dotata di n autovettori indipendenti, del tipo $p(t)e^{\lambda_i t}$, con $p(t)$ polinomio in t).

Derivando la serie termine a termine si ha $\frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2 t + \dots + \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots = A(I + At + \dots + \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots) = Ae^{At}$ e similmente $\frac{d}{dt}[e^{A(t-t_0)} h] = Ae^{A(t-t_0)} h$, quindi $x(t) = e^{A(t-t_0)} h$ è effettivamente soluzione di $\dot{x} = Ax$. Per l'integrale generale deve dunque sussistere l'uguaglianza

$$x_g(t) = e^{A(t-t_0)} h = \sum_{j=1}^n k_j u_j e^{\lambda_j(t-t_0)} \quad \mathbf{4.60}$$

La soluzione completa e la costante vettoriale h si ottengono come

$$\begin{aligned} x(t) &= x_g(t) + x_p(t) = e^{A(t-t_0)} h + x_p(t) \\ t = t_0 &\Rightarrow h = x_0 - x_p(t_0) \quad (h = Tk) \end{aligned} \quad \mathbf{4.61}$$

Se $x_p(t_0) = 0$ (si escludano generatori impulsivi, altrimenti occorre considerare $x_p(t_0^-) = 0$), allora x_g e x_p diventano rispettivamente l'evoluzione libera x_l e la risposta forzata x_f (l'espressione per quest'ultima sarà ottenuta in seguito) e si ha

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + x_f(t)$$

Calcolo diretto di e^{At} (decomposizione spettrale di e^{At}) quando A è diagonalizzabile

Se gli autovalori di A sono distinti allora gli autovettori sono indipendenti. Anche se gli autovalori di A non sono distinti può comunque esistere un set di n autovettori indipendenti. Ad esempio la matrice identità I ha l'unico autovalore $\lambda = 1$ di

molteplicità n , ed essendo⁵ $Iu = u$, $\forall u$, un qualunque insieme di n vettori indipendenti costituisce una base di autovettori. Più in generale, per una qualsiasi matrice reale simmetrica (o complessa hermitiana) gli autovalori sono reali e gli autovettori possono essere scelti ortogonali e quindi indipendenti (teorema spettrale, Strang 299 e 308).

Supposto allora che A abbia n autovettori indipendenti, detta $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale, e $T = [u_1 \dots u_n]$ la matrice (certamente invertibile) le cui colonne sono i corrispondenti autovettori, risulta

$$AT = A[u_1 \dots u_n] = [Au_1 \dots Au_n] = [\lambda_1 u_1 \dots \lambda_n u_n] = [u_1 \dots u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = T\Lambda$$

$$A = T\Lambda T^{-1} \quad T^{-1}A = \Lambda T^{-1}$$

$$t' = t - t_0 \quad e^{At'} = I + \Lambda t' + \underbrace{\frac{\Lambda^2 t'^2}{2!} + \dots}_{\text{somma di matrici diagonali}} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t'}, \dots, e^{\lambda_n t'})$$

$$\begin{cases} (T\Lambda T^{-1})^2 = (T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1}) = T\Lambda^2 T^{-1} \\ (T\Lambda T^{-1})^3 = (T\Lambda T^{-1})^2(T\Lambda T^{-1}) = T\Lambda^2 T^{-1}T\Lambda T^{-1} = T\Lambda^3 T^{-1} \\ \dots \end{cases} \Rightarrow (T\Lambda T^{-1})^k = T\Lambda^k T^{-1}$$

$$\begin{aligned} e^{At'} &= e^{T\Lambda T^{-1}t'} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T\Lambda T^{-1}t')^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T\Lambda^k T^{-1}t'^k}{k!} = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t'^k}{k!} T^{-1} = T e^{\Lambda t'} T^{-1} = [u_1 \dots u_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t'} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t'} \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= [u_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} \dots u_n e^{\lambda_n(t-t_0)}] T^{-1} \end{aligned}$$

4.62

Equazioni dinamiche disaccoppiate

Si osservi che, con il cambio di variabili di stato $z = T^{-1}x$, risulta $\dot{z} = T^{-1}\dot{x} = T^{-1}(Ax + Bu) = \Lambda T^{-1}x + T^{-1}Bu$ ovvero, ponendo $T^{-1}Bu = B_z u = [f_{z1} \dots f_{zn}]^T$

$$\dot{z} = \Lambda z + B_z u \quad \text{ossia} \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{z1}(u) \\ \vdots \\ f_{zn}(u) \end{bmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + f_{z1}(u) \\ \dots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n + f_{zn}(u) \end{cases} \quad 4.63$$

Dunque nelle coordinate z_k il problema (il problema omogeneo associato) si riduce ad n equazioni disaccoppiate del tipo $\dot{z}_k = \lambda_k z_k + f_{zk}(u)$ (del tipo $\dot{z}_k = \lambda_k z_k$, vedi libro pag 441).

Quando gli autovalori sono tutti reali, è come se lo studio del circuito di ordine n fosse ricondotto allo studio di n circuiti di ordine 1.

Nel caso in cui siano presenti coppie di autovalori complessi coniugati, ciascuna coppia dà luogo a termini dinamici di tipo oscillatorio analoghi a quelli di un circuito di ordine 2. Infatti ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda_k = -\sigma_k + i\omega_{dk}$ e λ_k^* corrispondono le due equazioni coniugate $\dot{z}_k = \lambda_k z_k$ e $\dot{z}_k^* = \lambda_k^* z_k^*$. Considerando ad esempio la prima si ha

$$\dot{z}_k^r + i\dot{z}_k^i = (-\sigma_k + i\omega_{dk})(z_k^r + iz_k^i) \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_k^r = -\sigma_k z_k^r - \omega_{dk} z_k^i \\ \dot{z}_k^i = +\omega_{dk} z_k^r - \sigma_k z_k^i \end{cases}$$

ed esplicitando $\dot{z}_k^i$ dalla prima equazione e sostituendola nella seconda

$$\ddot{z}_k^r + 2\sigma_k \dot{z}_k^r + \omega_{rk}^2 z_k^r = 0 \quad (\omega_{rk}^2 = \sigma_k^2 + \omega_{dk}^2, \quad \Delta = -\omega_{dk}^2 < 0)$$

Dunque z_k^r soddisfa la solita equazione avente per soluzione il modo naturale armonico smorzato (se $\sigma_k < 0$) o armonico (se $\sigma_k = 0$). Analogamente, anche z_k^i soddisfa la stessa equazione.

Più semplicemente, l'equazione $\dot{z}_k = \lambda_k z_k$, con $\lambda_k = -\sigma_k \pm i\omega_{dk}$, ha chiaramente come soluzione $z_k(t) = Ce^{i\lambda_k t} = Ce^{-\sigma_k t}(\cos \omega_{dk}t \pm i \sin \omega_{dk}t)$. Applicando la trasformazione $x = Tz$, si vede che, a queste due soluzioni complesse nelle variabili di stato trasformate z , corrisponda la soluzione oscillatoria reale $x_k(t) = D_k \cos(\omega_{dk}t + \Phi_k)$, già vista nello studio dei circuiti di ordine 2.

In conclusione, la dinamica dei circuiti del primo e del secondo ordine è quella fondamentale per la descrizione di circuiti di ordine qualsiasi.

⁵si ribadisce di fare attenzione a non confondere il vettore degli ingressi con gli autovettori, entrambi denotati con la lettera u

Ricordiamo che quanto precede è stato esposto nell'ipotesi che il sistema sia diagonalizzabile, cioè che la matrice A possieda n autovettori indipendenti. Nel caso non diagonalizzabile l'analisi va completata con ulteriori considerazioni, ma le conclusioni, per ciò che riguarda il presente insegnamento, essenzialmente non cambiano. Nello specifico, entrano in gioco anche termini del tipo $te^{\lambda_k(t-t_0)}$ e, più in generale, nei casi in cui siano presenti degenericità di ordine superiore, termini del tipo $p(t)e^{\lambda_k(t-t_0)}$, dove $p(t)$ è un polinomio in t . In casi specifici ciò può dar luogo a crescite transitorie particolarmente significative, per cui è bene conoscerne l'esistenza. (Le crescite transitorie sono più comuni, ad esempio, e conseguentemente ben studiate, in ingegneria aerospaziale).

... da completare (rilevanza solo informativa, non richiesto per l'esame)

... Quando vi sono autovalori complessi nell'espressione 4.62 figurano coppie di termini complessi coniugati. È possibile esplicitare la 4.62 in generale in forma reale ... (espressione generale da TDS pag.nnn)

...

Calcolo di e^{At} quando A non è diagonalizzabile (rilevanza solo informativa, non richiesto per l'esame)

... da completare (non richiesto per l'esame)

... Nel caso generale in cui la matrice A non è diagonalizzabile, cioè non è dotata di un set completo di autovettori indipendenti, e^{At} si può esprimere facendo ricorso al concetto di *catene di autovettori generalizzati*, mediante la forma di Jordan J della matrice A , $J = M^{-1}AM$...

su <http://mathworld.wolfram.com/MatrixExponential.html> c'è l'esempio generale 2x2, $e^{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

...

... da completare (non richiesto per l'esame)

... L'espressione ottenibile mediante la forma di Jordan, sebbene utile per la comprensione teorica, dal punto di vista computazionale è molto sensibile alle perturbazioni, ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -\epsilon & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - \epsilon \quad 4.64$$

$$\epsilon = 0 \Rightarrow J = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{autovalori coincidenti e } A \text{ non diagonalizzabile} \quad 4.65$$

$$\epsilon \neq 0 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{\epsilon} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{\epsilon} \end{bmatrix} \quad \text{autovalori distinti e } A \text{ diagonalizzabile} \quad 4.66$$

Questo mal condizionamento fa sì che la forma Jordan è solitamente evitata in analisi numerica. L'esempio evidenzia che il problema in pratica si verifica quando A è dotata di un set completo di autovettori ma è 'vicina' ad una matrice che invece non lo è. Ciò può essere quantificato considerando il numero di condizionamento della matrice degli autovettori, $\text{cond}(T) = \|T\| \|T^{-1}\|$ (Moler, Van Loan 23).

Un alternativa migliore alla forma di Jordan (ma non sempre ottimale) è la *decomposizione di Schur* (Moler, Van Loan 26), ma la procedura preferita in generale è probabilmente il cosiddetto *metodo scaling and squaring* (Moler, Van Loan 12)

...

Soluzione diretta del problema omogeneo associato ed evoluzione libera

Come già osservato, l'espressione $x_g(t) = e^{A(t-t_0)}h$, con h costante vettoriale arbitraria, fornisce la soluzione generale del problema omogeneo associato. Nel caso in cui A è diagonalizzabile, definendo

$$k \triangleq \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = T^{-1}h \quad (\text{dato } h, k \text{ si ottiene concettualmente come soluzione del sistema } Tk = h)$$

dalla 4.62 si ha

$$\begin{aligned} x_g(t) &= e^{A(t-t_0)}h = [u_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} \dots u_n e^{\lambda_n(t-t_0)}]T^{-1}h \\ &= [u_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} \dots u_n e^{\lambda_n(t-t_0)}]k = \sum_{i=1}^n k_i u_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \quad \text{combinazione dei modi naturali} \end{aligned} \quad 4.67$$

Risultando chiaramente dalla definizione di e^{At} che $e^{A \cdot 0} = I$, l'evoluzione libera si ottiene ponendo $h = x_0$

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 = \sum_{i=1}^n k_{li} u_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \quad k_l = [k_{l1} \dots k_{ln}]^T = T^{-1}x_0 \quad 4.68$$

Integrale di convoluzione: risposta forzata e decomposizione della soluzione

Data una funzione di due variabili $g(t, \tau)$ risulta in generale, per la regola di Leibniz, $\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t g(t, \tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial t} d\tau + g(t, \tau)|_{\tau=t}$. Si consideri ora la funzione

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad 4.69$$

e se ne effettui la derivata temporale. Si ha

$$\dot{x}_f(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} [e^{A(t-\tau)} B u(\tau)] d\tau + e^{A \cdot 0} B u(t) = \int_{t_0}^t A e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + B u(t) = A x_f(t) + B u(t)$$

cioè x_f è una soluzione particolare nello stato del modello 4.55. Inoltre, dalla definizione si vede che $x_f(t_0)$ si ottiene come integrale esteso ad un intervallo di ampiezza nulla è quindi è il vettore nullo (si escludano generatori impulsivi). Dunque x_f è la risposta forzata nello stato e la soluzione completa è data da $x(t) = x_l(t) + x_f(t)$, dove x_l è espressa dalla 4.68. Di conseguenza si ha, per il vettore delle uscite: $y(t) = Cx(t) + Du(t) = Cx_l(t) + [Cx_f(t) + Du(t)]$. L'ultima espressione tra parentesi quadre si può scrivere come segue

$$y_f(t) = \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du(t) = \int_{t_0}^t [C e^{A(t-\tau)} B + D \delta(t-\tau)] u(\tau) d\tau \quad 4.70$$

L'integrale 4.69 (rispettivamente il secondo integrale nella 4.70) prende il nome di *integrale di convoluzione* nello stato (rispettivamente nell'uscita).

La soluzione generale del modello 4.55 si può allora esprimere nel seguente modo

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{e^{A(t-t_0)}x_0}_{\text{evoluzione libera nello stato}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\text{evoluzione forzata nello stato}} = \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) &= \underbrace{C e^{A(t-t_0)}x_0}_{\text{evoluzione libera nell'uscita}} + \underbrace{\int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du(t)}_{\text{evoluzione forzata nell'uscita}} = \Psi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad 4.71$$

dove

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} & H(t) &= e^{At} B \\ \Psi(t) &= C e^{At} & W(t) &= C e^{At} B + D \delta(t) \end{aligned} \quad 4.72$$

sono in generale funzioni a valori matriciali. La prima delle espressioni 4.71 prende il nome di *formula di Lagrange*.

La $W(t)$ (risp. $H(t)$), che figura nell'integrale di convoluzione, prende il nome di *matrice delle risposte impulsive* nell'uscita (risp. nello stato). Quando si parla di matrice delle risposte impulsive, o in breve *risposta impulsiva*, senza specificare se ci si riferisce allo stato o alle uscite, tipicamente si intende il secondo caso, cioè la $W(t)$. (Difformemente rispetto a ciò, nel testo Circuiti la risposta impulsiva nell'uscita viene denotata con $h(t)$).

Nel caso in cui vi sia un solo ingresso (un solo generatore, u è uno scalare) ed una sola uscita (y è uno scalare), allora B si riduce ad un vettore colonna, C ad un vettore riga, D ad uno scalare (che può essere nullo), e la risposta all'impulso W è uno scalare.

Si noti anche che le dimensioni fisiche della risposta impulsiva W non sono omogenee a quelle dell'uscita y , ma risulta

$$[W] = \frac{[y]}{[u][t]}.$$

Considerando quindi il caso semplice in cui ingresso u e uscita y siano scalari, se ad esempio u è una corrente e y è una tensione, allora sarà $[W] = \frac{V}{As} = \frac{\Omega}{s} \neq V$. Ciò avviene perchè per definizione la risposta impulsiva si ottiene considerando come ingresso la funzione $\delta(t)$ che non ha le dimensioni di u , ma quelle dell'inverso di un tempo.

4.0.38 Risposta a regime permanente TDS158

La risposta di un sistema lineare stazionario, oltre ad essere decomposta in libera e forzata, in alcuni casi può essere decomposta in *risposta transitoria* e in *risposta a regime permanente*.

Data una funzione vettoriale di ingresso $\hat{u}(t)$, si dice che esiste la corrispondente risposta a regime permanente nello stato (rispettivamente nell'uscita) se il limite

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \varphi(t, t_0, x_0, \hat{u}_{[t_0, t)}) \\ (\text{ risp. } y_r(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \eta(t, x(t), \hat{u}(t))) \end{aligned} \quad 4.73$$

esiste e risulta indipendente da x_0 .⁶ In tal caso $x_r(t)$ (risp. $y_r(t)$) prende il nome di risposta a regime permanente corrispondente all'ingresso $\hat{u}$ e la differenza

$$\begin{aligned} x_t(t) &= x(t) - x_r(t) \\ (\text{ risp. } y_t(t) &= y(t) - y_r(t)) \end{aligned} \quad 4.74$$

il nome di risposta transitoria.

Le condizioni sotto cui il regime (nello stato e/o nell'uscita) esiste, dipendono sia dal circuito che dall'ingresso $\hat{u}$. Per quanto riguarda le prime notiamo che se il circuito è dissipativo il termine di evoluzione libera tende ad annullarsi e quindi ciò è condizione sufficiente affinché il limite sia indipendente da x_0 (il primo termine nelle espressioni 4.71 tende a zero). Più in generale affinché il limite sia indipendente da x_0 è necessario che la matrice A abbia autovalori a parte reale negativa (rispettivamente per l'uscita y , la premoltiplicazione per la matrice C rende la condizione meno stringente, ovvero *soltanto* gli autovalori corrispondenti ai cosiddetti *modi osservabili* devono essere a parte reale negativa).

Se la condizione di indipendenza da x_0 è soddisfatta, la risposta a regime permanente dovuta ai generatori $\hat{u}$, se esiste, vale

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \hat{u}(\tau) d\tau \\ \left(\text{ risp. } y_r(t) &= D \hat{u}(t) + C x_r(t) = D \hat{u}(t) + \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B \hat{u}(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad 4.75$$

Quando il regime permanente esiste, l'integrale generale si può esprimere come $x(t) = e^{A(t-t_0)}h + x_r(t)$. Imponendo allora la condizione iniziale $x_0 = x(t_0) = h + x_r(t_0)$ si ricava h e la seguente decomposizione della risposta completa

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{e^{A(t-t_0)}(x_0 - x_r(t_0))}_{\substack{\text{risposta transitoria} \\ \text{nello stato}}} + \underbrace{x_r(t)}_{\text{risposta a regime nello stato}} \\ \left(\text{ risp. } y(t) &= Cx(t) + D\hat{u}(t) = \underbrace{C e^{A(t-t_0)}(x_0 - x_r(t_0))}_{\substack{\text{risposta transitoria} \\ \text{nell'uscita}}} + \underbrace{C x_r(t) + D \hat{u}(t)}_{\substack{\text{risposta a regime} \\ \text{nell'uscita}}} \right) \end{aligned} \quad 4.76$$

⁶La proprietà di indipendenza del regime dalla condizione iniziale x_0 è caratteristica dei sistemi lineari. Un sistema non lineare può invece possedere diversi regimi, ciascuno corrispondente ad uno specifico stato iniziale.

4.0.39 pag 463 equivalenze per induttore e capacitore inizialmente carichi

..... L'equazione caratteristica in forma integrale contiene anche l'informazione relativa alla condizione iniziale, mentre quella in forma differenziale no

... work in progress ... $V_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(o^-)]$

Capitolo 5

Cenni al mondo meraviglioso dei sistemi e dei circuiti non lineari

... work in progress ...

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x) && \text{sistema di ordine } n \\ \dot{x} &= f(x) && \text{sistema autonomo di ordine } n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases} && \text{sistema di ordine 2} && \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} && \text{sistema autonomo di ordine 2}\end{aligned}$$

- sistemi autonomi
- cambio riferimento e averaging per ricondursi a sistemi autonomi
- spazio delle fasi (ordine n)
- piano delle fasi $\{(x_1, x_2)\}$
- punti di equilibrio: $\{x : \dot{x} = 0\}$
- punti di equilibrio (ordine 2): $\{(x_1, x_2) : f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0\}$
- attrattori
- linearizzazione intorno a punti di equilibrio
- possibile esistenza di più regimi, associati ad altrettanti set di condizioni iniziali che partizionano lo spazio di stato
- biforcazioni
- isteresi

... work in progress ...

... inserire figura biforcazioni di sistemi nonlineari ...

... work in progress ...

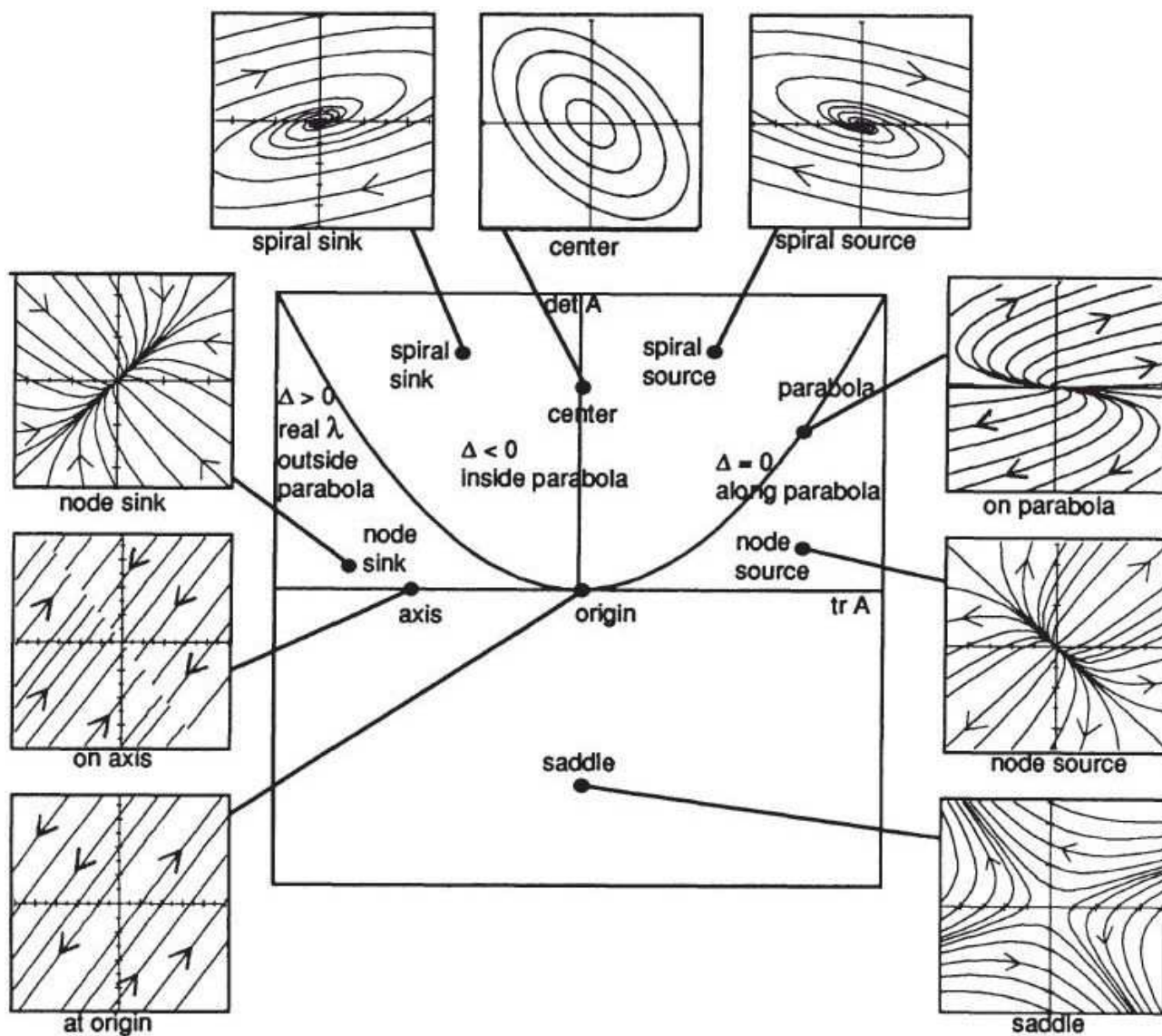


Figura 5.1 Diagramma di biforcazione nel piano dei parametri ($\text{tr } A, \det A$) per un sistema di ordine 2 descritto da $\dot{x} = Ax$. I 9 inserti mostrano le traiettorie descritte dalle variabili di stato nel piano delle fasi (x_1, x_2) in corrispondenza dei principali casi notevoli.

Capitolo 6

Argomenti selezionati

6.0.1 Validità generale del metodo simbolico

Il metodo simbolico è basato sulla corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle grandezze sinusoidali di assegnata pulsazione e il campo complesso, e sul fatto che tale corrispondenza gode delle proprietà di unicità, linearità e derivazione.

È possibile estendere il concetto di fasore in modo da utilizzare il metodo simbolico per reti lineari generali, in cui le grandezze sono funzioni *comunque variabili nel tempo*. A tale scopo si definisce una corrispondenza tra l'insieme (detto *dominio del tempo*) delle funzioni del tempo comunque variabili e l'insieme (il *dominio della frequenza*) delle funzioni complesse della variabile reale ω

$$a(t) \rightleftharpoons \bar{A}(\omega)$$

ove $\bar{A}(\omega)$ prende il nome di *trasformata di Fourier* della funzione $a(t)$.

Ovviamente occorre specificare come si calcola la trasformata di Fourier e anche la operazione di *antitrasformazione* che consente di tornare nel dominio del tempo. Di fatto per molti scopi, dal punto di vista operativo è spesso sufficiente consultare le apposite tabelle che riportano le espressioni delle trasformate e antitrasformate delle funzioni di interesse applicativo.

