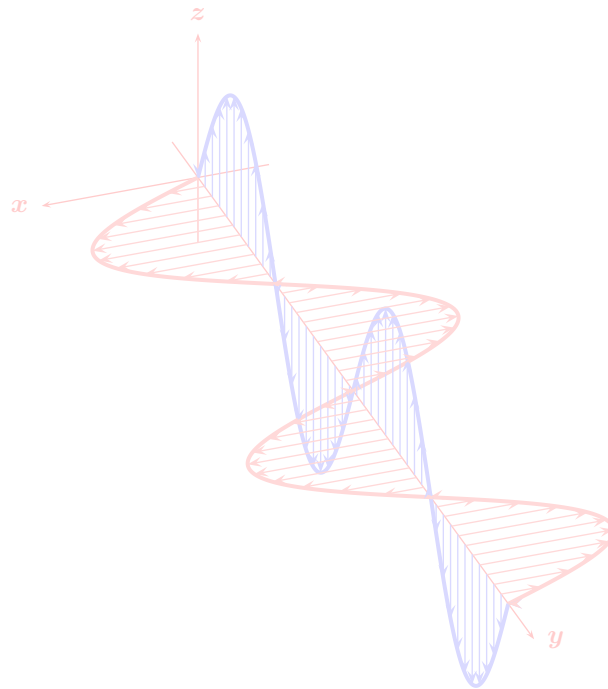


Dispense di Elettrotecnica

Appunti didattici a.a. 2010-2011



Insegnamento di
Elettrotecnica

Antonio Quercia
Napoli. Aprile, 2011

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA
Università degli Studi di Napoli Federico II



Indice

1	Richiami di analisi	4
1.1	Cancellazione numerica: equazione quadratica	4
1.2	Funzioni, derivate, inverse	4
1.3	Integrali	5
1.3.1	Integrazione per parti	5
1.3.2	Integrazione per sostituzione A	5
1.3.3	Integrazione per sostituzione B	5
2	Richiami di algebra lineare	6
3	Misure ed errori	7
3.1	propagazione degli errori nelle misure indirette	7
3.2	cifre significative	8
4	Integrazioni al libro Circuiti	9
4.0.1	pag 74 espressione della soluzione in termini dei generatori e delle variabili di stato	9
4.0.2	pag 82 esempio di regime sinusoidale: circuito serie e-R-C con generatore sinusoidale	9
4.0.3	pag 125 Equazioni circuitali in forma canonica, $Lx = d$	9
4.0.4	pag 128 Dualità nelle reti resistive	10
4.0.5	Metodi dei potenziali nodali e delle correnti di maglia	10
4.0.6	pag 139 Trattamento dei generatori di tensione nel metodo dei potenziali di nodo	10
4.0.7	pag 143 Trattamento dei generatori di corrente nel metodo delle correnti di maglia	11
4.0.8	pag 221 Il campo complesso	13
4.0.9	Estensioni dei numeri complessi: i Quaternioni di Hamilton	15
4.0.10	pag 226-7 metodo simbolico	15
4.0.11	pag 259 risonanza parallelo	16
4.0.12	pag 283 Trasferimenti energetici, valore efficace, energia immagazzinata in L e C	17
4.0.13	Operatori differenziali fondamentali ed equazioni di Maxwell	19
4.0.14	Espressione della potenza in regime lentamente variabile per bipoli ed N -poli	21
4.0.15	pag 286 wattmetro ideale	22
4.0.16	pag 292 Circuito di Tesla con linea induttiva	22
4.0.17	pag 331 Adattamento in potenza con trasformatore per carico non puramente resistivo	23
4.0.18	pag 337 Reciprocità	23
4.0.19	pag 347 Matrice di trasmissione	23
4.0.20	pag 350 schemi equivalenti di Thevenin e Norton di un doppio bipolo lineare non inerte	23
4.0.21	pag 361 equivalenza circuiti in fig 6.44 (a) e (b)	23
4.0.22	pag 362 accoppiamento non perfetto	23
4.0.23	pag 396 dissipatività	24
4.0.24	pag 397 regime permanente	24
4.0.25	Esempi di circuiti non dissipativi	25
4.0.26	pag 411,415,434 circuito resistivo associato e modello ABCD	27
4.0.27	Risposta a regime permanente TDS158	30
5	Impianti	32
5.1	Trasformatore	32
5.1.1	Mutuo accoppiamento induttivo	32
5.1.2	Trasformatore reale	32
5.1.3	Modello a L, prova a vuoto GSII.58	33
5.1.4	Modello a L, prova in cortocircuito GSII.59	34
5.1.5	Caduta di tensione	35
5.1.6	Rendimento	35
5.2	Linee elettriche	38
5.2.1	Caduta di tensione	38
5.2.2	Comportamento termico delle linee	41
5.2.3	Dimensionamento delle linee elettriche	41

5.2.4	Confronto tra linee elettriche	41
5.3	Impianti di terra	41
5.4	Interruttore automatico	41
5.4.1	Protezione dal cortocircuito	41
5.4.2	Corrente di guasto e resistenza di terra	42
5.4.3	Dati di targa dell'interruttore	42
5.4.4	Correnti di riferimento della caratteristica di intervento	42
5.4.5	Potere di interruzione	43
5.4.6	altro	43
6	Compendio	44
6.1	Classificazioni	44
6.1.1	Classificazione dei bipoli	44
6.1.2	Classificazione dei componenti a più terminali	45
6.1.3	Classificazione dei circuiti	45
6.2	Relazioni essenziali	46
6.2.1	Potenza scambiata da un bipolo in regime sinusoidale	46
6.2.2	Espressioni nel metodo dei fasori	46
6.2.3	Conservazione delle potenze in regime sinusoidale	46
6.2.4	Trasformazioni Triangolo \leftrightarrow Stella ($\Delta \leftrightarrow Y$)	47
6.2.5	Formula di Millman	47
6.3	Trifase	47
6.3.1	Carico a Stella	47
6.3.2	Carico a Triangolo	48
6.3.3	Misura della potenza e Inserzione Aron nei sistemi trifase a 3 fili	49
6.3.4	Misura della potenza reattiva con wattmetro in quadratura	50
7	Convenzioni OCTAVE/MATLAB	51
8	Soluzioni di alcune prove d'esame	53
8.1	Prova Unicz del 10-01-2011	53
8.1.1	Problema 1	53
8.1.2	Problema 2	53
	Indice analitico	56

Capitolo 1

Richiami di analisi

1.1 Cancellazione numerica: equazione quadratica

Sembrerà strano, ma ancora molti non sanno qual è il modo corretto di risolvere numericamente l'equazione quadratica (e a maggior ragione la cubica e la quartica). Infatti se $b^2 \gg 4ac$ con la tipica espressione risolutiva si può avere un errore di arrotondamento inaccettabile nel calcolo di una delle due radici. Richiamiamo innanzitutto il metodo risolutivo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|} \quad x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mediante razionalizzazione è possibile trovare espressioni alternative per le due radici

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{1}{2a} \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad c \neq 0 \text{ se } b > 0$$

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{1}{2a} \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad c \neq 0 \text{ se } b < 0$$

Dunque oltre alle note espressioni $x_{\mp} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, abbiamo a disposizione quelle alternative $x_{\mp} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$, le quali soffrono anch'esse del problema della cancellazione numerica, ma in maniera duale rispetto alle prime. Le nuove espressioni, quando usate nel modo errato, cioè quando c'è cancellazione numerica, cadono anche in difetto se $c = 0$. Infatti $b > 0$ e $c = 0 \Rightarrow x_- = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{0}{0}$, mentre $b < 0$ e $c = 0 \Rightarrow x_+ = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{0}{0}$. Operando come segue si superano le varie difficoltà

$$\begin{cases} b \geq 0 & \Rightarrow x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & x_+ = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} & \Rightarrow q = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} & x_- = \frac{q}{a} & x_+ = \frac{c}{q} \\ b < 0 & \Rightarrow x_- = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} & x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \Rightarrow q = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} & x_- = \frac{c}{q} & x_+ = \frac{q}{a} \end{cases}$$

$$\text{sign}_m(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ m & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{sign}_1(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$q = \frac{-b - \text{sign}_1(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-\text{sign}_1(b)|b| - \text{sign}_1(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = -\text{sign}_1(b) \frac{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

In definitiva si ha

$$\begin{cases} q = -\text{sign}_1(b) \frac{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = -\text{sign}_1(b) \left(\left| \frac{b}{2} \right| + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} \right) \\ x_1 = \frac{q}{a} & x_2 = \frac{c}{q} \end{cases} \quad (1.1)$$

L'unico problema che persiste corrisponde al caso $a = 0$, ma in tale situazione l'equazione non è più di secondo grado. Notiamo che da questa espressione e dai segni di a , b e c si può dedurre in maniera un po' più diretta se x_1 e x_2 sono a parte reale negativa. Ad esempio se $b > 0$ allora q è a parte reale negativa, e se anche $a > 0$ e $c > 0$ allora anche x_1 e x_2 saranno a parte reale negativa. In particolare quando le radici sono reali, dato il segno di b , i segni di x_1 e di x_2 sono rispettivamente determinati dai segni di a e di c .

Nel caso in cui i coefficienti a, b, c fossero complessi il problema persiste, e viene risolto estendendo i ragionamenti qui presentati: si veda ad esempio il testo *Numerical Recipes* di Press ad altri.

1.2 Funzioni, derivate, inverse

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \text{sign}x \quad x \neq 0 \text{ (la funzione } g(x) = |x| \text{ non è derivabile in } x = 0)$$

$$\frac{d}{dx}|f(x)| = \frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x) = \frac{f'(x)}{|f(x)|}f'(x) = \text{sign}f(x)f'(x) \quad \text{non vale nei punti in cui la } f(x) \text{ cambia segno,}$$

cioè nei punti x_i tali che $f(x_i) = 0$ e $f'(x_i) \neq 0$

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{|x|} \frac{d|x|}{dx} = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{1}{|f(x)|} \frac{d|f(x)|}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad x = \sinh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad x, y \in \mathfrak{R}$$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathfrak{R}, y \geq 1; \quad x = \cosh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad x \geq 0, y \geq 1$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c = \sinh^{-1} x + c$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad x \geq 1; \quad \frac{d}{dx} \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad |x| \geq 1 \text{ caso più generale}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c \quad (= \cosh^{-1} x + c \text{ se } x \geq 1)$$

1.3 Integrali

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + c = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c$$

1.3.1 Integrazione per parti

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \int fg' dx = fg - \int f'g dx$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = (x - 1)e^x + c$$

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

$$\int \ln|x| dx = \int 1 \cdot \ln|x| dx = x \ln|x| - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln|x| - x + c = x(\ln|x| - 1) + c$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-) \sin x dx \right]$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \quad 2 \int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + c$$

1.3.2 Integrazione per sostituzione A

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + c = \left[F(x) + c \right]_{x=\phi(t)} = \left[\int f(x)dx \right]_{x=\phi(t)}$$

$$\int e^{\sin t} \sin 2t dt = \int e^{\sin t} 2 \sin t \cos t dt = \left[2 \int e^x x dx \right]_{x=\sin t} = \left[2e^x(x - 1) + c \right]_{x=\sin t} = 2e^{\sin t}(\sin t - 1) + c$$

1.3.3 Integrazione per sostituzione B

$$\int f(x)dx = F(x) + c = \left[F(\phi(t)) + c \right]_{t=\phi^{-1}(x)} = \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)dt \right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \left[\int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt \right]_{t=\arcsin x} = \left[\int \cos^2 t dt \right]_{t=\arcsin x} = \left[\frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + c \right]_{t=\arcsin x}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) + c \right]_{t=\arcsin x} = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}) + c$$

Capitolo 2

Richiami di algebra lineare

da completare, e aggiungere brevi richiami sulle dimostrazioni

A matrice $n \times n$ non singolare	A matrice $n \times n$ singolare
A è invertibile	A non è invertibile
Le colonne sono indipendenti	Le colonne sono dipendenti
Le righe sono indipendenti	Le righe sono dipendenti
$\det(A) \neq 0$	$\det(A) = 0$
$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$	$Ax = 0$ ha infinite soluzioni
$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$	$Ax = b$ ammette nessuna o infinite soluzioni
A ha n elementi pivot diversi da 0	A ha r elementi pivot, con $r < n$
$\text{rank}(A) = n$	$\text{rank}(A) = r < n$
La forma ridotta di Echelon è $R = I$	R ha almeno una riga nulla
Lo spazio generato dalle colonne è \mathbb{R}^n	Lo spazio generato dalle colonne ha dimensione $r < n$
Lo spazio generato dalle righe è \mathbb{R}^n	Lo spazio generato dalle righe ha dimensione $r < n$
Tutti gli autovalori sono non nulli, $\lambda_i \neq 0$	Un autovalore è nullo
$B = A^T A$ è una matrice simmetrica definita positiva Infatti $x^T B x = x^T A^T A x = (Ax)^T A x = Ax ^2 \geq 0$, ed essendo le colonne di A indipendenti si ha $x \neq 0 \Rightarrow Ax \neq 0 \Rightarrow x^T B x > 0$	$B = A^T A$ è simmetrica, semidefinita positiva
A ha n valori singolari, positivi	A ha $r < n$ valori singolari, positivi

Aggiungere tabella strang 299

Aggiungere glossario con definizioni tecniche

Capitolo 3

Misure ed errori

... work in progress

NR 1.4 p31
forse meglio NR 3ed 1.1 p8 cut-paste-translate

3.1 propagazione degli errori nelle misure indirette

... work in progress

$$m_i = f(m_1, m_2, m_3, \dots, m_k) \quad m_i \text{ grandezza misurata indirettamente} \quad (3.1)$$

$$dm_i = \frac{\partial f}{\partial m_1} dm_1 + \frac{\partial f}{\partial m_2} dm_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial m_k} dm_k \quad \text{errore assoluto} \quad (3.2)$$

$$e_{m_i} = \frac{dm_i}{m_i} \quad \text{errore relativo} \quad (3.3)$$

$$e_{m_i\%} = 100 \frac{dm_i}{m_i} \quad \text{errore relativo percentuale} \quad (3.4)$$

Esempi

- Elevazione a potenza

$$m_i = f(m) = m^n \quad \text{caso frequente } n = 2$$

$$dm_i = nm^{n-1} dm$$

$$\frac{dm_i}{m_i} = n \frac{dm}{m} \quad \text{l'errore relativo risulta moltiplicato per l'esponente, nel caso } n = 2 \text{ raddoppia}$$

- Esponenziale

$$m_i = f(m) = e^m$$

$$dm_i = e^m dm$$

$$\frac{dm_i}{m_i} = dm = m \frac{dm}{m} \quad \text{l'errore relativo risulta amplificato di un fattore pari alla grandezza direttamente misurata}$$

- Somma

$$v = f(v_1, v_2) = v_1 + v_2$$

$$dv = dv_1 + dv_2$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dv_1 + dv_2}{v_1 + v_2} = \frac{v_1}{v_1 + v_2} \frac{dv_1}{v_1} + \frac{v_2}{v_1 + v_2} \frac{dv_2}{v_2} \quad \text{gli errori relativi } \textit{pesati} \text{ si sommano, in modulo e segno}$$

- Prodotto

$$v = f(R, i) = Ri$$

$$dv = idR + Rdi$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{idR + Rdi}{Ri} = \frac{dR}{R} + \frac{di}{i} \quad \text{gli errori relativi si sommano, in modulo e segno}$$

- Potenza assorbita

$$p = f(R, i) = Ri^2$$

$$dv = i^2 dR + R2idi$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{i^2 dR + 2Ridi}{Ri^2} = \frac{dR}{R} + 2\frac{di}{i}$$

3.2 cifre significative

si veda la dispensa che al momento è disponibile separatamente

Si consideri quale errore si può commettere facendo calcoli numerici, ragionando in termini di rappresentazione decimale, con 1, 2, 3, 4 o 5 cifre significative:

cifre significative	differenza percentuale nel caso peggiore	differenza percentuale nel caso migliore
1	tra 1 e 2, 100%	tra 8 e 9, ~10%
2	tra 10 e 11, 10%	tra 98 e 99, 1%
3	tra 100 e 101, 1%	tra 998 e 999, 0.1%
4	tra 1000 e 1001, 0.1%	tra 9998 e 9999, 0.01%
5	tra 10000 e 10001, 0.01%	tra 99998 e 99999, 0.001%

Nell'ipotesi quindi che i dati iniziali del problema siano forniti con adeguata precisione, facendo i conti portandosi dietro 5 cifre significative, per poi troncarsi alla fine in modo da ottenere numeri finali con 4 cifre, garantisce risultati numerici corretti entro l' 1 per mille.

Capitolo 4

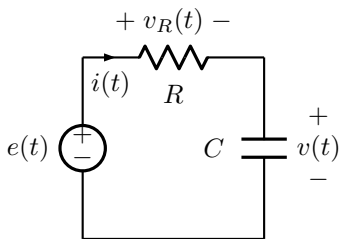
Integrazioni al libro Circuiti

4.0.1 pag 74 espressione della soluzione in termini dei generatori e delle variabili di stato

Proprietà: In un circuito dinamico lineare una qualunque grandezza può sempre essere espressa come combinazione lineare delle grandezze di stato e dei generatori indipendenti.

Infatti, immaginando di conoscere la tensione $v_k(t)$ sul generico condensatore e la corrente $i_h(t)$ nel generico induttore, possiamo pensare di sostituire ai condensatori dei generatori indipendenti di tensione di valore $e_k(t) = v_k(t)$ e agli induttori dei generatori indipendenti di corrente di valore $j_k(t) = i_k(t)$; la tesi segue immediatamente dalla proprietà di sovrapposizione degli effetti.

4.0.2 pag 82 esempio di regime sinusoidale: circuito serie e-R-C con generatore sinusoidale



$$e(t) = v_R + v = Ri + v = RC \frac{dv}{dt} + v$$

$$v(t_0) = V_0$$

Si tratta di un circuito dissipativo, essendo $RC\lambda + 1 = 0$ e $\lambda = -\frac{1}{\tau} < 0$

$$e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \gamma)$$

Ipotizziamo $v_p(t) = \sqrt{2}V_p \cos(\omega t + \alpha)$ $\frac{dv_p}{dt} = -\sqrt{2}V_p\omega \sin(\omega t + \alpha)$

$$-\sqrt{2}\omega RC V_p \sin(\omega t + \alpha) + \sqrt{2}V_p \cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \gamma)$$

$$-\omega\tau V_p \sin(\omega t + \alpha) + V_p \cos(\omega t + \alpha) = E \cos(\omega t + \alpha + \gamma - \alpha)$$

$$\begin{cases} \omega t_1 + \alpha = 0 & \Rightarrow & V_p = E \cos(\gamma - \alpha) \\ \omega t_2 + \alpha = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow & -\omega\tau V_p = E \cos(\frac{\pi}{2} + \gamma - \alpha) = -E \sin(\gamma - \alpha) \quad \omega\tau V_p = E \sin(\gamma - \alpha) \end{cases}$$

$$\tan(\gamma - \alpha) = \omega\tau \quad \gamma - \alpha = \arctan(\omega\tau) \quad \alpha = \gamma - \arctan(\omega\tau)$$

$$V_p^2 + (\omega\tau V_p)^2 = E^2 \quad V_p = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$v_p(t) = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos[\omega t + \gamma - \arctan(\omega\tau)]$$

4.0.3 pag 125 Equazioni circuitali in forma canonica, $Lx = d$

Le 2ℓ equazioni nelle 2ℓ incognite (nel caso dell'esempio considerato è $\ell = 5$), nel caso lineare possono essere messe nella forma canonica $Lx = d$, ovvero esplicitando (nei posti lasciati vuoti si sottintende esserci 0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -R_1 & & & & & 1 & & & & \\ & -R_2 & & & & & 1 & & & \\ & & -R_3 & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ j(t) \\ -e(t) \end{bmatrix}$$

Riconosciamo nel primo blocco in alto a sinistra la matrice di incidenza ridotta A e nel secondo blocco la matrice delle maglie fondamentali B ovvero, in notazione Matlab-like, $A=L(1:2, 1:5)$, $B=L(3:5, 6:10)$, e in generale $A=L(1:n-1, 1:\ell)$, $B=L(n:\ell, \ell+1:2\ell)$.