La cosa importante che rende il metodo perfettamente analogo al metodo dei fasori è che la suddetta corrispondenza gode anch'essa delle proprietà di

- unicità $a(t) = b(t) \quad \forall t \Leftrightarrow \bar{A}(\omega) = \bar{B}(\omega)$
- linearità $c(t) = ha(t) + kb(t) \Leftrightarrow \bar{C}(\omega) = h\bar{A}(\omega) + k\bar{B}(\omega)$
- derivazione $b(t) = \frac{da(t)}{dt} \Leftrightarrow \bar{B}(\omega) = i\omega\bar{A}(\omega)$

Da ciò segue ad esempio che, esattamente come con i fasori, la relazione caratteristica di un induttore è $\bar{V}(\omega) = i\omega L\bar{I}(\omega)$, ovvero $\bar{V}(\omega) = \bar{Z}_L(\omega)\bar{I}(\omega)$, con $\bar{Z}_L(\omega) = i\omega L$. Analogamente per il condensatore, e via di seguito. Poiché le elaborazioni algebriche non cambiano, tutte le dimostrazioni fatte con il metodo simbolico valgono in generale, ovvero i metodi di soluzione dei circuiti sono quelli già visti. La differenza consiste nel fatto che, una volta risolta la rete nel dominio della frequenza, bisogna utilizzare le tabelle delle antitrasformate per ottenere l'espressione delle grandezze di interesse nel dominio del tempo.

Una conseguenza della validità generale del metodo simbolico è che, quando si ha l'esigenza di semplificare una rete lineare, si trae ovviamente vantaggio se lo si fa nell'ambito del metodo simbolico, visto che in tal caso le relazioni sono tutte algebriche (e non differenziali). Dato che il metodo è generale, i risultati ottenuti varranno sempre, e non soltanto in regime sinusoidale.

Cenni alle trasformate di Fourier e alle funzioni generalizzate ... work in progress

6.0.2 Operatori differenziali fondamentali ed equazioni di Maxwell

Molto spesso i libri di testo definiscono gli operatori differenziali fondamentali a nostro avviso in maniera inopportuna, cioè direttamente in termini delle loro espressioni in coordinate cartesiane. Ciò comporta una notevole difficoltà di comprensione del loro significato da parte degli allievi, che resterà nella maggioranza dei casi misterioso. Le stesse equazioni di Maxwell (e anche le equazioni da esse derivate) sono molto più facili da capire e padroneggiare una volta compresi i concetti che sono alla base degli operatori. Ricordiamone quindi il significato.

Gradiente

L'operatore *gradiente*, denotato alternativamente con i simboli grad oppure ∇ , opera su un campo scalare $f(\mathbf{R})$ e produce un risultato vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{R}) = \nabla f(\mathbf{R})$. La direzione di $\mathbf{v}$ è quella di massimo incremento della f spostandosi dal punto $\mathbf{R}$, ed il suo modulo è il tasso di variazione spaziale della funzione f nel punto $\mathbf{R}$, ossia l'incremento per unità di lunghezza.

Gibbs chiamava ∇f anche *derivata* di f , ed f *primitiva* del vettore ∇f .

... work in progress ... inserire figure gradiente

Più in generale le varie grandezze potranno anche essere funzione del tempo t oltre che dello spazio $\mathbf{R}$; spesso tale ulteriore dipendenza viene sottintesa in quanto molti operatori agiscono sulle sole coordinate spaziali.

Divergenza

L'operatore *divergenza*, denotato alternativamente con i simboli ∇ , div oppure $\nabla \cdot$, opera su un campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{R})$ e produce un risultato scalare $f(\mathbf{R}) = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{R})$, che indica la tendenza delle linee del campo $\mathbf{v}$ a fluire via dal punto $\mathbf{R}$.

James Clerk Maxwell chiamava questo operatore *convergenza*, associandolo alla circostanza che le linee del campo elettrico convergono sulle cariche *negative*. Pochi anni dopo Heaviside suggerì l'uso del termine *divergenza*, per la stessa quantità ma con il segno opposto, in modo che una divergenza positiva è associata ad un campo elettrico le cui linee *fluiscono via* dalle cariche *positive*. L'equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{\rho(\mathbf{R})}{\epsilon}$ esprime chiaramente che la divergenza del campo elettrico è positiva o negativa nei punti ove la densità di carica elettrica è rispettivamente positiva o negativa. Il campo di induzione magnetica invece non diverge né converge in alcun punto dello spazio, come ci dice l'altra equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (qui si è sottintesa la dipendenza dalla variabile spaziale $\mathbf{R}$).

La definizione formale di divergenza è la seguente

$$\nabla \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} \triangleq \lim_{\Delta V_\Sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_\Sigma} \oint_\Sigma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

dove il simbolo $\oint_\Sigma$ indica in questo caso un integrale doppio esteso ad una *superficie chiusa* Σ , ΔV_Σ è il volume infinitesimo delimitato da Σ , ed $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale uscente dall'elemento dS .

Per un piccolo volumetto ΔV_Σ si ha $\nabla \mathbf{v} \Delta V_\Sigma \cong \oint_\Sigma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, che richiama il noto *teorema della divergenza* di Gauss-Ostrogradsky

$$\int_{V_\Sigma} \nabla \mathbf{v} dV = \oint_\Sigma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (\text{il flusso del vettore uscente da } \Sigma \text{ è uguale all'integrale della divergenza in } V_\Sigma).$$

A partire dalla definizione si può derivare l'espressione che la divergenza assume nei vari sistemi di coordinate, le più comuni essendo come noto quelle cartesiane, cilindriche, sferiche. Vi sono poi numerosi altri sistemi di coordinate, meno noti ma comodi da utilizzare per specifiche applicazioni (paraboloidali, cilindriche paraboliche, cilindriche ellittiche, sferoidali, bipolari, toroidali, coniche, confocali ellissoidali, etc). Nel caso delle coordinate cartesiane, considerando un parallelepipedo elementare avente due vertici diagonalmente opposti con coordinate (x, y, z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$, e lati di lunghezza dx , dy e dz , si ottiene ad esempio la nota espressione come segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{dV_\Sigma} \oint_\Sigma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \frac{1}{dx dy dz} [\mathbf{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) dy dz + \mathbf{v}(x + dx, y, z) \cdot \hat{\mathbf{x}} dy dz \\ &\quad + \mathbf{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{\mathbf{y}}) dx dz + \mathbf{v}(x, y + dy, z) \cdot \hat{\mathbf{y}} dx dz \\ &\quad + \mathbf{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{\mathbf{z}}) dx dy + \mathbf{v}(x + dx, y, z) \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy] \\ &= \frac{-v_x(x, y, z) + v_x(x + dx, y, z)}{dx} + \frac{-v_y(x, y, z) + v_y(x, y + dy, z)}{dy} + \frac{-v_z(x, y, z) + v_z(x, y, z + dz)}{dz} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

... work in progress ... inserire figure divergenza

È interessante considerare il significato dell'operatore divergenza nell'ambito della meccanica dei fluidi, dove viene anche chiamato *espansione*. Se $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ è il campo di velocità di un fluido, il moto di una singola particella di fluido, che si trovi nella posizione $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ all'istante t_0 , sarà descritto da

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t) \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t) \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t) \quad [\text{ sinteticamente } \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t)]$$

e risulta

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t) \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t) \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t) \quad \left[\text{sinteticamente } \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) \right]$$

Si consideri una porzione di fluido che occupi, all'istante t_0 , la regione $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ e, al generico istante t , la regione $\Omega = \Omega(t)$. Il volume occupato da tale porzione di fluido è

$$V(t) = \int_{\Omega(t)} dV = \int_{\Omega(t)} dx dy dz$$

Si può dimostrare [Kellogg 36] che

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\Omega(t)} \nabla \mathbf{v} dV \quad \text{divergenza totale del campo per la regione } \Omega$$

Nel limite di regione di regione Ω infinitesima si ha

$$\frac{\frac{dV}{dt}}{V} = \frac{\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} dV}{\int_{\Omega} dV} = \frac{\nabla \mathbf{v} dV}{dV} = \nabla \mathbf{v}$$

ovvero la divergenza del campo di velocità in un punto rappresenta quindi la *rapidità relativa di espansione del fluido* in tale punto. Un fluido a divergenza nulla è *incompressibile*.

Una analoga interpretazione si ottiene in termini della *densità* ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$] del fluido (anche detta o densità di massa, o massa volumetrica o massa specifica). Considerando l'equazione di continuità per il fluido

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

segue (si noti la differenza tra derivata parziale ∂ e derivata totale d)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{d\rho}{dt}}{\rho} = -\nabla \mathbf{v}$$

cioè la *variazione relativa della densità* è pari all'opposto della espansione. Il segno negativo è dovuto al fatto che ovviamente la densità diminuisce in caso di espansione del fluido.

Alla stessa interpretazione si giunge facilmente nell'ambito dell'elettromagnetismo, con riferimento ad un conduttore nel quale la corrente è sostenuta da un solo tipo di portatori di carica, ad esempio elettroni nel caso di un conduttore metallico. In tal caso risulta $\rho = ne_n$, $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = ne_n \mathbf{v}$, dove n è il numero di elettroni per unità di volume, $e_n = -e$ la carica dell'elettrone ($e \cong 1.6 \cdot 10^{-19}$ C), ρ la densità di carica elettrica e $\mathbf{v}$ la velocità dei portatori di carica. L'equazione di continuità $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{J} = 0$ assume esattamente la stessa forma di cui sopra

$$\frac{\partial(ne_n)}{\partial t} + \nabla(ne_n \mathbf{v}) = 0$$

Da ciò, semplificando la costante e_n , espandendo la divergenza $\nabla(n\mathbf{v})$ e considerando la derivata totale, come sopra, segue

$$\frac{\frac{dn}{dt}}{n} = -\nabla \mathbf{v}$$

L'interpretazione è allora che le cariche elettriche si addensano nelle regioni in cui la divergenza della velocità delle cariche stesse è negativa, $\nabla \mathbf{v} < 0$, e si allontanano dalle regioni dove $\nabla \mathbf{v} > 0$. In termini quantitativi si dirà, come sopra, che la divergenza del campo di velocità degli elettroni in un punto rappresenta la *rapidità relativa di espansione del fluido elettronico* in tale punto.

Nel caso di fluido a più componenti i risultati valgono per ciascuna componente. Ad esempio in un semiconduttore, per il quale si ha $\rho = \rho_n + \rho_p = ne_n + pe_p$, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_p = ne_n \mathbf{v}_n + pe_p \mathbf{v}_p = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_p \mathbf{v}_p$, risulta

$$\frac{\frac{dn}{dt}}{n} = -\nabla \mathbf{v}_n \quad \frac{\frac{dp}{dt}}{p} = -\nabla \mathbf{v}_p$$

Rotore

L'operatore *rotore*, denotato alternativamente con i simboli ∇ , curl, rot oppure $\nabla \times$, opera su un campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{R})$ e produce un risultato vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{R}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{R})$, che indica la *tendenza delle linee del campo $\mathbf{v}$ a ruotare intorno al punto $\mathbf{R}$* .

La direzione di $\mathbf{u}$ è l'asse attorno al quale la tendenza a ruotare è massima. L'equazione di Ampere $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r})$ (valida in condizioni stazionarie) ci dice che le linee del campo magnetico $\mathbf{H}$ tendono a ruotare intorno alla direzione del vettore densità di corrente $\mathbf{J}$. Più in generale, secondo l'equazione di Ampere-Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{G}$ (dove $\mathbf{G} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ è la densità di corrente totale) in condizioni non stazionarie le linee del campo magnetico $\mathbf{H}$ tendono a ruotare intorno alla direzione del vettore densità di corrente totale $\mathbf{G}$. Analogamente, l'equazione di Maxwell dell'induzione elettromagnetica $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ dice che, in presenza di un campo di induzione magnetica variabile nel tempo, le linee del campo elettrico tendono a ruotare intorno alla direzione della derivata temporale dell'induzione magnetica (in senso contrario per via del segno meno, coerentemente con la legge di Lenz). Con altre parole, possiamo dire che un campo magnetico *rotazionale* è prodotto da una corrente elettrica, oppure da un campo elettrico variabile nel tempo (*induzione magnetoelettrica*), o da entrambi; analogamente un campo elettrico *rotazionale* è prodotto da un campo magnetico variabile nel tempo.

... work in progress ... inserire figure rotore

La definizione formale di rotore si effettua mediante la sua generica componente secondo una direzione $\hat{\mathbf{n}}$

$$(\nabla \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \triangleq \lim_{\Delta S_\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_\gamma} \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl$$

dove ΔS_γ è una superficie infinitesima *aperta* orlata dalla linea γ , $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale a ΔS_γ e $\hat{\mathbf{t}}$ è il versore tangente a γ , coordinati al solito secondo la regola del cavatappi. È possibile dimostrare che la grandezza $\text{curl } \mathbf{v}$ così definita è effettivamente un vettore (Haus-Melcher 723). Si comprende che quel particolare versore $\hat{\mathbf{n}}$ per il quale il prodotto scalare $(\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ è massimo definisce il verso del vettore $\text{curl } \mathbf{v}$.

Per una piccola superficie ΔS_γ si ha $\nabla \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S_\gamma \cong \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl$, che richiama il noto *teorema del rotore di Kelvin-Stokes*

$$\int_{S_\gamma} \nabla \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl \quad (\text{la circuitazione di } \mathbf{v} \text{ lungo } \gamma \text{ è uguale al flusso del rotore di } \mathbf{v} \text{ attraverso } S_\gamma).$$

A partire dalla definizione si può derivare l'espressione che il rotore assume nei vari sistemi di coordinate.

Laplaciano scalare

L'operatore *laplaciano scalare*, denotato con i simboli ∇^2 , Δ e Δ_2 (e, più raramente, anche con Δ^2), opera su un campo scalare $f(\mathbf{r})$ e produce un risultato scalare $g(\mathbf{r}) = \nabla^2 f(\mathbf{r})$, e si ottiene come composizione degli operatori gradiente e divergenza

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) \triangleq \nabla \cdot (\nabla f(\mathbf{r})).$$

Per comprenderne il significato, ricordiamo innanzitutto che le funzioni che hanno laplaciano nullo si chiamano *funzioni armoniche* e godono di particolari proprietà. In particolare, se f è armonica in un certo dominio, ed $\mathbf{R}_0$ è un punto interno a tale dominio, allora il valore f_0 assunto dalla funzione f nel punto $\mathbf{R}_0$ eguaglia il valore medio assunto dalla f su una superficie sferica S_ϱ di raggio ϱ centrata sul punto $\mathbf{R}_0$ stesso, $f(\mathbf{R}_0) = \frac{1}{4\pi\varrho^2} \oint_{S_\varrho} f(\mathbf{r}) \, dS$ (essendo S_ϱ essa stessa interna al dominio suddetto). Inoltre, f_0 eguaglia anche il valore medio della f nei punti del volume V_ϱ racchiuso da S_ϱ , $f(\mathbf{R}_0) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varrho^3} \int_{V_\varrho} f(\mathbf{r}) \, dV$.

[La parte analitica contenuta in quanto segue su sfondo grigio non è richiesta, ed è da considerarsi come riferimento per il lettore interessato].

Calcoleremo ora il valore medio nel volume sferico per una funzione in generale non armonica. Scegliendo per brevità di notazione l'origine del sistema di riferimento nel centro della sfera, consideriamo lo sviluppo in serie di McLaurin

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_{x0}x + f_{y0}y + f_{z0}z + \frac{f_{xx0}}{2}x^2 + \frac{f_{yy0}}{2}y^2 + \frac{f_{zz0}}{2}z^2 + f_{xy0}xy + f_{yz0}yz + f_{zx0}zx \\ &+ \frac{f_{xxx0}x^3 + f_{yyy0}y^3 + f_{zzz0}z^3}{3!} + \frac{f_{xxy0}x^2y + f_{xyy0}xy^2 + f_{yyz0}y^2z + f_{yzz0}yz^2 + f_{zzx0}z^2x + f_{zxx0}zx^2}{2!1!} + \frac{f_{xyz0}xyz}{1!1!1!} \\ &+ \underbrace{\frac{f_{xxx0}x^3y + f_{xyy0}xy^3 + f_{yyy0}y^3z + f_{yzz0}yz^3 + f_{zzz0}z^3x + f_{zxx0}zx^3}{3!1!} + \frac{f_{xxy0}x^2yz + f_{xyy0}xy^2z + f_{yyz0}y^2z^2 + f_{yzz0}yz^2x + f_{zxx0}zx^2y + f_{zxy0}xy^2z}{2!1!1!}}_{\text{termini del quarto ordine di tipo dispari}} \\ &+ \underbrace{\frac{f_{xxxx0}x^4 + f_{yyyy0}y^4 + f_{zzzz0}z^4}{4!} + \frac{f_{xxyy0}x^2y^2 + f_{yyzz0}y^2z^2 + f_{zzxx0}z^2x^2}{2!2!}}_{\text{termini del quarto ordine di tipo pari}} + \dots \end{aligned}$$

I termini di ordine dispari (x , x^3 , x^2y , etc.) e quelli di *ordine pari e tipo dispari* (xy , x^3y , x^2yz , etc.) danno contributo nullo all'integrale, per il calcolo del quale utilizziamo ad esempio le coordinate sferiche. Tra le varie alternative possibili di definire le coordinate sferiche^a consideriamo la seguente

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \phi & R \in [0, \varrho] \\ y = R \sin \theta \sin \phi & \theta \in [0, \pi] \\ z = R \cos \theta & \phi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Valutiamo preliminarmente il seguente integrale di superficie

$$\begin{aligned} \int_{S(R)} f(\mathbf{R}) dS &= \int_{S(R)} [f_0 + \frac{f_{xx0}}{2} x^2 + \frac{f_{yy0}}{2} y^2 + \frac{f_{zz0}}{2} z^2] dS \\ &\quad + \int_{S(R)} \underbrace{\left[\frac{f_{xxxx0} x^4 + f_{yyyy0} y^4 + f_{zzzz0} z^4}{4!} + \frac{f_{xxyy0} x^2 y^2 + f_{yyzz0} y^2 z^2 + f_{zzxx0} z^2 x^2}{4} \right]}_{R^4 \xi_4(\theta, \phi)} dS + \dots \\ &= 4\pi R^2 f_0 + \int_0^\pi R d\theta \int_0^{2\pi} R \sin \theta d\phi \left[\frac{f_{xx0}}{2} (R \sin \theta \cos \phi)^2 + \frac{f_{yy0}}{2} (R \sin \theta \sin \phi)^2 + \frac{f_{zz0}}{2} (R \cos \theta)^2 \right] \\ &\quad + \int_0^\pi R d\theta \int_0^{2\pi} R \sin \theta d\phi [R^4 \xi_4(\theta, \phi) + \dots] \\ &= 4\pi R^2 f_0 + R^4 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} [\sin^3 \theta \left(\frac{f_{xx0}}{2} \cos^2 \phi + \frac{f_{yy0}}{2} \sin^2 \phi \right) + \frac{f_{zz0}}{2} \sin \theta \cos^2 \theta] d\phi \\ &\quad + R^6 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \sin \theta \xi_4(\theta, \phi) d\phi}_{\eta_4} + \dots \\ &= 4\pi R^2 f_0 + R^4 \left\{ \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \left[\frac{f_{xx0}}{2} \frac{1+\cos 2\phi}{2} + \frac{f_{yy0}}{2} \frac{1-\cos 2\phi}{2} \right] d\phi + \pi f_{zz0} \left[\frac{-\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \right\} + \eta_4 R^6 + \dots \\ &= 4\pi R^2 f_0 + R^4 \left\{ \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \left[\pi \frac{f_{xx0}}{2} + \pi \frac{f_{yy0}}{2} \right] + \pi f_{zz0} \frac{2}{3} \right\} + \eta_4 R^6 + \dots \\ &= 4\pi R^2 f_0 + \pi R^4 \left\{ [-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3}]_0^\pi \left(\frac{f_{xx0}}{2} + \frac{f_{yy0}}{2} \right) + f_{zz0} \frac{2}{3} \right\} + \eta_4 R^6 + \dots \\ &= 4\pi R^2 f_0 + \pi R^4 \left\{ \left[2 - \frac{2}{3} \right] \left(\frac{f_{xx0}}{2} + \frac{f_{yy0}}{2} \right) + f_{zz0} \frac{2}{3} \right\} + \eta_4 R^6 + \dots \\ &= 4\pi R^2 f_0 + \pi R^4 \left\{ \frac{4}{3} \left(\frac{f_{xx0}}{2} + \frac{f_{yy0}}{2} \right) + f_{zz0} \frac{2}{3} \right\} + \eta_4 R^6 + \dots \\ &= 4\pi R^2 f_0 + \frac{2\pi R^4}{3} \nabla^2 f|_0 + \eta_4 R^6 + \dots \end{aligned} \quad 6.1$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{V_e} &= \frac{1}{V_e} \int_{V_e} f(\mathbf{R}) dV = \frac{1}{V_e} \int_0^\varrho dR \int_{S(R)} f(\mathbf{R}) dS = \frac{1}{V_e} \int_0^\varrho dR \{ 4\pi R^2 f_0 + \frac{2\pi R^4}{3} \nabla^2 f|_0 + \eta_4 R^6 + \dots \} \\ &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi \varrho^3} \{ 4\pi \left[\frac{R^3}{3} \right]_0^\varrho f_0 + \left[\frac{2\pi R^5}{15} \right]_0^\varrho \nabla^2 f|_0 + \eta_4 \left[\frac{R^7}{7} \right]_0^\varrho + \dots \} = \frac{3}{4\pi \varrho^3} \{ 4\pi \frac{\varrho^3}{3} f_0 + \frac{2\pi \varrho^5}{15} \nabla^2 f|_0 + \eta_4 \frac{\varrho^7}{7} + \dots \} \\ &= \frac{3}{4\varrho^3} \{ 4\frac{\varrho^3}{3} f_0 + \frac{2\varrho^5}{15} \nabla^2 f|_0 \} + \frac{3\eta_4}{28\pi} \varrho^4 + \dots \\ &= f_0 + \frac{\varrho^2}{10} \nabla^2 f|_0 + \zeta_4 \varrho^4 + \dots \end{aligned}$$

ovvero

$$\nabla^2 f = 10 \frac{\langle f \rangle_{V_e} - f_0}{\varrho^2} - 10\zeta_4 \varrho^2 + \dots \quad 6.2$$

Come esercizio, consideriamo anche un modo alternativo per il calcolo degli integrali di volume. La sferetta centrata nell'origine di raggio ϱ è definita da $x^2 + y^2 + z^2 \leq \varrho^2$. Per ogni fissato x nell'intervallo $[-\varrho, \varrho]$, si ha $y^2 + z^2 \leq \varrho^2 - x^2$ e il valore massimo che può raggiungere y in valore assoluto si ha per $z = 0$ ed è $\sqrt{\varrho^2 - x^2}$. Ovvero deve essere $|y| \leq \sqrt{\varrho^2 - x^2}$. A sua volta, dati due valori di x e y nei range suddetti, deve risultare $z^2 \leq \varrho^2 - x^2 - y^2$. Tenuto conto allora che

$$\int \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{y\sqrt{a^2 - y^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{y}{a}$$

risulta, considerando ad esempio il termine di secondo ordine in x

$$\begin{aligned} \int_{V_e} x^2 dV &= \int_{-\varrho}^\varrho x^2 dx \int_{-\sqrt{\varrho^2 - x^2}}^{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} dy \int_{-\sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2}} dz = \int_{-\varrho}^\varrho x^2 dx \int_{-\sqrt{\varrho^2 - x^2}}^{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} 2\sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2} dy \\ &= \int_{-\varrho}^\varrho 2x^2 dx \left[\frac{y\sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2}}{2} + \frac{\varrho^2 - x^2}{2} \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} \right]_{-\sqrt{\varrho^2 - x^2}}^{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} = \int_{-\varrho}^\varrho 2x^2 dx [0 + \frac{\varrho^2 - x^2}{2} (\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1))] \\ &= \int_{-\varrho}^\varrho x^2 (\varrho^2 - x^2) \pi dx = \pi [\varrho^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_{-\varrho}^\varrho = \pi [\varrho^2 \frac{2\varrho^3}{3} - \frac{2\varrho^5}{5}] = \pi \varrho^5 \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Per motivi di simmetria risulta poi in generale

$$\int_{V_\varrho} x^2 dV = \int_{V_\varrho} y^2 dV = \int_{V_\varrho} z^2 dV = \pi \varrho^5 \frac{4}{15}$$

e

$$\frac{1}{V_\varrho} \int_{V_\varrho} \left[\frac{f_{xx0}}{2} x^2 + \frac{f_{yy0}}{2} y^2 + \frac{f_{zz0}}{2} z^2 \right] dV = \frac{3}{4\pi \varrho^3} \left[\frac{f_{xx0}}{2} + \frac{f_{yy0}}{2} + \frac{f_{zz0}}{2} \right] \pi \varrho^5 \frac{4}{15} = \frac{\varrho^2}{10} \nabla^2 f$$

È anche abbastanza evidente che gli *integrali di tipo dispari* sono nulli, in quanto la funzione integranda sarà dispari in una delle variabili, ad esempio, per un termine del terzo ordine

$$\int_{V_\varrho} x^2 y dV = \int_{-\varrho}^{\varrho} x^2 dx \int_{-\sqrt{\varrho^2-x^2}}^{\sqrt{\varrho^2-x^2}} y dy \int_{-\sqrt{\varrho^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{\varrho^2-x^2-y^2}} dz = \int_{-\varrho}^{\varrho} x^2 dx \int_{-\sqrt{\varrho^2-x^2}}^{\sqrt{\varrho^2-x^2}} 2y \underbrace{\sqrt{\varrho^2-x^2-y^2}}_{\text{dispari in } y} dy = 0$$

^aNello spazio tridimensionale che stiamo considerando altre possibilità sono $R \in [-\varrho, \varrho]$, $\theta, \phi \in [0, \pi]$, oppure permutare il ruolo delle variabili x, y, z , cioè definire colatitudine θ e longitudine ϕ rispetto a differenti assi e piani. In generale in n variabili il numero di possibili definizioni alternative aumenta.

Il risultato fondamentale che abbiamo ottenuto, è in definitiva

$$\boxed{\nabla^2 f = 10 \frac{\langle f \rangle_{V_\varrho} - f_0}{\varrho^2}} + O(\varrho^2) \quad 6.3$$

Questa espressione è riportata senza dimostrazione sul trattato di Maxwell, ma con il segno cambiato, perchè egli definiva l'operatore laplaciano con il segno opposto rispetto alla tradizione attuale.

Seguendo Maxwell (ma considerando la definizione moderna riguardo il segno del laplaciano), abbiamo dunque che, il valore $-\nabla^2 f(\mathbf{R}_0)$ (l'opposto del laplaciano), quando è diverso da zero, indica il modo in cui il valore della funzione f nel punto $\mathbf{R}_0$ eccede (nel senso Hamiltoniano) il valore medio assunto dalla f in un piccolo volume sferico circoscritto al punto $\mathbf{R}_0$.

Sulla base di questa interpretazione, Maxwell chiamava il laplaciano scalare *concentrazione* della funzione f (Maxwell Vol I p29). Per noi invece la *concentrazione* è l'opposto del laplaciano.

L'equazione dell'elettrostatica $-\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon}$ ci rappresenta il fatto che la concentrazione del potenziale scalare ϕ nel punto generico $\mathbf{R}$ è proporzionale alla densità (o concentrazione) della carica elettrica ρ in quel punto. Si consideri con una certa attenzione il fatto che ciò implica che, in ogni punto in cui la densità di carica è positiva, il valore del potenziale è maggiore della sua media in un piccolo intorno di tale punto.

Se, anziché valutare la media volumetrica (come fece Maxwell), consideriamo il valor medio della funzione f sulla superficie della sferetta di raggio ϱ , utilizzando la 6.1, abbiamo

$$\langle f \rangle_{S_\varrho} = \frac{1}{S_\varrho} \int_{S_\varrho} f(\mathbf{R}) dS = \frac{1}{4\pi \varrho^2} \{ 4\pi \varrho^2 f_0 + \frac{2\pi \varrho^4}{3} \nabla^2 f|_0 + \eta_4 \varrho^6 + \dots \} = f_0 + \frac{\varrho^2}{6} \nabla^2 f|_0 + \frac{\eta_4}{4\pi} \varrho^4 + \dots$$

ovvero

$$\boxed{\nabla^2 f = 6 \frac{\langle f \rangle_{S_\varrho} - f_0}{\varrho^2}} - \frac{3\eta_4}{2\pi} \varrho^2 + \dots \quad 6.4$$

Esempio

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 = 0 \quad f = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \nabla^2 f|_0 = 6|_0 = 6 \\ \int_{V_\varrho} f dV = \int_0^\varrho f dR \int_0^\pi R d\theta \int_0^{2\pi} R \sin \theta d\phi = \int_0^\varrho R^4 dR \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\varrho^5}{5} 4\pi \quad \langle f \rangle_{V_\varrho} = \frac{3}{4\pi \varrho^3} \frac{\varrho^5}{5} 4\pi = \frac{3\varrho^2}{5} \quad 10 \frac{\langle f \rangle_{V_\varrho} - 0}{\varrho^2} = 6 \\ \langle f \rangle_{S_\varrho} = \varrho^2 \quad 6 \frac{\langle f \rangle_{S_\varrho} - 0}{\varrho^2} = 6 \end{aligned}$$

L'utilizzo della ?? trascurando il termine di ordine superiore $O(\varrho^2)$ deve essere considerato con cautela in certe situazioni, tipicamente per sviluppi analitici o semianalitici laddove il laplaciano può essere infinitesimo. Infatti essa è stata ricavata facendo l'implicita assunzione, nel calcolo della media, che fosse $\nabla^2 f|_0 \neq 0$. Ad esempio

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 = 0 \quad f = (x^2 + y^2 + z^2)^2 = R^4 \quad \nabla^2 f = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial f}{\partial R}) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (4R^5) = 20R^2 \quad \nabla^2 f|_0 = 0 \\ \int_{V_\varrho} f dV = \frac{\varrho^7}{7} 4\pi \quad \langle f \rangle_{V_\varrho} = \frac{3}{4\pi \varrho^3} \frac{\varrho^7}{7} 4\pi = \frac{3\varrho^4}{7} \quad 0 = \nabla^2 f|_0 \leftarrow 10 \frac{\langle f \rangle_{V_\varrho} - 0}{\varrho^2} + O(\varrho^2) = \frac{30}{7} \varrho^2 + O(\varrho^2) \\ \langle f \rangle_{S_\varrho} = \varrho^4 \quad 0 = \nabla^2 f|_0 \leftarrow 6 \frac{\langle f \rangle_{S_\varrho} - 0}{\varrho^2} + O(\varrho^2) = 6\varrho^2 + O(\varrho^2) \end{aligned}$$

Si noti che la 6.4 può essere convenientemente utilizzata nei codici di calcolo che risolvono problemi differenziali in cui è coinvolto l'operatore di Laplace. Infatti il valor medio $\langle f \rangle_{S_\theta}$ si esprime semplicemente come somma pesata di valori della f su punti della griglia (anche l'espressione di Maxwell 6.3 potrebbe essere utilizzata a tale scopo, ma ciò è meno conveniente in quanto la valutazione del valor medio sul volume $\langle f \rangle_v$ richiederebbe un ulteriore passaggio, consistente ad esempio nell'utilizzo di una formula di cubatura di Gauss o Gauss-Lobatto). **La procedura è poi generalizzabile considerando, per il calcolo della media, una superficie ellissoidale anziché sferica.**

Inoltre, è anche possibile ricavare una ulteriore espressione alternativa alla 6.4 considerando, sempre per il calcolo della media, un *cubo/parallelepipedo* o più in generale un *esaedro*.

Laplaciano vettore

L'operatore *laplaciano vettore*, denotato ancora con il simbolo ∇^2 (e raramente con $\star$), opera su un campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ e produce un risultato vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Lo si trova quasi sempre (convenientemente) definito come

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

insieme alla tipica affermazione che la ragione per la quale si adopera lo stesso simbolo del laplaciano scalare risiederebbe nel fatto che, in coordinate cartesiane, le componenti del laplaciano vettore si ottengono come laplaciano scalare delle componenti cartesiane stesse

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}(\nabla^2 v)_x + \hat{\mathbf{y}}(\nabla^2 v)_y + \hat{\mathbf{z}}(\nabla^2 v)_z = \hat{\mathbf{x}}\nabla^2 v_x + \hat{\mathbf{y}}\nabla^2 v_y + \hat{\mathbf{z}}\nabla^2 v_z.$$

In realtà, come provato da Tai [??], in qualsiasi sistema di coordinate curvilineo risulta vera l'identità

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

dove $\nabla \mathbf{v}$ è il gradiente di un vettore, cioè è una *diade*. Risulta dunque lecito usare lo stesso simbolo e la stessa definizione data nel caso del laplaciano scalare

$$\nabla^2 \mathbf{v} \triangleq \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}). \quad 6.5$$

Tornando alle coordinate cartesiane per fissare le idee, abbiamo che, per un campo vettoriale $\mathbf{v}$ che abbia laplaciano nullo risulta ovviamente $\nabla^2 v_x = \nabla^2 v_y = \nabla^2 v_z = 0$, ovvero ciascuna delle sue componenti cartesiane è una funzione armonica, per le quali come ricordato vale il teorema della media. Se ne deduce che risulta valido, per i campi vettoriali a laplaciano nullo nei punti $\mathbf{r}$ interni ad un certo dominio, un *teorema della media vettoriale*, ossia, adoperando la notazione già descritta, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} \mathbf{v}(\mathbf{r}') dS'$.

... work in progress

6.0.3 Espressione della potenza in regime lentamente variabile per bipoli ed N -poli

... work in progress (Haus-Melcher 457,462,470 + Miano)

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{vettore di Poynting} \quad 6.6$$

$$\nabla \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{\Pi} &= \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \\ - \oint_{\Sigma} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{\epsilon E^2}{2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega \quad \text{teorema di Poynting} \quad 6.7 \end{aligned}$$

In condizioni di regime lentamente variabile, nella regione esterna ai bipoli risulta $\nabla \mathbf{H} \cong \mathbf{J}$ e $\nabla \mathbf{E} \cong 0$. Si può quindi porre $\mathbf{E} \cong -\nabla \varphi$, da cui, essendo

$$\nabla(\varphi \mathbf{H}) = \nabla \varphi \times \mathbf{H} + \varphi \nabla \mathbf{H}$$

segue

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \cong - \oint_{\Sigma} \nabla \varphi \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} \varphi \nabla \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} - \oint_{\Sigma} \nabla(\varphi \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} \varphi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Omega} \underbrace{\nabla \nabla(\varphi \mathbf{H})}_{=0} d\Omega$$

$$p = - \oint_{\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \cong \oint_{\Sigma} \varphi \mathbf{J} \cdot (-\mathbf{n}) dS = \varphi_a i_a + \varphi_b i_b \cong (\varphi_a - \varphi_b) i_a = v i$$
6.8

La generalizzazione al caso dell' N -polo è immediata:

$$p \cong \sum_{k=1}^N \varphi_k i_k = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k i_k + \varphi_N i_N = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k i_k - \varphi_N \sum_{k=1}^{N-1} i_k = \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi_k - \varphi_N) i_k \cong \sum_{k=1}^{N-1} v_{kN} i_k$$
6.9

...work in progress

6.0.4 Semplici tecniche di eliminazione dei disturbi nei collegamenti elettrici

La trasmissione di informazione mediante segnali elettrici deve tener conto della presenza nell'ambiente di rumore elettromagnetico

In particolare, l'utilizzo di cavi elettrici non darebbe risultati efficaci, se non si adottassero specifiche soluzioni realizzative.

..... work in progress

- linea bifilare o 'piattina' (linea di trasmissione)
vulnerabile ai disturbi elettromagnetici presenti nell'ambiente (ad esempio dovuti ad altre linee vicine)
(+ altre proprietà, studiate nel corso di campi elettromagnetici)
- linea bifilare twistata o coppia twistata
molto efficace nel rigettare i disturbi elettromagnetici
- cavo ethernet
4 coppie twistate in un unico cavo
ciascuna coppia ha un diverso twist rate per minimizzare il crosstalk tra le coppie (di conseguenza i tempi di ritardo sono diversi)
- cavo starquad
evoluzione della linea bifilare twistata, prestazioni ancora migliori
- cavo coassiale
molto efficace nel rigettare i disturbi elettromagnetici
(+ altre proprietà, studiate nel corso di campi elettromagnetici)

Capitolo 7

Impianti

Indicazioni del tipo GSII.n intendono il riferimento alla pagina n libro consigliato Guarnieri-Stella Vol II

7.1 Trasformatore

7.1.1 Mutuo accoppiamento induttivo

inserire figure vari circuiti equivalenti del mutuo accoppiamento

per discussione sull'accoppiamento non perfetto si veda pag 35

7.1.2 Trasformatore reale

Dati di targa

Dati di targa principali		
Grandezza	Denominazione	Unità
A_N	Potenza nominale	VA
V_{1N}	Tensione nominale primaria	V
V_{2N}	Tensione nominale secondaria	V

Dalle espressioni $A_N = V_{1N}I_{1N} = V_{2N}I_{2N}$ si ricavano le *correnti nominali*

$$I_{1N} = \frac{A_N}{V_{1N}} \quad I_{2N} = \frac{A_N}{V_{2N}}$$

Il *rapporto di trasformazione*

$$a = \frac{V_{1N}}{V_{2N}}$$

definisce con buona approssimazione il legame che sussiste tra le tensioni primaria e secondaria quando il secondario è a vuoto. Il modello equivalente approssimato più semplice possibile del trasformatore reale è il *trasformatore ideale*, che è caratterizzato appunto dall'unico parametro a .

inserire figura dispensa manoscritta equivalenza con trasformatore ideale

dati di targa secondari ... integrare dispensa manoscritta

Grandezza	Descrizione	Esempio
	Costruttore	MAGNETAR
	Marchi di conformità normative	CE
N	Numero di matricola	7325
anno	Anno di fabbricazione	2010
f_N	Frequenza nominale	50 Hz
A_N	Potenza nominale	100 kVA
V_{1N}	Valore efficace della tensione nominale al primario	10 kV
V_{2N}	Valore efficace della tensione nominale al secondario	220 V
$i_0\%$	Corrente a vuoto al primario percentuale	3 %
$\cos \phi_0$	Fattore di potenza a vuoto	0.3
$v_{cc}\%$	Tensione di cortocircuito percentuale	4 %
$\cos \phi_{cc}$	Fattore di potenza in cortocircuito	0.2
M	Peso	800 kg
tipo	Tipo di raffreddamento	ONAN
servizio	continuo o pulsato	continuo

inserire figura modello a T del trasformatore

inserire figura modello a L del trasformatore

$$\dot{Z}_{10} = \frac{R_{10}iX_{10}}{R_{10} + iX_{10}} = R_{eq} + iX_{eq} = Z_{10}(\cos \phi_{10} + i \sin \phi_{10}) \quad \text{impedenza di magnetizzazione}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dot{Z}_{10}} &= \frac{1}{R_{eq} + iX_{eq}} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{iX_{10}} \\ \frac{R_{eq} - iX_{eq}}{R_{eq}^2 + X_{eq}^2} &= \frac{1}{R_{10}} - i \frac{1}{X_{10}} \quad \frac{R_{eq}}{Z_{10}^2} = \frac{1}{R_{10}} \quad \frac{X_{eq}}{Z_{10}^2} = \frac{1}{X_{10}} \\ R_{10} &= \frac{Z_{10}}{\frac{R_{eq}}{Z_{10}}} = \frac{Z_{10}}{\cos \phi_{10}} \quad X_{10} = \frac{Z_{10}}{\frac{X_{eq}}{Z_{10}}} = \frac{Z_{10}}{\sin \phi_{10}} \end{aligned} \quad 7.1$$

$$\bar{I}_{10} = \frac{\bar{V}_1}{\dot{Z}_{10}} \quad 7.2$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + iX_2 \quad \text{impedenza longitudinale al secondario}$$

$$\dot{Z}_{2p} = a^2 \dot{Z}_2 \quad \dot{Z}_2 \text{ riportata al primario}$$

$$\dot{Z} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_{carico} \approx \dot{Z}_{carico} \quad \begin{array}{l} Z_2 \ll Z_{carico} \text{ altrimenti la caduta di tensione sarebbe eccessiva} \\ \text{e le perdite nel rame sarebbero elevate} \end{array}$$

$$\dot{Z}_p = a^2 \dot{Z} \quad \dot{Z} \approx a^2 \dot{Z}_{carico} \quad \dot{Z} \text{ riportata al primario}$$

Alimentando il primario alla tensione nominale, risulta $\bar{I}_{10} = \frac{\bar{V}_{1N}}{\dot{Z}_{10}}$ indipendentemente dal carico (e in particolare anche se al secondario non è connesso alcun carico). Deve risultare $I_{10} \ll I_{1N}$, altrimenti in condizioni di carico le correnti nelle impedenze $\dot{Z}_{10}$ e $\dot{Z}_p$ sarebbero dello stesso ordine di grandezza, e le stesse impedenze $\dot{Z}_{10}$ e $\dot{Z}_p \approx a^2 \dot{Z}_{carico}$ sarebbero quindi dello stesso ordine di grandezza. Di conseguenza la potenza assorbita da $\dot{Z}_{10}$ sarebbe confrontabile con quella assorbita da $\dot{Z}_p$, ovvero le perdite nel ferro sarebbero confrontabili con la potenza assorbita dal carico, cioè il trasformatore sarebbe un pessimo trasformatore, cosa che ovviamente in fase progettuale viene accuratamente scongiurata. Dunque in condizioni di carico (non patologico) dovrà risultare $Z_{10} \gg a^2 Z_{carico}$, e in generale anche, per quanto già osservato

$$Z_{10} \gg a^2 Z_{carico} \gg a^2 Z_2 = Z_{2p} \quad 7.3$$

7.1.3 Modello a L, prova a vuoto GSII.58

integrare appunti Coccoresse

inserire figura prova a vuoto, e con modello a L

Una volta che il trasformatore è stato costruito si effettuano su di esso alcune prove per determinarne i dati di targa. In particolare nella prova a vuoto si ha

$$\begin{cases} I_1 = I_{10} & \text{lettura amperometro} \\ W = P_{\text{FeN}} = V_{1N} I_{10} \cos \phi_0 & \text{lettura wattmetro} \end{cases} \quad 7.4$$

L'amperometro ci fornisce direttamente la I_{10} , e dalla lettura del wattmetro si ricava $\cos \phi_0$.

La corrente al primario è

$$I_1 = I_{10} = \frac{V_{1N}}{Z_{10}} \quad \text{Valore efficace della corrente a vuoto al primario, che si ha quando il secondario è aperto} \quad 7.5$$

Si fa notare per completezza che, anche qualora si considerasse il modello a T del trasformatore, essendo nei trasformatori di potenza $Z_{10} \gg Z_1$ (tipicamente di un fattore 1000), si avrebbe comunque, con il secondario a vuoto, $\bar{I}_{10} = \frac{V_{1N}}{Z_1 + Z_{10}} \cong \frac{V_{1N}}{Z_{10}}$ e $I_{10} \cong \frac{V_{1N}}{Z_{10}}$.

Come si è notato, deve essere, per un buon trasformatore

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\triangleq \frac{I_{10}}{I_{1N}} \ll 1 & \text{Per un buon trasformatore (cioè che abbia perdite contenute)} \\ i_{0\%} = 100 \frac{I_{10}}{I_{1N}} &= 100 \alpha_0 < 10\% & \text{Corrente a vuoto percentuale} \end{aligned} \quad 7.6$$

Si ha poi

$$\cos \phi_0 = \cos \phi_{10} \quad 7.7$$

da cui

$$\begin{aligned} Z_{10} &= \frac{V_{1N}}{I_{10}} = \frac{V_{1N}}{\alpha_0 I_{1N}} \\ R_{10} &= \frac{V_{1N}}{I_{10} \cos \phi_0} = \frac{V_{1N}}{\alpha_0 I_{1N} \cos \phi_0} & X_{10} &= \frac{V_{1N}}{I_{10} \sin \phi_0} = \frac{V_{1N}}{\alpha_0 I_{1N} \sin \phi_0} \end{aligned} \quad 7.8$$

Essendo $\dot{Z}_{10}$ l'unica impedenza coinvolta, il funzionamento a vuoto del trasformatore dipende esclusivamente dal nucleo ferromagnetico. Si deduce che la potenza assorbita dal trasformatore a vuoto corrisponde alle *perdite nel ferro*.

7.1.4 Modello a L, prova in cortocircuito GSII.59

integrare appunti Coccoresse

inserire figura prova in cortocircuito, e con modello a L

Nella prova in cortocircuito si ha

$$\begin{cases} V_1 = V_{1cc} & \text{lettura voltmetro} \\ W = P_{\text{CuN}} = V_{1cc} I_{1N} \cos \phi_{cc} & \text{lettura wattmetro} \end{cases} \quad 7.9$$

Il voltmetro ci fornisce direttamente la V_{1cc} , e dalla lettura del wattmetro si ricava $\cos \phi_{cc}$.

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{cc} &= \frac{\dot{Z}_{10} \dot{Z}_{2p}}{\dot{Z}_{10} + \dot{Z}_{2p}} \cong \dot{Z}_{2p} & \text{impedenza vista al primario quando il secondario è in cortocircuito} \\ Z_{10} \gg Z_{2p} &\Rightarrow \dot{Z}_{cc} \cong \dot{Z}_{2p} & \text{per un trasformatore con perdite contenute e caduta di tensione contenuta, come visto} \\ V_{1cc} = Z_{cc} I_{1N} & & \text{Tensione primaria di cortocircuito, cioè il valore efficace della tensione che, quando il secondario è in cortocircuito, comporta una corrente primaria in valore efficace pari alla corrente nominale } I_{1N} \\ Z_{cc} &= \frac{V_{1cc}}{I_{1N}} & \dot{Z}_{cc} &= Z_{cc} (\cos \phi_{cc} + i \sin \phi_{cc}) \end{aligned}$$

$$\alpha_{cc} \triangleq \frac{V_{1cc}}{V_{1N}} \ll 1 \quad i_{0\%} = 100 \frac{V_{1cc}}{V_{1N}} = 100 \alpha_{cc} < 10 \% \quad \text{Tensione di cortocircuito percentuale} \quad \text{Tipicamente per un buon trasformatore} \quad 7.10$$

$$Z_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1N}} = \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{I_{1N}} \quad \frac{Z_{cc}}{Z_{10}} = \alpha_0 \alpha_{cc} \ll 1 \quad \text{tipicamente 1000 volte nei trasformatore di potenza} \quad 7.11$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{cc} &= \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{I_{1N}} (\cos \phi_{cc} + i \sin \phi_{cc}) \\ \dot{Z}_{2p} &\cong \dot{Z}_{cc} \quad R_{2p} \cong \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{I_{1N}} \cos \phi_{cc} \quad X_{2p} \cong \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{I_{1N}} \sin \phi_{cc} \\ \dot{Z}_2 &= \frac{\dot{Z}_{2p}}{a^2} \cong \frac{\dot{Z}_{cc}}{a^2} \quad R_2 \cong \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{a^2 I_{1N}} \cos \phi_{cc} \quad X_2 \cong \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{a^2 I_{1N}} \sin \phi_{cc} \end{aligned} \quad 7.12$$

Essendo $\dot{Z}_{cc} = \dot{Z}_{10} \parallel \dot{Z}_{2p} \cong \dot{Z}_{2p}$, si deduce che la potenza assorbita dal trasformatore in cortocircuito corrisponde alle *perdite nel rame*.