4.0.4 pag 128 Dualità nelle reti resistive

La relazione costitutiva di un resistore controllato in tensione è esplicitabile nella forma $i = \pm g(v)$, mentre per un resistore controllato in corrente sarà $v = \pm r(i)$. Il seguente prospetto mostra il concetto di dualità per le reti resistive.

	$n - 1$ equazioni ai nodi	$l - (n - 1)$ equazioni alle maglie	Incognite
Rete alimentata da soli generatori di <i>corrente</i> . Resistori controllati in tensione	$\sum_k \pm g_k(v_k) = \sum_h \mp j_h$	$\sum_p \pm v_p = 0$	v_1, \dots, v_l
Rete alimentata da soli generatori di <i>tensione</i> . Resistori controllati in corrente	$\sum_k \pm i_k = 0$	$\sum_p \pm r_p(i_p) = \sum_q \mp e_q$	i_1, \dots, i_l

Caso delle reti lineari

	$n - 1$ equazioni ai nodi	$l - (n - 1)$ equazioni alle maglie	Incognite
Rete alimentata da soli generatori di <i>corrente</i>	$\sum_k \pm G_k v_k = \sum_h \mp j_h$	$\sum_p \pm v_p = 0$	v_1, \dots, v_l
Rete alimentata da soli generatori di <i>tensione</i>	$\sum_k \pm i_k = 0$	$\sum_p \pm R_p I_p = \sum_q \mp e_q$	i_1, \dots, i_l

4.0.5 Metodi dei potenziali nodali e delle correnti di maglia

Nel caso delle reti alimentate da soli generatori di corrente, introducendo le nuove incognite potenziali nodali u_j , risulta che le LKT sono automaticamente soddisfatte (vedi libro).

Per le reti alimentate da soli generatori di tensione, introducendo le nuove incognite correnti di maglia k_j , queste rispettano automaticamente le LKC, poiché ciascuna di esse entra ed esce dallo stesso nodo.

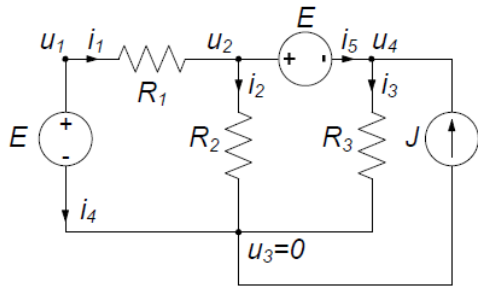
	$n - 1$ equazioni ai nodi	$l - (n - 1)$ equazioni alle maglie	Incognite
Rete alimentata da soli generatori di <i>corrente</i> . Metodo dei potenziali nodali	$\sum_k G_k(u_{r_k} - u_{s_k}) = \sum_h \mp j_h$	automaticamente soddisfatte	u_1, \dots, u_{n-1}
Rete alimentata da soli generatori di <i>tensione</i> . Metodo delle correnti di maglia	automaticamente soddisfatte	$\sum_p R_p \sum_m \pm k_{p_m} = \sum_q \mp e_q$	$k_1, \dots, k_{l-(n-1)}$

4.0.6 pag 139 Trattamento dei generatori di tensione nel metodo dei potenziali di nodo

Nell'applicare il metodo dei potenziali di nodo nel caso in cui siano presenti anche dei generatori di tensione nasce un problema, perchè nella scrittura delle LKC ai nodi le correnti circolanti nei generatori di tensione costituiscono altrettante ulteriori incognite. In realtà il metodo si può applicare alla stessa maniera, immaginando che al posto di ciascun generatore di tensione ci sia invece un generatore di corrente. Le $n - 1$ equazioni diventeranno $\sum_k G_k(u_{r_k} - u_{s_k}) = \sum_h \mp j_h + \sum_p \mp i_p$, dove le i_p sono ulteriori incognite, in quantità pari al numero, b , di generatori di tensione presenti. Le ulteriori b equazioni che serviranno sono specificate dai valori dei generatori di tensione stessi. In definitiva avremo $n - 1 + b$ equazioni del tipo indicato di seguito nelle $n - 1 + b$ incognite $u_1, \dots, u_{n-1}, i_{p_1}, \dots, i_{p_b}$

$$\sum_k G_k(u_{r_k} - u_{s_k}) + \sum_p \pm i_p = \sum_h \mp j_h \quad n - 1 \text{ equazioni} \quad (4.1)$$

$$u_r - u_s = e_{rs} \quad b \text{ equazioni} \quad (4.2)$$



Il verso scelto per i_4 e i_5 serve per far sì che la matrice risolvete venga simmetrica

Si può scrivere direttamente il sistema esattamente come prima per ispezione, considerando la matrice delle conduttanze di nodo. Nel caso dell'esempio in figura si ha

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_4 \\ -i_5 \\ i_5 + J \end{bmatrix}$$

Aggiungendo a questo punto le b equazioni che specificano le tensioni impresse dai generatori di tensione

$$\begin{cases} G_1 u_1 & -G_1 u_2 & & +i_4 & = & 0 \\ -G_1 u_1 & +(G_1 + G_2)u_2 & & +i_5 & = & 0 \\ & & +G_3 u_4 & -i_5 & = & J \\ u_1 & & & & = & E \\ & u_2 & -u_4 & & = & E \end{cases}$$

Nel sistema completo la matrice è quindi di ordine $n - 1 + b$; ciascuna delle b colonne aggiuntive ha un 1 ed un -1 nei posti corrispondenti ai nodi in cui un generatore di tensione incide (oppure soltanto un 1 o soltanto un -1 nel caso in cui uno dei 2 nodi in cui il generatore di tensione incide sia il nodo posto a potenziale nullo), e le b righe aggiuntive si costruiscono per simmetria

$$\begin{array}{l} \text{nodo 1} \rightarrow \\ \text{nodo 2} \rightarrow \\ \text{nodo 4} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J \\ E \\ E \end{bmatrix}$$

Esiste un ulteriore metodo per l'analisi mediante potenziali nodali nel caso in cui siano presenti anche dei generatori di tensione. Con tale metodo si riduce ulteriormente il numero di equazioni necessarie, che diventa $n - 1 - b$, con la conseguenza che le correnti nei generatori di tensione non vengono direttamente determinate. Invece di scrivere le LKC ai nodi in termini dei potenziali nodali, andranno scritte le LKC a dei particolari macronodi. Ciascuno di tali macronodi sarà tale da comprendere i due soli nodi ai quali è connesso il generico generatore di tensione. Eventuali nodi a cui non fosse connesso alcun generatore di tensione andrà invece trattato come fatto precedentemente. Le ulteriori b equazioni che specificano i valori dei generatori di tensione andranno ovviamente comunque considerate, nel senso che le si potrà convenientemente e banalmente sostituire nelle LKC stesse. Con riferimento allo stesso esempio di cui sopra risulta $n - 1 - b = 1$, quindi avremo una sola equazione, quella al macronodo comprendente i nodi 2 e 4

$$\frac{u_2 - u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_4}{R_3} = J$$

che, sostituendo le informazioni relative ai generatori di tensione $u_1 = E$ e $u_2 - u_4 = E$, diventa

$$\frac{u_2 - E}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 - E}{R_3} = J$$

che risolta fornisce

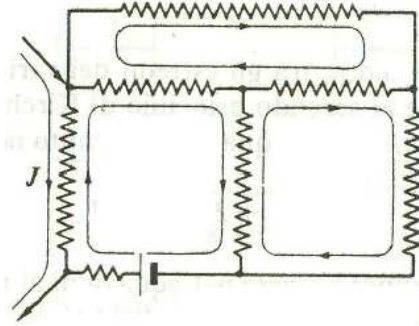
$$u_2 = \frac{J + E(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3})}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

4.0.7 pag 143 Trattamento dei generatori di corrente nel metodo delle correnti di maglia

Come visto, per reti lineari resistive alimentate da soli generatori di tensione, il metodo delle correnti di maglia permette di ottenere la soluzione mediante un sistema di $l - (n - 1)$ equazioni del tipo $\sum_p R_p \sum_m \pm k_{pm} = \sum_q \mp e_q$, ove le incognite

sono le correnti di maglia $k_1, \dots, k_{l-(n-1)}$.

Nel caso in cui siano presenti anche dei generatori di corrente, diciamo in numero pari a b , si può assegnare a ciascuna delle relative correnti impresse j_1, \dots, j_b un percorso arbitrario nella rete purché appoggiato ai nodi di ingresso e di uscita (come mostrato ad esempio in figura); esse andranno considerate come ulteriori correnti circolanti nella rete, di valore noto. Ne consegue che la corrente totale in un lato si esprime come somma algebrica di tutte le correnti, di maglia ($\sum k$) e impresse ($\sum j$), che interessano quel lato.



Le equazioni alle maglie saranno del tipo indicato di seguito, e saranno in numero pari a $l - (n - 1) - b$, perchè non vanno considerate quelle maglie, in numero pari a b , che si chiudono sui generatori di corrente

$$\sum_p R_p \left(\sum_m \pm k_{p_m} + \sum_t \pm j_{p_t} \right) = \sum_q \mp e_q \quad (4.3)$$

Una volta risolto il sistema precedente e ottenute le incognite $k_1, \dots, k_{l-(n-1)-b}$, la corrente nel generico resistore R_p sarà data da

$$i_p = \sum_m \pm k_{p_m} + \sum_t \pm j_{p_t} \quad (4.4)$$

Esempio: Soluzione della rete di figura 3.28 del libro assegnando alla corrente impressa J il percorso nella R_3

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = E \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_1 i_1 + R_2 i_2 = E \\ R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_1 k_3 + R_2 (k_3 - k_2) = E \\ R_2 (k_3 - k_2) - R_3 (k_2 + J) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -R_2 k_2 + (R_1 + R_2) k_3 = E \\ -(R_2 + R_3) k_2 + R_2 k_3 = R_3 J \end{cases}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{cases} -k_2 + 2k_3 = 10 \\ -3k_2 + k_3 = 2 \end{cases}$$

da cui

$$k_3 = \frac{28}{5} \quad k_2 = \frac{6}{5} \quad i_1 = \frac{28}{5} \quad i_2 = \frac{28}{5} - \frac{6}{5} = \frac{22}{5} \quad i_3 = \frac{6}{5} + 1 = \frac{11}{5}$$

Esempio: Soluzione della rete di figura 3.28 del libro assegnando alla corrente impressa J il percorso nella R_2

$$\begin{cases} R_1 k_3 + R_2 (k_3 - k_2 + J) = E \\ R_2 (k_3 - k_2 + J) - R_3 k_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -R_2 k_2 + (R_1 + R_2) k_3 = E - R_2 J \\ -(R_2 + R_3) k_2 + R_2 k_3 = -R_2 J \end{cases}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{cases} -k_2 + 2k_3 = 10 - 1 \\ -3k_2 + k_3 = -1 \end{cases}$$

da cui

$$k_3 = \frac{28}{5} \quad k_2 = \frac{11}{5} \quad i_1 = \frac{28}{5} \quad i_2 = \frac{28}{5} - \frac{11}{5} + 1 = \frac{22}{5} \quad i_3 = \frac{11}{5}$$

4.0.8 pag 221 Il campo complesso

Il *campo complesso* si costruisce munendo di opportuna struttura algebrica l'insieme \mathbb{R}^2 delle coppie ordinate di numeri reali, ponendo

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (4.5)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad (4.6)$$

L'insieme \mathbb{R}^2 con tali operazioni si chiama *campo complesso* e si indica con \mathbb{C} . E' facile verificare che \mathbb{C} è un *campo*, cioè che sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. L'operazione di addizione gode delle proprietà

- È associativa, cioè risulta $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}$
- È commutativa, cioè risulta $u + v = v + u \quad \forall u, v \in \mathbb{C}$
- È dotata di *elemento neutro*, cioè esiste un (unico) numero complesso, lo zero (complesso) $(0, 0)$, tale da risultare $u + (0, 0) = u \quad \forall u \in \mathbb{C}$
- Rispetto all'addizione ogni numero complesso è dotato di simmetrico (opposto) cioè, per ogni $u = (x, y) \in \mathbb{C}$ esiste un (unico) numero complesso, il numero $v = -u = -(x, y) = (-x, -y)$, tale che $u + (-u) = (0, 0)$

2. L'operazione di moltiplicazione gode delle proprietà

- È associativa, cioè risulta $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}$
- È commutativa, cioè risulta $u \cdot v = v \cdot u \quad \forall u, v \in \mathbb{C}$
- È dotata di *elemento neutro*, cioè esiste un (unico) numero complesso, l'unità (complessa) $(1, 0)$, tale da risultare $u \cdot (1, 0) = u \quad \forall u \in \mathbb{C}$
- Rispetto alla moltiplicazione ogni numero complesso diverso da zero è dotato di simmetrico (reciproco) cioè, per ogni $u \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$ esiste un (unico) numero complesso, il numero u' , tale che $u \cdot u' = (1, 0)$.

L'uguaglianza precedente, posto $u = (x, y)$ e $u' = (x', y')$, equivale al sistema delle due uguaglianze tra numeri reali $xx' - yy' = 1$, $yx' + xy' = 0$ che, nell'ipotesi $(x, y) \neq (0, 0)$ ammette l'unica soluzione $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$. Il numero u' , reciproco di u , si indica con u^{-1} , sicchè si ha

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (4.7)$$

Lo zero è l'unico elemento sprovvisto di reciproco

3. Vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, cioè risulta $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}$

Dalle uguaglianze $u = u \cdot (1, 0) = u \cdot [(1, 0) + (0, 0)] = u + u \cdot (0, 0)$ e dall'unicità dello zero segue $u \cdot (0, 0) = (0, 0) \quad \forall u \in \mathbb{C}$. Da cui si ha che $u \cdot v = (0, 0)$ e $u \neq (0, 0) \Rightarrow u^{-1} \cdot u \cdot v = u^{-1} \cdot (0, 0) = (0, 0) \Rightarrow (1, 0) \cdot v = (0, 0) \Rightarrow v = (0, 0)$. Cioè vale la legge di annullamento del prodotto

$$u \cdot v = (0, 0) \text{ e } u \neq (0, 0) \Rightarrow v = (0, 0)$$

cioè il prodotto di due numeri complessi si annulla se e solo se almeno uno dei due fattori è nullo.

Nel campo complesso si definiscono, come nel campo reale, le operazioni di *sottrazione* e *divisione*: la *differenza* di due numeri complessi è la somma del primo e dell'opposto del secondo; il *quoziente* è il prodotto del primo e del reciproco del secondo, sicchè l'operazione di divisione è definita solo quando il divisore è diverso dallo zero.

Dalla definizione di prodotto si trae la definizione di potenza ad esponente intero positivo

$$(x, y)^n = (x, y) \cdot (x, y) \cdots (x, y) \quad (n \text{ fattori}) \quad (4.8)$$

La potenza di esponente intero, nullo o negativo, si definisce quindi, per $(x, y) \neq (0, 0)$, ponendo

$$(x, y)^0 = (1, 0) \quad , \quad (x, y)^{-n} = [(x, y)^{-1}]^n \quad (4.9)$$

È facile constatare che tali potenze godono delle stesse proprietà delle potenze ad esponente intero nel campo reale.

Forma algebrica dei numeri complessi

Integrare con Fiorenza

Osserviamo che $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$. Siano allora \mathbb{R}' l'insieme dei numeri complessi di tipo $(x, 0)$, e \mathbb{I} l'insieme dei numeri complessi di tipo $(0, y)$. Si ha

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \quad (4.10)$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \quad (4.11)$$

per cui si può identificare ogni elemento di tipo $(x, 0)$ di \mathbb{R}' con la componente $x \in \mathbb{R}$. Allora si conviene porre $(x, 0) = x$. Quindi i numeri complessi di tipo $(x, 0)$ si chiamano ancora numeri reali. Invece l'insieme \mathbb{I} non è un campo, infatti

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (-y_1 y_2, 0) \notin \mathbb{I}$$

Gli elementi di \mathbb{I} si dicono numeri *numeri immaginari* (o *numeri immaginari puri*) e $(0, 1)$ si chiama *unità immaginaria*, e si pone

$$(0, 1) = i$$

così

$$(0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0) = iy$$

Si trae la rappresentazione

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy \quad (4.12)$$

che si chiama *forma algebrica* del numero complesso (x, y) . Risulta poi

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Integrare con Fiorenza

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Integrare con Fiorenza

Forma trigonometrica dei numeri complessi

Integrare con Fiorenza

Radici n -me dei numeri complessi

Integrare con Fiorenza

excursus sui numeri complessi

- forma cartesiana, piano di Gauss
- forma polare (definizione di ampiezza e fase)
 $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = [\rho, \theta]$
- forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$
- $z = e^{i\theta}$ esponenziale di un numero immaginario puro: è un punto situato sul cerchio unitario del piano di Gauss
- legame tra le diverse forme
- somma e prodotto di numeri complessi nelle diverse forme

In particolare evidenziare che la forma cartesiana è conveniente per le somme e quella esponenziale per i prodotti (citare legame con le formule di De- Moivre)

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$[\rho_1, \theta_1] \cdot [\rho_2, \theta_2] = [\rho_1 \rho_2, \theta_1 + \theta_2]$$

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$[\rho, \theta]^n = [\rho^n, n\theta]$$

$$[\rho, \theta]^{-1} = [\rho^{-1}, -\theta]$$

$$\frac{[\rho_1, \theta_1]}{[\rho_2, \theta_2]} = [\rho_1, \theta_1] \cdot [\rho_2, \theta_2]^{-1} = [\rho_1, \theta_1] \cdot [\rho_2^{-1}, -\theta_2] = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2 \right]$$

- Complesso coniugato, e modulo quadro

4.0.9 Estensioni dei numeri complessi: i Quaternioni di Hamilton

I numeri complessi trovano numerose importanti applicazioni. Oltre a quelle che discuteremo in queste lezioni ve ne sono ovviamente altre. Ad esempio, nell'ambito della teoria delle funzioni complesse di variabile complessa è possibile individuare metodi per la soluzione elegante ed efficace di intere classi di equazioni differenziali a derivate parziali *in due variabili*. È quindi ad esempio possibile risolvere in tal modo problemi di campo elettrostatico in un certo dominio *bidimensionale*.

Vale la pena chiedersi se si può generalizzare la teoria in modo da risolvere problemi in più dimensioni rispetto al caso bidimensionale del piano di Gauss, ad esempio problemi definiti nello spazio-tempo, ove le variabili sono x, y, z, t .

L'algebra dei *quaternioni*, introdotta da Hamilton con successo dopo numerosi anni di tentativi, costituisce la prima importante generalizzazione dell'algebra dei numeri complessi. In particolare i quaternioni sono un esempio della più generale classe dei *numeri ipercomplessi*.

Il problema di Hamilton era che, mentre gli era chiaro come effettuare la somma e la moltiplicazione tra triple di numeri reali, non riusciva invece a risolvere il problema della divisione, ovvero non sapeva come valutare il quoziente di due punti dello spazio.