7.1.5 Caduta di tensione

integrare appunti Coccoresse

7.1.6 Rendimento

Il rendimento di un trasformatore è il rapporto tra la potenza media assorbita dal carico connesso al secondario e la potenza media assorbita dal primario

$$\eta = \frac{P_{carico}}{P_{primario}} = \frac{P_{carico}}{P_{Fe} + P_{Cu} + P_{carico}} \quad 7.13$$

Considerando al solito il modello a L del trasformatore abbiamo

$$\eta \cong \frac{V_2 I_2 \cos \phi_2}{\frac{V_1^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_2 I_2 \cos \phi_2} \quad \text{nel caso di modello a L} \quad 7.14$$

Il *rendimento convenzionale* (o *rendimento nominale*) è per definizione il valore numerico

$$\eta_c \triangleq \frac{A_N}{P_{FeN} + P_{CuN} + A_N} = \frac{A_N}{\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_{2N}^2 + A_N} \quad 7.15$$

Si alimenti ora il primario del trasformatore alla tensione nominale V_{1N} e si consideri la famiglia di funzioni $\eta(I_2 | \cos \phi_2)$, nella variabile indipendente I_2 , che si ottiene al variare del fattore di potenza del carico $\cos \phi_2$ considerato come parametro (più in generale si considereranno le famiglie di funzioni $\eta(I_2 | V_1, \cos \phi_2)$ che si ottengono al variare delle grandezze parametriche V_1 e $\cos \phi_2$). Data quindi la tensione primaria $V_1 = V_{1N}$ e fissato il valore del parametro $\cos \phi_2$, si vogliono esaminare le proprietà della funzione $\eta(I_2)$, il cui grafico prende il nome di *curva di rendimento del trasformatore*. Si può pensare di realizzare questa situazione in cui $\cos \phi_2$ è costante e I_2 varia, considerando il carico variabile nell'insieme di tutti i carichi che hanno il medesimo fattore di potenza. In prima approssimazione si assumerà trascurabile la variazione della tensione secondaria al variare della I_2 e quindi, essendo nel caso particolare $V_1 = V_{1N}$, sarà $V_2 \cong V_{2N}$. Allora

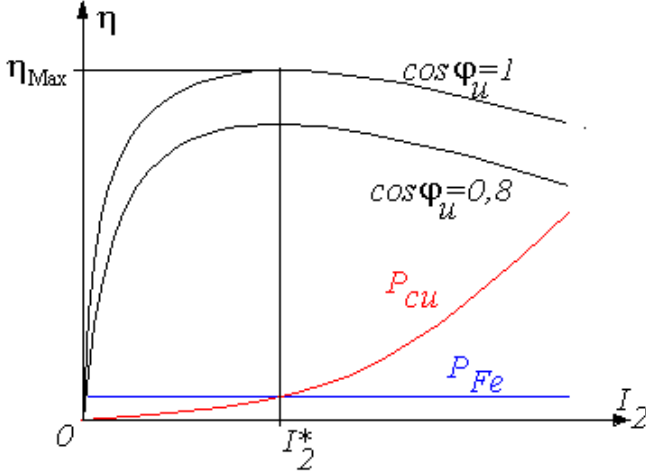
$$\eta(I_2 | V_{1N}, \cos \phi_2) \cong \frac{V_{2N} I_2 \cos \phi_2}{\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_{2N} I_2 \cos \phi_2}$$

ove si nota che le perdite nel ferro sono costanti, mentre quelle nel rame di pendono da I_2 , e

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dI_2} &= V_{2N} \cos \phi_2 \frac{\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_{2N} I_2 \cos \phi_2 - I_2 (2R_2 I_2 + V_{2N} \cos \phi_2)}{(\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_{2N} I_2 \cos \phi_2)^2} = V_{2N} \cos \phi_2 \frac{\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} - R_2 I_2^2}{(\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_{2N} I_2 \cos \phi_2)^2} \\ \frac{d\eta}{dI_2} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_{Fe} = P_{Cu} \\ I_2 = I_2^* \triangleq \frac{V_{1N}}{\sqrt{R_{10} R_2}} \end{cases} \quad 7.16 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_2 < I_2^* & \Rightarrow \frac{d\eta}{dR_2} > 0 \\ I_2 > I_2^* & \Rightarrow \frac{d\eta}{dR_2} < 0 \end{cases}$$

$$\eta_{\max}|_{V_{1N}, \cos \phi_2} = \eta(I_2^*|V_{1N}, \cos \phi_2) = \frac{V_{2N} I_2^* \cos \phi_2}{2 \frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + V_{2N} I_2^* \cos \phi_2} = \frac{\frac{V_{1N} V_{2N}}{\sqrt{R_{10} R_2}} \cos \phi_2}{2 \frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + \frac{V_{1N} V_{2N}}{\sqrt{R_{10} R_2}} \cos \phi_2} \quad 7.17$$



Un trasformatore destinato ad operare in *regime continuo*, cioè destinato ad alimentare un carico che assorba una corrente di valore efficace (approssimativamente) costante, verrà ovviamente scelto con corrente secondaria nominale $I_{2N} = I_{\text{carico}}$. Dalla discussione precedente si capisce allora che uno dei *criteri di progetto* del trasformatore in tale caso sarà $I_{2N} = I_2^*$, ovvero

$$P_{\text{FeN}} = P_{\text{CuN}} \Leftrightarrow \frac{V_{1N}^2}{R_{10}} = R_2 I_{2N}^2 \quad \text{criterio di progetto in regime continuo} \quad 7.18$$

In generale, quando la tensione primaria non coincide con la tensione nominale, V_2 è approssimativamente legata alla V_1 dal rapporto di trasformazione, e

$$I_2^* \triangleq \frac{V_1}{\sqrt{R_{10} R_2}} \quad \eta_{\max}|_{V_1, \cos \phi_2} = \eta(I_2^*|V_1, \cos \phi_2) = \frac{V_2 I_2^* \cos \phi_2}{2 \frac{V_1^2}{R_{10}} + V_2 I_2^* \cos \phi_2} = \frac{\frac{V_1 V_2}{\sqrt{R_{10} R_2}} \cos \phi_2}{2 \frac{V_1^2}{R_{10}} + \frac{V_1 V_2}{\sqrt{R_{10} R_2}} \cos \phi_2} \quad a \triangleq \frac{V_{1N}}{V_{2N}} \cong \frac{V_1}{V_2} \quad 7.19$$

Robustezza

La curva di rendimento è *molto piatta* intorno al valore I_2^* . Ciò appare ovvio, infatti se non lo fosse si avrebbe un forte calo del rendimento non appena la corrente assorbita dal carico si allontanasse dal valore ottimale. Questa proprietà può essere quantificata andando ad esempio a valutare quali sono i due valori di corrente I_{2a} e I_{2b} a cui corrisponde una riduzione del rendimento di una aliquota θ

$$\begin{aligned} \eta(I_2) &= \theta \eta_{\max} \quad \frac{V_2 I_2 \cos \phi_2}{\frac{V_1^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_2 I_2 \cos \phi_2} = \theta \eta_{\max} \\ \frac{V_2 I_2 \cos \phi_2}{\theta \eta_{\max}} &= \frac{V_1^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_2 I_2 \cos \phi_2 \quad I_2^2 - \left(\frac{1}{\theta \eta_{\max}} - 1 \right) \frac{V_2 \cos \phi_2}{R_2} I_2 + I_2^{*2} = 0 \\ J(\theta) &\triangleq \left(\frac{1}{\theta \eta_{\max}} - 1 \right) \frac{V_2 \cos \phi_2}{2 R_2} \\ I_2^2 - 2 J(\theta) I_2 + I_2^{*2} &= 0 \\ u(\theta) &\triangleq \frac{I_2(\theta)}{I_2^*} \quad h(\theta) \triangleq \frac{J(\theta)}{I_2^*} \\ u^2 - 2 h(\theta) u + 1 &= 0 \\ \delta(\theta) &= \frac{\Delta(\theta)}{4} = h^2(\theta) - 1 \\ \begin{cases} u_a(\theta) = h(\theta) - \sqrt{\delta(\theta)} \\ u_b(\theta) = h(\theta) + \sqrt{\delta(\theta)} \end{cases} \\ \theta = 1 &\Rightarrow \text{radici coincidenti } I_{2a} = I_{2b} = I_2^* \Rightarrow \delta(1) = 0 \quad u_a = u_b = h(1) = 1 \end{aligned}$$

$$h(\theta) = \frac{\sqrt{R_{10}R_2}}{V_1} \left(\frac{1}{\theta\eta_{\max}} - 1 \right) \frac{V_2 \cos \phi_2}{2R_2} = \left(\frac{1}{\theta\eta_{\max}} - 1 \right) \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{R_{10}}{R_2}} \cos \phi_2$$

Dalle 7.8, 7.11, 7.12 e dai tipici valori di targa si deduce

$$\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{R_{10}}{R_2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_0 \alpha_{cc} \cos \phi_0 \cos \phi_{cc}}} \gg 1 \quad \text{tipicamente di un fattore 100 o maggiore nei trasformatori di potenza}$$

Per valori tipici di $\eta_{\max}$, ad esempio nel range 0.96–0.99, mentre risulta $h(1) = 1$, per valori $\theta < 1$ il valore di h cresce rapidamente. Si ha ad esempio $h(0.9) \approx 15$ e $h^2(0.9) \approx 200$, ovvero $h^2(\theta) \gg 1$ e quindi $\delta(\theta) \cong h^2(\theta)$, per cui la formula suindicata per il calcolo di u_a soffre del problema della cancellazione numerica. Le espressioni corrette da utilizzare (si veda la 3.7) sono

$$\begin{cases} u_a(\theta) = \frac{1}{h + \sqrt{\delta}} \\ u_b(\theta) = h + \sqrt{\delta} \end{cases}$$

Infine si ha

$$u_b(\theta) = h + \sqrt{h^2 - 1} = h \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} \right)$$

$$\theta \lesssim 0.9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_a(\theta) \cong \frac{1}{2h(\theta)} \ll 1 \\ u_b(\theta) \cong 2h(\theta) \gg 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_{2a}(\theta) \ll I_2^* \\ I_{2b}(\theta) \gg I_2^* \end{cases} \quad 7.20$$

cioè, come volavasi provare, occorre che la corrente I_2 si discosti di molto dal valore ottimo I_2^* affinché ne consegua un calo apprezzabile del rendimento.

Rendimento in energia

Per *regime pulsato* si intende la modalità di funzionamento per cui il trasformatore opera, in intervalli di tempo diversi, a valori della corrente significativamente differenti. Ad esempio durante le ore diurne la corrente può essere consistentemente maggiore rispetto alle ore notturne. Una definizione di rendimento più adatta a descrivere il funzionamento in regime pulsato è quella di *rendimento in energia*.

Per fissare il concetto, consideriamo il caso semplificato in cui nelle ore notturne la corrente assorbita sia nulla mentre nelle ore diurne sia pari ad un valore costante I_2 . Posto $T = 24$ h e detto ΔT l'intervallo delle ore diurne in cui il carico assorbe potenza non nulla (Fig ??) risulta

inserire figura con $I_2 = \text{cost}$ per $t \in (8 \text{ h}, 17 \text{ h})$ e $I_2 = 0$ per $t \in (0 \text{ h}, 8 \text{ h}) \cup (17 \text{ h}, 24 \text{ h})$

$$\delta = \frac{\Delta T}{T} \quad \text{duty cycle} \quad 7.21$$

$$\eta^e(I_2|V_1, \cos \phi_2) = \frac{P_{\text{carico}} \Delta T}{P_{\text{Fe}} T + P_{\text{Cu}} \Delta T + P_{\text{carico}} \Delta T} = \frac{P_{\text{carico}}}{\frac{P_{\text{Fe}}}{\delta} + P_{\text{Cu}} + P_{\text{carico}}} = \frac{V_2 I_2 \cos \phi_2}{\frac{V_1^2}{\delta R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_2 I_2 \cos \phi_2} \quad 7.22$$

$$\frac{d\eta^e}{dI_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_{\text{Fe}} = \delta P_{\text{Cu}} \\ I_2 = I_2^* \triangleq \frac{V_1}{\sqrt{\delta R_{10} R_2}} \end{cases} \quad 7.23$$

$$\eta_{\max}^e|_{V_1, \cos \phi_2} = \eta^e(I_2^*|V_1, \cos \phi_2) = \frac{V_2 I_2^* \cos \phi_2}{2 \frac{V_1^2}{\delta R_{10}} + V_2 I_2^* \cos \phi_2} = \frac{\frac{V_1 V_2}{\sqrt{\delta R_{10} R_2}} \cos \phi_2}{2 \frac{V_1^2}{\delta R_{10}} + \frac{V_1 V_2}{\sqrt{\delta R_{10} R_2}} \cos \phi_2} \quad 7.24$$

7.2 Linee elettriche

Guarnieri-Stella Vol II

7.2.1 Caduta di tensione

Linea in continua a sbalzo

GSII.268 :

inserire figure che mostrano applicazione sovrapposizione

$$E_{KA} = E_A \quad 7.25$$

$$E_{Kh} = -R_{Ah}I_h \quad 7.26$$

$$E_K = E_{KA} + \sum_{h=1}^K E_{Kh} = E_A - \sum_{h=1}^K R_{Ah}I_h \quad 7.27$$

$$\Delta E_{\max} = E_A - E_{\min} = E_A - E_K = \sum_{h=1}^K R_{Ah}I_h = 2\frac{\rho}{S} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah}I_h \quad \text{equazione dei momenti} \quad 7.28$$

Linea in continua alimentata alle due estremità

GSII.269 :

inserire figure simili a quelle del libro

$$I_A + I_B = \sum_{h=1}^K I_h \quad 7.29$$

$$\exists t : \sum_{h=1}^{t-1} I_h < I_A \leq \sum_{h=1}^t I_h \quad 7.30$$

$$E_A - E_B = 2\frac{\rho}{S} \left(\sum_{h=1}^K \ell_{Ah}I_h - \ell_{AB}I_B \right) \quad 7.31$$

$$E_A = E_B \Rightarrow I_B = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah}I_h \quad 7.32$$

$$\text{analogamente } I_A = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh}I_h \text{ e poi } I_A = \sum_{h=1}^K I_h - I_B \quad 7.33$$

$$\text{trovato } t, \text{ si ha } I_t = I_{tA} + I_{tB} \text{ e } \begin{cases} I_{tA} = I_A - \sum_{h=1}^{t-1} I_h \\ I_{tB} = I_t - I_{tA} \end{cases} \quad 7.34$$

Quindi per valutare la caduta di tensione massima si considera il circuito spezzato in due ... (completare, vedi libro)

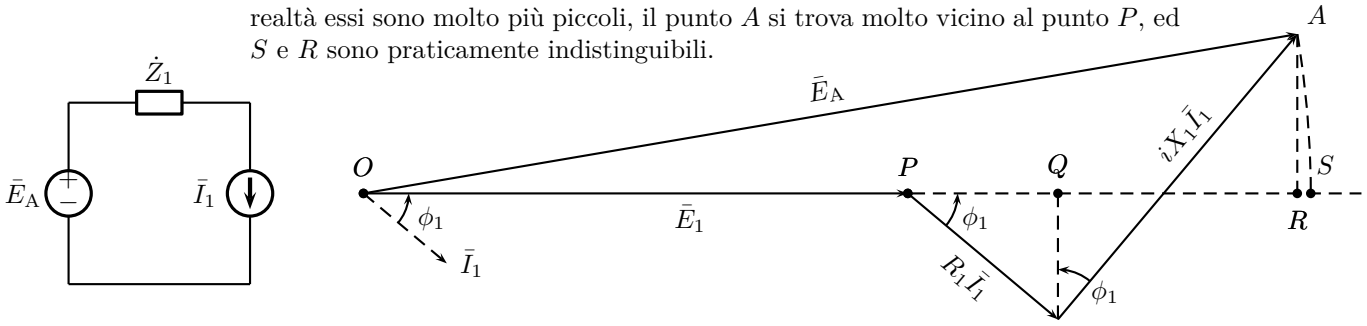
$$\Delta E_{\max} = 2\frac{\rho}{S} \left(\sum_{h=1}^{t-1} \ell_{Ah}I_h + \ell_{At}I_{tA} \right) \quad \text{oppure} \quad \Delta E_{\max} = 2\frac{\rho}{S} \left(\sum_{h=t+1}^K \ell_{Bh}I_h + \ell_{Bt}I_{tB} \right) \quad 7.35$$

Linea in continua ad anello

Linea monofase a sbalzo con un solo carico

L'espressione della caduta di tensione è identica a quella trovata per il trasformatore

In questo diagramma fasoriale i moduli dei fasori che rappresentano le cadute di tensione resistiva e induttiva sono enormemente amplificati per chiarezza. In realtà essi sono molto più piccoli, il punto A si trova molto vicino al punto P , ed S e R sono praticamente indistinguibili.



$$\bar{E}_A = \bar{E}_1 + (R_1 + iX_1)\bar{I}_1 \quad 7.36$$

$$\Delta E_{\max} = E_A - E_1 = \overline{OA} - \overline{OP} = \overline{OS} - \overline{OP} = \overline{PS} \cong \overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR} = R_1 I_1 \cos \phi_1 + X_1 I_1 \sin \phi_1 \quad 7.37$$

$$\Delta E_{\max} = \Delta E^a + \Delta E^r \quad \Delta E^a = 2 \frac{\rho}{S} \ell_1 I_1 \cos \phi_1 \quad \Delta E^r = 2 X_{\ell} \ell_1 I_1 \sin \phi_1 \quad 7.38$$

Linea monofase a sbalzo con più carichi

GSII.275 :

$$\bar{E}_h = E_h e^{i\alpha_h} \quad \bar{I}_h = I_h e^{i\beta_h} \quad 7.39$$

$$\dot{Z}_{uh} = Z_{uh} e^{i\phi_h} \quad h\text{-mo carico} \quad 7.40$$

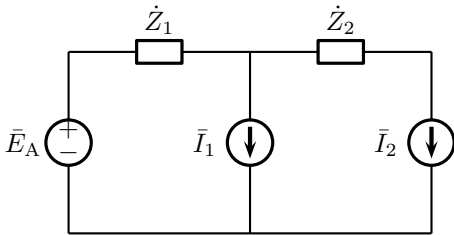
$$E_h e^{i\alpha_h} = \bar{E}_h = \dot{Z}_{uh} \bar{I}_h = Z_{uh} I_h e^{i(\phi_h + \beta_h)} \quad \alpha_h = \phi_h + \beta_h \quad 7.41$$

$$\text{le tensioni sono approssimativamente tutte in fase, scegliamo } \alpha_h \cong \alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_h = \alpha_h - \phi_h \cong -\phi_h \quad 7.42$$

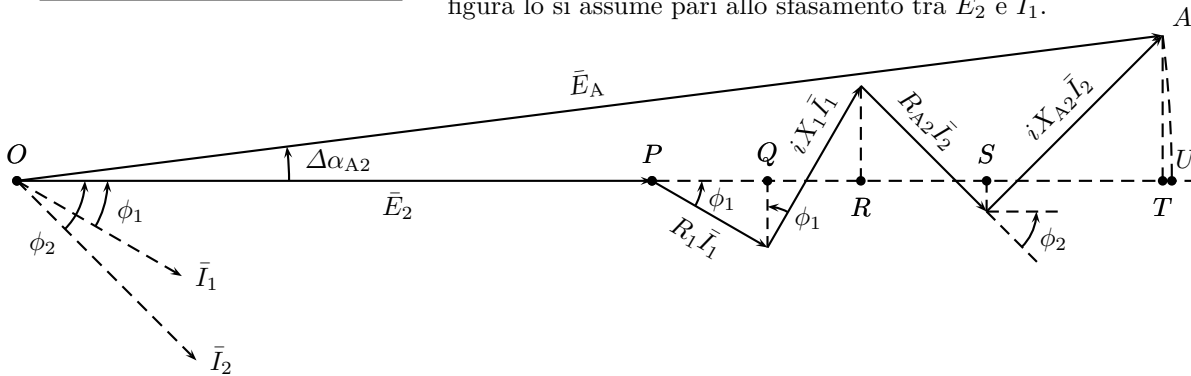
$$I_h^a \triangleq I_h \cos \phi_h \quad I_h^r \triangleq I_h \sin \phi_h \quad 7.43$$

$$I_h \cong I_h e^{-i\phi_h} = I_h \cos \phi_h - i I_h \sin \phi_h = I_h^a - i I_h^r \quad 7.44$$

Determiniamo l'espressione della caduta di tensione facendo riferimento al caso in cui vi siano due soli carichi (Fig ??), essendo il caso generale di fatto identico.



In questo diagramma fasoriale i moduli dei fasori che rappresentano le varie cadute di tensione resistive e induttive sono enormemente amplificati per chiarezza. In realtà essi sono molto più piccoli, e il punto A si trova molto vicino al punto P . Di conseguenza l'angolo $\Delta\alpha_{A2} = \alpha_A - \alpha_2$ è molto piccolo rispetto agli angoli ϕ_1 e ϕ_2 ovvero, come anticipato, le tensioni (sul generatore e sui vari carichi) si possono ritenere tutte in fase tra loro. Se così non fosse il diagramma non sarebbe corretto in quanto a rigore ϕ_1 è lo sfasamento tra $\bar{E}_1$ e $\bar{I}_1$, mentre nella figura lo si assume pari allo sfasamento tra $\bar{E}_2$ e $\bar{I}_1$.



$$\bar{E}_2 = \bar{E}_A - \sum_{h=1}^2 \dot{Z}_{Ah} \bar{I}_h = \bar{E}_A - \dot{Z}_1 \bar{I}_1 - (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \bar{I}_2 \quad 7.45$$

$$\bar{E}_A = \bar{E}_2 + [R_1 + iX_1] \bar{I}_1 + [\underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{A2}} + i \underbrace{(X_1 + X_2)}_{X_{A2}}] \bar{I}_2 \quad 7.46$$

$$\Delta E_{\max} = E_A - E_2 = \overline{OA} - \overline{OP} = \overline{OU} - \overline{OP} = \overline{PU} \quad 7.47$$

$$\cong \overline{PT} = \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{ST} \quad 7.48$$

$$= R_1 I_1 \cos \phi_1 + X_1 I_1 \sin \phi_1 + (R_1 + R_2) I_2 \cos \phi_2 + (X_1 + X_2) I_2 \sin \phi_2 \quad 7.49$$

$$= \underbrace{\sum_{h=1}^2 R_{Ah} I_h \cos \phi_h}_{\Delta E^a} + \underbrace{\sum_{h=1}^2 X_{Ah} I_h \sin \phi_h}_{\Delta E^r} = \sum_{h=1}^2 R_{Ah} I_h^a + \sum_{h=1}^2 X_{Ah} I_h^r \quad 7.50$$

$$\Delta E_{\max} = \Delta E^a + \Delta E^r = \sum_{h=1}^K R_{Ah} I_h \cos \phi_h + \sum_{h=1}^K X_{Ah} I_h \sin \phi_h = \sum_{h=1}^K R_{Ah} I_h^a + \sum_{h=1}^K X_{Ah} I_h^r \quad 7.51$$

$$\Delta E^a = 2 \frac{\rho}{S} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h \cos \phi_h = 2 \frac{\rho}{S} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^a \quad 7.52$$

$$\Delta E^r = 2 X_\ell \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h \sin \phi_h = 2 X_\ell \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^r \quad 7.53$$

$$7.54$$

Linea monofase alimentata alle due estremità

GSII.276 :

inserire figure simili a quelle del libro

$$\bar{I}_B = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} \bar{I}_h = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} (I_h^a - i I_h^r) = \underbrace{\frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^a}_{\triangleq I_B^a} - i \underbrace{\frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^r}_{\triangleq I_B^r} \quad 7.55$$

$$\bar{I}_A = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} \bar{I}_h = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} (I_h^a - i I_h^r) = \underbrace{\frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} I_h^a}_{\triangleq I_A^a} - i \underbrace{\frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} I_h^r}_{\triangleq I_A^r} \quad 7.56$$

$$\begin{cases} I_B^a = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^a \\ I_B^r = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^r \end{cases} \quad \begin{cases} I_A^a = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} I_h^a \\ I_A^r = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} I_h^r \end{cases} \quad 7.57$$

$$\begin{cases} I_A^a + I_B^a = \sum_{h=1}^K I_h^a & \exists t : \sum_{h=1}^{t-1} I_h^a < I_A^a \leq \sum_{h=1}^t I_h^a \Rightarrow \text{determino } t \\ I_A^r + I_B^r = \sum_{h=1}^K I_h^r & \exists s : \sum_{h=1}^{s-1} I_h^r < I_A^r \leq \sum_{h=1}^s I_h^r \Rightarrow \text{determino } s \end{cases} \quad 7.58$$

$$\begin{cases} \text{trovato } t, \text{ si ha } I_t^a = I_{tA}^a + I_{tB}^a \text{ e } \begin{cases} I_{tA}^a = I_A^a - \sum_{h=1}^{t-1} I_h^a \\ I_{tB}^a = I_t^a - I_{tA}^a \end{cases} \\ \text{trovato } s, \text{ si ha } I_s^r = I_{sA}^r + I_{sB}^r \text{ e } \begin{cases} I_{sA}^r = I_A^r - \sum_{h=1}^{s-1} I_h^r \\ I_{sB}^r = I_s^r - I_{sA}^r \end{cases} \end{cases} \quad 7.59$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \Delta E_t^a = 2 \frac{\rho}{S} (\sum_{h=1}^{t-1} \ell_{Ah} I_h^a + \ell_{At} I_{tA}^a) = \Delta E_{\max}^a \\ \Delta E_t^r = 2 \frac{\rho}{S} (\sum_{h=1}^{t-1} \ell_{Ah} I_h^r + \ell_{At} I_{tA}^r) \end{cases} & \Delta E_t = \Delta E_t^a + \Delta E_t^r \\ \begin{cases} \Delta E_s^a = 2 \frac{\rho}{S} (\sum_{h=1}^{s-1} \ell_{Ah} I_h^a + \ell_{As} I_{sA}^a) \\ \Delta E_s^r = 2 \frac{\rho}{S} (\sum_{h=1}^{s-1} \ell_{Ah} I_h^r + \ell_{As} I_{sA}^r) = \Delta E_{\max}^r \end{cases} & \Delta E_s = \Delta E_s^a + \Delta E_s^r \end{cases} \quad 7.60$$

$$\Delta E_{\max} = \max(\Delta E_t, \Delta E_s) \quad 7.61$$

$$\text{oppure } \Delta E_{\max} = \Delta E_{\max}^a + \Delta E_{\max}^r \quad (\text{criterio cautelativo})$$

7.62

Linea monofase ad anello

Linee trifasi

7.2.2 Comportamento termico delle linee

7.2.3 Dimensionamento delle linee elettriche

7.2.4 Confronto tra linee elettriche

7.3 Impianti di terra

7.4 Interruttore automatico

7.4.1 Protezione dal cortocircuito

La norma CEI 64-8 stabilisce che, a protezione dei circuiti di un impianto, debbano essere previsti dispositivi atti a interrompere le correnti di cortocircuito, prima che queste diventino pericolose a causa degli effetti termici e meccanici generati nei conduttori e nelle connessioni.

Per poter dimensionare correttamente l'impianto elettrico e i dispositivi di protezione è necessario conoscere il valore della *corrente presunta di cortocircuito* nel punto dove si intende realizzare il sistema di protezione stesso. La conoscenza di tale valore permette infatti di scegliere opportunamente gli apparecchi di protezione in termini dei relativi poteri di interruzione e di chiusura, e di verificare la tenuta agli sforzi elettrodinamici dei supporti sbarre installati nei quadri elettrici e dei condotti sbarre.

... work in progress

... continuare dal doc Guida+Criteri+Progettazione_DE08G_CP_23216.pdf

... caratterizzazione della I_{cc} , pag 47

... condizioni generali di protezione, protezione dei cavi, pag 54

7.4.2 Corrente di guasto e resistenza di terra

... work in progress ...

In un impianto monofase si dice che si è verificato un guasto quando si ha un cortocircuito tra neutro e fase in un qualche punto dell'impianto stesso. La corrente di guasto è quindi la corrente di cortocircuito che si ha cortocircuitando neutro e fase, cioè $I_g = \frac{E}{R_i}$, dove $E = 220$ Volt, e R_i è la resistenza interna di Thevenin nel punto dell'impianto in cui si verifica il cortocircuito (si fa quindi l'ipotesi approssimata di essere in condizioni di linearità e di poter così applicare Thevenin; inoltre si è considerata per semplicità di esposizione una impedenza interna puramente resistiva: in generale si veda GSII.308 nota 2). Quindi, contrariamente a quanto si possa leggere da alcune fonti, la corrente di guasto è una grandezza ben definita e la sua definizione non richiede alcun riferimento alla grandezza resistenza di terra. Naturalmente dalla definizione si capisce che la I_g dipende dal punto in cui si verifica il guasto.

Le norme prescrivono che la tensione di contatto V_c dovuta ad un eventuale guasto deve essere inferiore a $V_{c\max} = 50$ Volt. Nota la I_g (e quindi anche la R_i), e in assenza di ulteriori accorgimenti, per avere $V_c < V_{c\max}$, sarà necessario avere la resistenza di terra R_t significativamente inferiore rispetto alla R_i , e *approssimativamente* calcolabile considerando ad esempio il partitore di tensione $V_c = \frac{ER_t}{R_i + R_t} = \frac{E}{1 + R_i/R_t} < V_{c\max}$, da cui $\frac{E}{V_{c\max}} - 1 < \frac{R_i}{R_t}$. Essendo $\frac{E}{V_{c\max}} - 1 = \frac{220}{50} - 1 = 3.4 > 0$ la disequazione diventa $R_t < \frac{R_i}{\frac{E}{V_{c\max}} - 1} = \frac{R_i}{3.4} = 0.29R_i$.

Ottenere una R_t così piccola (visto che R_i è già molto piccola, valori tipici $R_i =$ qualche decimo di Ohm) è difficile. Quindi, data la R_t che si è riusciti ad ottenere sull'impianto (ad esempio $R_t = 3$ Ohm), si può considerare di mettere un interruttore di protezione con corrente di intervento nominale I_{in} tale da impedire che la V_c possa superare $V_{c\max}$ (cioè scegliendo I_{in} tale che $V_c = R_t I_{in} < V_{c\max}$, ovvero $I_{in} < \frac{V_{c\max}}{R_t} = \frac{50}{3} = 16.7$ A nel caso specifico), anche se questa cosa è un po' rischiosa perchè se l'interruttore si guasta (ad esempio invecchia) potrebbe non intervenire.

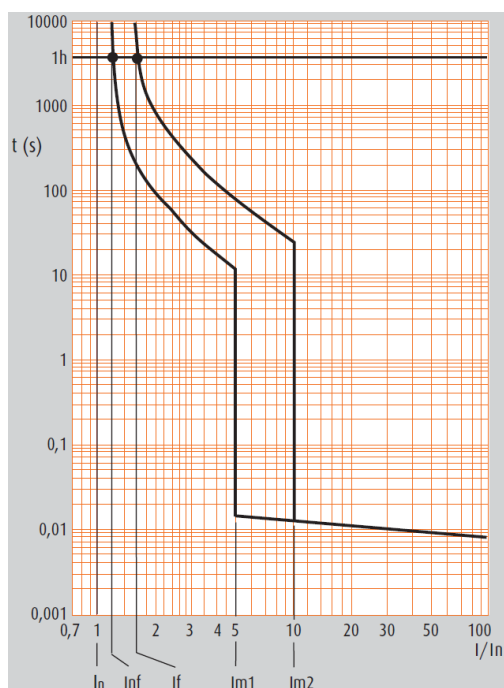
E inoltre poi si mette negli impianti anche l'interruttore differenziale (obbligatorio per legge).
 ... work in progress

7.4.3 Dati di targa dell'interruttore

7.4.4 Correnti di riferimento della caratteristica di intervento

... work in progress ...

bticino cartaceo p10



Costruire un interruttore che abbia esattamente una determinata caratteristica di intervento non è possibile per via delle inevitabili tolleranze introdotte durante il processo di fabbricazione. Per tale motivo nelle norme non viene specificata una singola caratteristica di intervento ma due curve limite inferiore e superiore. Dunque ad esempio la caratteristica di intervento di un interruttore che rispetta la norma a cui questa figura si riferisce si troverà all'interno della regione delimitata dalle due curve limite indicate.

aggiungere figure e discussione da

http://www.elektro.it/elektro_sicurel_html/sicurel_32_5.html

Le caratteristiche di intervento degli interruttori automatici sono caratterizzate dalle seguenti grandezze di riferimento:

I_n = corrente nominale

È il valore di corrente in aria libera che l'apparecchio può portare in servizio ininterrotto. Per gli apparecchi conformi alla norma CEI EN 60898 questo valore non deve essere superiore a 125 A, per gli interruttori invece conformi alla norma CEI EN 60947-2 non sono definiti limiti.

È anche il valore di corrente alla quale si riferiscono tutte le prescrizioni costruttive dell'apparecchio e che rappresenta il valore unitario nella caratteristica di intervento (con asse delle ascisse normalizzato)

t_c = tempo convenzionale rispetto al quale sono definite le correnti I_{nf} e I_f (si veda anche la tabella a seguire)

I_{nf} = corrente di non funzionamento o corrente convenzionale di non intervento

Massimo valore di sovracorrente che *non* fa intervenire l'interruttore magnetotermico (o elettronico) entro il tempo convenzionale t_c

I_f = corrente di funzionamento o corrente convenzionale di intervento

Minimo valore di sovracorrente che fa intervenire *certamente* l'interruttore magnetotermico (o elettronico) entro il tempo convenzionale t_c

I_{m1} = Minima sovracorrente che *può* far intervenire lo sganciatore elettromagnetico

I_{m2} = Minima sovracorrente che *fa certamente* intervenire lo sganciatore elettromagnetico

Queste grandezze caratteristiche assumono diversi valori in funzione della Norma di riferimento. In particolare, nel caso degli interruttori con parametri *non regolabili*, le Norme di riferimento sono la CEI EN 60898 e la CEI EN 60947-2, e le correnti sono specificate nel seguente prospetto

Norma	I_n [A]	I_{nf}/I_n	I_f/I_n	t_c
CEI EN 60898 (CEI 23-3 IV ed.)	≤ 63	1.13	1.45	1 h
	> 63	1.13	1.45	2 h
	ulteriore prova:			
$I_n \leq 125A$	≤ 32	—	2.55	$1 \div 60$ s
	> 32	—	2.55	$1 \div 120$ s
CEI EN 60947-2	≤ 63	1.05	1.30	1 h
	> 63	1.05	1.30	2 h

Come si vede risulta $I_{nf} > I_n$ e $I_f > I_n$. Tuttavia, alcuni interruttori hanno i valori delle correnti di riferimento regolabili, nel qual caso I_{nf} e I_f possono essere impostate a valori inferiori alla I_n (vedi bticino Megabreak_03.pdf p18, ma anche il bticino cartaceo)

7.4.5 Potere di interruzione

Il potere di interruzione I_{pi} non deve essere inferiore alla corrente presunta di cortocircuito (cioè la corrente di guasto) calcolata nel punto di installazione dell'interruttore. In genere per gli impianti destinati ad uso residenziale e similare si fa riferimento al potere di interruzione verificato secondo CEI 23-3 e per gli altri casi secondo CEI 17-5.

In caso di targa con più poteri di interruzione si deve scegliere quello pertinente ai parametri elettrici (tensione, frequenza, tipo di corrente) della linea protetta.

È ammesso scegliere la categoria meno gravosa (P1 secondo CEI 17-5 e I_{cu} secondo IEC 947-2).

... work in progress

7.4.6 altro

Per proteggere l'impianto da eventuali correnti di guasto maggiori del potere di interruzione si può mettere un fusibile in serie all'interruttore

... figura GSII.329 caratteristica complessiva interruttore+fusibile

Capitolo 8

Compendio

8.1 Classificazioni

8.1.1 Classificazione dei bipoli

- **Bipolo tempo-variante**

$$f(v(t), i(t), t) = 0$$

- **Bipolo tempo-invariante**

$$f(v(t), i(t)) = 0$$

- **Bipolo a-dinamico**

$f(v(t), i(t), t) = 0$ [$f(v(t), i(t)) = 0$ nel caso tempo-invariante] è una relazione algebrica

- **Bipolo dinamico**

$f(v(t), i(t), t) = 0$ [oppure $f(v(t), i(t)) = 0$] è una relazione differenziale, o integrale, o integro-differenziale

– Esempio: $v(t) = \frac{d[L(t)i(t)]}{dt}$ [oppure $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$]

- **Bipolo a-dinamico a caratteristica lineare**

$$k_0(t) + k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) = 0$$

$$[k_0 + k_1v(t) + k_2i(t) = 0 \text{ per il caso tempo-invariante}]$$

- **Bipolo a-dinamico lineare**

$$k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) = 0$$

$$[k_1v(t) + k_2i(t) = 0 \text{ per il caso tempo invariante}]$$

– Esempio 1 (tempo-variante): $v(t) - R(t)i(t) = 0$, per una lampadina ad incandescenza che, quando viene accesa, si riscalda e, per effetto della variazione di temperatura, varia la resistività del filamento nel tempo e quindi varia la resistenza

– Esempio 2 (tempo-invariante): $v(t) = Ri(t)$, con R costante

- **Bipolo dinamico a caratteristica lineare**

$$k_0(t) + k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) + k_3(t)\frac{dv}{dt} + k_4(t)\frac{di}{dt} = 0 \text{ (differenziale del primo ordine)}$$

$$k_0(t) + k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) + k_3(t)\frac{dv}{dt} + k_4(t)\frac{di}{dt} + k_5(t)\frac{d^2v}{dt^2} + k_6(t)\frac{d^2i}{dt^2} = 0 \text{ (differenziale del secondo ordine)}$$

$$[k_0 + k_1v(t) + k_2i(t) + k_3\frac{dv}{dt} + k_4\frac{di}{dt} + k_5\frac{d^2v}{dt^2} + k_6\frac{d^2i}{dt^2} = 0 \text{ per il caso tempo-invariante}]$$

- **Bipolo dinamico lineare**

$$k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) + k_3(t)\frac{dv}{dt} + k_4(t)\frac{di}{dt} = 0 \text{ (differenziale del primo ordine)}$$

$$k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) + k_3(t)\frac{dv}{dt} + k_4(t)\frac{di}{dt} + k_5(t)\frac{d^2v}{dt^2} + k_6(t)\frac{d^2i}{dt^2} = 0 \text{ (differenziale del secondo ordine)}$$

$$[k_1v(t) + k_2i(t) + k_3\frac{dv}{dt} + k_4\frac{di}{dt} + k_5\frac{d^2v}{dt^2} + k_6\frac{d^2i}{dt^2} = 0 \text{ per il caso tempo-invariante}]$$

– Esempio 1 (tempo-variante): $i(t) - \frac{d[C(t)v(t)]}{dt} = 0$, per un condensatore la cui distanza tra le armature viene fatta variare nel tempo

– Esempio 2 (tempo-invariante): $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$, con C costante

- **Bipolo a-dinamico passivo**

$$p^{\text{as}}(t) \geq 0 \quad (\text{cioè } v(t)i(t) \geq 0 \text{ nel caso di convenzione dell'utilizzatore})$$

ovvero, avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore, la caratteristica si trova tutta nel primo e terzo quadrante

- **Bipolo a-dinamico strettamente passivo (dissipativo)**

$$p^{\text{as}}(t) = v(t)i(t) > 0, \text{ e } p^{\text{as}}(t) = 0 \text{ è possibile solo se sono nulle contemporaneamente } v(t) \text{ e } i(t)$$

cioè, avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore, la caratteristica si trova tutta nel primo e terzo quadrante e non tocca gli assi coordinati tranne che nell'origine

- **Bipolo a-dinamico asintoticamente passivo**

- **Bipolo dinamico passivo**

non può erogare più energia (lavoro elettrico) di quanto ne abbia assorbita in precedenza

- **Bipolo dinamico conservativo**

‘Conserva’ il lavoro elettrico assorbito sotto forma di energia interna, senza trasformarlo in altra forma di energia. L’energia viene conservata internamente al bipolo sotto forma di energia immagazzinata nel campo elettromagnetico e nei materiali di cui è costituito. L’energia immagazzinata può essere poi restituita al circuito in cui il bipolo è inserito

- Esempio 1: L’induttore è conservativo perchè immagazzina il lavoro elettrico assorbito, in parte sotto forma di energia interna del campo *magnetico* e in parte in energia interna dei materiali presenti nel componente; analogamente il condensatore è conservativo perchè immagazzina il lavoro elettrico assorbito, in parte sotto forma di energia interna al campo *elettrico* e in parte in energia interna dei materiali presenti;
- Esempio 2: Il resistore non è conservativo perchè assorbe lavoro elettrico e lo trasforma integralmente (o in massima parte) in calore (eventualmente in parte anche in radiazione elettromagnetica, ad esempio la luce emessa dalle lampadine ad incandescenza)

- **Bipolo generalizzato (o sottorete) a-dinamico non inerte**

contiene al suo interno generatori ideali

8.1.2 Classificazione dei componenti a più terminali

La classificazione dei componenti a più terminali costituisce la naturale generalizzazione di quella relativa ai bipoli, ad esempio:

- **Doppio bipolo a-dinamico passivo**

$p^{\text{as}}(t) \geq 0$ (cioè $v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \geq 0$ nel caso di convenzione dell’utilizzatore ad entrambe le porte)

ovvero, avendo fatto la convenzione dell’utilizzatore ad entrambe le porte, le 2 relazioni caratteristiche sono tali da rendere soddisfatta la disuguaglianza indicata

- Esempio: Il trasformatore ideale è un doppio bipolo a-dinamico perchè le sue relazioni caratteristiche sono algebriche ($\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = T$ e $\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{1}{T}$ ad esempio nel caso di convenzione dell’utilizzatore ad entrambe le porte). Esso è trasparente alle potenze: $(p(t) = v_1i_1 + v_2i_2 = v_1i_1 + \frac{v_1}{T}(-Ti_1) = 0)$ e quindi è passivo

- **Doppio bipolo dinamico passivo**

$L^{\text{er}}(t_1, t_2) \leq L^{\text{as}}(-\infty, t_1)$ (dove $L^{\text{er}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p^{\text{er}}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} [-v_1(t)i_1(t) - v_2(t)i_2(t)]dt$, nel caso di convenzione dell’utilizzatore ad entrambe le porte)

Non può erogare più energia (lavoro elettrico) di quanto ne abbia assorbito in precedenza

- Esempio 1: Il trasformatore (mutuo accoppiamento induttivo senza perdite) è un doppio bipolo dinamico perchè le sue relazioni caratteristiche sono differenziali. Il fatto che è passivo lo si può ad esempio dedurre dal fatto che il suo modello equivalente è costituito da bipoli passivi (induttori) e da un trasformatore ideale, e utilizzando il teorema di conservazione delle potenze
- Esempio 2: Il trasformatore reale (mutuo accoppiamento induttivo con perdite) è un doppio bipolo dinamico passivo, perchè il suo modello equivalente è costituito da bipoli passivi (resistori e induttori) e da un trasformatore ideale

8.1.3 Classificazione dei circuiti

- **Circuito lineare**

È composto da elementi (bipoli, N -poli, M -bipoli) le cui relazioni costitutive sono relazioni a caratteristica lineare

- **Circuito non lineare**

Almeno uno degli elementi componenti il circuito è descritto da relazioni costitutive non lineari

- **Circuito tempo-invariante**

È composto da elementi le cui relazioni costitutive non dipendono esplicitamente dal tempo

- **Circuito dissipativo**

È tale che, nell’evoluzione libera, l’energia immagazzinata in tutti i componenti costituenti il circuito tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow \infty$

8.2 Relazioni essenziali

Il complesso coniugato di una certa grandezza, ad esempio una corrente $\bar{I}$, si può indicare sia con il simbolo $\check{I}$ che con $\bar{I}^*$.

8.2.1 Potenza scambiata da un bipolo in regime sinusoidale

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t + \alpha) & i(t) &= I_M \cos(\omega t + \beta) & \phi &= \alpha - \beta & \beta &= \alpha - \phi & \alpha + \beta &= 2\alpha - \phi \\ p(t) &= v(t)i(t) = V_M I_M \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) = \frac{V_M I_M}{2} [\cos \phi + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)] \\ &= V I \cos \phi + V I \cos(2\omega t + \alpha + \beta) = P + p_f(t) \end{aligned}$$

8.2.2 Espressioni nel metodo dei fasori

$$\begin{aligned} \bar{V} &= V e^{i\alpha} & \bar{I} &= I e^{i\beta} & \dot{Z} &= Z e^{i\phi} \\ \dot{Z} &= \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V e^{i\alpha}}{I e^{i\beta}} = \frac{V}{I} e^{i(\alpha-\beta)} & \boxed{\phi = \alpha - \beta} & & \boxed{\text{solo se } \alpha = 0 \text{ allora } \beta = -\phi \text{ e } \bar{I} = I e^{-i\phi}} \\ \dot{Z} &= \frac{\bar{V}}{\bar{I}} & \dot{Z} &= Z \cos \phi + i Z \sin \phi = R + iX & Z &= \sqrt{R^2 + X^2} & \frac{\dot{Z}}{Z} &= \frac{R}{Z} + i \frac{X}{Z} = e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \\ \phi &= \begin{cases} \arctan \frac{X}{R} & R > 0 \\ \pi + \arctan \frac{X}{R} & R < 0 \end{cases} & \boxed{\text{Meglio questa: } \phi = 2 \arctan \frac{X}{Z+R} \quad \forall R, \forall X} & & (\text{pag 7}) \\ \dot{Y} &= \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{R + iX} = \frac{R - iX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - i \frac{X}{Z^2} = G + iB \\ P &= V I \cos \phi = V I \frac{R}{Z} = \frac{V}{Z} I R = R I^2 & Q &= V I \sin \phi = V I \frac{X}{Z} = \frac{V}{Z} I X = X I^2 & A &= \sqrt{P^2 + Q^2} = V I \\ \dot{A} &= \bar{V} \check{I} = V I e^{i\phi} = A e^{i\phi} = A \cos \phi + i A \sin \phi = V I \cos \phi + i V I \sin \phi = P + iQ \\ &= \bar{V} \bar{I}^* = \dot{Z} \bar{I} \bar{I}^* = \dot{Z} I^2 \\ &= \bar{V} \bar{I}^* = \bar{V} \left(\frac{\bar{V}}{\dot{Z}} \right)^* = \frac{V^2}{\dot{Z}^*} \\ \phi &= \begin{cases} \arctan \frac{Q}{P} & P > 0 \\ \pi + \arctan \frac{Q}{P} & P < 0 \end{cases} & \boxed{\text{Meglio questa: } \phi = 2 \arctan \frac{Q}{A+P} \quad \forall P, \forall Q} & & (\text{pag 7}) \end{aligned}$$

Casi particolari

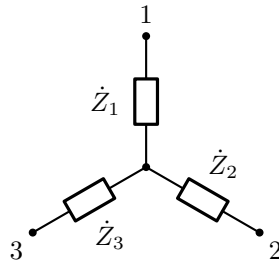
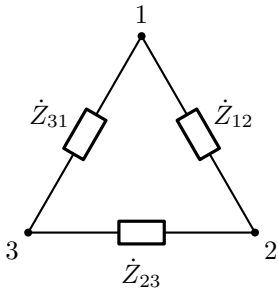
$$\begin{aligned} R: & \quad \dot{A}_R = \bar{V} \check{I} = R \bar{I} \check{I} = R I^2 = R \left(\frac{V}{R} \right)^2 = \frac{V^2}{R} & P_R &= R I^2 = \frac{V^2}{R} & Q_R &= 0 \\ L: & \quad \dot{A}_L = \bar{V} \check{I} = i X_L \bar{I} \check{I} = i X_L I^2 = i X_L \left(\frac{V}{X_L} \right)^2 = i \frac{V^2}{X_L} & P_L &= 0 & Q_L &= X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} \\ C: & \quad \dot{A}_C = \bar{V} \check{I} = -i X_C \bar{I} \check{I} = -i X_C I^2 = -i X_C \left(\frac{V}{X_C} \right)^2 = -i \frac{V^2}{X_C} & P_C &= 0 & Q_C &= -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C} \end{aligned}$$

8.2.3 Conservazione delle potenze in regime sinusoidale

$$\begin{aligned} \sum_1^\ell \bar{V}_k \check{I}_k &= 0 & \sum_1^\ell (P_k + iQ_k) &= 0 \\ \sum_1^\ell P_k &= 0 & \sum_1^\nu P_k^{\text{gen}} &= \sum_{\nu+1}^\ell P_k^{\text{ass}} = \sum_{\nu+1}^\ell R_k I_k^2 & (\text{con } R_k = 0 \text{ in quei rami in cui la parte resistiva è assente}) \\ \sum_1^\ell Q_k &= 0 & \sum_1^\nu Q_k^{\text{gen}} &= \sum_{\nu+1}^\ell Q_k^{\text{ass}} = \sum_{\nu+1}^\ell X_k I_k^2 & (\text{con } X_k = 0 \text{ in quei rami in cui la parte reattiva è assente}) \end{aligned}$$

$$= \sum_k X_{Lk} I_{Lk}^2 - \sum_k X_{Ck} I_{Ck}^2 = \sum_k \frac{V_{Lk}^2}{X_{Lk}} - \sum_k \frac{V_{Ck}^2}{X_{Ck}}$$

8.2.4 Trasformazioni Triangolo $\leftrightarrow$ Stella ($\Delta \leftrightarrow Y$)



$$\dot{Z}_{s\Delta} = \dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}$$

$$\dot{Y}_{pY} = \frac{1}{\dot{Z}_{pY}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}$$

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{s\Delta}}$$

$$\dot{Z}_{12} = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_{pY}}$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{23}\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{s\Delta}}$$

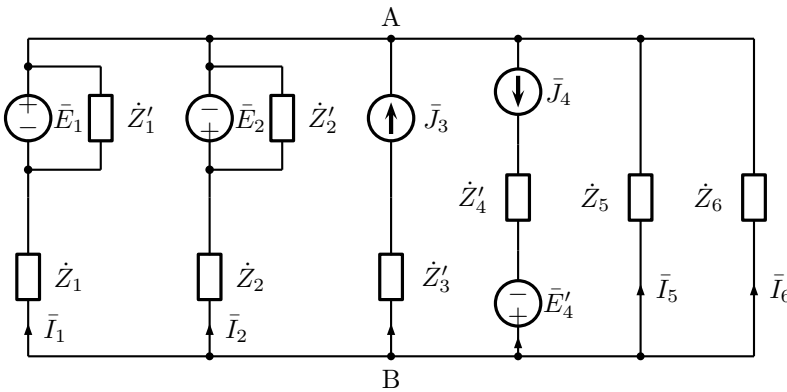
$$\dot{Z}_{23} = \frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_{pY}}$$

$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{31}\dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{s\Delta}}$$

$$\dot{Z}_{31} = \frac{\dot{Z}_3\dot{Z}_1}{\dot{Z}_{pY}}$$

$$\dot{Z}_Y = \frac{\dot{Z}_\Delta}{3} \quad (\text{caso } \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z}_Y, \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_\Delta)$$

8.2.5 Formula di Millman



Si applica quando ci sono un certo numero di rami tutti connessi in parallelo. In questo esempio tra i nodi A e B ci sono 6 rami in parallelo. Si ha

$$\bar{V}_{AB} = \bar{E}_1 - \dot{Z}_1 \bar{I}_1 \quad \bar{V}_{AB} = -\bar{E}_2 - \dot{Z}_1 \bar{I}_2$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_1} \quad \bar{I}_2 = \frac{-\bar{E}_2 - \bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_2}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_3 \quad \bar{I}_4 = -\bar{J}_4 \quad \bar{I}_5 = \frac{-\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_5} \quad \bar{I}_6 = \frac{-\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_6}$$

Imponendo la legge di Kirchhoff al *macronodo* B:

$$\sum_{k=1}^6 \bar{I}_k = 0 \quad \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_1} + \frac{-\bar{E}_2 - \bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_2} + \bar{J}_3 - \bar{J}_4 - \frac{\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_5} - \frac{\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_6} = 0$$

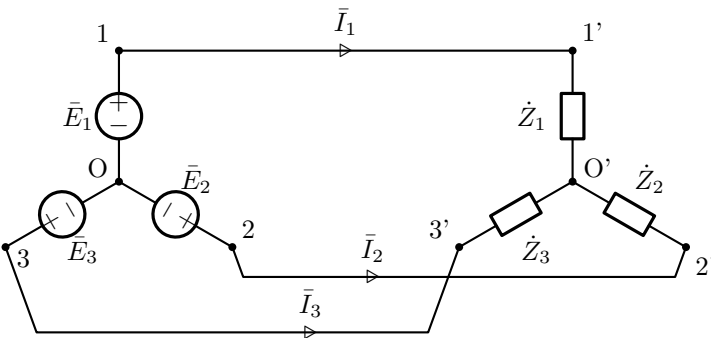
$$\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} - \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \bar{J}_3 - \bar{J}_4 = \bar{V}_{AB} \left(\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_5} + \frac{1}{\dot{Z}_6} \right)$$

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} - \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \bar{J}_3 - \bar{J}_4}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_5} + \frac{1}{\dot{Z}_6}}$$

Si noti che $\dot{Z}'_1 \dot{Z}'_2 \dot{Z}'_3 \dot{Z}'_4$ ed $\bar{E}'_4$ non influenzano la $\bar{V}_{AB}$

8.3 Trifase

8.3.1 Carico a Stella



$$e_1(t) = E_{M1} \cos(\omega t + \alpha_1) \quad \bar{E}_1 = E_1 e^{i\alpha_1} = \frac{E_{M1}}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_1}$$

$$e_2(t) = E_{M2} \cos(\omega t + \alpha_2) \quad \bar{E}_2 = E_2 e^{i\alpha_2} = \frac{E_{M2}}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_2}$$

$$e_3(t) = E_{M3} \cos(\omega t + \alpha_3) \quad \bar{E}_3 = E_3 e^{i\alpha_3} = \frac{E_{M3}}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_3}$$

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}$$

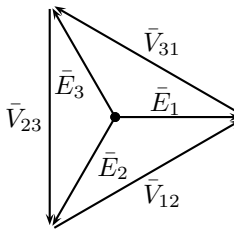
- Si considerano tipicamente sistemi di tensioni diretti, cioè tali che $e_1(t)$ è in anticipo rispetto a $e_2(t)$ di $\frac{2}{3}\pi$ ed $e_2(t)$ è in anticipo rispetto a $e_3(t)$ di $\frac{2}{3}\pi$, ovvero risulta $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{2}{3}\pi$:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= E_{M1} \cos(\omega t + \alpha_1) & \bar{E}_1 &= E_1 e^{i\alpha_1} \\ e_2(t) &= E_{M2} \cos(\omega t + \alpha_1 - \frac{2}{3}\pi) & \bar{E}_2 &= E_2 e^{i(\alpha_1 - \frac{2}{3}\pi)} \\ e_3(t) &= E_{M3} \cos(\omega t + \alpha_1 - \frac{4}{3}\pi) & \bar{E}_3 &= E_3 e^{i(\alpha_1 - \frac{4}{3}\pi)} \\ \bar{V}_{12} &= \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = V_{12} e^{i\gamma_{12}} \\ \bar{V}_{23} &= \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = V_{23} e^{i\gamma_{23}} \\ \bar{V}_{31} &= \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = V_{31} e^{i\gamma_{31}} \end{aligned}$$

(nei sistemi di tensioni inversi si ha invece $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = -\frac{2}{3}\pi$).