Dopo un lungo periodo di non ampia popolarità (periodo caratterizzato invece da una grande popolarità della *analisi vettoriale*), i quaternioni sono stati recentemente riscoperti, primariamente (ma non solo) grazie alla loro maggiore efficacia nel descrivere le *rotazioni spaziali*. Le rappresentazioni di rotazioni mediante quaternioni sono più compatte e veloci da calcolare rispetto alle rappresentazioni matriciali e, contrariamente al caso di descrizione mediante gli *angoli di Eulero*, non presentano ad esempio l'importante problema del cosiddetto *gimbal lock* (*letteralmente, blocco della sospensione cardanica*), ovvero la perdita di uno dei 3 gradi di libertà che avviene quando 2 dei 3 assi che definiscono gli angoli convergono verso la medesima direzione, cosa che in termini matematici corrisponde alla indeterminatezza di uno degli angoli stessi e quindi ad una singolarità nel codice di calcolo. Nessuno vorrebbe probabilmente trovarsi in un aereo in volo sopra il polo nord (o sud), che avesse il codice di navigazione basato sulle classiche rotazioni matriciali. Si noti che non si tratta di una speculazione, un problema di questo genere si verificò durante la *missione lunare Apollo 11*, e gli astronauti furono costretti ad escludere il pilota automatico.

Per esemplificare il problema della rappresentazione mediante angoli, si consideri in particolare il moto di un punto materiale su una superficie sferica di assegnato raggio r_0 . Ciò può agevolmente essere descritto con due sole variabili, ad esempio in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , con $r = r_0$ costante. Supponiamo che il punto si stia muovendo sul meridiano descritto dal semipiano $x > 0, y = 0$ e si diriga verso nord. Quando si trova molto vicino al polo nord risulta $\theta \rightarrow 0^+$, $\phi = 0$, mentre quando si trova esattamente al polo nord $\theta = 0$ e ϕ è indeterminato, dopodiché proseguendo oltre si ha di nuovo $\theta > 0$, ma $\phi = \pi$. Come si vede la variabile ϕ subisce una discontinuità. Nel caso in cui il punto non transiti esattamente per il polo nord, ma ci passi *molto vicino*, non vi saranno discontinuità ma, in corrispondenza del passaggio vicino al polo, a piccoli spostamenti del punto materiale corrisponderanno grandi variazioni della variabile ϕ , la quale cambierà bruscamente il suo valore da un certo $\phi \cong \phi_0$ ad un successivo $\phi \cong \phi_0 + \pi$, con conseguenti problemi numerici per il codice di calcolo che implementi tale rappresentazione.

I quaternioni sono utilizzati in computer grafica, visione computerizzata, teoria dei controlli, robotica, signal processing, controllo di assetto, fisica, bioinformatica, dinamica molecolare, simulazioni computerizzate, meccanica orbitale, teoria dei numeri. I sistemi di controllo di assetto dei velivoli sono ovviamente comunemente implementati in termini di quaternioni.

... work in progress

$$w = a + bi + cj + dk \quad a, b, c, d \text{ numeri reali, } i, j, k \text{ simboli letterali} \quad (4.13)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (4.14)$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \quad (4.15)$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \quad \text{prodotto non commutativo} \quad (4.16)$$

4.0.10 pag 226-7 metodo simbolico

- Proprietà di unicità $a(t) = b(t) \quad \forall t \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$

$$\begin{aligned} c(t) &= a(t) - b(t) = \Re(\sqrt{2}\bar{A}e^{i\omega t}) - \Re(\sqrt{2}\bar{B}e^{i\omega t}) = \Re[\sqrt{2}(\bar{A} - \bar{B})e^{i\omega t}] \\ &= \Re(\sqrt{2}\bar{C}e^{i\omega t}) = \Re(\sqrt{2}C e^{i\gamma} e^{i\omega t}) = C \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

$$a(t) = b(t) \quad \forall t \Leftrightarrow c(t) = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow C = 0 \Leftrightarrow \bar{C} = 0 \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$$

- Proprietà di linearità $c(t) = ha(t) + kb(t) \Leftrightarrow \bar{C} = h\bar{A} + k\bar{B}$

$$c(t) = ha(t) + kb(t) = h\Re(\sqrt{2}\bar{A}e^{i\omega t}) + k\Re(\sqrt{2}\bar{B}e^{i\omega t}) = \Re[\sqrt{2}(h\bar{A} + k\bar{B})e^{i\omega t}] = \Re(\sqrt{2}\bar{C}e^{i\omega t})$$

- Proprietà di derivazione $b(t) = \frac{da(t)}{dt} \Leftrightarrow \bar{B} = i\omega\bar{A}$

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{d}{dt}[\sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha)] = -\sqrt{2}A\omega \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\omega A \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \\ &= \Re(\sqrt{2}\omega A e^{i(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})}) = \Re(\sqrt{2}\omega A e^{i\alpha} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t}) = \Re(\sqrt{2}i\omega \bar{A} e^{i\omega t}) = \Re(\sqrt{2}\bar{B} e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

Validità generale del metodo simbolico

Il metodo simbolico è basato sulla corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle grandezze sinusoidali di assegnata pulsazione e il campo complesso, e sul fatto che tale corrispondenza gode delle proprietà di unicità, linearità e derivazione.

È possibile estendere il concetto di fasore in modo da utilizzare il metodo simbolico per reti lineari generali, in cui le grandezze sono funzioni *comunque variabili nel tempo*. A tale scopo si definisce una corrispondenza tra l'insieme (detto *dominio del tempo*) delle funzioni del tempo comunque variabili e l'insieme (il *dominio della frequenza*) delle funzioni complesse della variabile reale ω

$$a(t) \Rightarrow \bar{A}(\omega)$$

ove $\bar{A}(\omega)$ prende il nome di *trasformata di Fourier* della funzione $a(t)$.

Ovviamente occorre specificare come si calcola la trasformata di Fourier e anche la operazione di *antitrasformazione* che consente di tornare nel dominio del tempo. Di fatto per molti scopi, dal punto di vista operativo è spesso sufficiente consultare le apposite tabelle che riportano le espressioni delle trasformate e antitrasformate delle funzioni di interesse applicativo.

La cosa importante che rende il metodo perfettamente analogo al metodo dei fasori è che la suddetta corrispondenza gode anch'essa delle proprietà di

- unicità $a(t) = b(t) \quad \forall t \Leftrightarrow \bar{A}(\omega) = \bar{B}(\omega)$
- linearità $c(t) = ha(t) + kb(t) \Leftrightarrow \bar{C}(\omega) = h\bar{A}(\omega) + k\bar{B}(\omega)$
- derivazione $b(t) = \frac{da(t)}{dt} \Leftrightarrow \bar{B}(\omega) = i\omega\bar{A}(\omega)$

Da ciò segue ad esempio che, esattamente come con i fasori, la relazione caratteristica di un induttore è $\bar{V}(\omega) = i\omega L\bar{I}(\omega)$, ovvero $\bar{V}(\omega) = \bar{Z}_L(\omega)\bar{I}(\omega)$, con $\bar{Z}_L(\omega) = i\omega L$. Analogamente per il condensatore, e via di seguito. Poiché le elaborazioni algebriche non cambiano, tutte le dimostrazioni fatte con il metodo simbolico valgono in generale, ovvero i metodi di soluzione dei circuiti sono quelli già visti. La differenza consiste nel fatto che, una volta risolta la rete nel dominio della frequenza, bisogna utilizzare le tabelle delle antitrasformate per ottenere l'espressione delle grandezze di interesse nel dominio del tempo.

Una conseguenza della validità generale del metodo simbolico è che, quando si ha l'esigenza di semplificare una rete lineare, si trae ovviamente vantaggio se lo si fa nell'ambito del metodo simbolico, visto che in tal caso le relazioni sono tutte algebriche (e non differenziali). Dato che il metodo è generale, i risultati ottenuti varranno sempre, e non soltanto in regime sinusoidale.

Cenni alle trasformate di Fourier e alle funzioni generalizzate . . . work in progress

4.0.11 pag 259 risonanza parallelo

Dualità rispetto alla risonanza serie: generatore di corrente (al posto del generatore di tensione) che alimenta il parallelo (anziché la serie) di R , L e C . Calcolo di $\bar{V}(\omega)$

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{2}V \cos(\omega t + \alpha) & j(t) &= \sqrt{2}J \cos(\omega t + \beta) \\ \frac{1}{\bar{Z}} &= \frac{1}{Z e^{i\phi}} = \dot{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = G + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = Y e^{-i\phi} \\ Y(\omega) &= \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} & -\phi(\omega) &= \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \\ \bar{V} &= V e^{i\alpha} = \dot{Z} \bar{J} = \frac{\bar{J}}{\dot{Y}} = \frac{\bar{J}}{G + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{J e^{i\beta}}{Y e^{-i\phi}} = \frac{J}{Y} e^{i(\beta + \phi)} \end{aligned}$$

$$V(\omega) = \frac{J}{\sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}} \quad \alpha(\omega) = \beta - \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \quad (4.17)$$

$$\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \begin{cases} V(\omega_r) = \max_{\omega} V(\omega) = \frac{J}{G} \\ \alpha(\omega_r) = \beta \end{cases} \quad v(t) \text{ è in fase con } j(t) \quad (4.18)$$

4.0.12 pag 283 Trasferimenti energetici, valore efficace, energia immagazzinata in L e C

Al fine di evitare la possibile confusione tra il concetto di *energia* e quello di *trasferimento energetico*, è opportuno ricordare brevemente alcuni concetti generali.

La descrizione macroscopica di un sistema è fatta in termini di *proprietà* fisiche che possono essere in linea di principio misurate con l'aiuto di appropriati strumenti di laboratorio. Le proprietà sono delle *funzioni puntuali*, nel senso che il loro valore è solo funzione dello stato e che quindi la loro variazione conseguente ad un cambiamento di stato è univocamente determinata dagli stati iniziali e finali. Sono sinonimi di proprietà: *funzione (o parametro, o grandezza, o variabile) di stato*, e *coordinata* (termodinamica).

L'*energia* E di un sistema è una *proprietà estensiva* del sistema stesso. Il *contenuto di energia* può essere variato secondo due differenti modalità: in un caso si parla di *lavoro* L , nell'altro di *calore* Q . L e Q sono pertanto grandezze connesse al *trasferimento di energia (rappresentano flussi di energia)* e non sono delle proprietà. Secondo la convenzione usualmente adottata in termodinamica, il lavoro è ritenuto positivo se attraversa il sistema verso l'ambiente (lavoro erogato dal sistema), mentre il calore è ritenuto positivo se è in ingresso per il sistema (calore assorbito). Con questa convenzione la prima legge della termodinamica si scrive

$$\Delta E = Q - L$$

Nello studio della termodinamica classica è consueta la divisione dell'energia di un sistema in energia cinetica E_c ed energia potenziale E_p , che sono aliquote di E direttamente misurabili dall'esterno del sistema in relazione allo stato di moto ed alla posizione nel campo gravitazionale del sistema, nonché in energia interna U , che rappresenta la somma di tutti i contributi microscopici di energia associati alle particelle elementari costituenti il sistema, e che quindi è detta interna poiché non è connessa ad un riferimento esterno, come nel caso di E_c ed E_p . Si ha pertanto

$$\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U = Q - L$$

e, nei casi in cui non vi sono variazioni di energia cinetica e potenziale

$$\Delta U = Q - L$$

Ribadiamo che il lavoro, pur essendo dimensionalmente omogeneo ad un'energia, *non è una proprietà* del sistema considerato. Il lavoro può essere di vari tipi, ad esempio *lavoro meccanico* o *lavoro elettrico*.¹

Nello studio dei sistemi elettrici considereremo senza particolare preferenza il lavoro elettrico *erogato* oppure quello *assorbito*.²

Si consideri un bipolo di una rete elettrica e si scelgano su di esso versi di riferimento per la tensione $v(t)$ e la corrente $i(t)$ corrispondenti alla convenzione dell'utilizzatore. Come sarà provato in § 4.0.14 a partire dalle equazioni generali dell'elettromagnetismo, risulta che, nell'ipotesi in cui la rete operi in *regime lentamente variabile*, il *lavoro elettrico elementare* $d\ell$ *assorbito* dal bipolo nell'intervallo elementare $(t, t + dt)$ vale

$$d\ell = v(t)i(t)dt \quad (4.19)$$

Se la convenzione adottata fosse quella del generatore la (4.19) esprimerebbe invece il lavoro elettrico elementare *erogato* dal bipolo. Si parlerà in generale di *lavoro scambiato* intendendo con ciò lavoro assorbito o erogato a seconda del caso specifico. Si definisce *potenza istantanea* il lavoro elettrico scambiato per unità di tempo (*riferito all'istante t*)

$$p(t) \triangleq \frac{d\ell}{dt} = v(t)i(t)$$

¹Una definizione abbastanza generale di lavoro è la seguente: *Il trasferimento di energia come lavoro tra due sistemi si ha quando l'interazione è tale che l'effetto conseguente in ciascuno avrebbe potuto essere ottenuto, per entrambi, con il solo cambiamento di quota di un peso in un campo gravitazionale.*

²Spesso si parla impropriamente di "lavoro generato" o di "energia generata", intendendo con ciò lavoro erogato. La dicitura è impropria in quanto la legge di conservazione afferma proprio che l'energia non può essere generata né distrutta.

Il lavoro elettrico $L(t_1, t_2)$ scambiato dal bipolo in un intervallo *finito* (t_1, t_2) si ottiene sommando i contributi elementari

$$L(t_1, t_2) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} dl = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt \quad (4.20)$$

e il lavoro elettrico scambiato *per unità di tempo* risulta pari al valore medio della potenza istantanea (*potenza media*) $P(t_1, t_2)$

$$\frac{L(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt}{\Delta t} \triangleq P(t_1, t_2) \quad (4.21)$$

Ricordiamo che si definisce *valore efficace, relativamente all'intervallo* (t_1, t_2) , di una grandezza $a(t)$ *comunque variabile nel tempo*, la quantità

$$A_{\text{eff}}(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} a^2(t)dt}{\Delta t}} \quad \text{per grandezze comunque variabili nel tempo} \quad (4.22)$$

Se come bipolo si considera in particolare un *resistore lineare e tempo invariante*, si ottiene che la potenza media *assorbita* $P^{\text{as}}(t_1, t_2)$ è pari alla resistenza moltiplicata per il quadrato del valore efficace della corrente

$$P^{\text{as}}(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt}{\Delta t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)dt}{\Delta t} = RI_{\text{eff}}^2(t_1, t_2) \quad (4.23)$$

Nel caso in cui la corrente è costante, $i(t) = I$, risulta

$$P^{\text{as}}(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} RI^2 dt}{\Delta t} = \frac{RI^2(t_2 - t_1)}{\Delta t} = RI^2 = P^{\text{as}} \quad (4.24)$$

ovvero, come è ovvio, il valore efficace coincide con il valore costante I e la potenza media P^{as} coincide con la potenza istantanea e non dipende dagli istanti t_1 e t_2 .

Nel caso di grandezze periodiche di periodo T , il valore efficace ovviamente ha particolare significato se definito con riferimento ad un intervallo di durata pari al periodo

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_1+T} a^2(t)dt}{T}} \quad \text{per grandezze periodiche di periodo } T \quad (4.25)$$

In particolare, per grandezze periodiche di tipo *sinusoidale* con periodo T , del tipo $a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$, risulta

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_1+T} a^2(t)dt}{T}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \quad \text{per grandezze sinusoidali di periodo } T \quad (4.26)$$

Stante la definizione (4.21) di potenza media, in termini di trasferimenti energetici si ha

$$L^{\text{as}}(t_1, t_1 + \Delta t) = RI_{\text{eff}}^2(t_1, t_1 + \Delta t)\Delta t \quad \text{per corrente comunque variabile} \quad (4.27)$$

$$L^{\text{as}}(t_1, t_1 + T) = L^{\text{as}}(T) = RI_{\text{eff}}^2 T \quad \text{per corrente periodica (in particolare sinusoidale)} \quad (4.28)$$

$$L^{\text{as}}(t_1, t_1 + \Delta t) = L^{\text{as}}(\Delta t) = RI^2 \Delta t \quad \text{per corrente costante} \quad (4.29)$$

Si verifica facilmente (libro p240) che nel caso sinusoidale (e in generale anche nel caso periodico) risulta inoltre

$$\Delta t \gg T \Rightarrow L^{\text{as}}(t_1, t_1 + \Delta t) \cong RI_{\text{eff}}^2 \Delta t \quad \text{per corrente periodica (in particolare sinusoidale)} \quad (4.30)$$

Abbiamo quindi la seguente

interpretazione del valore efficace: *il valore efficace di una corrente comunque variabile (in particolare periodica o sinusoidale) è uguale al valore di una corrente continua che attraversando una stessa resistenza produce un'eguale quantità di calore nell'intervallo di tempo considerato.*

L'unità di misura del lavoro elettrico è il kilowattora (kWh), e risulta $1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}$. Per avere un termine di paragone si consideri il lavoro meccanico richiesto per tipici spostamenti di masse nel campo di gravità terrestre, $E = mgh$. In particolare 200 persone ($m = 200 \cdot 70 \text{ kg} = 14000 \text{ kg}$) che salgono 9 piani di scale ($h = 9 \cdot 3 \text{ m} = 27 \text{ m}$) svolgono complessivamente un lavoro $L = 3.7 \text{ MJ}$. Come si vede da questo confronto, a dispetto del suo 'basso costo relativo'

(tipicamente intorno a 0.15 € per una comune utenza domestica), il kWh corrisponde ad una quantità di energia consistente.

Si consideri ora un condensatore tempo-invariante e si faccia sì di esso la convenzione dell'utilizzatore. La potenza assorbita è

$$p(t) = v(t)i(t) = vC \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2(t) \right)$$

e dunque una possibile funzione primitiva della $p(t)$ è la seguente

$$w_e(t) \triangleq \frac{1}{2} C v^2(t) \quad (4.31)$$

che prende il nome di energia (elettrica) immagazzinata dal condensatore. La giustificazione di tale denominazione deriva dal fatto che il lavoro elettrico assorbito dal condensatore tra due istanti t_1 e t_2 è pari alla differenza tra i valori assunti dalla funzione w_e

$$L^{\text{as}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dw_e = w_e(t_2) - w_e(t_1) \quad (4.32)$$

ovvero ad un lavoro netto positivo effettuato sul condensatore corrisponde un eguale incremento nella funzione w_e . In particolare per un istante iniziale t_0 e il generico istante t

$$L^{\text{as}}(t_0, t) = w_e(t) - w_e(t_0) \quad (4.33)$$

Se come istante iniziale si assume $t_0 = -\infty$, e si considera che sul condensatore all'inizio della sua vita non era ancora stato fatto alcun lavoro elettrico, si può assumere energia elettrica immagazzinata iniziale $w_e(-\infty) = 0$ e risulta

$$L^{\text{as}}(-\infty, t) = w_e(t) \quad (4.34)$$

cioè il lavoro elettrico netto complessivo che è stato fatto sul condensatore ce lo si ritrova in energia immagazzinata nel condensatore stesso. L'assunzione $w_e(-\infty) = 0$ correttamente corrisponde a $v(-\infty) = 0$, ovvero a carica elettrica iniziale sulle armature del condensatore $Q(-\infty) = C v(-\infty) = 0$.

Conservatività del condensatore

Il fatto che il lavoro elettrico assorbito dal condensatore ce lo si ritrova in energia immagazzinata nel condensatore stesso, eq. (4.32) e (4.34), si esprime dicendo che il condensatore è un *bipolo conservativo*.

Passività del condensatore

Si consideri ora un condensatore tempo-invariante fisicamente realizzabile (cioè $C > 0$). Il lavoro elettrico da esso erogato in un intervallo (t_1, t_2) è $L^{\text{er}}(t_1, t_2) = w_e(t_1) - w_e(t_2)$. Data l'energia immagazzinata all'istante iniziale, $w_e(t_1)$, si ha che, essendo l'energia w_e definita positiva (perchè $C > 0$), il lavoro massimo erogato corrisponde al caso $w_e(t_2) = 0$ e vale $L_{\text{max}}^{\text{er}}(t_1, t_2) = w_e(t_1)$, ovvero il condensatore non può erogare lavoro elettrico in quantità maggiore dell'energia immagazzinata all'istante iniziale, o in altre parole non può erogarne di più di quanto ne abbia assorbito in precedenza. Cioè il condensatore è un *bipolo dinamico passivo*.

In maniera perfettamente duale si ripetono le medesime considerazioni per un induttore tempo-invariante, in particolare l'energia (magnetica) immagazzinata è

$$w_m(t) \triangleq \frac{1}{2} L i^2(t) \quad (4.35)$$

4.0.13 Operatori differenziali fondamentali ed equazioni di Maxwell

Molto spesso i libri di testo definiscono gli operatori differenziali fondamentali a nostro avviso in maniera inopportuna, cioè direttamente in termini delle loro espressioni in coordinate cartesiane. Ciò comporta una notevole difficoltà di comprensione del loro significato da parte degli allievi, che resterà nella maggioranza dei casi misterioso. Le stesse equazioni di Maxwell (e anche le equazioni da esse derivate) sono molto più facili da capire e padroneggiare una volta compresi i concetti che sono alla base degli operatori. Ricordiamone quindi il significato.

Gradiente

L'operatore *gradiente*, denotato alternativamente con i simboli grad oppure ∇ , opera su un campo scalare $f(\mathbf{r})$ e produce un risultato vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$, che indica il tasso di variazione spaziale della funzione f nel punto \mathbf{r} . La direzione di \mathbf{v} rappresenta la direzione di massimo incremento della f spostandosi dal punto \mathbf{r} .

Divergenza

L'operatore *divergenza*, denotato alternativamente con i simboli div oppure $\nabla \cdot$, opera su un campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ e produce un risultato scalare $f(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$, che indica la tendenza delle linee del campo \mathbf{v} a *fluire via* dal punto \mathbf{r} . *James Clerk Maxwell* chiamava questo operatore *convergenza*, associandolo alla circostanza che le linee del campo elettrico convergono sulle cariche *negative*. Pochi anni dopo *Heaviside* suggerì l'uso del termine *divergenza*, per la stessa quantità ma con il segno opposto, in modo che una divergenza positiva è associata ad un campo elettrico le cui linee *fluiscono via* dalle cariche *positive*. L'equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$ esprime chiaramente che la divergenza del campo elettrico è positiva o negativa nei punti ove la densità di carica elettrica è rispettivamente positiva o negativa. Il campo di induzione magnetica invece non diverge né converge in alcun punto dello spazio, come ci dice l'altra equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (qui si è sottintesa la dipendenza dalla variabile spaziale \mathbf{r}).

La definizione formale di divergenza è la seguente

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} \triangleq \lim_{\Delta V_S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_S} \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

dove ΔV_S è il volume infinitesimo delimitato da una superficie chiusa S , ed $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale uscente dall'elemento dS . A partire dalla definizione si può derivare l'espressione che la divergenza assume nei vari sistemi di coordinate, le più comuni essendo come noto quelle cartesiane, cilindriche, sferiche. Vi sono poi numerosi altri sistemi di coordinate, meno noti ma comodi da utilizzare per specifiche applicazioni (paraboloidali, cilindriche paraboliche, cilindriche ellittiche, sferoidali, bipolari, toroidali, coniche, confocali ellissoidali, etc). Nel caso delle coordinate cartesiane, considerando un parallelepipedo elementare avente due vertici diagonalmente opposti con coordinate (x, y, z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$, e lati di lunghezza dx , dy e dz , si ottiene ad esempio la nota espressione come segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta V_S} \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \frac{1}{dxdydz} [\mathbf{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{\mathbf{x}})dydz + \mathbf{v}(x + dx, y, z) \cdot \hat{\mathbf{x}}dydz \\ &\quad + \mathbf{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{\mathbf{y}})dxdz + \mathbf{v}(x, y + dy, z) \cdot \hat{\mathbf{y}}dxdz \\ &\quad + \mathbf{v}(x, y, z) \cdot (-\hat{\mathbf{z}})dxdy + \mathbf{v}(x + dx, y, z) \cdot \hat{\mathbf{z}}dxdy] \\ &= \frac{-v_x(x, y, z) + v_x(x + dx, y, z)}{dx} + \frac{-v_y(x, y, z) + v_y(x, y + dy, z)}{dy} + \frac{-v_z(x, y, z) + v_z(x, y, z + dz)}{dz} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Rotore

L'operatore *rotore*, denotato alternativamente con i simboli curl , rot oppure $\nabla \times$, opera su un campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ e produce un risultato vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})$, che indica la tendenza delle linee del campo \mathbf{v} a ruotare intorno al punto \mathbf{r} . La direzione di \mathbf{u} è l'asse attorno al quale la tendenza a ruotare è massima. L'equazione di Ampere $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r})$ (valida in condizioni stazionarie) ci dice che le linee del campo magnetico \mathbf{H} tendono a ruotare intorno alla direzione del vettore densità di corrente \mathbf{J} . Più in generale, secondo l'equazione di Ampere-Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{G}$ (dove $\mathbf{G} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ è la densità di corrente totale) in condizioni non stazionarie le linee del campo magnetico \mathbf{H} tendono a ruotare intorno alla direzione del vettore densità di corrente totale \mathbf{G} . Analogamente, l'equazione di Maxwell dell'*induzione elettromagnetica* $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ dice che, in presenza di un campo di induzione magnetica variabile nel tempo, le linee del campo elettrico tendono a ruotare intorno alla direzione della derivata temporale dell'induzione magnetica (in senso contrario per via del segno meno, coerentemente con la legge di Lenz). Con altre parole, possiamo dire che un campo magnetico *rotazionale* è prodotto da una corrente elettrica oppure da un campo elettrico variabile nel tempo (*induzione magnetoelettrica*), o da entrambi; analogamente un campo elettrico *rotazionale* è prodotto da un campo magnetico variabile nel tempo.

La definizione formale di rotore si effettua mediante la sua generica componente secondo una direzione $\hat{\mathbf{n}}$

$$(\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \triangleq \lim_{\Delta S_\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_\gamma} \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove ΔS_γ è una superficie infinitesima *aperta* orlata dalla linea γ , $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale a ΔS_γ e $\hat{\mathbf{t}}$ è il versore tangente a γ , coordinati al solito secondo la regola del cavatappi. È possibile dimostrare che la grandezza $\text{curl } \mathbf{v}$ così definita è effettivamente un vettore. Si comprende che quel particolare versore $\hat{\mathbf{n}}$ per il quale il prodotto scalare $(\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ è massimo definisce il verso del vettore $\text{curl } \mathbf{v}$. A partire dalla definizione si può derivare l'espressione che il rotore assume nei vari sistemi di coordinate.

Laplaciano scalare

L'operatore *laplaciano scalare*, denotato con i simboli ∇^2 , Δ e Δ_2 (e, più raramente, anche con Δ^2), opera su un campo scalare $f(\mathbf{r})$ e produce un risultato scalare $g(\mathbf{r}) = \nabla^2 f(\mathbf{r})$, e si ottiene come composizione degli operatori gradiente e divergenza

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) \triangleq \nabla \cdot (\nabla f(\mathbf{r})).$$

Per comprenderne il significato, ricordiamo innanzitutto che le funzioni che hanno laplaciano nullo si chiamano *funzioni armoniche* e godono di particolari proprietà. In particolare, se f è armonica in un certo dominio ed \mathbf{r} è un punto interno a tale dominio, allora il valore della funzione f nel punto \mathbf{r} eguaglia il valore medio assunto dalla f su una piccola superficie sferica S_a di raggio a circoscritta al punto \mathbf{r} stesso, $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} f(\mathbf{r}') dS'$. Dunque il valore $\nabla^2 f(\mathbf{r})$, quando è diverso da zero, indica il modo in cui il valore della funzione f nel punto \mathbf{r} eccede (nel senso Hamiltoniano) il valore medio assunto dalla f su una piccola superficie sferica circoscritta al punto \mathbf{r} . Sulla base di questa interpretazione, Maxwell chiamava il laplaciano scalare *concentrazione* della funzione f .

L'equazione dell'elettrostatica $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ ci rappresenta il fatto che la concentrazione del potenziale scalare ϕ nel punto generico \mathbf{r} è proporzionale alla densità (o concentrazione) della carica elettrica ρ in quel punto (essendo evidentemente il segno meno legato al fatto che il potenziale viene convenzionalmente definito come $\mathbf{E} = -\nabla\phi$).

Dalla definizione si ha

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \lim_{\Delta V_S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_S} \oint_S \nabla f \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \lim_{\Delta V_S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_S} \oint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

... work in progress

Laplaciano vettore

L'operatore *laplaciano vettore*, denotato ancora con il simbolo ∇^2 , opera su un campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ e produce un risultato vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{r})$. È definito come

$$\nabla^2 \mathbf{v} \triangleq \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

La ragione per la quale si adopera lo stesso simbolo del laplaciano scalare risiede nel fatto che, in coordinate cartesiane, le componenti del laplaciano vettore si ottengono come laplaciano scalare delle componenti cartesiane stesse

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}(\nabla^2 v)_x + \hat{\mathbf{y}}(\nabla^2 v)_y + \hat{\mathbf{z}}(\nabla^2 v)_z = \hat{\mathbf{x}}\nabla^2 v_x + \hat{\mathbf{y}}\nabla^2 v_y + \hat{\mathbf{z}}\nabla^2 v_z.$$

Per un campo vettoriale \mathbf{v} che abbia laplaciano nullo risulta ovviamente $\nabla^2 v_x = \nabla^2 v_y = \nabla^2 v_z = 0$, ovvero ciascuna delle sue componenti cartesiane è una funzione armonica, per le quali come ricordato vale il teorema della media. Di conseguenza risulta valido, per i campi vettoriali a laplaciano nullo nei punti \mathbf{r} interni di un certo dominio, un *teorema della media vettoriale*, ossia, adoperando la notazione già descritta, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} \mathbf{v}(\mathbf{r}') dS'$.

... work in progress

4.0.14 Espressione della potenza in regime lentamente variabile per bipoli ed N -poli

... work in progress

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} && \text{vettore di Poynting} && (4.36) \\ \nabla \cdot \mathbf{S} &= \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{B^2}{2\mu} + \frac{\epsilon E^2}{2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega \quad \text{teorema di Poynting} \quad (4.37)$$

$$p = \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS \cong \oint_{\Sigma} \varphi \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \varphi_a i_a + \varphi_b i_b \cong (\varphi_a - \varphi_b) i_a = v i \quad (4.38)$$

La generalizzazione al caso dell' N -polo è immediata:

$$p \cong \sum_{k=1}^N \varphi_k i_k = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k i_k + \varphi_N i_N = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k i_k - \varphi_N \sum_{k=1}^{N-1} i_k = \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi_k - \varphi_N) i_k \cong \sum_{k=1}^{N-1} v_{kN} i_k \quad (4.39)$$

... work in progress

4.0.15 pag 286 wattmetro ideale

inserire figura wattmetro ideale e sua inserzione

Il *wattmetro ideale* è un doppio bipolo che consente la misura di diverse grandezze. Mediante opportuna inserzione in un circuito, può ad esempio misurare la potenza media assorbita da un bipolo. Altro esempio di grandezza che può misurare, sempre previa opportuna inserzione, è la potenza *reattiva* assorbita da un carico trifase. È dotato di un quadrante di lettura che visualizza la misura effettuata. La sua prima coppia di morsetti (A e B) prende il nome di *porta voltmetrica* o linea voltmetrica ed è definita da una relazione caratteristica identica a quella del voltmetro ideale ($i_{AB}(t) = 0$, circuito aperto). La sua seconda coppia di morsetti prende invece il nome di *porta amperometrica* o linea amperometrica ed è definita da una relazione caratteristica identica a quella dell'amperometro ideale ($v_{CD}(t) = 0$, corto circuito). La misura effettuata, W , è *per definizione* il valore medio della grandezza $v_{AB}(t)i_{CD}(t)$. In particolare in regime sinusoidale si ha quindi

$$v_1(t) = v_{AB}(t) = \sqrt{2}V_{AB} \cos(\omega t + \alpha_{AB}) \quad i_2(t) = i_{CD}(t) = \sqrt{2}I_{CD} \cos(\omega t + \beta_{CD})$$

$$W \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_{AB}(t)i_{CD}(t)dt = V_{AB}I_{CD} \cos(\alpha_{AB} - \beta_{CD}) = V_{AB}I_{CD} \cos \phi_{ABCD}$$

Se si utilizza il metodo simbolico, si riconosce che l'espressione $V_{AB}I_{CD} \cos \phi_{ABCD}$ è il prodotto scalare tra i vettori \bar{V}_{AB} e \bar{I}_{CD} , e che W può calcolarsi nel seguente modo

$$W = V_{AB}I_{CD} \text{Re}[e^{i(\alpha_{AB} - \beta_{CD})}] = \text{Re}[V_{AB}e^{i\alpha_{AB}} I_{CD}e^{-i\beta_{CD}}] = \text{Re}[\bar{V}_{AB}\check{I}_{CD}]$$

4.0.16 pag 292 Circuito di Tesla con linea induttiva

inserire figura come la 5.42b del libro ma aggiungendo X_ℓ in serie ad R_ℓ

$$\frac{\bar{E}}{\bar{V}_1} = \frac{1}{n} \quad \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_u} = n \quad \frac{\bar{I}_g}{\bar{I}_\ell} = n \quad \frac{\bar{I}_\ell}{\bar{I}_u} = \frac{1}{n} \quad (4.40)$$

$$P_\ell = R_\ell I_\ell^2 = R_\ell \left(\frac{I_u}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^2} R_\ell I_u^2 \quad (4.41)$$

potenza dissipata sulla linea in assenza dei trasformatori

$$-\bar{V}_1 + \check{Z}_\ell I_\ell + \bar{V}_2 = 0 \quad -n\bar{E} + \check{Z}_\ell \frac{I_u}{n} + n\bar{V}_u = 0 \quad \check{Z}_\ell \frac{I_u}{n} = n(\bar{E} - \bar{V}_u) \quad (4.42)$$

$$\bar{E} - \bar{V}_u = \frac{1}{n^2} \check{Z}_\ell I_u \quad (4.43)$$

scostamento tra \bar{V}_u ed \bar{E} in assenza dei trasformatori

4.0.17 pag 331 Adattamento in potenza con trasformatore per carico non puramente resistivo

4.0.18 pag 337 Reciprocità

Le proprietà di reciprocità valgono per reti costituite da componenti lineari, passivi e reciproci (resistori, induttori, capacitori e circuiti mutuamente accoppiati).

Prima forma: scambiando tra loro le posizioni di un generatore e di un amperometro, la corrente che attraversa quest'ultimo rimane immutata (da Someda, Onde Elettromagnetiche).

Seconda forma: scambiando tra loro le posizioni di un generatore e di un voltmetro, la tensione ai capi di quest'ultimo rimane immutata.

4.0.19 pag 347 Matrice di trasmissione

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases} \quad v_2 - R_{22}i_2 = R_{21}i_1 \quad i_1 = \frac{v_2}{R_{21}} - \frac{R_{22}}{R_{21}}i_2 = T_{21}v_2 + T_{22}(-i_2)$$

$$v_1 = R_{11}\left(\frac{v_2}{R_{21}} - \frac{R_{22}}{R_{21}}i_2\right) + R_{12}i_2 = \frac{R_{11}}{R_{21}}v_2 - \left(\frac{R_{11}R_{22}}{R_{21}} - R_{12}\right)i_2 = T_{11}v_2 + T_{12}(-i_2)$$

$$|T| = \begin{vmatrix} \frac{R_{11}}{R_{21}} & \frac{R_{11}R_{22}}{R_{21}} - R_{12} \\ \frac{1}{R_{21}} & \frac{R_{22}}{R_{21}} \end{vmatrix} = \frac{1}{R_{21}} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} \\ 1 & R_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{R_{21}^2}(R_{11}R_{22} - R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21}) = \frac{R_{12}}{R_{21}} = 1$$

4.0.20 pag 350 schemi equivalenti di Thevenin e Norton di un doppio bipolo lineare non inerte

inserire figure da schizzi a mano

4.0.21 pag 361 equivalenza circuiti in fig 6.44 (a) e (b)

Per quanto detto riguardo la validità generale del metodo simbolico (pag 16) l'equivalenza si può convenientemente stabilire nel dominio della frequenza, ad esempio caratterizzando i due doppi bipoli in base corrente.³ Si ha

$$(a) \begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \\ \bar{I}_{L1} = \bar{J}_1 + \frac{\bar{J}_2}{a} \\ \bar{V}_1 = i\omega L_1 \bar{I}_{L1} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \\ \bar{I}_{L2} = a\bar{J}_1 + \bar{J}_2 \\ \bar{V}_2 = i\omega L_1 \bar{I}_{L2} \end{cases}$$

ovvero le relazioni caratteristiche dei due doppi bipoli sono

$$(a) \begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \\ \frac{\bar{V}_1}{i\omega L_1} = \bar{J}_1 + \frac{\bar{J}_2}{a} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \\ \frac{\bar{V}_2}{i\omega L_2} = a\bar{J}_1 + \bar{J}_2 \end{cases} \quad (4.44)$$

da cui, dividendo la seconda equazione del caso (b) per a ed essendo $a^2 L_2 = \left(\frac{L_1}{M}\right)^2 L_2 = \frac{L_1^2 L_2}{L_1 L_2} = L_1$ (cioè la regola di riporto al primario), segue la tesi.

Questa equivalenza vale anche nel caso generale in cui al posto di L_1 e L_2 ci sono due generiche impedenze legate dalla relazione $\bar{Z}_1 = a^2 \bar{Z}_2$, la dimostrazione essendo identica.

4.0.22 pag 362 accoppiamento non perfetto

inserire figure vari circuiti equivalenti trasformatore senza perdite

$$M^2 < L_1 L_2 \quad (4.45)$$

³Si noti che, essendoci il vincolo $v_1(t) = av_2(t)$, la caratterizzazione in base tensione in questo caso non è praticabile, mentre sarebbe viceversa possibile una caratterizzazione ibrida.

$$k \triangleq \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1 \quad \text{coefficiente di accoppiamento} \quad (4.46)$$

$$L_1 = L_1^* + \Delta L_1 \quad L_2 = L_2^* + \Delta L_2 \quad (4.47)$$

$$L_1^* L_2^* = M^2 \quad \text{iperbole equilatera nel piano } (L_1^*, L_2^*) \text{ passante per il punto } (L_1^*, L_2^*) = (M, M) \quad (4.48)$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = i\omega L_1 \bar{I}_1 + i\omega M \bar{I}_2 = (i\omega L_1^* \bar{I}_1 + i\omega M \bar{I}_2) + i\omega \Delta L_1 \bar{I}_1 = \bar{V}_1^* + \Delta \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 = i\omega M \bar{I}_1 + i\omega L_2 \bar{I}_2 = (i\omega M \bar{I}_1 + i\omega L_2^* \bar{I}_2) + i\omega \Delta L_2 \bar{I}_2 = \bar{V}_2^* + \Delta \bar{V}_2 \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1^* = i\omega L_1^* \bar{I}_1 + i\omega M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2^* = i\omega M \bar{I}_1 + i\omega L_2^* \bar{I}_2 \end{cases} \quad \text{trasformatore ad accoppiamento perfetto} \quad (4.50)$$

$$\frac{\bar{V}_1^*}{\bar{V}_2^*} = \frac{L_1^* \bar{I}_1 + \frac{M}{L_1^*} \bar{I}_2}{M \bar{I}_1 + \frac{L_2^*}{M} \bar{I}_2} = \frac{L_1^*}{M} = a = \frac{M}{L_2^*} \quad (4.51)$$

$$L_1^*, L_2^* : \begin{cases} L_1^* \leq L_1 \\ L_2^* \leq L_2 \\ L_1^* L_2^* = M^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{arco di iperbole equilatera nel piano } (L_1^*, L_2^*) \text{ delimita-} \\ \text{ta dai punti } (L_1, \frac{M^2}{L_1}) \text{ (a cui corrisponde } \Delta L_1 = 0) \text{ e} \\ (\frac{M^2}{L_2}, L_2) \text{ (a cui corrisponde } \Delta L_2 = 0) \end{array} \quad (4.52)$$

4.0.23 pag 396 dissipatività

Un circuito si dice *dissipativo* se nell'evoluzione libera l'energia immagazzinata negli elementi dinamici tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$: essa viene completamente assorbita dagli elementi a-dinamici passivi e quindi dissipata in calore.