Dalla legge di Kirchhoff alle maglie si vede che risulta sempre $\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0$, mentre invece in generale $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 \neq 0$.

- Un sistema di tensioni diretto (o anche inverso) si dice *simmetrico* quando $E_1 = E_2 = E_3 = E$. Si ha (la figura si riferisce al caso $\alpha_1 = 0$):



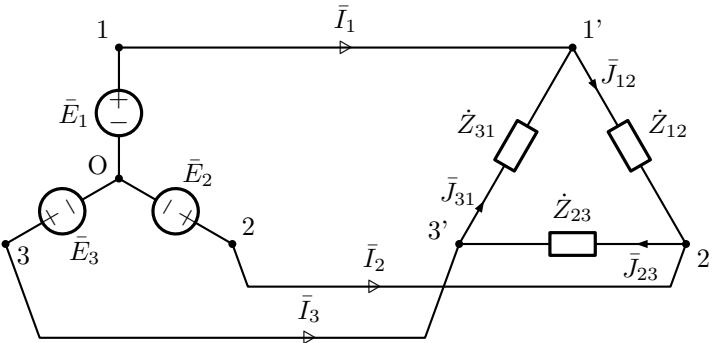
$$\begin{aligned} \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 &= E e^{i\alpha_1} (1 + e^{-i\frac{2}{3}\pi} + e^{-i\frac{4}{3}\pi}) = 0 \\ \bar{V}_{12} &= \sqrt{3} \bar{E}_1 e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E e^{i(\alpha_1 + \frac{\pi}{6})} = V e^{i(\alpha_1 + \frac{\pi}{6})} \\ \bar{V}_{23} &= \sqrt{3} \bar{E}_2 e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E e^{i(\alpha_2 + \frac{\pi}{6})} = V e^{i(\alpha_1 - \frac{\pi}{2})} \\ \bar{V}_{31} &= \sqrt{3} \bar{E}_3 e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E e^{i(\alpha_3 + \frac{\pi}{6})} = V e^{i(\alpha_1 + \frac{5}{6}\pi)} \end{aligned} \quad V = \sqrt{3} E$$

- Per un sistema di tensioni diretto (o anche inverso) e simmetrico che alimenti un *carico equilibrato* (cioè per il quale $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = \bar{Z}_Y = Z_Y e^{i\phi}$) si ha:

$$\bar{V}_{O'O} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_k = \frac{\bar{E}_k}{\bar{Z}_Y} = \frac{E}{Z_Y} e^{i(\alpha_k - \phi)} \quad \text{vale il circuito monofase equivalente, e le tre correnti costituiscono anch'esse una terna simmetrica diretta}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 = \sum_{k=1}^3 E_M I_M \cos(\omega t + \alpha_k) \cos(\omega t + \alpha_k - \phi) = E_M I_M \sum_{k=1}^3 \frac{\cos \phi + \cos(2\omega t + 2\alpha_k - \phi)}{2} \\ &= \frac{3E_M I_M \cos \phi}{2} + \frac{E_M I_M}{2} \sum_{k=1}^3 \cos(2\omega t + 2\alpha_k - \phi) = 3EI \cos \phi + EI \sum_{k=0}^2 \cos(2\omega t + 2\alpha_1 - \frac{4k}{3}\pi - \phi) = 3EI \cos \phi \\ p(t) &= P = 3EI \cos \phi = \sqrt{3}VI \cos \phi = A \cos \phi \\ Q &= 3EI \sin \phi = \sqrt{3}VI \sin \phi = A \sin \phi \\ A &= 3EI = \sqrt{3}VI \end{aligned}$$

8.3.2 Carico a Triangolo



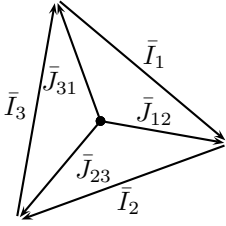
$$\begin{aligned} \bar{J}_{hk} &= \frac{\bar{V}_{hk}}{\bar{Z}_{hk}} \\ \bar{I}_1 &= \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 &= \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 &= \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{aligned}$$

- Risulta sempre:

$$\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0 \quad \text{LKT alla maglia 123}$$

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \quad \text{LKC ad un macronodo che racchiude le 3 impedenze}$$

- Se il sistema di tensioni è simmetrico e il carico è equilibrato (quindi $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_\Delta = Z_\Delta e^{i\phi}$) allora:



$$\bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} + \bar{J}_{31} = \frac{\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31}}{\dot{Z}_\Delta} = 0$$

$$J = J_{12} = J_{23} = J_{31} = \left| \frac{\bar{V}_{hk}}{\dot{Z}_{hk}} \right| = \frac{V}{Z_\Delta}$$

$$I = \sqrt{3} J$$

- In generale invece, per un sistema non simmetrico e/o non equilibrato, risulta $\bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} + \bar{J}_{31} \neq 0$. Ciò può vedersi dalla figura di sopra considerando un caso in cui il punto centrale è spostato ad esempio verso $\bar{I}_1$, in modo che $\bar{J}_{12} + \bar{J}_{31} \approx 0$, e quindi $\bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} + \bar{J}_{31} \approx \bar{J}_{23} \neq 0$. Una situazione simile si ottiene ad esempio con $\bar{Z}_{23} = R$, $\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{31} = 100R$, che fornisce $\bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} + \bar{J}_{31} = \frac{\bar{V}_{12}}{100R} + \frac{\bar{V}_{23}}{R} + \frac{\bar{V}_{31}}{100R} \cong \frac{\bar{V}_{23}}{R}$.

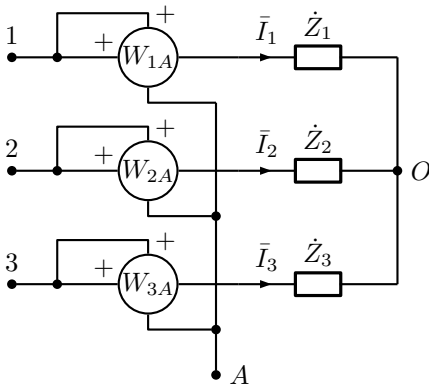
8.3.3 Rifasamento di un carico trifase equilibrato

Dal fatto che l'espressione della potenza media assorbita da un carico trifase ($P = 3EI \cos \phi$) è formalmente analoga a quella relativa ad un carico monofase, si capisce che il concetto di rifasamento si applica alla stessa maniera anche nel caso trifase. Ovvero, a parità di potenza P e di tensione nominale (E o equivalentemente $V = \sqrt{3}E$), è evidente che la corrente I richiesta (e di conseguenza la potenza dissipata lungo le linee di distribuzione dell'energia elettrica) diminuisce all'aumentare del fattore di potenza $\cos \phi$.

Il rifasamento di un carico ohmico-induttivo può ottenersi collegando, in parallelo allo stesso, un carico costituito da tre condensatori uguali, in configurazione stella oppure triangolo, aventi un opportuno valore di capacità, da calcolarsi in modo da ottenere il $\cos \phi$ desiderato.

8.3.4 Misura della potenza

In figura il nodo A può essere connesso a piacimento: poiché la linea voltmetrica dei wattmetri si comporta come un circuito aperto in essa la corrente è nulla, e quindi il tutto funzionerà sempre alla stessa maniera indipendentemente da dove venga connesso il morsetto A . Infatti dalla derivazione riportata di seguito si vede che la somma delle letture dei 3 wattmetri coincide sempre con la potenza assorbita dal carico trifase.



$$\text{Sistema trifase a 3 fili} \Rightarrow \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

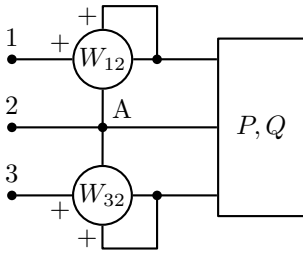
$$P = P_{\dot{Z}_1} + P_{\dot{Z}_2} + P_{\dot{Z}_3}$$

$$P_{\dot{Z}_k} = \text{Re}(\bar{V}_{kO} \check{I}_k) = \text{Re}(V_{kO} I_k e^{i\phi_k}) = V_{kO} I_k \cos \phi_k$$

$$\begin{aligned} W_{1A} + W_{2A} + W_{3A} &= \text{Re}(\bar{V}_{1A} \check{I}_1 + \bar{V}_{2A} \check{I}_2 + \bar{V}_{3A} \check{I}_3) \\ &= \text{Re}[(\bar{V}_{1O} + \bar{V}_{OA}) \check{I}_1 + (\bar{V}_{2O} + \bar{V}_{OA}) \check{I}_2 + (\bar{V}_{3O} + \bar{V}_{OA}) \check{I}_3] \\ &= \text{Re}[\bar{V}_{1O} \check{I}_1 + \bar{V}_{2O} \check{I}_2 + \bar{V}_{3O} \check{I}_3 + \bar{V}_{OA} (\check{I}_1 + \check{I}_2 + \check{I}_3)] \\ &= \text{Re}[\bar{V}_{1O} \check{I}_1 + \bar{V}_{2O} \check{I}_2 + \bar{V}_{3O} \check{I}_3] = P_{\dot{Z}_1} + P_{\dot{Z}_2} + P_{\dot{Z}_3} = P \quad \mathbf{8.1} \end{aligned}$$

Sistemi a 3 fili: inserzione Aron nel caso generale

In particolare il morsetto A si può connettere ad una delle tre linee. Se lo si collega ad esempio alla linea 2 la linea voltmetrica del secondo wattmetro sarà in cortocircuito e la corrispondente tensione sarà nulla, da cui $W_{2A} = W_{22} = 0$ e $P = W_{1A} + W_{3A} = W_{12} + W_{32}$. Dunque il secondo wattmetro diventa inutile e si può non inserire affatto, come mostrato nella figura seguente. Si parla in tal caso di *inserzione Aron*, che risulta utile in particolare anche laddove *il centro stella del carico non è accessibile*.



Il rettangolo è un carico trifase: al suo interno vi saranno tre impedenze connesse a stella oppure a triangolo

$$W_{12} + W_{32} = P \quad \text{valida in generale (nei sistemi a 3 fili)}$$

8.2

Si noti che non si è fatta alcuna ipotesi (tranne il fatto che il sistema trifase sia a 3 fili) quindi, per la validità dell'espressione $P = W_{12} + W_{32}$, non è richiesto che il sistema di tensioni sia simmetrico, né tantomeno che il carico sia equilibrato.

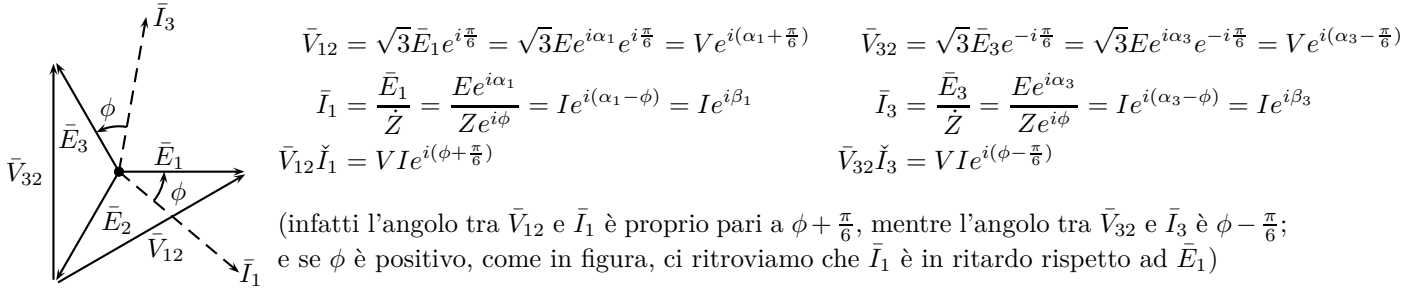
In generale si dirà che *la misura della potenza nei circuiti trifasi senza filo neutro (cioè a 3 fili) può essere eseguita con due wattmetri, inseriti come in figura, con le bobine amperometriche disposte in due qualsiasi dei tre fili e le corrispondenti voltmetriche derivate tra il filo che contiene l'amperometrica ed il terzo filo.*

Specificamente, siano rispettivamente h e k le linee a cui sono connessi i morsetti positivi dei circuiti voltmetrici dei wattmetri W_{hl} e W_{kl} , essendo l la linea in comune (ad esempio in figura è $hkl = 132$). Si ha, come già provato

$$W_{hl} + W_{kl} = \operatorname{Re}(\bar{V}_{hl}\check{I}_h + \bar{V}_{kl}\check{I}_k) = V_{hO}I_h \cos \phi_h + V_{lO}I_l \cos \phi_l + V_{kO}I_k \cos \phi_k = P$$

Sistemi a 3 fili: inserzione Aron nei caso simmetrico ed equilibrato

Nel caso particolare di sistema di tensioni simmetrico e diretto e carico equilibrato, e per $hkl = 132$, dal diagramma fasoriale e dai circuiti monofasi equivalenti delle linee 1 e 3 si ha



da cui

$$\begin{aligned} W_{12} &\triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_{12}(t) i_1(t) dt = \operatorname{Re}[\bar{V}_{12}\check{I}_1] = V I \cos(\phi + \frac{\pi}{6}) = V I \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi - \frac{1}{2} \sin \phi \right) = \frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} \\ W_{32} &\triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_{32}(t) i_3(t) dt = \operatorname{Re}[\bar{V}_{32}\check{I}_3] = V I \cos(\phi - \frac{\pi}{6}) = V I \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi + \frac{1}{2} \sin \phi \right) = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

8.3

Sommando e sottraendo le espressioni 8.3 si ottiene

$$\begin{cases} W_{12} + W_{32} = P & \text{(valida in generale, per sistemi a 3 fili, vedi sopra)} \\ W_{12} - W_{32} = -\frac{Q}{\sqrt{3}} & \text{(valida solo nel caso simmetrico ed equilibrato, per sistemi a 3 fili)} \end{cases}$$

8.4

Viceversa, sommando e sottraendo le espressioni 8.4 si ottengono le 8.3.

In caso di permutazione di hkl rispetto alla configurazione 132, mentre la somma delle letture dei due wattmetri come abbiamo visto fornisce sempre P , la differenza tra le letture dei due wattmetri dà luogo invece ad un cambio di segno; ciò avviene dunque per $hkl = 123$ e per $hkl = 231$. Essendo infatti

$$\begin{aligned} W_{13} &\stackrel{123}{=} \operatorname{Re}(\bar{V}_{13}\check{I}_1) = W_{21} \stackrel{231}{=} \operatorname{Re}(\bar{V}_{21}\check{I}_2) = V I \cos(\frac{\pi}{6} - \phi) = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2\sqrt{3}} \\ W_{23} &\stackrel{123}{=} \operatorname{Re}(\bar{V}_{23}\check{I}_2) = W_{31} \stackrel{231}{=} \operatorname{Re}(\bar{V}_{31}\check{I}_3) = V I \cos(\frac{\pi}{6} + \phi) = \frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

si ha

$$W_{13} - W_{23} = W_{21} - W_{31} = V I [\cos(\frac{\pi}{6} - \phi) - \cos(\frac{\pi}{6} + \phi)] = V I \sin \phi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad \text{per } hkl = 123, 231$$

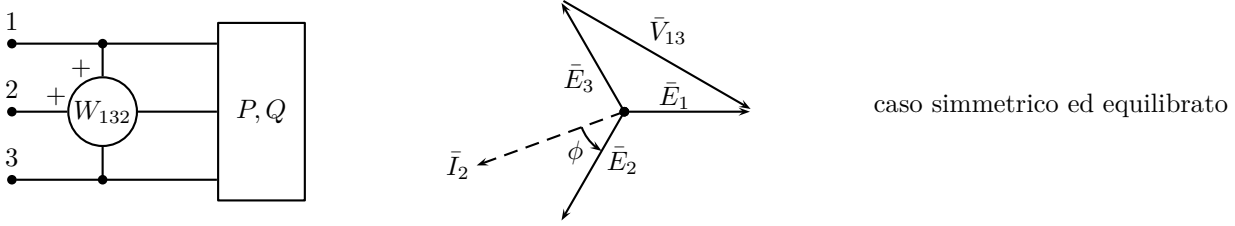
Sistemi a 4 fili: caso generale

Per sistemi trifase a 4 fili dissimmetrici e/o squilibrati risulta $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \neq 0$, quindi la dimostrazione di cui sopra cade in difetto e l'inserzione di Aron non si può utilizzare. La potenza può misurarsi utilizzando 3 wattmetri.

Sistemi a 4 fili: caso simmetrico ed equilibrato

Per sistemi trifase a 4 fili simmetrici ed equilibrati invece l'equazione $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$ è soddisfatta, e quindi l'inserzione Aron si potrebbe usare, ma essa risulta sconveniente, perchè la potenza assorbita in tal caso da ciascuno dei 3 rami del carico trifase è la stessa, e quindi basta un solo wattmetro per la misura di P , collegato in modo da misurare la potenza $P/3$ assorbita da una delle 3 impedenze del carico.

Sistemi a 3 fili: misura della potenza reattiva con wattmetro in quadratura nel caso simmetrico ed equilibrato



Un wattmetro è collegato in quadratura quando la bobina voltmetrica è connessa a due qualsiasi dei tre fili e la bobina amperometrica è disposta nel rimanente filo.

Si consideri ad esempio il caso in figura, dove il wattmetro misura per definizione il valore medio della grandezza $v_{13}(t)i_2(t)$, che può calcolarsi come $\text{Re}[\bar{V}_{13}\check{I}_2]$. *Nel caso simmetrico ed equilibrato* dal diagramma fasoriale si ha

$$\begin{aligned}\bar{V}_{13} &= \sqrt{3}\bar{E}_2 e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}E e^{i(\alpha_2 + \frac{\pi}{2})} \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{E}_2}{\check{Z}} = \frac{E e^{i\alpha_2}}{Z e^{i\phi}} = I e^{i(\alpha_2 - \phi)} = I e^{i\beta_2} \quad (\text{monofase equivalente linea 2}) \\ \bar{V}_{13}\check{I}_2 &= \sqrt{3}EI e^{i(\frac{\pi}{2} + \phi)} \quad W_{132} \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_{13}(t)i_2(t)dt = \text{Re}[\bar{V}_{13}\check{I}_2] = \sqrt{3}EI \cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = -\frac{3EI}{\sqrt{3}} \sin \phi = -\frac{Q}{\sqrt{3}} \quad 8.5\end{aligned}$$

Capitolo 9

Convenzioni OCTAVE/MATLAB

Le soluzioni dei problemi proposti agli esami sono spesso presentate nella forma di codice eseguibile compatibile con gli ambienti di programmazione OCTAVE (software gratuito scaricabile dal sito www.octave.org) e MATLAB (software commerciale). L'interfaccia principale di OCTAVE è di tipo testuale ma qualora lo si desidera è disponibile anche il front-end grafico QtOctave.

Le variabili complesse sono indicate con un nome che ha come ultimo carattere il simbolo underscore `_`; i moduli di tali grandezze sono indicate con lo stesso nome ma senza il simbolo underscore.

- `abs` è il modulo, quindi ad esempio `E2mod=abs(E2)`
- `sqrt` è la radice quadrata
- `real` e `imag` sono la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria
- `conj` è il complesso coniugato
- `*` oppure `.*` è l'operatore di moltiplicazione
- `/` oppure `./` è l'operatore di divisione
- `^` oppure `.^` è l'operatore di elevazione a potenza

Come visto sopra i comuni operatori di moltiplicazione `*`, divisione `/` ed elevazione a potenza `^`, talvolta li si trova preceduti da un punto (nel qual caso diventano `.*` `./` `.^`, questa notazione è dovuta ad Hadamard); la operazione che questi ultimi eseguono è la stessa nel caso in cui gli operandi sono grandezze scalari; nel caso di operandi vettoriali o matriciali la corrispondente operazione viene eseguita elemento per elemento. Per quello che ci concerne sono quindi da considerarsi equivalenti. L'operazione `.*` è anche detta *prodotto esterno tra matrici*.

Il punto e virgola alla fine di una espressione sopprime la visualizzazione del valore calcolato, esempio:

```
E2mod = abs(E2);
```

Eliminando i punti e virgola dal codice si possono quindi visualizzare i valori calcolati delle grandezze intermedie.

Per risolvere un problema di elettrotecnica la cosa più conveniente da fare è creare un file di testo contenente la sequenza delle istruzioni che calcolano le grandezze richieste. Esistono due tipi di file OCTAVE/MATLAB, gli *script* e le *function*. Per entrambi il nome del file deve avere estensione `.m`, e le *function* si distinguono per il fatto che la prima istruzione deve iniziare con la keyword `function`.

Si faccia attenzione che di default in ambiente Windows© non vengono visualizzate le estensioni dei files, il che implica che quando si digita `problema.m` in realtà si stà probabilmente creando il file `problema.m.txt`. Occorre quindi disabilitare l'opzione *non visualizzare l'estensione per i tipi di file conosciuti* nelle impostazioni di visualizzazione delle cartelle.

Esempio: file di testo di nome `problemax.m` contenente le istruzioni:

```
% questo è un commento in uno script
R1 = 3;
I1 = 5;
V1 = R1*I1
Z2 = 3+1i*4;      % 1i e' l'unita' immaginaria
I2 = 5+1i*7;
V2 = Z2*I2
A2 = V2*conj(I2) % potenza complessa
P2 = real(A2)
Q2 = imag(A2)
A2mod = abs(A2)
```

La funzione `paral`, spesso richiamata negli script risolvitori problemi assegnati agli esami, non è una funzione predefinita in OCTAVE/MATLAB. Se lo studente volesse implementarla, basta creare il file di testo di nome `paral.m` contenente le uniche due righe seguenti:

```
function c=paral(a,b)
c=a.*b./(a+b);
```

In alternativa, utilizzando una function invece di uno script, è possibile inserire la funzione `paral` all'interno dello stesso function file, come segue

```
function esempio
R1 = 3;
Z2 = 3+1i*4;
Z = paral(R1,Z2)
%
function c=paral(a,b)
c=a.*b./(a+b);
```

Capitolo 10

Soluzioni di alcune prove d'esame

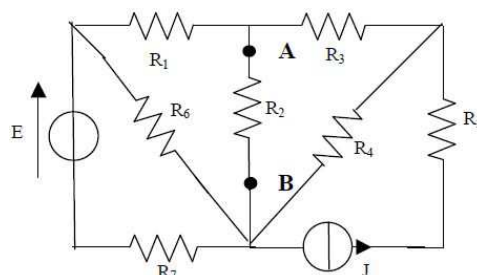
Oltre a quanto riportato di seguito, si raccomanda gli allievi di visionare le numerose prove d'esame svolte e dispense messe a disposizione dai vari docenti sul sito www.elettrotecnica.unina.it. In particolare per i circuiti trifase, ma non solo, si considerino le prove risolte nella sezione materiale didattico dell'insegnamento tenuto dal sottoscritto presso l'Università di Catanzaro.