Un circuito del primo ordine è dissipativo se e solo se la frequenza naturale è minore di zero (cioè la costante di tempo è maggiore di zero).

Per un circuito del secondo ordine dissipativo le frequenze naturali devono essere entrambe negative (se reali) o entrambe con parte reale negativa (se complesse coniugate).

In generale un circuito di ordine qualsiasi è dissipativo se e solo se tutte le frequenze naturali sono a parte reale negativa.

I circuiti dissipativi sono *asintoticamente stabili* perchè la soluzione in evoluzione libera tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$ indipendentemente dai valori iniziali dello stato: due soluzioni (non necessariamente in evoluzione libera, e corrispondenti allo stesso forzamento) che differiscono solo per le condizioni iniziali tendono a coincidere per $t \rightarrow +\infty$.

4.0.24 pag 397 regime permanente

Per *regime permanente* si intende il comportamento di un circuito dissipativo per $t \rightarrow +\infty$, comportamento che, per via della dissipatività, non dipende dai valori iniziali delle grandezze di stato ma solo dalle grandezze impresse dai generatori indipendenti e dai parametri degli elementi lineari del circuito.

- **Regime stazionario**

In un circuito lineare tempo-invariante dissipativo con soli generatori stazionari, il regime di funzionamento che si instaura è anch'esso stazionario

- **Regime polinomiale** (utile ad esempio anche nei sistemi economici)

In un circuito lineare tempo-invariante dissipativo con soli generatori polinomiali di grado massimo pari ad n , il regime di funzionamento che si instaura è anch'esso polinomiale di grado n (Celentano 167)

- **Regime sinusoidale**

In un circuito lineare tempo-invariante dissipativo con soli generatori sinusoidali ed isofrequenziali, il regime di funzionamento che si instaura è anch'esso sinusoidale con la stessa pulsazione dei generatori

- **Regimi periodico ed aperiodico**

Per un circuito lineare tempo-invariante dissipativo contenente generatori costanti e generatori sinusoidali con diverse pulsazioni, il regime risultante è dato dalla sovrapposizione dei regimi che si avrebbero se i generatori agissero singolarmente. Esso è periodico se tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro, è invece aperiodico se non tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro

Esempio di calcolo della soluzione per il regime polinomiale

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad x(t) \text{ tensione o corrente} \quad (4.53)$$

$$f(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n = \sum_{k=0}^n b_k t^k \quad (4.54)$$

Cercheremo una soluzione del tipo

$$x(t) = \sum_{k=0}^m c_k t^k \quad \text{con } m = n \text{ se } a_0 \neq 0 \quad (4.55)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^m k c_k t^{k-1} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{k=2}^m k(k-1) c_k t^{k-2} \quad (4.56)$$

Se fosse $a_0 = 0$ occorrerebbe assumere $m = n + 1$, ma in tal caso ci sarebbe un autovalore nullo, e il circuito non sarebbe dissipativo.

Per illustrare il metodo è già sufficiente considerare il caso semplice di circuito del primo ordine e forzamento di secondo grado

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad f(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \quad (4.57)$$

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \quad \frac{dx}{dt} = c_1 + 2c_2 t$$

$$a_1(c_1 + 2c_2 t) + a_0(c_0 + c_1 t + c_2 t^2) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

$$\begin{cases} a_0 c_0 + a_1 c_1 = b_0 \\ a_0 c_1 + 2a_1 c_2 = b_1 \\ a_0 c_2 = b_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_0 & 2a_1 \\ & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$c_2 = \frac{b_2}{a_0} \quad c_1 = \frac{b_1 - 2a_1 c_2}{a_0} \quad c_0 = \frac{b_0 - a_1 c_1}{a_0} \quad (4.59)$$

4.0.25 Esempi di circuiti non dissipativi

Circuito serie R - C_1 - C_2 (due condensatori in serie)

inserire figura circuito semplice con C_1 , C_2 ed R in serie

In questa configurazione le due tensioni sui condensatori v_1 e v_2 non tendono asintoticamente a zero, salvo che per il caso di particolari combinazioni dei valori delle capacità e delle condizioni iniziali.

$$v_1(0) = V_{10} \quad v_2(0) = V_{20} \quad v(0) = V_0 = V_{10} + V_{20} \quad C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad \tau = RC_s$$

$$v_l(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{evoluzione libera}$$

$$i_l(t) = -\frac{v_l(t)}{R} \quad \frac{dv_{l1}}{dt} = \frac{i_l}{C_1} = -\frac{v_l(t)}{RC_1} = -\frac{V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{RC_1} \quad v_{l1}(t) - V_{10} = -\frac{V_0}{RC_1} \int_0^t e^{-\frac{u}{\tau}} du = -\frac{V_0}{RC_1} \left[-\tau e^{-\frac{u}{\tau}} \right]_0^t$$

$$v_{l1}(t) = V_{10} - \frac{\tau V_0}{RC_1} [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] = V_{10} - \frac{C_2 V_0}{C_1 + C_2} [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

$$v_{l1}(+\infty) = V_{10} - \frac{C_2 V_0}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_{10} - C_2 V_{20}}{C_1 + C_2} \quad v_{l2}(+\infty) = V_{20} - \frac{C_1 V_0}{C_1 + C_2} = -\frac{C_1 V_{10} - C_2 V_{20}}{C_1 + C_2}$$

Nel seguente caso semplificato risulta

$$C_1 = C_2 \Rightarrow v_{l1}(+\infty) = \frac{V_{10} - V_{20}}{2} \quad v_{l2}(+\infty) = -\frac{V_{10} - V_{20}}{2}$$

e così ad esempio per $C_1 = C_2$ e $V_{10} = 8$, $V_{20} = 4$ si ha $v_{l1}(+\infty) = 2$ e $v_{l2}(+\infty) = -2$.

Dal punto di vista del teorema di conservazione delle potenze si ha

$$p_1 + p_2 = -p_R \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C_1 v_{l1}^2 + \frac{1}{2} C_2 v_{l2}^2 \right) = -\frac{(v_{l1} + v_{l2})^2}{R} \quad \frac{dw_i}{dt} = -\frac{(v_{l1} + v_{l2})^2}{R}$$

dove si vede che la funzione positiva w_i è asintoticamente decrescente, ma non tende a zero dato che il suo asintoto è determinato dalla condizione $v_{l1} + v_{l2} = 0$, per la quale la decrescita si arresta asintoticamente.

Circuito serie $R - L_1 // L_2$ (due induttori in parallelo)

Caso duale rispetto al precedente

pag 400 Circuito LC forzato sinusoidalmente in risonanza, e analogia con sistema meccanico (altalena)

$$\begin{cases} e(t) = v_L + v_C \\ v_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_L = L \frac{d}{dt} (C \frac{dv_C}{dt}) = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} \\ \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{v_C}{LC} = \frac{e(t)}{LC} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e(t) = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C \end{array} \right.$$

Oppure $\frac{de}{dt} = \frac{dv_L}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C}$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_r^2 i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt} \quad \omega_r^2 = \frac{1}{LC}$$

$$e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t) \quad \frac{de}{dt} = -\sqrt{2}E\omega \sin(\omega t) = -\sqrt{2}E\omega \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}E\omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Ipotizziamo una soluzione particolare del tipo $i_p(t) = \sqrt{2}I_p \cos(\omega t + \beta_p)$ da cui

$$\frac{d^2 i_p}{dt^2} = -\sqrt{2}\omega^2 I_p \cos(\omega t + \beta_p) = -\omega^2 i_p$$

$$-\omega^2 i_p + \omega_r^2 i_p = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$$

$$(\omega_r^2 - \omega^2)\sqrt{2}I_p \cos(\omega t + \beta_p) = \sqrt{2} \frac{\omega E}{L} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

e si vede che per $\omega = \omega_r$ il circuito non possiede una soluzione di regime sinusoidale (l'impedenza equivalente della serie LC alla pulsazione di risonanza è nulla). Per $\omega \neq \omega_r$ la soluzione di regime è

$$i_p(t) = \sqrt{2} \frac{\omega E}{(\omega_r^2 - \omega^2)L} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad \omega \neq \omega_r$$

Quando $\omega = \omega_r$ si ipotizza una soluzione particolare del tipo $i_{pr}(t) = (a + bt) \cos(\omega_r t + \beta_p)$ e se ne determinano i parametri sostituendola nell'equazione (alternativamente si può usare il metodo della trasformazione di Laplace). Si ha

$$\frac{di_{pr}}{dt} = b \cos(\omega_r t + \beta_p) - (a + bt)\omega_r \sin(\omega_r t + \beta_p)$$

$$\frac{d^2 i_{pr}}{dt^2} = -2b\omega_r \sin(\omega_r t + \beta_p) - \omega_r^2 i_{pr}$$

$$-2b\omega_r \sin(\omega_r t + \beta_p) = -\sqrt{2} \frac{\omega_r E}{L} \sin(\omega_r t) \quad 2b = \sqrt{2} \frac{E}{L} \quad \beta_p = 0$$

$$i_{pr}(t) = (i_{pr}(0) + \frac{E}{\sqrt{2}L} t) \cos(\omega_r t) \quad \omega = \omega_r$$

Riguardo la soluzione in evoluzione libera (o l'integrale generale dell'equazione omogenea associata), essa sarà del tipo $i_l(t) = \sqrt{2}I_l \cos(\omega_r t + \beta_l)$ **Il disastro del Tacoma Narrows Bridge**

Il primo ponte Tacoma Narrows fu aperto al traffico dei veicoli nel Luglio 1940 e crollò quattro mesi più tardi per azione di un vento di 67 km/h. Il ponte era stato progettato per resistere a venti di intensità molto maggiore, ma crollò a causa di un fenomeno fisico ora noto come *flutter aeroelastico*. In sintesi il flusso d'aria in direzione ortogonale alla estensione in lunghezza del ponte si traduce in un momento ad andamento periodico nel tempo con frequenza $f \gtrsim \frac{v}{\ell}$, ove v è la velocità del vento ed ℓ è la larghezza del ponte, che mette in *oscillazione torsionale* il ponte stesso.

A rigore il flutter aeroelastico è un fenomeno fisico distinto da quello della *risonanza*, tuttavia risulta istruttivo fare un parallelo tra i due fenomeni.

In rete sono presenti video che mostrano le vistosissime oscillazioni ed il crollo del ponte, li si trova facilmente, la visione è altamente consigliata. Il ponte era costruito in cemento armato, ma oscillava come fosse di carta.

4.0.26 pag 411,415,434 circuito resistivo associato e modello ABCD

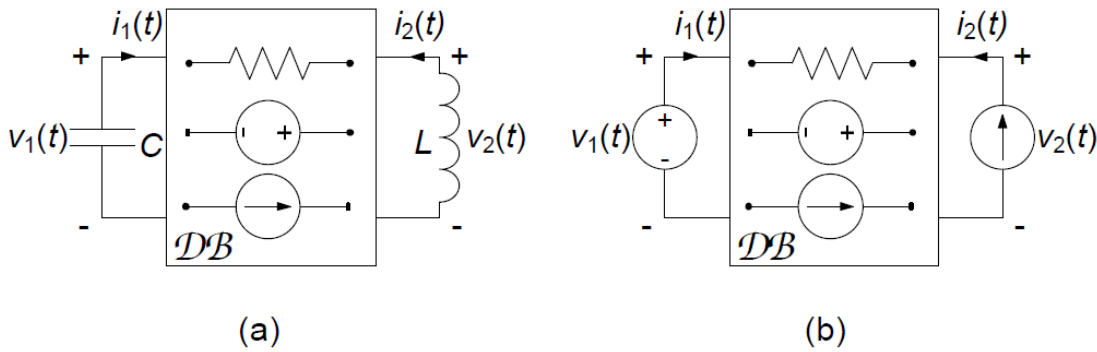


Figura 7.24. (a) Schematizzazione di un generico circuito RLC lineare del secondo ordine; (b) circuito resistivo associato

inserire figure che mostrano la applicazione della sovrapposizione

Variabili di stato v_1 e i_2 .

Sia b il numero di generatori indipendenti presenti all'interno della sottorete 2-bipolare.

Tutte le grandezze si esprimono come combinazione delle variabili di stato e dei generatori indipendenti.

In particolare cerchiamo espressioni per le variabili duali delle variabili di stato, cioè i_1 e v_2 .

Le grandezze con un apice si riferiscono al caso in cui i generatori interni alla sottorete 2-bipolare sono spenti.

Le grandezze con due apici si riferiscono al caso in cui i due generatori esterni sono spenti.

$$\begin{aligned} i_1 &= i'_1 + i''_1 \\ v_2 &= v'_2 + v''_2 \end{aligned}$$

Quando i generatori interni sono spenti applichiamo di nuovo la sovrapposizione rispetto ai due generatori v_1 e i_2

$$\begin{aligned} i'_1 &= h_{11}v_1 + h_{12}i_2 \\ v'_2 &= h_{21}v_1 + h_{22}i_2 \end{aligned}$$

quando i generatori esterni sono spenti abbiamo

$$\begin{aligned} i''_1 &= j_{1cc} \\ v''_2 &= e_{20} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} i_1 &= h_{11}v_1 + h_{12}i_2 + j_{1cc} \\ v_2 &= h_{21}v_1 + h_{22}i_2 + e_{20} \end{aligned}$$

Essendo poi $i_1 = -C \frac{dv_1}{dt}$ e $v_2 = -L \frac{di_2}{dt}$ otteniamo

$$\begin{aligned} C \frac{dv_1}{dt} &= -h_{11}v_1 - h_{12}i_2 - j_{1cc} \\ L \frac{di_2}{dt} &= -h_{21}v_1 - h_{22}i_2 - e_{20} \end{aligned}$$

Considerando ancora una volta la sovrapposizione riconosciamo che j_{1cc} ed e_{20} si possono esprimere come combinazione lineare dei b generatori indipendenti interni alla sottorete 2-bipolare. Se denotiamo allora con u il vettore di tali generatori (gli ingressi del sistema), possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} j_{1cc} \\ e_{20} \end{bmatrix} = \Gamma u$$

dove Γ è la matrice contenente i coefficienti delle suddette combinazioni lineari, costituita di 2 righe e b colonne. Dividendo

la prima equazione per C e la seconda per L si ha

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= -\frac{h_{11}}{C}v_1 - \frac{h_{12}}{C}i_2 - \frac{j_{1cc}}{C} \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{h_{21}}{L}v_1 - \frac{h_{22}}{L}i_2 - \frac{e_{20}}{L}\end{aligned}$$

Ponendo

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{h_{11}}{C} & -\frac{h_{12}}{C} \\ -\frac{h_{21}}{L} & -\frac{h_{22}}{L} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{j_{1cc}}{C} \\ -\frac{e_{20}}{L} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{1cc} \\ e_{20} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \Gamma u = Bu$$

il problema di Cauchy da risolvere si scrive in forma compatta come

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad x \triangleq \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

La soluzione di questo problema ai valori iniziali matriciale ci fornisce le grandezze di stato.

Potremmo essere interessati ad altre grandezze *di uscita*, diverse dalle variabili di stato, che possiamo indicare con un *vettore delle uscite* y . Poichè come abbiamo detto, qualunque grandezza si può esprimere come combinazione lineare delle variabili di stato e dei generatori, avremo in definitiva il seguente cosiddetto *modello ABCD*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned} \quad (4.61)$$

La trattazione che abbiamo qui illustrato con riferimento ad un sistema generale del secondo ordine, può ovviamente ripetersi inalterata con riferimento ad un sistema generale di ordine n , considerando gli n elementi dinamici connessi alla restante parte del circuito, che risulterà essere una sottorete n -bipolare. Il formalismo del modello ABCD è quindi generale, e la sua soluzione può esprimersi con espressioni del tipo

$$\begin{aligned}x(t) &= \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) \\ y(t) &= \eta(t, x(t), u(t))\end{aligned} \quad (4.62)$$

dove con $u_{[t_0, t)}$ si intende *tutti i valori assunti dalla restrizione della funzione $u(t)$ nell'intervallo $[t_0, t)$* .

Si noti che l'equazione $\dot{x} = Ax + Bu$ è formalmente identica a quella relativa ad un generico circuito del primo ordine, nel qual caso x non è un vettore ma una singola variabile di stato (la tensione dell'unico capacitore o la corrente dell'unico induttore), A è uno scalare, e B è un vettore riga.

In particolare anche l'equazione omogenea associata vettoriale è quindi formalmente identica a quella scalare, e tale è anche la sua soluzione generale

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax && \text{equazione omogenea associata vettoriale, per un circuito di ordine } n \\ x(t) &= e^{A(t-t_0)}h && \text{soluzione, con } h \text{ costante vettoriale da determinare}\end{aligned}$$

ove ovviamente bisogna precisare cosa si intende per esponenziale di una matrice. La definizione è data dalla seguente serie (convergente), esattamente analoga alla serie di Taylor della classica funzione esponenziale di variabile scalare

$$e^M \triangleq I + M + \frac{M^2}{2!} + \dots + \frac{M^k}{k!} + \dots \quad \Rightarrow \quad e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots \quad (4.63)$$

La matrice $\Phi(t) = e^{At}$ prende il nome di *matrice di transizione*. A dispetto della definizione, il calcolo di e^{At} è concettualmente semplice. Ovviamente, come già visto con gli esempi dei circuiti del primo e del secondo ordine, ci aspettiamo che anche nel caso generale e^{At} si esprima in termini delle frequenze naturali del circuito (cioè gli autovalori di A) mediante combinazione lineare di funzioni del tipo $e^{\lambda_i t}$ (oppure, nel caso in cui A non sia dotata di n autovettori indipendenti, del tipo $p(t)e^{\lambda_i t}$, con $p(t)$ polinomio in t).

Si osservi che risulta $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Calcolo di e^{At} quando A è diagonalizzabile

Se gli autovalori di A sono distinti allora gli autovettori sono indipendenti. Anche se gli autovalori di A non sono distinti può comunque esistere un set di n autovettori indipendenti. Ad esempio la matrice identità I ha l'unico autovalore

$\lambda = 1$ di molteplicità n , ed essendo⁴ $Iu = u, \forall u$, un qualunque insieme di n vettori indipendenti costituisce una base di autovettori. Più in generale, per una qualsiasi matrice reale simmetrica (o complessa hermitiana) gli autovalori sono reali e gli autovettori possono essere scelti ortogonali e quindi indipendenti (teorema spettrale, Strang 299 e 308).

Supposto allora che A abbia n autovettori indipendenti, detta $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale, e $T = [u_1 \dots u_n]$ la matrice (certamente invertibile) le cui colonne sono i corrispondenti autovettori, risulta

$$\begin{aligned}
 Au_i &= \lambda_i u_i & AT &= TA & A &= TAT^{-1} & e^{At} &= \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \\
 e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(TAT^{-1}t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T A^k T^{-1} t^k}{k!} = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} T^{-1} = T e^{At} T^{-1} = [u_1 \dots u_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1} \\
 &= [u_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} \dots u_n e^{\lambda_n(t-t_0)}] T^{-1}
 \end{aligned}$$

Definendo

$$k \triangleq \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = T^{-1}h \quad (k \text{ va calcolato come soluzione del sistema } Tk = h)$$

si ha

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}h = [u_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} \dots u_n e^{\lambda_n(t-t_0)}]k = \sum_{i=1}^n k_i u_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \tag{4.64}$$

Nel caso dell'evoluzione libera si ha $h = x_0$ e quindi $k = T^{-1}x_0$.