Prova Inf-Bio UniCZ del 10-01-2011

Problema 1

Determinare la potenza assorbita dal resistore R_2 applicando il generatore equivalente di Norton ai nodi A-B.

$E = 40$; $J = 10$;
 $R_1 = 80$; $R_2 = 80$; $R_6 = 80$; $R_7 = 80$;
 $R_3 = 160$; $R_4 = 160$; $R_5 = 160$;



Sostituendo R_2 con un cortocircuito si ha $I_{ABcc} = J_{cc} = I_{1cc} + I_{3cc}$. Ora si disegni un nuovo circuito, ottenuto dal precedente eliminando il lato cortocircuito AB. Questo circuito risulta costituito da due parti (sinistra e destra) disaccoppiate. R_1 ed R_6 sono ora in parallelo, così come pure R_3 ed R_4 .

```
I7cc = E/(R7+paral(R6,R1)) % 0.33333
I1cc = I7cc*R6/(R6+R1) % 0.16667
I3cc = J*R4/(R4+R3) % 5.0000
Jcc = I1cc+I3cc % 5.1667
```

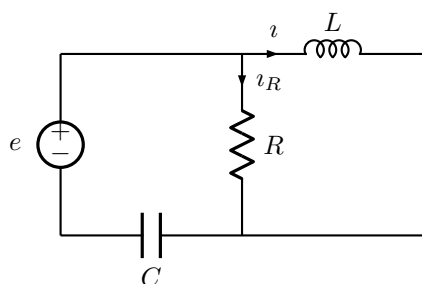
```
R0a = R1+paral(R6,R7) % 120.00
R0b = R3+R4 % 320.00
R0 = paral(R0a,R0b) % 87.273
```

```
R02 = paral(R0,R2); % 41.739
VAB = R02*Jcc % 215.65
P2 = VAB^2/R2 % 581.3
```

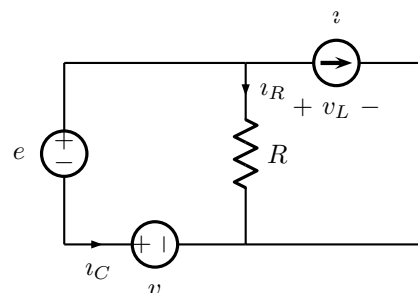
Si noti che il valore di R_5 non viene utilizzato.

Problema 2

Nella rete in figura calcolare la potenza istantanea assorbita dal resistore R per $t > 0$.



$e(t) = 1(t)E_M \sin \omega t$
 $1(t)$ è la funzione gradino unitario
 $E_M = 40 \text{ V}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$
 $R = 10 \Omega$
 $L = 100 \text{ mH}$, $C = 500 \mu\text{F}$



In evoluzione libera ($e = 0$) si ha $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Cv^2 + \frac{1}{2}Li^2) = -Ri_R^2 < 0$, quindi il circuito è dissipativo. Poiché $e(t < 0) = 0$ e il circuito è dissipativo, esso è a riposo per $t < 0$. Nello specifico l'induttore/capacitore sono sostituiti da cortocircuito/circuito

aperto e, poichè qualsiasi grandezza è combinazione lineare dei generatori indipendenti, ma non ci sono generatori indipendenti per $t < 0$, risulta $i(0^-) = 0$, $v(0^-) = 0$ e $v_R(0^-) = 0$.

L'analisi per $t > 0$ si effettua come segue.

Si noti che per $e = 0$ il circuito coincide con un semplice RLC parallelo, di cui già nota l'equazione omogenea associata. Inoltre, essendo forzato sinusoidalmente per $t > 0$, il calcolo del regime si effettua agevolmente con il metodo simbolico. Per determinare le condizioni iniziali occorre poi trovare le equazioni di stato. Ai fini esercitativi, nel seguito si effettua una analisi completa, anche considerando vari metodi.

Sia $x = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$ il vettore delle variabili di stato, e $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix}$ il corrispondente vettore derivato. Considerando il circuito resistivo associato (figura a destra) si ha

$$\begin{cases} C\dot{v} = i_C = -i - i_R = -i - \frac{v_R}{R} = -i - \frac{v+e}{R} = -\frac{v}{R} - i - \frac{e}{R} \\ Li = v_L = v_R = v + e \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{v} = -\frac{v}{RC} - \frac{i}{C} - \frac{e}{RC} \\ i = \frac{v}{L} + \frac{e}{L} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e \quad \dot{x} = Ax + Be$$

La determinazione delle due equazioni di stato è in ogni caso essenziale perchè esplicita direttamente le derivate delle variabili di stato, e quindi consente di valutare le condizioni iniziali sulle derivate stesse.

La maniera più rapida per determinare il polinomio caratteristico¹ è di operare direttamente sulla matrice A ,

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & \lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{RC}\right)\lambda + \frac{1}{LC} = \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = \lambda^2 + 2\sigma\lambda + \omega_r^2$$

La via meno rapida consiste nel determinare l'equazione differenziale del secondo ordine. Esplicitando i nella prima equazione di stato e sostituendola nella seconda si ottiene l'equazione nell'incognita v :

$$\begin{cases} C\dot{v} = -\frac{v}{R} - i - \frac{e}{R} \\ Li = v + e \end{cases} \quad \begin{cases} i = -C\dot{v} - \frac{v}{R} - \frac{e}{R} \\ L\frac{d}{dt}\left(-C\dot{v} - \frac{v}{R} - \frac{e}{R}\right) = v + e \end{cases} \quad \begin{cases} -LC\ddot{v} - \frac{L}{R}\dot{v} - \frac{L}{R}\dot{e} = v + e \\ \ddot{v} + \frac{\dot{v}}{RC} + \frac{v}{LC} = -\frac{\dot{e}}{RC} - \frac{e}{LC} \end{cases}$$

$$\ddot{v} + 2\sigma\dot{v} + \omega_r^2 v = -2\sigma\dot{e} - \omega_r^2 e$$

Per ottenere invece l'equazione nell'incognita i si sarebbe dovuto esplicitare v nella seconda equazione di stato e sostituirla nella prima:

$$\begin{cases} v = Li - e \\ C\frac{d}{dt}(Li - e) = -\frac{Li-e}{R} - i - \frac{e}{R} \end{cases} \quad \begin{cases} LC\ddot{i} - C\dot{e} = -\frac{L}{R}i - i \\ \ddot{i} + \frac{\dot{i}}{RC} + \frac{i}{LC} = \frac{\dot{e}}{L} \end{cases}$$

È noto dalla teoria che l'equazione differenziale omogenea associata è sempre la stessa qualunque sia l'incognita di nostro interesse (ciò segue dalla linearità, essendo l'equazione omogenea la stessa per entrambe le variabili di stato, ed essendo qualunque grandezza combinazione lineare delle variabili di stato, se i generatori indipendenti sono spenti). Ciò che cambia a seconda dell'incognita considerata è il termine noto. Essendo richiesto nel problema il calcolo della grandezza $p_R(t) = \frac{v_R^2(t)}{R}$, l'incognita di nostro interesse è $v_R(t)$. Non è necessario determinare l'equazione differenziale completa in tale incognita, ma si riporta di seguito il metodo generale per farlo per completezza. Come sappiamo in generale una qualunque grandezza elettrica della rete si esprime come combinazione lineare dei generatori e delle variabili di stato, e nel nostro caso abbiamo la semplice espressione $v_R = v + e$. Poichè sappiamo che l'equazione omogenea associata deve essere $\ddot{v}_R + 2\sigma\dot{v}_R + \omega_r^2 v_R = 0$, l'espressione che dobbiamo valutare è appunto $\ddot{v}_R + 2\sigma\dot{v}_R + \omega_r^2 v_R$:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_R + 2\sigma\dot{v}_R + \omega_r^2 v_R &= (\ddot{v} + \ddot{e}) + 2\sigma(\dot{v} + \dot{e}) + \omega_r^2(v + e) = (\ddot{v} + 2\sigma\dot{v} + \omega_r^2 v) + \ddot{e} + 2\sigma\dot{e} + \omega_r^2 e \\ &= \ddot{e} \end{aligned}$$

Esiste ancora un altro metodo rapido per la determinazione dell'equazione differenziale del secondo ordine in una generica incognita desiderata, che si basa sul concetto di validità generale del metodo simbolico (pag 51). Indicando con $s = i\omega$ abbiamo allora

$$\dot{Z}_L = sL \quad \dot{Z}_C = \frac{1}{sC} \quad \dot{Z}_p = R \parallel \dot{Z}_L = \frac{RsL}{R + sL}$$

¹Il polinomio caratteristico è anche detto *funzione secolare*. Il termine deriva dal fatto che il concetto veniva utilizzato nell'ambito del calcolo delle perturbazioni secolari delle orbite planetarie (su una scala temporale di un secolo, ovvero lento rispetto al moto principale di durata annuale).

partitore di tensione: $\bar{V}_R = \bar{E} \frac{\dot{Z}_p}{\dot{Z}_p + \dot{Z}_C} = \bar{E} \frac{\frac{RsL}{R+sL}}{\frac{RsL}{R+sL} + \frac{1}{sC}} = \bar{E} \frac{RsL}{RsL + \frac{R+sL}{sC}} = \bar{E} \frac{s^2 RL}{s^2 RL + s\frac{L}{C} + \frac{R}{C}} = \bar{E} \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$

oppure formula di Millmann: $\bar{V}_R = \frac{\frac{\bar{E}}{\dot{Z}_C}}{\frac{1}{\dot{Z}_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{\dot{Z}_L}} = \frac{sC\bar{E}}{sC + \frac{1}{R} + \frac{1}{sL}} = \frac{s\bar{E}}{s + \frac{1}{RC} + \frac{1}{sLC}} = \frac{s^2\bar{E}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$

Moltiplicando per il denominatore e tornando nel dominio del tempo si ottiene quanto cercato

$$\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right)\bar{V}_R = s^2\bar{E} \quad \rightarrow \quad \ddot{v}_R + 2\sigma\dot{v}_R + \omega_r^2 v_R = \ddot{e}$$

In evoluzione libera la rete si riduce ad un parallelo RLC, quindi come noto dalla teoria la rete è dissipativa.

Per il calcolo della risposta transitoria consideriamo l'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_+) &= \lambda^2 - (\lambda_- + \lambda_+)\lambda + \lambda_- \lambda_+ = \lambda^2 + b\lambda + c = \lambda^2 + 2\sigma\lambda + \omega_r^2 = 0 \\ \sigma &= \frac{b}{2} = \frac{-\lambda_- - \lambda_+}{2} = \frac{1}{2RC} = 100 \text{ s}^{-1} \quad \omega_r^2 = c = \lambda_- \lambda_+ = \frac{1}{LC} = 2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-2} \\ \delta &= \frac{\Delta}{4} = \frac{b^2 - 4ac}{4} = \sigma^2 - \omega_r^2 = -10^4 \text{ s}^{-2} < 0 \Rightarrow \text{evoluzione transitoria armonica smorzata} \\ \lambda_{\mp} &= -\sigma \mp \sqrt{\delta} = -\sigma \mp i\sqrt{-\delta} = -\sigma \mp i\omega_d \quad \omega_d = \sqrt{\omega_r^2 - \sigma^2} = \sqrt{-\delta} = 100 \text{ s}^{-1} \\ v_{Rt}(t) &= K e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \Phi) \quad \text{risposta transitoria, } K \text{ e } \Phi \text{ da determinare}\end{aligned}$$

Si ricordi che, essendo la rete dissipativa, le radici λ_- e λ_+ devono essere a parte reale negativa, e ciò è possibile solo se i coefficienti b e c del polinomio caratteristico sono entrambi positivi. Quindi se ci si ritrova una equazione differenziale omogenea associata con qualche coefficiente negativo vuol dire che si è sbagliato qualcosa. Inoltre, poiché la *traccia* di una matrice quadrata (cioè la somma degli elementi diagonali) è sempre uguale alla somma dei suoi autovalori, per lo stesso motivo questa deve essere negativa, ovvero ed infatti nel nostro caso $-b = \lambda_+ + \lambda_- = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} = -\frac{1}{RC} + 0 < 0$.

Essendo la rete dissipativa il regime permanente esiste. Per calcolarlo, osserviamo che dopo l'estinzione del transitorio il generatore è sinusoidale, dunque il regime permanente sarà sinusoidale e può calcolarsi con il metodo simbolico, ad esempio con la formula di Millmann (vedi espressione sopra), o anche direttamente a partire dall'equazione dinamica appena determinata, sempre usando le proprietà del metodo simbolico, ricordando che il fasore corrispondente alla derivata prima è $i\omega\bar{V}_R$, e che il fasore corrispondente alla derivata seconda è $(i\omega)^2\bar{V}_R = -\omega^2\bar{V}_R$

$$(i\omega)^2\bar{V}_R + 2\sigma i\omega\bar{V}_R + \omega_r^2\bar{V}_R = (i\omega)^2\bar{E} \quad \bar{V}_R + \frac{2\sigma}{i\omega}\bar{V}_R + \frac{\omega_r^2}{(i\omega)^2}\bar{V}_R = \bar{E} \quad \bar{V}_R\left(1 - i\frac{2\sigma}{\omega} - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right) = \bar{E} \quad \bar{V}_R = \frac{\bar{E}}{1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} - i\frac{2\sigma}{\omega}}$$

Scegliendo per i fasori la corrispondenza con il seno ed in termini del valore massimo, indicando con il pedice r la risposta a regime abbiamo

$$\begin{aligned}\bar{E} &= E_M \quad \bar{V}_{Rr} = \frac{40}{1 - \frac{20000}{10000} - i\frac{200}{100}} = \frac{40}{-1 - i2} = \frac{40(-1 + i2)}{5} = -8 + i16 = V_{Rr}^r + iV_{Rr}^i = 17.89e^{i2.034} = V_{Rr}e^{i\alpha_r} \\ V_{Rr}^r &= V_{Rr} \cos \alpha_r = -8 \quad V_{Rr}^i = V_{Rr} \sin \alpha_r = 16 \\ v_{Rr}(t) &= V_{Rr} \sin(\omega t + \alpha_r) = 17.89 \sin(100t + 2.034)\end{aligned}$$

Per il calcolo delle condizioni iniziali si ha

$$\begin{aligned}v(0^+) &= v(0^-) = 0 \quad i(0^+) = i(0^-) = 0 \\ \dot{v}(0^+) &= -\frac{v(0^+)}{RC} - \frac{i(0^+)}{C} - \frac{e(0^+)}{RC} = 0 \quad \dot{e}(0^+) = E_M \omega \cos \omega t \Big|_{0^+} = \omega E_M \\ v_R(0^+) &= v(0^+) + e(0^+) = 0 \quad \dot{v}_R(0^+) = \dot{v}(0^+) + \dot{e}(0^+) = \omega E_M = 4000\end{aligned}$$

Risposta completa

$$\begin{aligned}t \geq 0 \Rightarrow v_R(t) &= v_{Rt}(t) + v_{Rr}(t) = K e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \Phi) + V_{Rr} \sin(\omega t + \alpha_r) \quad K \text{ e } \Phi \text{ da determinare} \\ \dot{v}_R(t) &= -\sigma K e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \Phi) + K e^{-\sigma t} \omega_d \cos(\omega_d t + \Phi) + V_{Rr} \omega \cos(\omega t + \alpha_r) \\ \begin{cases} A = K \cos \Phi \\ B = K \sin \Phi \end{cases} & \begin{cases} v_R(0^+) = B + V_{Rr}^i = 0 \\ \dot{v}_R(0^+) = -\sigma B + \omega_d A + \omega V_{Rr}^r = \omega E_M \end{cases} \quad \begin{cases} B = -V_{Rr}^i = -16 \\ A = \frac{\omega E_M + \sigma B - \omega V_{Rr}^r}{\omega_d} = 32 \end{cases} \\ K &= |A + iB| = 35.78 \quad \Phi = \arctan \frac{B}{A} = -0.4636 \quad (\text{essendo } A > 0)\end{aligned}$$

$$v_R(t) = [35.78e^{-100t} \sin(100t - 0.4636) + 17.89 \sin(100t + 2.034)] 1(t)$$

$$p_R(t) = \frac{v_R^2(t)}{R}$$

Soluzione Matlab:

```
clear, format compact, format short g

EM = 40; omega = 100;
R = 10; L = 100e-3; C = 500e-6;

%% t < 0
V0 = 0; I0 = 0;

%% t > 0
sigma = 1/2/R/C, omegar = 1/sqrt(L*C)
delta = sigma^2 - omegar^2, omegad = sqrt(-delta)
tau = 1/sigma;
disp(table(sigma,tau,omegar,delta,omegad,omega))

% regime
% scegliamo i fasori nella rappresentazione con il seno
E = EM;
ZL = 1i*omega*L;
ZC = 1/(1i*omega*C);
den = 1 - (omegar/omega)^2 - 1i*2*sigma/omega; % vedi dispensa
VRr = E/den
VRr = (E/ZC)/(1/R+1/ZL+1/ZC) % Milllmann, ovviamente stesso risultato
VRr_mod = abs(VRr);
alfar = angle(VRr);
alfar_deg = alfar*180/pi;
disp(table(VRr,VRr_mod,alfar,alfar_deg))

% condizioni iniziali
dvdt0p = 0
dedt0p = omega*EM
dvRdt0p = dvdt0p+dedt0p

B = -imag(VRr);
A = (dvRdt0p + sigma*B - omega*real(VRr)) / omegad;
K = abs(A+1i*B);
Phi = angle(A+1i*B);
disp(table(dvRdt0p,B,A,K,Phi))

%% plot vR(t) e pR(t)
tau = 1/sigma, T = 2*pi/omega, Td = 2*pi/omegad, Tc = max([tau,T,Td])
Tmax = 3*Tc % 3 tempi caratteristici invece di 4 o 5 perche' siamo
           % interessati principalmente alla potenza, che ha tempi
           % caratteristici dimezzati
disp(table(tau,T,Td,Tc))
N = 1000;
t = linspace(0,Tmax,N); % vettore con N componenti
vRt = K*exp(-sigma*t).*sin(omegad*t+Phi); % nota il .*
vRr = VRr_mod*sin(omega*t+alfar);
vR = vRt+vRr;
pR = vR.^2/R; % nota il .^
subplot(3,1,1)
plot(t,vRt)
grid, title('risposta transitoria'), xlabel('t'), ylabel('v_{Rt}(t)')
subplot(3,1,2)
plot(t,vR)
grid, title('soluzione completa'), xlabel('t'), ylabel('v_R(t)')
subplot(3,1,3)
plot(t,pR)
grid, title('potenza istantanea'), xlabel('t'), ylabel('p_R(t)')
```

Versione 9-8-2022

1) Determinare i parametri del generatore equivalente di Thevenin della rete di figura ai morsetti A-B. Scrivere il codice matlab che risolve il problema

$R_D = R_1 + R_2 = 16\Omega$
 $R_{24} = R_2 \parallel R_4 = 8\Omega$
 $R_{CD} = R_3 \parallel R_{24} = 5.33\Omega$
 $R_0 = R_{CD} + R_6 + R_7 = 83.33\Omega$
 $R_{10} = R_1 + R_2 = 12\Omega$
 $R_{34} = R_3 + R_4 = 12\Omega$
 $I'_{1/2} = J_1/2 = 1$
 $I_{3/4} = J_1/2 = 1$
 $V'_{CD} = R_2 \cdot I_{1/2} = 40$
 $V'_{CD} = V'_{CD} + V'_{CD} = 0$
 $V'_{AB} = V'_{AB} = 0$
 $E = 480.0V$ $J_1 = J_2 = 2.000A$ $R_1 = R_3 = 80.00\Omega$ $R_2 = R_4 = 40.00\Omega$ $R_5 = R_6 = R_7 = 15.00\Omega$

2) La rete è a regime per $t < 0$. Calcolare la potenza istantanea assorbita dal resistore R_3 per $t < 0$ e per $t > 0$. Scrivere il codice matlab che risolve il problema

$C_1 \dot{v}_1 = C_1 = C_3 = \frac{\sqrt{3}}{R_3}$ $E_0 = 60.00V$ $E = E_{eff} = 300.0V$ $\omega = 200.0 \text{ rad/s}$
 $R_3 = 2.000 \Omega$ $R_4 = 3.000 \Omega$ $C_1 = 2.500 \text{ mF}$ $C_2 = 3.500 \text{ mF}$

3) L'ingresso è $j(t)$, l'uscita è $i_u(t)$. Valutare: a) risposta impulsiva unitaria; b) funzione di trasferimento; c) uscita in corrispondenza dell'ingresso $j(t) = \exp(-t/t_0) \cdot 1(t)$ con induttore inizialmente scarico

$R_1 = R_2 = 2.000 \Omega$ $L = 40.00 \text{ mH}$ $J_0 = 3.000 A$ $t_0 = 80.00 \text{ ms}$

4) L'ingresso è $i_u(t)$, l'uscita è $v_u(t)$. Valutare: a) risposta impulsiva unitaria; b) funzione di trasferimento; c) uscita in corrispondenza dell'ingresso $i_u(t) = \exp(-t/t_0) \cdot 1(t)$ con induttore inizialmente scarico

$R_1 = R_2 = 2.000 \Omega$ $L = 40.00 \text{ mH}$ $J_0 = 3.000 A$ $t_0 = 80.00 \text{ ms}$

Soluzione Matlab problema 1 con 2 metodi differenti:

```
function q

clear, format compact, format short g

E = 480; J1 = 2; J2 = 2;
R1 = 80; R3 = 80;
R2 = 40; R4 = 40;
R5 = 15; R6 = 15; R7 = 15;

dispah(' Metodo 1: superposition ')
R0 = paral(R1+R3,R2+R4)+R6+R7 % R equivalente ai morsetti AB

% E e J1 accesi, J2 spento
% E ed R5 non hanno alcun effetto
R12 = R1+R2 % in R6 non circola corrente, quindi R1 ed R2 sono in serie
R34 = R3+R4 % in R7 non circola corrente, quindi R3 ed R4 sono in serie
% R12 e R34 sono in parallelo, quindi partitore di corrente
% essendo R12 = R34, le correnti sono uguali
% I12a = J1 .* R34 ./ (R12+R34) = J1/2
I12a = J1/2
I34a = J1/2
VCGa = I12a.*R2
VGDa = -I34a.*R4 % perchè VGDa e I34a formano una convenzione del generatore su R4
VCDa = VCGa+VGDa % viene =0 perchè il ponte è in equilibrio
% VACa = VDBa = 0 perchè in R6 e in R7 non circola corrente
% VABa = VACa + VCDa + VDBa = VCDa
VABa = VCDa % viene =0

% J2 acceso
VABb = J2 .* R0

EO = VABa+VABb

dispah(' Metodo 2: mesh analysis ')
% corrente impressa J1 in R1 R2
% corrente impressa J2 in R6 R1 R3 R7
% unica corrente di maglia incognita k in R1 R2 R4 R3 in senso orario
% V1 + V2 + V4 + V3 = 0
% R1*(k+J1-J2) + R2*(k+J1) + R4*k + R3*(k-J2) = 0
% (R1+R2+R4+R3)*k + (R1+R2)*J1 - (R1+R3)*J2 = 0
k = ((R1+R3)*J2 - (R1+R2)*J1) / (R1+R2+R4+R3)
V2 = R2*(k+J1)
V4 = R4*k
V6 = R6*J2
V7 = R7*J2
EO = V6 + V2 + V4 + V7

function c=paral(a,b)
c=a.*b./(a+b);

function dispah(str)
disp(sprintf('<a href="">%s</a>', str))
```

Prova di Luglio 2011

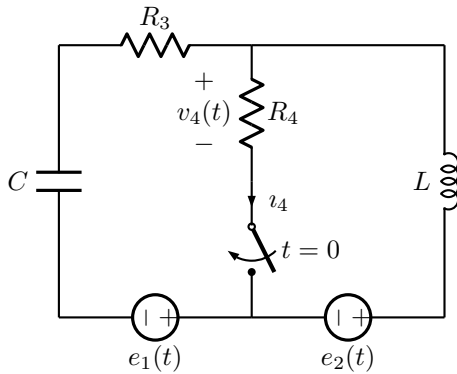
Problema 1a

... work in progress ...

Problema 1b

... work in progress ...

Problema 2



La rete in figura è a regime per $t < 0$. Valutare la tensione $v_4(t)$.

$$e_1(t) = E_0 = 60.00 \text{ V}$$

$$e_2(t) = [1 - 1(t)]E_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}), \quad E = E_{\text{eff}} = 42.43 \text{ V}$$

$1(t)$ è il gradino unitario

$$\omega = 10.00 \text{ rad/s}$$

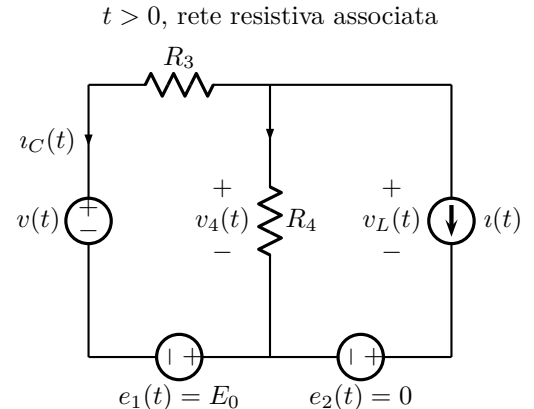
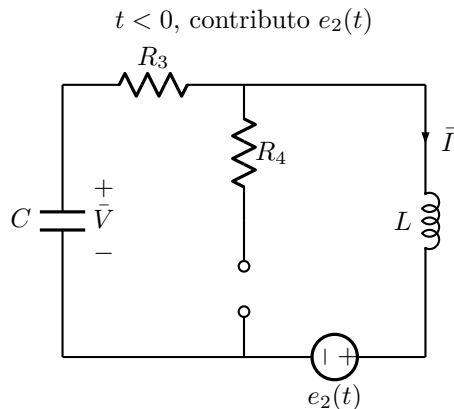
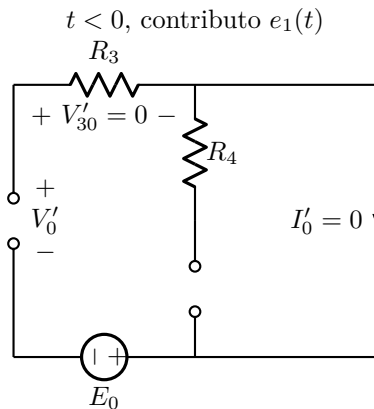
$$R_3 = R_4 = R = 4.000 \Omega$$

$$L = 100.0 \text{ mH}$$

$$C = 50.00 \text{ mF}$$

Si noti innanzitutto che $1 - 1(t) = 1(-t)$, quindi per $t < 0$ abbiamo i due contributi $e_1 = E_0$ ed $e_2 = E_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$. Siano $v(t)$ e $i(t)$ le variabili di stato. Quando agisce e_1 la rete opera in regime stazionario, il condensatore è aperto e l'induttore è un cortocircuito, da cui

$$i'(0^-) = I'_0 = 0 \quad v'(0^-) = V'_0 = E_0.$$



Quando agisce e_2 la rete è in regime sinusoidale

$$\begin{aligned} \bar{E}_2 &= E e^{i\frac{\pi}{4}} & \dot{Z} &= R_3 + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C & \bar{V} &= \bar{E}_2 \frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}} = \dots & \bar{I} &= -\frac{E_2}{\dot{Z}} = \dots \\ v''(0^-) &= V''_0 = \text{Re}(\bar{V}) = \dots & i''(0^-) &= I''_0 = \text{Re}(\bar{I}) = \dots \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali sono

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0 = V'_0 + V''_0 = \dots \quad i(0^+) = i(0^-) = I_0 = I'_0 + I''_0 = \dots$$

Per $t > 0$ consideriamo la rete resistiva associata. Sia $x = [\begin{smallmatrix} v \\ i \end{smallmatrix}]$ il vettore delle variabili di stato, e $\dot{x} = [\begin{smallmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{smallmatrix}]$ il corrispondente vettore derivato. Per illustrare un caso di maggiore generalità le seguenti derivazioni considerano entrambi i generatori e_1 ed e_2 , ignorando inizialmente il fatto che uno è costante e l'altro nullo. Nell'applicare la sovrapposizione degli effetti, consideriamo che v ed e_1 sono in serie ed equivalgono ad un unico generatore di tensione. Inoltre per il calcolo di v_C , la serie di v e e_2 equivale al solo v , mentre si faccia attenzione al fatto che per il calcolo di v_L occorre necessariamente considerare

anche e_2 . Si ha

$$\begin{aligned} R_s &= R_3 + R_4 \\ R_p &= R_3 \parallel R_4 \end{aligned} \quad \begin{cases} C\dot{v} = i_C = i_C|_i + i_C|_{e_1-v} = -i\frac{R_4}{R_s} + \frac{e_1-v}{R_s} = -\frac{v}{R_s} - \frac{R_4}{R_s}i + \frac{e_1}{R_s} \\ Li = v_L = -e_2 + v_4 = -e_2 + v_4|_i + v_4|_{v-e_1} = -e_2 - R_p i + (v - e_1)\frac{R_4}{R_s} = \frac{R_4}{R_s}v - R_p i - \frac{R_4}{R_s}e_1 - e_2 \\ v_4 = -R_p i + (v - e_1)\frac{R_4}{R_s} = \frac{R_4}{R_s}v - R_p i - \frac{R_4}{R_s}e_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{v}{R_s C} - \frac{R_4}{R_s C}i + \frac{e_1}{R_s C} \\ i = \frac{R_4}{R_s L}v - \frac{R_p}{L}i - \frac{R_4}{R_s L}e_1 - \frac{e_2}{L} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \dot{v} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_s C} & -\frac{R_4}{R_s C} \\ \frac{R_4}{R_s L} & -\frac{R_p}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_s C} & 0 \\ -\frac{R_4}{R_s L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

Come già osservato, il fatto che ci troviamo gli elementi diagonali di A entrambi negativi ci fa ben sperare sul fatto che non siano stati commessi errori. Infatti se ci fosse invece venuto ad esempio $a_{22} = \frac{R_p}{L}$, allora per un valore di L sufficientemente piccolo sarebbe risultato $\text{tr}(A) = -\frac{1}{R_s C} + \frac{R_p}{L} > 0$, il che non è possibile.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{R_s C} & \frac{R_4}{R_s C} \\ -\frac{R_4}{R_s L} & \lambda + \frac{R_p}{L} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(\frac{1}{R_s C} + \frac{R_p}{L}\right)\lambda + \frac{R_p}{R_s LC} + \frac{R_4^2}{R_s^2 LC} = \lambda^2 + 2\sigma\lambda + \omega_r^2 \\ \sigma &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_s C} + \frac{R_p}{L}\right) = 11.250 \text{ s}^{-1} \quad \omega_r^2 = \frac{R_p}{R_s LC} + \frac{R_4^2}{R_s^2 LC} = \left(\frac{R_3 R_4}{R_s} + \frac{R_4^2}{R_s}\right)\frac{1}{R_s LC} = \frac{R_4}{R_s LC} = \frac{R_p}{R_3 LC} = 100.00 \text{ s}^{-2} \\ \delta &= \frac{\Delta}{4} = \sigma^2 - \omega_r^2 = 26.563 \text{ s}^{-2} > 0 \Rightarrow \text{evoluzione transitoria smorzata}; \quad \sqrt{\delta} = 5.1539 \text{ s}^{-1} \\ \lambda_- &= -\sigma - \sqrt{\delta} = -16.404 \text{ s}^{-1} \quad \lambda_+ = -\sigma + \sqrt{\delta} = -6.0961 \text{ s}^{-1} \quad \tau_- = 60.961 \text{ ms} \quad \tau_+ = 164.04 \text{ ms} \\ v_{4t}(t) &= K_- e^{\lambda_- t} + K_+ e^{\lambda_+ t} = K_- e^{-\frac{t}{\tau_-}} + K_+ e^{-\frac{t}{\tau_+}} \quad \text{risposta transitoria, } K_- \text{ e } K_+ \text{ da determinare} \end{aligned}$$

Determiniamo per verifica l'equazione differenziale con il metodo simbolico, usando la formula di Millmann

$$\begin{aligned} \bar{V}_4 &= \frac{\frac{-\bar{E}_1}{R_3 + Z_C} + \frac{\bar{E}_2}{Z_L}}{\frac{1}{R_3 + Z_C} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{Z_L}} = \frac{\frac{-\bar{E}_1}{R_3 + \frac{1}{sC}} + \frac{\bar{E}_2}{sL}}{\frac{1}{R_3 + \frac{1}{sC}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{sL}} = \frac{\frac{-s\bar{E}_1}{sR_3 + \frac{1}{C}} + \frac{\bar{E}_2}{sL}}{s + \frac{sR_3 + \frac{1}{C}}{R_4} + \frac{sR_3 + \frac{1}{C}}{sL}} = \frac{-s^2\bar{E}_1 + (s\frac{R_3}{L} + \frac{1}{LC})\bar{E}_2}{s^2 + \frac{s^2 R_3 + \frac{s}{C}}{R_4} + s\frac{R_3}{L} + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{-s^2\bar{E}_1 + s\frac{R_3}{L}\bar{E}_2 + \frac{1}{LC}\bar{E}_2}{s^2(1 + \frac{R_3}{R_4}) + s(\frac{1}{R_4 C} + \frac{R_3}{L}) + \frac{1}{LC}} = \frac{-s^2 R_4 \bar{E}_1 + s\frac{R_3 R_4}{L}\bar{E}_2 + \frac{R_4}{LC}\bar{E}_2}{s^2(R_4 + R_3) + s(\frac{1}{C} + \frac{R_3 R_4}{L}) + \frac{R_4}{LC}} = \frac{-s^2 \frac{R_4}{R_s} \bar{E}_1 + s\frac{R_p}{L}\bar{E}_2 + \frac{R_4}{R_s LC}\bar{E}_2}{s^2 + s(\frac{1}{R_s C} + \frac{R_p}{L}) + \frac{R_4}{R_s LC}} \\ \left[s^2 + s\left(\frac{1}{R_s C} + \frac{R_p}{L}\right) + \frac{R_4}{R_s LC}\right]\bar{V}_4 &= -s^2 \frac{R_4}{R_s} \bar{E}_1 + s\frac{R_p}{L}\bar{E}_2 + \frac{R_4}{R_s LC}\bar{E}_2 \rightarrow \ddot{v}_4 + 2\sigma\dot{v}_4 + \omega_r^2 v_4 = -\frac{R_4}{R_s}\ddot{e}_1 + \frac{R_p}{L}\dot{e}_2 + \omega_r^2 e_2 \end{aligned}$$

Come abbiamo già notato, per $t > 0$ risulta $e_2 = 0$ ed $e_1 = E_0 = \text{cost}$, per cui è anche $\dot{e}_2 = \dot{e}_1 = \ddot{e}_1 = 0$, e l'equazione differenziale completa nell'incognita v_4 coincide con la sua omogenea associata. La soluzione di regime sarà dunque nulla, $v_{4r} = 0$. Ciò poteva ovviamente dedursi dalla rete osservando che, essendo $e_2 = 0$, R_4 si trova connessa in parallelo con L , che a regime stazionario si comporta come un corto circuito. La soluzione completa sarà dunque

$$v_4(t) = v_{4t}(t) + v_{4r}(t) = v_{4t}(t) = K_- e^{\lambda_- t} + K_+ e^{\lambda_+ t}$$

Determinazione delle costanti a partire dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{v}(0^+) = -\frac{v(0^+)}{R_s C} - \frac{R_4}{R_s C}i(0^+) + \frac{e_1(0^+)}{R_s C} = -\frac{V_0}{R_s C} - \frac{R_4}{R_s C}I_0 + \frac{E_0}{R_s C} = \dots = \dot{V}_0 \\ i(0^+) = \frac{R_4}{R_s L}v - \frac{R_p}{L}i - \frac{R_4}{R_s L}e_1 - \frac{e_2}{L} = \frac{R_4}{R_s L}V_0 - \frac{R_p}{L}I_0 - \frac{R_4}{R_s L}E_0 - \frac{0}{L} = \dots = \dot{I}_0 \end{cases} \\ K_- + K_+ = v_4(0^+) = -R_p i(0^+) + [v(0^+) - e_1(0^+)]\frac{R_4}{R_s} = -R_p I_0 + [V_0 - E_0]\frac{R_4}{R_s} = \dots = \alpha \\ \lambda_- K_- + \lambda_+ K_+ = \dot{v}_4(0^+) = -R_p \dot{i}(0^+) + [\dot{v}(0^+) - \dot{e}_1(0^+)]\frac{R_4}{R_s} = -R_p \dot{I}_0 + [\dot{V}_0 - 0]\frac{R_4}{R_s} = \dots = \beta \end{aligned}$$

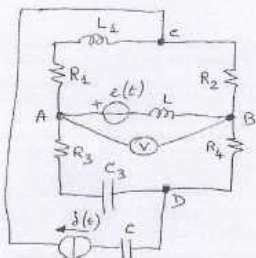
... work in progress ...

Problema 3

... work in progress ...

Prova IC Inf di Settembre 2012

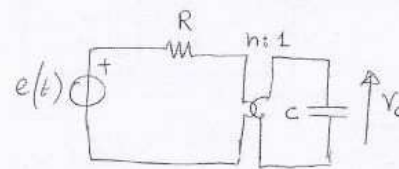
- 1) Nel circuito in regime sinusoidale in figura, determinare la lettura del voltmetro (a valore efficace) V applicando il teorema di Thévenin ai morsetti AB. Successivamente, sfruttando la conoscenza della differenza di potenziale fra i morsetti A e B ed applicando il metodo del potenziale ai nodi, calcolare la potenza reattiva erogata dal generatore di corrente.



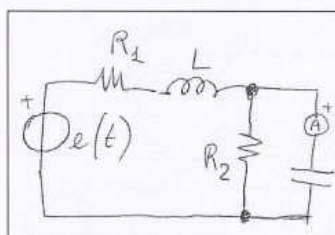
$$\begin{aligned} R1 &= 20 \, \Omega; R2 = 30 \, \Omega, \\ R3 &= 30 \, \Omega; R4 = 30 \, \Omega \\ L &= 0,5 \, \text{mH}; C = 0,5 \, \text{mF} \\ L1 &= 0,5 \, \text{mH}; C3 = 0,5 \, \text{mF} \\ e(t) &= \sqrt{2} E \sin(\omega t + \pi/4) \, [\text{V}] \\ j(t) &= \sqrt{2} J \sin(\omega t - \pi/4) \, [\text{A}] \\ \omega &= 10 \, \text{rad/sec} \\ E &= 10 \, \text{V}; J = 5 \, \text{A} \end{aligned}$$

3)

FACOLTATIVO (da svolgere solo dopo aver completamente svolto i precedenti esercizi, fornendo i risultati numerici richiesti). L'ingresso è $e(t)$, l'uscita è $v_c(t)$. Supponendo noti i valori di R, C e n , calcolare la risposta all'impulso ed al gradino.



- 2) Calcolare l'indicazione dell'amperometro per $t=5$ ms. Successivamente calcolare l'energia immagazzinata nel capacitore per $t=5$ ms.



$$\begin{aligned} R1 &= 2 \, \Omega \\ R2 &= 2 \, \Omega \\ C &= 0,2 \, \text{mF} \\ L &= 3 \, \text{mH} \\ e(t) &= E1 * 1(-t) + E2 * 1(t) \\ E1 &= 100 \, \text{V} \\ E2 &= 200 \, \text{V} \end{aligned}$$

Problema 1

$$\begin{aligned} R1 &= 20; & R2 &= 30; & R3 &= 30; & R4 &= 30; \\ L &= 0.5e-3; & L1 &= L; & C &= 0.5e-3; & C3 &= C; \\ \omega &= 10; & E &= 10; & J &= 5; \end{aligned}$$

$$\% e(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \frac{2\pi}{8}) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \frac{\omega T}{8}) = \sqrt{2}E \sin \omega(t + \frac{T}{8})$$

$$\% j(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}J \sin \omega(t - \frac{T}{8})$$

$$\% e(t + \frac{T}{8}) = \sqrt{2}E \sin \omega(t + \frac{T}{4}) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \frac{2\pi}{4})$$

$$\% j(t + \frac{T}{8}) = \sqrt{2}J \sin \omega t$$

$$E_ = E * \exp(1i * \pi / 2) \quad \% 10i$$

$$J_ = J \quad \% 5$$

$$Z1_ = R1 + 1i * \omega * L1 \quad \%$$

$$Z3_ = R3 - 1i / (\omega * C3) \quad \%$$

$$ZL_ = 1i * \omega * L \quad \%$$

$$ZC_ = -1i / (\omega * C) \quad \%$$

% Thevenin ad AB eliminando $e(t)$ e L

$$I10_ = J_ * (R2 + R4) / (Z1_ + Z3_ + R2 + R4) \quad \% 0.63342 + 1.1516i$$

$$I20_ = J_ - I10_ \quad \% 4.3666 - 1.1516i$$

$$VCA0_ = Z1_ * I10_ \quad \% 12.663 + 23.036i$$

$$VCB0_ = R2 * I20_ \quad \% 131.00 - 34.549i$$

$$VAB0_ = VCB0_ - VCA0_ \quad \% 118.33 - 57.586i$$

$$EO_ = VAB0_ \quad \% 118.33 - 57.586i$$

$$ZO_ = \text{paral}(Z1_ + R2, Z3_ + R4) \quad \% 44.723 - 9.5931i$$

% LKT al circuito ridotto con Thevenin

% F = nodo in comune tra L ed $e(t)$

$$VFB_ = (EO_ - E_) * ZL_ / (ZL_ + ZO_) \quad \% 0.0045123 + 0.014197i$$

```
VAB_ = E_+VFB_ % 0.0045123 + 10.014i
V     = abs(VAB_) % 10.01
```

% Sostuiamo il ramo interno AB con un generatore pari al valore calcolato $\bar{V}_{AB}$ e applichiamo i potenziali nodali
 % considerando il *macronodo* contenente i nodi A e B e il generatore $\bar{V}_{AB}$

$$\% \begin{cases} \bar{U}_A - \bar{U}_B = \bar{V}_{AB} \\ \bar{U}_B = 0 \\ \frac{\bar{U}_C - \bar{U}_A}{Z_1} + \frac{\bar{U}_C - \bar{U}_B}{R_2} = \bar{J} \quad \text{nodo C} \\ \frac{\bar{U}_A - \bar{U}_D}{Z_3} + \frac{\bar{U}_B - \bar{U}_D}{R_4} = \bar{J} \quad \text{nodo D} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\bar{U}_C - \bar{V}_{AB}}{Z_1} + \frac{\bar{U}_C}{R_2} = \bar{J} \\ \frac{\bar{V}_{AB} - \bar{U}_D}{Z_3} - \frac{\bar{U}_D}{R_4} = \bar{J} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\bar{U}_C}{Z_1 \| R_2} = \bar{J} + \frac{\bar{V}_{AB}}{Z_1} \\ \frac{\bar{U}_D}{Z_3 \| R_4} = \frac{\bar{V}_{AB}}{Z_3} - \bar{J} \end{cases}$$

```
UC_ = paral(Z1_,R2) * ( J_+VAB_/Z1_) % 60.003 + 6.0175i
UD_ = paral(Z3_,R4) * (-J_+VAB_/Z3_) % -145.19 + 21.056i
VCD_ = UC_-UD_ % 205.19 - 15.039i
% K = nodo in comune tra C e j(t)
VKD_ = -ZC_*J_ % 1000.0i
VCK_ = VCD_-VKD_ % 205.19 - 1015.0i
QJ = imag(VCK_*conj(J_)) % -5075
```

Problema 2

... work in progress ...

Problema 3

... work in progress ...

Capitolo 11

Checklist pre-esame

- bipoli adinamici: ...
- bipoli dinamici: ...
- bipoli a-dinamici passivi: ...
- bipoli a-dinamici strettamente passivi: ...
- bipoli dinamici passivi
- bipoli in serie
- bipoli in parallelo
-
- teorema fondamentale dei grafi, set di maglie fondamentali, set di ‘macronodi’ (insiemi di taglio)
-
- dimostrazione proprietà sovrapposizione: $Lx = d \Rightarrow x = L^{-1}d = \dots$
- dimostrazione esistenza resistenza equivalente: ...
- dimostrazione esistenza resistenza equivalente matriciale (per doppi bipoli, in generale per M -porte): ...
-
-
- Proprietà del metodo simbolico, in particolare dimostrazione proprietà di derivazione
- Diagrammi fasoriali
esempio di bipolo costituito dalla serie o dal parallelo di R e L , relativa costruzione fasori $\bar{I}$ e $\bar{V}$ e calcolo analitico angolo ϕ tra essi; analogamente, bipolo costituito dalla serie o dal parallelo di R e C , o ancora di R , L e C .
-
-
- Uso formula di Millmann per soluzione di circuiti costituiti da N rami in parallelo (non solo per sistemi trifase, vedi questa dispensa e soluzioni matlab) e sua dimostrazione (anche con equivalenze Thevenin-Norton)
-
- Variabili di stato e loro proprietà, variabili duali delle variabili di stato
- Circuito resistivo associato (per l’analisi di un circuito in regime dinamico, di ordine 1, 2 o superiore)
- Equazioni di stato (per l’analisi di un circuito in regime dinamico, di ordine 1, 2 o superiore)
sono equazioni in cui compaiono come incognite le sole grandezze di stato
- Come si determinano le condizioni iniziali sulle derivate per un circuito di ordine 2? Risposta: mediante le equazioni di stato
-
- Definizione di evoluzione libera e di risposta forzata
- Definizione di circuito dissipativo
- Definizione di regime permanente (.... limite per $t_0 \rightarrow -\infty$) e (conseguentemente) di risposta transitoria
- Il regime permanente esiste sempre? No! Condizioni che ne garantiscono l’esistenza

- Differenza tra evoluzione libera e risposta transitoria
-
-
-

... work in progress ...

Indice analitico

- accoppiamento
 - non perfetto, 34, 58
- analisi vettoriale, 8
- angoli di Eulero, 8
- antitrasformazione, 50
- autovettori
 - generalizzati, 44
- bipolo
 - conservativo, 26
 - dinamico passivo, 27
- campo, 5
 - complesso, 5
 - rotazionale, 52
- circuito
 - dissipativo, 35
- concentrazione, 54
- convergenza, 51
- corrente
 - nominale, 58
- crescite transitorie, 44
- criterio
 - di progetto, 62
- curva
 - di rendimento del trasformatore, 61
- dati
 - di targa, 58
- decomposizione
 - di Schur, 44
- derivata (Gibbs), 50
- diade, 55
- differenza, 6
- divergenza, 51
 - totale, 51
- divisione, 6
- dominio
 - del tempo, 50
 - della frequenza, 50
- duty cycle, 63
- energia
 - significato, 24
- entalpia, 24
- equazione
 - dei momenti, 64
- espansione, 51
 - rapidità relativa di, 52
- fluido
 - incompressibile, 52
- flutter aeroelastico, 38
- forma
 - algebrica, 6
 - di Jordan, 9, 44
- formula
 - di Lagrange, 45
- function, 78
- funzione
 - armonica, 53
 - secolare, 81
- gimbal lock, 8
- gradiente, 50
- Hadamard, 78
- Heaviside, 51
- induzione
 - elettromagnetica, 52
 - magnetoelettrica, 52
- Jordan
 - forma di, 9, 44
- laplaciano
 - scalare, 53, 54
 - vettore, 55
- matrice
 - delle risposte impulsive, 45
 - di transizione, 42
 - reale simmetrica, 43
- Maxwell, 50, 51
- metodo
 - scaling and squaring, 44
 - simbolico, 28, 33
 - validità generale, 50, 81
- missione lunare Apollo 11, 8
- momento elettrico, 64
- notazione
 - di Hadamard, 78
- numeri
 - immaginari, 6
 - ipercomplessi, 8
- operatore
 - concentrazione, 54
 - convergenza, 51
 - divergenza, 51
 - espansione, 51
 - gradiente, 50
 - laplaciano
 - scalare, 53, 54
 - vettore, 55
 - rotore, 52
- oscillazione torsionale, 38
- porta
 - amperometrica, 27
 - voltmetrica, 27
- potenziale
 - scalare, 55
- primitiva
 - di un vettore (Gibbs), 50

- prodotto
 - esterno tra matrici, 78
- quaternioni, 8
- quoziente, 6
- raffreddamento, 24
- rapporto
 - di trasformazione, 58
- reciprocità
 - prima forma, 29
 - seconda forma, 29
 - terza forma, 29
- regime
 - continuo, 62
 - lentamente variabile, 25
 - permanente, 36, 46
 - polinomiale, 36
 - pulsato, 63
- rendimento
 - convenzionale, 61
 - in energia, 63
 - nominale, 61
- risonanza, 38
- rotazionale, 52
- rotazioni spaziali, 8
- rotore, 52
- script, 78
- secolare
 - funzione, 81
- sospensione cardanica, 8
- sottrazione, 6
- teorema
 - del rotore (Kelvin-Stokes), 53
 - della divergenza (Gauss-Ostrogradsky), 51
 - della media
 - vettoriale, 56
 - di Poynting, 56
- traccia, 9, 82, 87
- trasformata di Fourier, 50
- trasformatore
 - ideale, 58
 - reale, 58
- unità immaginaria, 6
- vettore
 - di Poynting, 56
- wattmetro
 - ideale, 27
 - in quadratura, 77