Calcolo di e^{At} quando A non è diagonalizzabile

... da completare

... Nel caso generale in cui la matrice A non è diagonalizzabile, cioè non è dotata di un set completo di autovettori indipendenti, e^{At} si può esprimere facendo ricorso al concetto di *catene di autovettori generalizzati*, mediante la *forma di Jordan* J della matrice A , $J = M^{-1}AM \dots$

su <http://mathworld.wolfram.com/MatrixExponential.html> c'è l'esempio generale 2x2, $e^{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

...

... da completare

... L'espressione ottenibile mediante la forma di Jordan, sebbene utile per la comprensione teorica, dal punto di vista computazionale è molto sensibile alle perturbazioni, ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -\epsilon & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - \epsilon \tag{4.65}$$

$$\epsilon = 0 \Rightarrow J = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{autovalori coincidenti e } A \text{ non diagonalizzabile} \tag{4.66}$$

$$\epsilon \neq 0 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{\epsilon} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{\epsilon} \end{bmatrix} \quad \text{autovalori distinti e } A \text{ diagonalizzabile} \tag{4.67}$$

Questo mal condizionamento fa sì che la forma Jordan è solitamente evitata in analisi numerica. L'esempio evidenzia che il problema in pratica si verifica quando A è dotata di un set completo di autovettori ma è 'vicina' ad una matrice che invece non lo è. Ciò può essere quantificato considerando il numero di condizionamento della matrice degli autovettori, $\text{cond}(T) = \|T\| \|T^{-1}\|$ (Moler, Van Loan 23).

Un alternativa migliore alla forma di Jordan (ma non sempre ottimale) è la *decomposizione di Schur* (Moler, Van Loan 26), ma la procedura preferita in generale è probabilmente il cosiddetto *metodo scaling and squaring* (Moler, Van Loan 12)

...

⁴non si faccia confusione tra il vettore degli ingressi e gli autovettori, entrambi denotati con la lettera u

La soluzione si può esprimere in generale al seguente modo

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}x_0}_{\text{evoluzione libera nello stato}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{evoluzione forzata nello stato}} = \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.68)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = \underbrace{Ce^{A(t-t_0)}x_0}_{\text{evoluzione libera nell'uscita}} + \underbrace{\int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{evoluzione forzata nell'uscita}} = \Psi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.69)$$

La $W(t)$ che figura nell'integrale di convoluzione prende il nome di *matrice delle risposte impulsive* e vale

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Nel caso in cui vi sia un solo ingresso (un solo generatore, u è uno scalare) ed una sola uscita (y è uno scalare), allora B si riduce ad un vettore colonna, C ad un vettore riga, D ad uno scalare (che può essere nullo), e W è la risposta all'impulso (scalare). Si noti che nel testo Circuiti la risposta impulsiva viene denotata con $h(t)$, mentre in questo contesto generale $H(t)$ indica la risposta impulsiva (in generale matriciale) *nello stato* e $W(t)$ la risposta impulsiva *propriamente detta, cioè nell'uscita*.

Si noti anche che le dimensioni fisiche della risposta impulsiva W non sono omogenee a quelle dell'uscita y , ma risulta

$$[W] = \frac{[y]}{[u][t]}.$$

Considerando quindi il caso semplice in cui ingresso u e uscita y siano scalari, se ad esempio u è una corrente e y è una tensione, allora sarà $[W] = \frac{\Omega}{s} \neq V$. Ciò avviene perchè per definizione la risposta impulsiva si ottiene considerando come ingresso la funzione $\delta(t)$ che non ha le dimensioni di u , ma quelle dell'inverso di un tempo.

4.0.27 Risposta a regime permanente TDS158

La risposta di un sistema lineare stazionario, oltre ad essere decomposta in libera e forzata, in alcuni casi può essere decomposta in *risposta transitoria* e in *risposta a regime permanente*.

Data una funzione vettoriale di ingresso $\hat{u}(t)$, si dice che esiste la corrispondente risposta a regime permanente nello stato (rispettivamente nell'uscita) se il limite

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \varphi(t, t_0, x_0, \hat{u}_{[t_0, t]}) \\ (\text{ risp. } y_r(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \eta(t, x(t), \hat{u}(t))) \end{aligned} \quad (4.70)$$

esiste e risulta indipendente da x_0 . In tal caso $x_r(t)$ (risp. $y_r(t)$) prende il nome di risposta a regime permanente corrispondente all'ingresso \hat{u} e la differenza

$$\begin{aligned} x_t(t) &= x(t) - x_r(t) \\ (\text{ risp. } y_t(t) &= y(t) - y_r(t)) \end{aligned} \quad (4.71)$$

il nome di risposta transitoria.

Le condizioni sotto cui la risposta transitoria (nello stato e/o nell'uscita) esiste, dipendono sia dal circuito che dall'ingresso \hat{u} . Per quanto riguarda le prime notiamo che se il circuito è dissipativo il termine di evoluzione libera tende ad annullarsi e quindi ciò è condizione sufficiente affinché il limite sia indipendente da x_0 . Più in generale affinché il limite sia indipendente da x_0 è necessario che la matrice A abbia autovalori a parte reale negativa (rispettivamente per l'uscita y , la premoltiplicazione per la matrice C rende la condizione meno stringente, ovvero *soltanto* gli autovalori corrispondenti ai cosiddetti *modi osservabili* devono essere a parte reale negativa).

Se la condizione di indipendenza da x_0 è soddisfatta, la risposta a regime permanente dovuta ai generatori \hat{u} , se esiste,

vale

$$x_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \hat{u}(\tau) d\tau \quad (4.72)$$

$$\left(\text{resp. } y_r(t) = D \hat{u}(t) + C x_r(t) = D \hat{u}(t) + \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B \hat{u}(\tau) d\tau \right)$$

e la corrispondente risposta completa

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}(x_0 - x_r(t_0))}_{\substack{\text{risposta transitoria} \\ \text{nello stato}}} + \underbrace{x_r(t)}_{\text{risposta a regime nello stato}} \quad (4.73)$$

$$\left(\text{resp. } y(t) = Cx(t) + D\hat{u}(t) = \underbrace{C e^{A(t-t_0)}(x_0 - x_r(t_0))}_{\substack{\text{risposta transitoria} \\ \text{nell'uscita}}} + \underbrace{C x_r(t) + D \hat{u}(t)}_{\substack{\text{risposta a regime} \\ \text{nell'uscita}}} \right)$$

Capitolo 5

Impianti

Indicazioni del tipo GSII.n intendono il riferimento alla pagina n libro consigliato Guarnieri-Stella Vol II

5.1 Trasformatore

5.1.1 Mutuo accoppiamento induttivo

inserire figure vari circuiti equivalenti del mutuo accoppiamento

5.1.2 Trasformatore reale

Dati di targa

Dati di targa principali		
Grandezza	Denominazione	Unità
A_N	Potenza nominale	VA
V_{1N}	Tensione nominale primaria	V
V_{2N}	Tensione nominale secondaria	V

Dalle espressioni $A_N = V_{1N}I_{1N} = V_{2N}I_{2N}$ si ricavano le *correnti nominali*

$$I_{1N} = \frac{A_N}{V_{1N}} \quad I_{2N} = \frac{A_N}{V_{2N}}$$

Il *rapporto di trasformazione*

$$a = \frac{V_{1N}}{V_{2N}}$$

definisce con buona approssimazione il legame che sussiste tra le tensioni primaria e secondaria quando il secondario è a vuoto. Il modello equivalente approssimato più semplice possibile del trasformatore reale è il *trasformatore ideale*, che è caratterizzato appunto dall'unico parametro a .

inserire figura dispensa manoscritta equivalenza con trasformatore ideale

dati di targa secondari . . . integrare dispensa manoscritta

Grandezza	Descrizione	Esempio
	Costruttore	MAGNETAR
	Marchi di conformità normative	CE
N	Numero di matricola	7325
anno	Anno di fabbricazione	2010
f_N	Frequenza nominale	50 Hz
A_N	Potenza nominale	100 kVA
V_{1N}	Valore efficace della tensione nominale al primario	10 kV
V_{2N}	Valore efficace della tensione nominale al secondario	220 V
$i_{0\%}$	Corrente a vuoto al primario percentuale	3 %
$\cos \phi_0$	Fattore di potenza a vuoto	0.3
$v_{cc\%}$	Tensione di cortocircuito percentuale	4 %
$\cos \phi_{cc}$	Fattore di potenza in cortocircuito	0.2
M	Peso	800 kg
tipo	Tipo di raffreddamento	ONAN
servizio	continuo o pulsato	continuo

inserire figura modello a T del trasformatore

inserire figura modello a L del trasformatore

$$\dot{Z}_{10} = \frac{R_{10}iX_{10}}{R_{10} + iX_{10}} = R_{eq} + iX_{eq} = Z_{10}(\cos \phi_{10} + i \sin \phi_{10}) \quad \text{impedenza di magnetizzazione}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dot{Z}_{10}} &= \frac{1}{R_{eq} + iX_{eq}} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{iX_{10}} \\ \frac{R_{eq} - iX_{eq}}{R_{eq}^2 + X_{eq}^2} &= \frac{1}{R_{10}} - i \frac{1}{X_{10}} \quad \frac{R_{eq}}{Z_{10}^2} = \frac{1}{R_{10}} \quad \frac{X_{eq}}{Z_{10}^2} = \frac{1}{X_{10}} \\ R_{10} &= \frac{Z_{10}}{\frac{R_{eq}}{Z_{10}}} = \frac{Z_{10}}{\cos \phi_{10}} \quad X_{10} = \frac{Z_{10}}{\frac{X_{eq}}{Z_{10}}} = \frac{Z_{10}}{\sin \phi_{10}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\bar{I}_{10} = \frac{\bar{V}_1}{\dot{Z}_{10}} \quad (5.2)$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + iX_2 \quad \text{impedenza longitudinale al secondario}$$

$$\dot{Z}_{2p} = a^2 \dot{Z}_2 \quad \dot{Z}_2 \text{ riportata al primario}$$

$$\dot{Z} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_{carico} \approx \dot{Z}_{carico} \quad Z_2 \ll Z_{carico} \text{ altrimenti la caduta di tensione sarebbe eccessiva e le perdite nel rame sarebbero elevate}$$

$$\dot{Z}_p = a^2 \dot{Z} \quad \dot{Z} \approx a^2 \dot{Z}_{carico} \quad \dot{Z} \text{ riportata al primario}$$

Alimentando il primario alla tensione nominale, risulta $\bar{I}_{10} = \frac{\bar{V}_{1N}}{\dot{Z}_{10}}$ indipendentemente dal carico (e in particolare anche se al secondario non è connesso alcun carico). Deve risultare $I_{10} \ll I_{1N}$, altrimenti in condizioni di carico le correnti nelle impedenze \dot{Z}_{10} e \dot{Z}_p sarebbero dello stesso ordine di grandezza, e le stesse impedenze \dot{Z}_{10} e $\dot{Z}_p \approx a^2 \dot{Z}_{carico}$ sarebbero quindi dello stesso ordine di grandezza. Di conseguenza la potenza assorbita da \dot{Z}_{10} sarebbe confrontabile con quella assorbita da \dot{Z}_p , ovvero le perdite nel ferro sarebbero confrontabili con la potenza assorbita dal carico, cioè il trasformatore sarebbe un pessimo trasformatore, cosa che ovviamente in fase progettuale viene accuratamente scongiurata. Dunque in condizioni di carico (non patologico) dovrà risultare $Z_{10} \gg a^2 Z_{carico}$, e in generale anche, per quanto già osservato

$$Z_{10} \gg a^2 Z_{carico} \gg a^2 Z_2 = Z_{2p} \quad (5.3)$$

5.1.3 Modello a L, prova a vuoto GSII.58

integrare appunti Coccoresse

inserire figura prova a vuoto, e con modello a L

Una volta che il trasformatore è stato costruito si effettuano su di esso alcune prove per determinarne i dati di targa. In particolare nella prova a vuoto si ha

$$\begin{cases} I_1 = I_{10} & \text{lettura amperometro} \\ W = P_{\text{FeN}} = V_{1\text{N}} I_{10} \cos \phi_0 & \text{lettura wattmetro} \end{cases} \quad (5.4)$$

L'amperometro ci fornisce direttamente la I_{10} , e dalla lettura del wattmetro si ricava $\cos \phi_0$.

La corrente al primario è

$$I_1 = I_{10} = \frac{V_{1\text{N}}}{Z_{10}} \quad \text{Valore efficace della corrente a vuoto al primario, che si ha quando il secondario è aperto} \quad (5.5)$$

Si fa notare per completezza che, anche qualora si considerasse il modello a T del trasformatore, essendo nei trasformatori di potenza $Z_{10} \gg Z_1$ (tipicamente di un fattore 1000), si avrebbe comunque, con il secondario a vuoto, $\bar{I}_{10} = \frac{\bar{V}_{1\text{N}}}{Z_1 + Z_{10}} \cong \frac{\bar{V}_{1\text{N}}}{Z_{10}}$ e $I_{10} \cong \frac{V_{1\text{N}}}{Z_{10}}$.

Come si è notato, deve essere, per un buon trasformatore

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\triangleq \frac{I_{10}}{I_{1\text{N}}} \ll 1 && \text{Per un buon trasformatore (cioè che abbia perdite contenute)} \\ i_0\% &= 100 \frac{I_{10}}{I_{1\text{N}}} = 100 \alpha_0 < 10\% && \text{Corrente a vuoto percentuale} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Si ha poi

$$\cos \phi_0 = \cos \phi_{10} \quad (5.7)$$

da cui

$$\begin{aligned} Z_{10} &= \frac{V_{1\text{N}}}{I_{10}} = \frac{V_{1\text{N}}}{\alpha_0 I_{1\text{N}}} \\ R_{10} &= \frac{V_{1\text{N}}}{I_{10} \cos \phi_0} = \frac{V_{1\text{N}}}{\alpha_0 I_{1\text{N}} \cos \phi_0} & X_{10} &= \frac{V_{1\text{N}}}{I_{10} \sin \phi_0} = \frac{V_{1\text{N}}}{\alpha_0 I_{1\text{N}} \sin \phi_0} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Essendo \dot{Z}_{10} l'unica impedenza coinvolta, il funzionamento a vuoto del trasformatore dipende esclusivamente dal nucleo ferromagnetico. Si deduce che la potenza assorbita dal trasformatore a vuoto corrisponde alle *perdite nel ferro*.

5.1.4 Modello a L, prova in cortocircuito GSII.59

integrare appunti Coccorese

inserire figura prova in cortocircuito, e con modello a L

Nella prova in cortocircuito si ha

$$\begin{cases} V_1 = V_{1\text{cc}} & \text{lettura voltmetro} \\ W = P_{\text{CuN}} = V_{1\text{cc}} I_{1\text{N}} \cos \phi_{\text{cc}} & \text{lettura wattmetro} \end{cases} \quad (5.9)$$

Il voltmetro ci fornisce direttamente la $V_{1\text{cc}}$, e dalla lettura del wattmetro si ricava $\cos \phi_{\text{cc}}$.

$$\dot{Z}_{\text{cc}} = \frac{\dot{Z}_{10} \dot{Z}_{2\text{p}}}{\dot{Z}_{10} + \dot{Z}_{2\text{p}}} \cong \dot{Z}_{2\text{p}} \quad \text{impedenza vista al primario quando il secondario è in cortocircuito}$$

$$Z_{10} \gg Z_{2\text{p}} \Rightarrow \dot{Z}_{\text{cc}} \cong \dot{Z}_{2\text{p}} \quad \text{per un trasformatore con perdite contenute e caduta di tensione contenuta, come visto}$$

$$V_{1\text{cc}} = Z_{\text{cc}} I_{1\text{N}} \quad \text{Tensione primaria di cortocircuito, cioè il valore efficace della tensione che, quando il secondario è in cortocircuito, comporta una corrente primaria in valore efficace pari alla corrente nominale } I_{1\text{N}}$$

$$Z_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1N}} \quad \dot{Z}_{cc} = Z_{cc}(\cos \phi_{cc} + i \sin \phi_{cc})$$

$$\alpha_{cc} \triangleq \frac{V_{1cc}}{V_{1N}} \ll 1 \quad \text{Tipicamente per un} \quad (5.10)$$

$$i_{0\%} = 100 \frac{V_{1cc}}{V_{1N}} = 100 \alpha_{cc} < 10 \% \quad \text{Tensione di cortocircuito percentuale} \quad \text{buon trasformatore}$$

$$Z_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1N}} = \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{I_{1N}} \quad \text{tipicamente 1000 volte nei trasfor-} \quad (5.11)$$

$$\frac{Z_{cc}}{Z_{10}} = \alpha_0 \alpha_{cc} \ll 1 \quad \text{matori di potenza}$$

$$\dot{Z}_{cc} = \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{I_{1N}} (\cos \phi_{cc} + i \sin \phi_{cc})$$

$$\dot{Z}_{2p} \cong \dot{Z}_{cc} \quad R_{2p} \cong \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{I_{1N}} \cos \phi_{cc} \quad X_{2p} \cong \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{I_{1N}} \sin \phi_{cc}$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{2p}}{a^2} \cong \frac{\dot{Z}_{cc}}{a^2} \quad R_2 \cong \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{a^2 I_{1N}} \cos \phi_{cc} \quad X_2 \cong \frac{\alpha_{cc} V_{1N}}{a^2 I_{1N}} \sin \phi_{cc} \quad (5.12)$$

Essendo $\dot{Z}_{cc} = \dot{Z}_{10} \parallel \dot{Z}_{2p}$, si deduce che la potenza assorbita dal trasformatore in cortocircuito corrisponde alle perdite nel rame.

5.1.5 Caduta di tensione

integrare appunti Coccorese

5.1.6 Rendimento

Il rendimento di un trasformatore è il rapporto tra la potenza media assorbita dal carico connesso al secondario e la potenza media assorbita dal primario

$$\eta = \frac{P_{\text{carico}}}{P_{\text{primario}}} = \frac{P_{\text{carico}}}{P_{\text{Fe}} + P_{\text{Cu}} + P_{\text{carico}}} \quad (5.13)$$

Considerando al solito il modello a L del trasformatore abbiamo

$$\eta \cong \frac{V_2 I_2 \cos \phi_2}{\frac{V_1^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_2 I_2 \cos \phi_2} \quad \text{nel caso di modello a L} \quad (5.14)$$

Il *rendimento convenzionale* (o *rendimento nominale*) è per definizione il valore numerico

$$\eta_c \triangleq \frac{A_N}{P_{\text{FeN}} + P_{\text{CuN}} + A_N} = \frac{A_N}{\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_{2N}^2 + A_N} \quad (5.15)$$

Si alimenti ora il primario del trasformatore alla tensione nominale V_{1N} e si consideri la famiglia di funzioni $\eta(I_2 | \cos \phi_2)$, nella variabile indipendente I_2 , che si ottiene al variare del fattore di potenza del carico $\cos \phi_2$ considerato come parametro (più in generale si considereranno le famiglie di funzioni $\eta(I_2 | V_1, \cos \phi_2)$ che si ottengono al variare delle grandezze parametriche V_1 e $\cos \phi_2$). Data quindi la tensione primaria $V_1 = V_{1N}$ e fissato il valore del parametro $\cos \phi_2$, si vogliono esaminare le proprietà della funzione $\eta(I_2)$, il cui grafico prende il nome di *curva di rendimento del trasformatore*. Si può pensare di realizzare questa situazione in cui $\cos \phi_2$ è costante e I_2 varia, considerando il carico variabile nell'insieme di tutti i carichi che hanno il medesimo fattore di potenza. In prima approssimazione si assumerà trascurabile la variazione della tensione secondaria al variare della I_2 e quindi, essendo nel caso particolare $V_1 = V_{1N}$, sarà $V_2 \cong V_{2N}$. Allora

$$\eta(I_2 | V_{1N}, \cos \phi_2) \cong \frac{V_{2N} I_2 \cos \phi_2}{\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_{2N} I_2 \cos \phi_2}$$

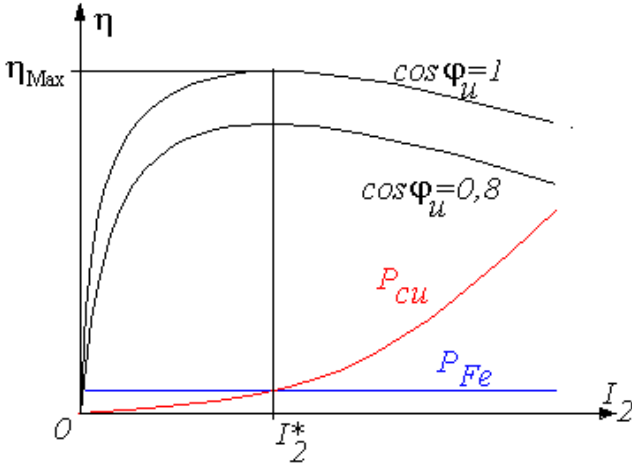
ove si nota che le perdite nel ferro sono costanti, mentre quelle nel rame di pendono da I_2 , e

$$\frac{d\eta}{dI_2} = V_{2N} \cos \phi_2 \frac{\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_{2N} I_2 \cos \phi_2 - I_2 (2R_2 I_2 + V_{2N} \cos \phi_2)}{\left(\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_{2N} I_2 \cos \phi_2\right)^2} = V_{2N} \cos \phi_2 \frac{\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} - R_2 I_2^2}{\left(\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_{2N} I_2 \cos \phi_2\right)^2}$$

$$\frac{d\eta}{dI_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_{Fe} = P_{Cu} \\ I_2 = I_2^* \triangleq \frac{V_{1N}}{\sqrt{R_{10}R_2}} \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\begin{cases} I_2 < I_2^* \Rightarrow \frac{d\eta}{dR_2} > 0 \\ I_2 > I_2^* \Rightarrow \frac{d\eta}{dR_2} < 0 \end{cases}$$

$$\eta_{\max}|_{V_{1N}, \cos \phi_2} = \eta(I_2^*|V_{1N}, \cos \phi_2) = \frac{V_{2N}I_2^* \cos \phi_2}{2\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + V_{2N}I_2^* \cos \phi_2} = \frac{\frac{V_{1N}V_{2N}}{\sqrt{R_{10}R_2}} \cos \phi_2}{2\frac{V_{1N}^2}{R_{10}} + \frac{V_{1N}V_{2N}}{\sqrt{R_{10}R_2}} \cos \phi_2} \quad (5.17)$$



Un trasformatore destinato ad operare in *regime continuo*, cioè destinato ad alimentare un carico che assorba una corrente di valore efficace (approssimativamente) costante, verrà ovviamente scelto con corrente secondaria nominale $I_{2N} = I_{\text{carico}}$. Dalla discussione precedente si capisce allora che uno dei *criteri di progetto* del trasformatore in tale caso sarà $I_{2N} = I_2^*$, ovvero

$$P_{FeN} = P_{CuN} \Leftrightarrow \frac{V_{1N}^2}{R_{10}} = R_2 I_{2N}^2 \quad \text{criterio di progetto in regime continuo} \quad (5.18)$$

In generale, quando la tensione primaria non coincide con la tensione nominale, V_2 è approssimativamente legata alla V_1 dal rapporto di trasformazione, e

$$I_2^* \triangleq \frac{V_1}{\sqrt{R_{10}R_2}} \quad \eta_{\max}|_{V_1, \cos \phi_2} = \eta(I_2^*|V_1, \cos \phi_2) = \frac{V_2 I_2^* \cos \phi_2}{2\frac{V_1^2}{R_{10}} + V_2 I_2^* \cos \phi_2} = \frac{\frac{V_1 V_2}{\sqrt{R_{10}R_2}} \cos \phi_2}{2\frac{V_1^2}{R_{10}} + \frac{V_1 V_2}{\sqrt{R_{10}R_2}} \cos \phi_2} \quad a \triangleq \frac{V_{1N}}{V_{2N}} \cong \frac{V_1}{V_2} \quad (5.19)$$

Robustezza

La curva di rendimento è *molto piatta* intorno al valore I_2^* . Ciò appare ovvio, infatti se non lo fosse si avrebbe un forte calo del rendimento non appena la corrente assorbita dal carico si allontanasse dal valore ottimale. Questa proprietà può essere quantificata andando ad esempio a valutare quali sono i due valori di corrente I_{2a} e I_{2b} a cui corrisponde una riduzione del rendimento di una aliquota θ

$$\eta(I_2) = \theta \eta_{\max} \quad \frac{V_2 I_2 \cos \phi_2}{\frac{V_1^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_2 I_2 \cos \phi_2} = \theta \eta_{\max}$$

$$\frac{V_2 I_2 \cos \phi_2}{\theta \eta_{\max}} = \frac{V_1^2}{R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_2 I_2 \cos \phi_2 \quad I_2^2 - \left(\frac{1}{\theta \eta_{\max}} - 1 \right) \frac{V_2 \cos \phi_2}{R_2} I_2 + I_2^{*2} = 0$$

$$J(\theta) \triangleq \left(\frac{1}{\theta \eta_{\max}} - 1 \right) \frac{V_2 \cos \phi_2}{2R_2}$$

$$I_2^2 - 2J(\theta)I_2 + I_2^{*2} = 0$$

$$u(\theta) \triangleq \frac{I_2(\theta)}{I_2^*} \quad h(\theta) \triangleq \frac{J(\theta)}{I_2^*}$$

$$u^2 - 2h(\theta)u + 1 = 0$$

$$\delta(\theta) = \frac{\Delta(\theta)}{4} = h^2(\theta) - 1$$

$$\begin{cases} u_a(\theta) = h(\theta) - \sqrt{\delta(\theta)} \\ u_b(\theta) = h(\theta) + \sqrt{\delta(\theta)} \end{cases}$$

$$\theta = 1 \Rightarrow \text{radici coincidenti } I_{2a} = I_{2b} = I_2^* \Rightarrow \delta(1) = 0 \quad u_a = u_b = h(1) = 1$$

$$h(\theta) = \frac{\sqrt{R_{10}R_2}}{V_1} \left(\frac{1}{\theta\eta_{\max}} - 1 \right) \frac{V_2 \cos \phi_2}{2R_2} = \left(\frac{1}{\theta\eta_{\max}} - 1 \right) \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{R_{10}}{R_2}} \cos \phi_2$$

Dalle (5.8), (5.11), (5.12) e dai tipici valori di targa si deduce

$$\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{R_{10}}{R_2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_0\alpha_{cc} \cos \phi_0 \cos \phi_{cc}}} \gg 1 \quad \text{tipicamente di un fattore 100 o maggiore nei trasformatori di potenza}$$

Per valori tipici di η_{\max} , ad esempio nel range 0.96–0.99, mentre risulta $h(1) = 1$, per valori $\theta < 1$ il valore di h cresce rapidamente. Si ha ad esempio $h(0.9) \approx 15$ e $h^2(0.9) \approx 200$, ovvero $h^2(\theta) \gg 1$ e quindi $\delta(\theta) \cong h^2(\theta)$, per cui la formula suindicata per il calcolo di u_a soffre del problema della cancellazione numerica. Le espressioni corrette da utilizzare (si veda la (1.1)) sono

$$\begin{cases} u_a(\theta) = \frac{1}{h + \sqrt{\delta}} \\ u_b(\theta) = h + \sqrt{\delta} \end{cases}$$

Infine si ha

$$u_b(\theta) = h + \sqrt{h^2 - 1} = h \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} \right)$$

$$\theta \lesssim 0.9 \Rightarrow \begin{cases} u_a(\theta) \cong \frac{1}{2h(\theta)} \ll 1 \\ u_b(\theta) \cong 2h(\theta) \gg 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{2a}(\theta) \ll I_2^* \\ I_{2b}(\theta) \gg I_2^* \end{cases} \quad (5.20)$$

cioè, come volavasi provare, occorre che la corrente I_2 si discosti di molto dal valore ottimo I_2^* affinché ne consegua un calo apprezzabile del rendimento.

Rendimento in energia

Per *regime pulsato* si intende la modalità di funzionamento per cui il trasformatore opera, in intervalli di tempo diversi, a valori della corrente significativamente differenti. Ad esempio durante le ore diurne la corrente può essere consistentemente maggiore rispetto alle ore notturne. Una definizione di rendimento più adatta a descrivere il funzionamento in regime pulsato è quella di *rendimento in energia*.

Per fissare il concetto, consideriamo il caso semplificato in cui nelle ore notturne la corrente assorbita sia nulla mentre nelle ore diurne sia pari ad un valore costante I_2 . Posto $T = 24$ h e detto ΔT l'intervallo delle ore diurne in cui il carico assorbe potenza non nulla (Fig ??) risulta

inserire figura con $I_2 = \text{cost}$ per $t \in (8 \text{ h}, 17 \text{ h})$ e $I_2 = 0$ per $t \in (0 \text{ h}, 8 \text{ h}) \cup (17 \text{ h}, 24 \text{ h})$

$$\delta = \frac{\Delta T}{T} \quad \text{duty cycle} \quad (5.21)$$

$$\eta^e(I_2 | V_1, \cos \phi_2) = \frac{P_{\text{carico}} \Delta T}{P_{\text{Fe}} T + P_{\text{Cu}} \Delta T + P_{\text{carico}} \Delta T} = \frac{P_{\text{carico}}}{\frac{P_{\text{Fe}}}{\delta} + P_{\text{Cu}} + P_{\text{carico}}} = \frac{V_2 I_2 \cos \phi_2}{\frac{V_1^2}{\delta R_{10}} + R_2 I_2^2 + V_2 I_2 \cos \phi_2} \quad (5.22)$$

$$\frac{d\eta^e}{dI_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_{\text{Fe}} = \delta P_{\text{Cu}} \\ I_2 = I_2^* \triangleq \frac{V_1}{\sqrt{\delta R_{10} R_2}} \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\eta_{\max}^e |_{V_1, \cos \phi_2} = \eta^e(I_2^* | V_1, \cos \phi_2) = \frac{V_2 I_2^* \cos \phi_2}{2 \frac{V_1^2}{\delta R_{10}} + V_2 I_2^* \cos \phi_2} = \frac{\frac{V_1 V_2}{\sqrt{\delta R_{10} R_2}} \cos \phi_2}{2 \frac{V_1^2}{\delta R_{10}} + \frac{V_1 V_2}{\sqrt{\delta R_{10} R_2}} \cos \phi_2} \quad (5.24)$$

5.2 Linee elettriche

Guarnieri-Stella Vol II

5.2.1 Caduta di tensione

Linea in continua a sbalzo

GSII.268 :

inserire figure che mostrano applicazione sovrapposizione

$$E_{KA} = E_A \quad (5.25)$$

$$E_{Kh} = -R_{Ah}I_h \quad (5.26)$$

$$E_K = E_{KA} + \sum_{h=1}^K E_{Kh} = E_A - \sum_{h=1}^K R_{Ah}I_h \quad (5.27)$$

$$\Delta E_{\max} = E_A - E_{\min} = E_A - E_K = \sum_{h=1}^K R_{Ah}I_h = 2\frac{\rho}{S} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah}I_h \quad \text{equazione dei momenti} \quad (5.28)$$

Linea in continua alimentata alle due estremità

GSII.269 :

inserire figure simili a quelle del libro

$$I_A + I_B = \sum_{h=1}^K I_h \quad (5.29)$$

$$\exists t : \sum_{h=1}^{t-1} I_h < I_A \leq \sum_{h=1}^t I_h \quad (5.30)$$

$$E_A - E_B = 2\frac{\rho}{S} \left(\sum_{h=1}^K \ell_{Ah}I_h - \ell_{AB}I_B \right) \quad (5.31)$$

$$E_A = E_B \Rightarrow I_B = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah}I_h \quad (5.32)$$

$$\text{analogamente } I_A = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh}I_h \quad \text{e poi } I_A = \sum_{h=1}^K I_h - I_B \quad (5.33)$$

$$\text{trovato } t, \text{ si ha } I_t = I_{tA} + I_{tB} \text{ e } \begin{cases} I_{tA} = I_A - \sum_{h=1}^{t-1} I_h \\ I_{tB} = I_t - I_{tA} \end{cases} \quad (5.34)$$

Quindi per valutare la caduta di tensione massima si considera il circuito spezzato in due ... (completare, vedi libro)

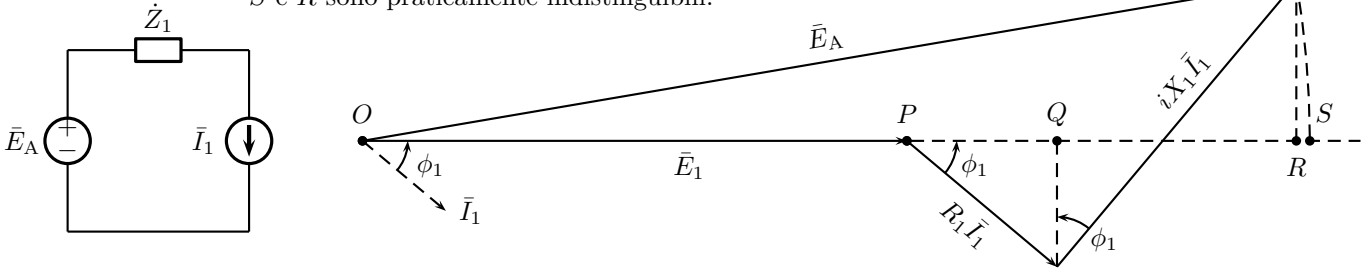
$$\Delta E_{\max} = 2\frac{\rho}{S} \left(\sum_{h=1}^{t-1} \ell_{Ah}I_h + \ell_{At}I_{tA} \right) \quad \text{oppure} \quad \Delta E_{\max} = 2\frac{\rho}{S} \left(\sum_{h=t+1}^K \ell_{Bh}I_h + \ell_{Bt}I_{tB} \right) \quad (5.35)$$

Linea in continua ad anello

Linea monofase a sbalzo con un solo carico

L'espressione della caduta di tensione è identica a quella trovata per il trasformatore

In questo diagramma fasoriale i moduli dei fasori che rappresentano le cadute di tensione resistiva e induttiva sono enormemente amplificati per chiarezza. In realtà essi sono molto più piccoli, il punto A si trova molto vicino al punto P , ed S e R sono praticamente indistinguibili.



$$\bar{E}_A = \bar{E}_1 + (R_1 + iX_1)\bar{I}_1 \quad (5.36)$$

$$\Delta E_{\max} = E_A - E_1 = \overline{OA} - \overline{OP} = \overline{OS} - \overline{OP} = \overline{PS} \cong \overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR} = R_1 I_1 \cos \phi_1 + X_1 I_1 \sin \phi_1 \quad (5.37)$$

$$\Delta E_{\max} = \Delta E^a + \Delta E^r \quad \Delta E^a = 2 \frac{\rho}{S} \ell_1 I_1 \cos \phi_1 \quad \Delta E^r = 2 X_{\ell} \ell_1 I_1 \sin \phi_1 \quad (5.38)$$

Linea monofase a sbalzo con più carichi

GSII.275 :

$$\bar{E}_h = E_h e^{i\alpha_h} \quad \bar{I}_h = I_h e^{i\beta_h} \quad (5.39)$$

$$\dot{Z}_{uh} = Z_{uh} e^{i\phi_h} \quad h\text{-mo carico} \quad (5.40)$$

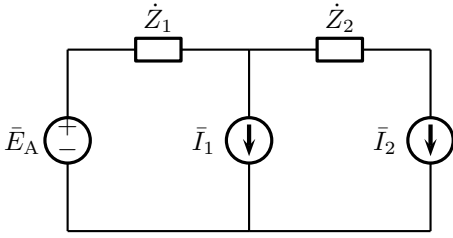
$$E_h e^{i\alpha_h} = \bar{E}_h = \dot{Z}_{uh} \bar{I}_h = Z_{uh} I_h e^{i(\phi_h + \beta_h)} \quad \alpha_h = \phi_h + \beta_h \quad (5.41)$$

$$\text{le tensioni sono approssimativamente tutte in fase, scegliamo } \alpha_h \cong \alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_h = \alpha_h - \phi_h \cong -\phi_h \quad (5.42)$$

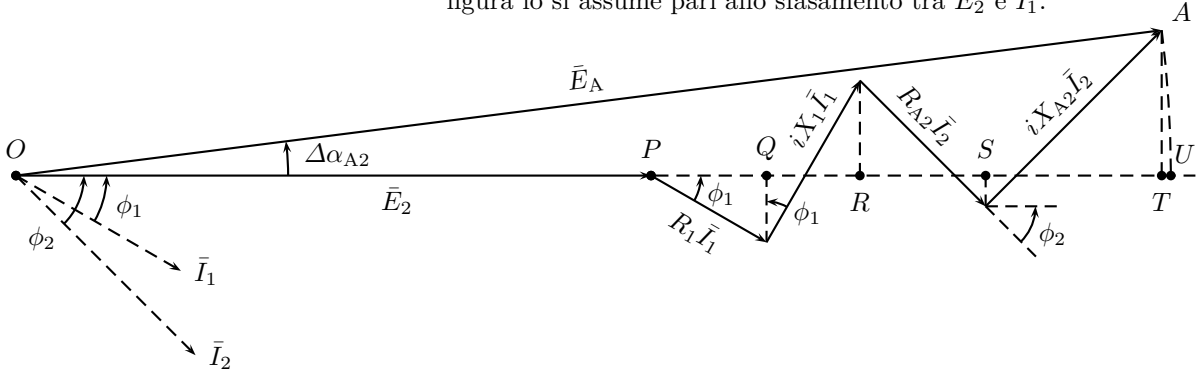
$$I_h^a \triangleq I_h \cos \phi_h \quad I_h^r \triangleq I_h \sin \phi_h \quad (5.43)$$

$$I_h \cong I_h e^{-i\phi_h} = I_h \cos \phi_h - i I_h \sin \phi_h = I_h^a - i I_h^r \quad (5.44)$$

Determiniamo l'espressione della caduta di tensione facendo riferimento al caso in cui vi siano due soli carichi (Fig ??), essendo il caso generale di fatto identico.



In questo diagramma fasoriale i moduli dei fasori che rappresentano le varie cadute di tensione resistive e induttive sono enormemente amplificati per chiarezza. In realtà essi sono molto più piccoli, e il punto A si trova molto vicino al punto P . Di conseguenza l'angolo $\Delta\alpha_{A2} = \alpha_A - \alpha_2$ è molto piccolo rispetto agli angoli ϕ_1 e ϕ_2 ovvero, come anticipato, le tensioni (sul generatore e sui vari carichi) si possono ritenere tutte in fase tra loro. Se così non fosse il diagramma non sarebbe corretto in quanto a rigore ϕ_1 è lo sfasamento tra \bar{E}_1 e \bar{I}_1 , mentre nella figura lo si assume pari allo sfasamento tra \bar{E}_2 e \bar{I}_1 .



$$\bar{E}_2 = \bar{E}_A - \sum_{h=1}^2 \dot{Z}_{Ah} \bar{I}_h = \bar{E}_A - \dot{Z}_1 \bar{I}_1 - (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \bar{I}_2 \quad (5.45)$$

$$\bar{E}_A = \bar{E}_2 + [R_1 + iX_1] \bar{I}_1 + [\underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{A2}} + i \underbrace{(X_1 + X_2)}_{X_{A2}}] \bar{I}_2 \quad (5.46)$$

$$\Delta E_{\max} = E_A - E_2 = \overline{OA} - \overline{OP} = \overline{OU} - \overline{OP} = \overline{PU} \quad (5.47)$$

$$\cong \overline{PT} = \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{ST} \quad (5.48)$$

$$= R_1 I_1 \cos \phi_1 + X_1 I_1 \sin \phi_1 + (R_1 + R_2) I_2 \cos \phi_2 + (X_1 + X_2) I_2 \sin \phi_2 \quad (5.49)$$

$$= \underbrace{\sum_{h=1}^2 R_{Ah} I_h \cos \phi_h}_{\Delta E^a} + \underbrace{\sum_{h=1}^2 X_{Ah} I_h \sin \phi_h}_{\Delta E^r} = \sum_{h=1}^2 R_{Ah} I_h^a + \sum_{h=1}^2 X_{Ah} I_h^r \quad (5.50)$$

$$\Delta E_{\max} = \Delta E^a + \Delta E^r = \sum_{h=1}^K R_{Ah} I_h \cos \phi_h + \sum_{h=1}^K X_{Ah} I_h \sin \phi_h = \sum_{h=1}^K R_{Ah} I_h^a + \sum_{h=1}^K X_{Ah} I_h^r \quad (5.51)$$

$$\Delta E^a = 2 \frac{\rho}{S} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h \cos \phi_h = 2 \frac{\rho}{S} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^a \quad (5.52)$$

$$\Delta E^r = 2 X_\ell \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h \sin \phi_h = 2 X_\ell \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^r \quad (5.53)$$

$$(5.54)$$

Linea monofase alimentata alle due estremità

GSII.276 :

inserire figure simili a quelle del libro

$$\bar{I}_B = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} \bar{I}_h = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} (I_h^a - i I_h^r) = \frac{1}{\ell_{AB}} \underbrace{\sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^a}_{\triangleq I_B^a} - i \frac{1}{\ell_{AB}} \underbrace{\sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^r}_{\triangleq I_B^r} \quad (5.55)$$

$$\bar{I}_A = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} \bar{I}_h = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} (I_h^a - i I_h^r) = \frac{1}{\ell_{AB}} \underbrace{\sum_{h=1}^K \ell_{Bh} I_h^a}_{\triangleq I_A^a} - i \underbrace{\frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} I_h^r}_{\triangleq I_A^r} \quad (5.56)$$

$$\begin{cases} I_B^a = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^a \\ I_B^r = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Ah} I_h^r \end{cases} \quad \begin{cases} I_A^a = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} I_h^a \\ I_A^r = \frac{1}{\ell_{AB}} \sum_{h=1}^K \ell_{Bh} I_h^r \end{cases} \quad (5.57)$$

$$\begin{cases} I_A^a + I_B^a = \sum_{h=1}^K I_h^a & \exists t : \sum_{h=1}^{t-1} I_h^a < I_A^a \leq \sum_{h=1}^t I_h^a \Rightarrow \text{determino } t \\ I_A^r + I_B^r = \sum_{h=1}^K I_h^r & \exists s : \sum_{h=1}^{s-1} I_h^r < I_A^r \leq \sum_{h=1}^s I_h^r \Rightarrow \text{determino } s \end{cases} \quad (5.58)$$

$$\begin{cases} \text{trovato } t, \text{ si ha } I_t^a = I_{tA}^a + I_{tB}^a \text{ e } \begin{cases} I_{tA}^a = I_A^a - \sum_{h=1}^{t-1} I_h^a \\ I_{tB}^a = I_t^a - I_{tA}^a \end{cases} \\ \text{trovato } s, \text{ si ha } I_s^r = I_{sA}^r + I_{sB}^r \text{ e } \begin{cases} I_{sA}^r = I_A^r - \sum_{h=1}^{s-1} I_h^r \\ I_{sB}^r = I_s^r - I_{sA}^r \end{cases} \end{cases} \quad (5.59)$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \Delta E_t^a = 2 \frac{\rho}{S} (\sum_{h=1}^{t-1} \ell_{Ah} I_h^a + \ell_{At} I_{tA}^a) = \Delta E_{\max}^a \\ \Delta E_t^r = 2 \frac{\rho}{S} (\sum_{h=1}^{t-1} \ell_{Ah} I_h^r + \ell_{At} I_{tA}^r) \end{cases} & \Delta E_t = \Delta E_t^a + \Delta E_t^r \\ \begin{cases} \Delta E_s^a = 2 \frac{\rho}{S} (\sum_{h=1}^{s-1} \ell_{Ah} I_h^a + \ell_{As} I_{sA}^a) \\ \Delta E_s^r = 2 \frac{\rho}{S} (\sum_{h=1}^{s-1} \ell_{Ah} I_h^r + \ell_{As} I_{sA}^r) = \Delta E_{\max}^r \end{cases} & \Delta E_s = \Delta E_s^a + \Delta E_s^r \end{cases} \quad (5.60)$$

$$\Delta E_{\max} = \max(\Delta E_t, \Delta E_s) \quad (5.61)$$

$$\text{oppure } \Delta E_{\max} = \Delta E_{\max}^a + \Delta E_{\max}^r \quad (\text{criterio cautelativo}) \quad (5.62)$$

Linea monofase ad anello

Linee trifasi

5.2.2 Comportamento termico delle linee

5.2.3 Dimensionamento delle linee elettriche

5.2.4 Confronto tra linee elettriche

5.3 Impianti di terra

5.4 Interruttore automatico

5.4.1 Protezione dal cortocircuito

La norma CEI 64-8 stabilisce che, a protezione dei circuiti di un impianto, debbano essere previsti dispositivi atti a interrompere le correnti di cortocircuito, prima che queste diventino pericolose a causa degli effetti termici e meccanici generati nei conduttori e nelle connessioni.

Per poter dimensionare correttamente l'impianto elettrico e i dispositivi di protezione è necessario conoscere il valore della *corrente presunta di cortocircuito* nel punto dove si intende realizzare il sistema di protezione stesso. La conoscenza di tale valore permette infatti di scegliere opportunamente gli apparecchi di protezione in termini dei relativi poteri di interruzione e di chiusura, e di verificare la tenuta agli sforzi elettrodinamici dei supporti sbarre installati nei quadri elettrici e dei condotti sbarre.

... work in progress

... continuare dal doc Guida+Criteri+Progettazione_DE08G_CP_23216.pdf

... caratterizzazione della Icc, pag 47

... condizioni generali di protezione, protezione dei cavi, pag 54

5.4.2 Corrente di guasto e resistenza di terra

... work in progress ...

In un impianto monofase si dice che si è verificato un guasto quando si ha un cortocircuito tra neutro e fase in un qualche punto dell'impianto stesso. La corrente di guasto è quindi la corrente di cortocircuito che si ha cortocircuitando neutro e fase, cioè $I_g = \frac{E}{R_i}$, dove $E = 220$ Volt, e R_i è la resistenza interna di Thevenin nel punto dell'impianto in cui si verifica il cortocircuito (si fa quindi l'ipotesi approssimata di essere in condizioni di linearità e di poter così applicare Thevenin; inoltre si è considerata per semplicità di esposizione una impedenza interna puramente resistiva: in generale si veda GSIL.308 nota 2). Quindi, contrariamente a quanto si possa leggere da alcune fonti, la corrente di guasto è una grandezza ben definita e la sua definizione non richiede alcun riferimento alla grandezza resistenza di terra. Naturalmente dalla definizione si capisce che la I_g dipende dal punto in cui si verifica il guasto.

Le norme prescrivono che la tensione di contatto V_c dovuta ad un eventuale guasto deve essere inferiore a $V_{cmax} = 50$ Volt. Nota la I_g (e quindi anche la R_i), e in assenza di ulteriori accorgimenti, per avere $V_c < V_{cmax}$, sarà necessario avere la resistenza di terra R_t significativamente inferiore rispetto alla R_i , e *approssimativamente* calcolabile considerando ad esempio il partitore di tensione $V_c = \frac{ER_t}{R_i+R_t} = \frac{E}{1+R_i/R_t} < V_{cmax}$, da cui $\frac{E}{V_{cmax}} - 1 < \frac{R_i}{R_t}$. Essendo $\frac{E}{V_{cmax}} - 1 = \frac{220}{50} - 1 = 3.4 > 0$ la disequazione diventa $R_t < \frac{R_i}{\frac{E}{V_{cmax}} - 1} = \frac{R_i}{3.4} = 0.29R_i$.

Ottenere una R_t così piccola (visto che R_i è già molto piccola, valori tipici $R_i =$ qualche decimo di Ohm) è difficile. Quindi, data la R_t che si è riusciti ad ottenere sull'impianto (ad esempio $R_t = 3$ Ohm), si può considerare di mettere un interruttore di protezione con corrente di intervento nominale I_{in} tale da impedire che la V_c possa superare V_{cmax} (cioè scegliendo I_{in} tale che $V_c = R_t I_{in} < V_{cmax}$, ovvero $I_{in} < \frac{V_{cmax}}{R_t} = \frac{50}{3} = 16.7$ A nel caso specifico), anche se questa cosa è un po' rischiosa perchè se l'interruttore si guasta (ad esempio invecchia) potrebbe non intervenire.

E inoltre poi si mette negli impianti anche l'interruttore differenziale (obbligatorio per legge).

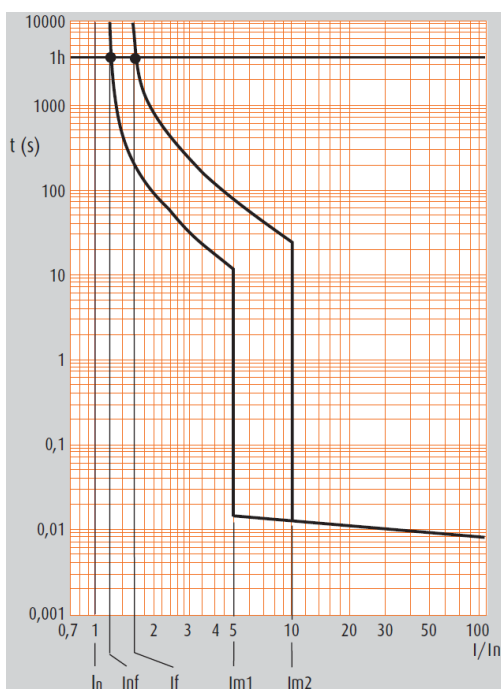
... work in progress

5.4.3 Dati di targa dell'interruttore

5.4.4 Correnti di riferimento della caratteristica di intervento

... work in progress ...

bticino cartaceo p10



Costruire un interruttore che abbia esattamente una determinata caratteristica di intervento non è possibile per via delle inevitabili tolleranze introdotte durante il processo di fabbricazione. Per tale motivo nelle norme non viene specificata una singola caratteristica di intervento ma due curve limite inferiore e superiore. Dunque ad esempio la caratteristica di intervento di un interruttore che rispetta la norma a cui questa figura si riferisce si troverà all'interno della regione delimitata dalle due curve limite indicate.

aggiungere figure e discussione da

http://www.elektro.it/elektro_sicurel_html/sicurel_32_5.html

Le caratteristiche di intervento degli interruttori automatici sono caratterizzate dalle seguenti grandezze di riferimento:

I_n = corrente nominale

È il valore di corrente in aria libera che l'apparecchio può portare in servizio ininterrotto. Per gli apparecchi conformi alla norma CEI EN 60898 questo valore non deve essere superiore a 125 A, per gli interruttori invece conformi alla norma CEI EN 60947-2 non sono definiti limiti.

È anche il valore di corrente alla quale si riferiscono tutte le prescrizioni costruttive dell'apparecchio e che rappresenta il valore unitario nella caratteristica di intervento (con asse delle ascisse normalizzato)

t_c = **tempo convenzionale** rispetto al quale sono definite le correnti I_{nf} e I_f (si veda anche la tabella a seguire)

 I_{nf} = corrente di non funzionamento o corrente convenzionale di non intervento

Massimo valore di sovracorrente che *non* fa intervenire l'interruttore magnetotermico (o elettronico) entro il tempo convenzionale t_c

 I_f = corrente di funzionamento o corrente convenzionale di intervento

Minimo valore di sovracorrente che fa intervenire *certamente* l'interruttore magnetotermico (o elettronico) entro il tempo convenzionale t_c

I_{m1} = *Minima* sovracorrente che *può* far intervenire lo sganciatore elettromagnetico

I_{m2} = *Minima* sovracorrente che *fa certamente* intervenire lo sganciatore elettromagnetico

Queste grandezze caratteristiche assumono diversi valori in funzione della Norma di riferimento. In particolare, nel caso degli interruttori con parametri *non regolabili*, le Norme di riferimento sono la CEI EN 60898 e la CEI EN 60947-2, e le correnti sono specificate nel seguente prospetto

Norma	I_n [A]	I_{nf}/I_n	I_f/I_n	t_c
CEI EN 60898 (CEI 23-3 IV ed.)	≤ 63	1.13	1.45	1 h
	> 63	1.13	1.45	2 h
$I_n \leq 125A$	≤ 32	—	2.55	1÷60 s
	> 32	—	2.55	1÷120 s
CEI EN 60947-2	≤ 63	1.05	1.30	1 h
	> 63	1.05	1.30	2 h

Come si vede risulta $I_{nf} > I_n$ e $I_f > I_n$. Tuttavia, alcuni interruttori hanno i valori delle correnti di riferimento regolabili, nel qual caso I_{nf} e I_f possono essere impostate a valori inferiori alla I_n (vedi bticino Megabreak_03.pdf p18, ma anche il bticino cartaceo)

5.4.5 Potere di interruzione

Il potere di interruzione I_{pi} non deve essere inferiore alla corrente presunta di cortocircuito (cioè la corrente di guasto) calcolata nel punto di installazione dell'interruttore. In genere per gli impianti destinati ad uso residenziale e similare si fa riferimento al potere di interruzione verificato secondo CEI 23-3 e per gli altri casi secondo CEI 17-5.

In caso di targa con più poteri di interruzione si deve scegliere quello pertinente ai parametri elettrici (tensione, frequenza, tipo di corrente) della linea protetta.

È ammesso scegliere la categoria meno gravosa (P1 secondo CEI 17-5 e I_{cu} secondo IEC 947-2).

... work in progress

5.4.6 altro

Per proteggere l'impianto da eventuali correnti di guasto maggiori del potere di interruzione si può mettere un fusibile in serie all'interruttore

... figura GSII.329 caratteristica complessiva interruttore+fusibile

Capitolo 6

Compendio

6.1 Classificazioni

6.1.1 Classificazione dei bipoli

- **Bipolo tempo-variante**

$$f(v(t), i(t), t) = 0$$

- **Bipolo tempo-invariante**

$$f(v(t), i(t)) = 0$$

- **Bipolo a-dinamico**

$f(v(t), i(t), t) = 0$ [$f(v(t), i(t)) = 0$ nel caso tempo-invariante] è una relazione algebrica

- **Bipolo dinamico**

$f(v(t), i(t), t) = 0$ [oppure $f(v(t), i(t)) = 0$] è una relazione differenziale, o integrale, o integro-differenziale

– Esempio: $v(t) = L(t) \frac{di(t)}{dt}$ [oppure $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$]

- **Bipolo a-dinamico a caratteristica lineare**

$$k_0(t) + k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) = 0$$

[$k_0 + k_1v(t) + k_2i(t) = 0$ per il caso tempo-invariante]

- **Bipolo a-dinamico lineare**

$$k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) = 0$$

[$k_1v(t) + k_2i(t) = 0$ per il caso tempo invariante]

– Esempio 1 (tempo-variante): $v(t) - R(t)i(t) = 0$, per una lampadina ad incandescenza che, quando viene accesa, si riscalda e, per effetto della variazione di temperatura, varia la resistività del filamento nel tempo e quindi varia la resistenza

– Esempio 2 (tempo-invariante): $v(t) = Ri(t)$, con R costante

- **Bipolo dinamico a caratteristica lineare**

$$k_0(t) + k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) + k_3(t) \frac{dv}{dt} + k_4(t) \frac{di}{dt} = 0 \text{ (differenziale del primo ordine)}$$

$$k_0(t) + k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) + k_3(t) \frac{dv}{dt} + k_4(t) \frac{di}{dt} + k_5(t) \frac{d^2v}{dt^2} + k_6(t) \frac{d^2i}{dt^2} = 0 \text{ (differenziale del secondo ordine)}$$

[$k_0 + k_1v(t) + k_2i(t) + k_3 \frac{dv}{dt} + k_4 \frac{di}{dt} + k_5 \frac{d^2v}{dt^2} + k_6 \frac{d^2i}{dt^2} = 0$ per il caso tempo-invariante]

- **Bipolo dinamico lineare**

$$k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) + k_3(t) \frac{dv}{dt} + k_4(t) \frac{di}{dt} = 0 \text{ (differenziale del primo ordine)}$$

$$k_1(t)v(t) + k_2(t)i(t) + k_3(t) \frac{dv}{dt} + k_4(t) \frac{di}{dt} + k_5(t) \frac{d^2v}{dt^2} + k_6(t) \frac{d^2i}{dt^2} = 0 \text{ (differenziale del secondo ordine)}$$

[$k_1v(t) + k_2i(t) + k_3 \frac{dv}{dt} + k_4 \frac{di}{dt} + k_5 \frac{d^2v}{dt^2} + k_6 \frac{d^2i}{dt^2} = 0$ per il caso tempo-invariante]

– Esempio 1 (tempo-variante): $i(t) - C(t) \frac{dv(t)}{dt} = 0$, per un condensatore la cui distanza tra le armature viene fatta variare nel tempo

– Esempio 2 (tempo-invariante): $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$, con C costante

- **Bipolo a-dinamico passivo**

$$p^{\text{as}}(t) \geq 0 \quad (\text{cioè } v(t)i(t) \geq 0 \text{ nel caso di convenzione dell'utilizzatore})$$

ovvero, avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore, la caratteristica si trova tutta nel primo e terzo quadrante

- **Bipolo a-dinamico strettamente passivo (dissipativo)**

$$p^{\text{as}}(t) = v(t)i(t) > 0, \text{ e } p^{\text{as}}(t) = 0 \text{ è possibile solo se sono nulle contemporaneamente } v(t) \text{ e } i(t)$$

cioè, avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore, la caratteristica si trova tutta nel primo e terzo quadrante e non tocca gli assi coordinati tranne che nell'origine

- **Bipolo a-dinamico asintoticamente passivo**

- **Bipolo dinamico passivo**

non può erogare più energia (lavoro elettrico) di quanto ne abbia assorbita in precedenza

- **Bipolo dinamico conservativo**

‘Conserva’ il lavoro elettrico assorbito sotto forma di energia interna, senza trasformarlo in altra forma di energia. L’energia viene conservata internamente al bipolo sotto forma di energia immagazzinata nel campo elettromagnetico e nei materiali di cui è costituito. L’energia immagazzinata può essere poi restituita al circuito in cui il bipolo è inserito

- Esempio 1: L’induttore è conservativo perchè immagazzina il lavoro elettrico assorbito, in parte sotto forma di energia interna del campo *magnetico* e in parte in energia interna dei materiali presenti nel componente; analogamente il condensatore è conservativo perchè immagazzina il lavoro elettrico assorbito, in parte sotto forma di energia interna al campo *elettrico* e in parte in energia interna dei materiali presenti;
- Esempio 2: Il resistore non è conservativo perchè assorbe lavoro elettrico e lo trasforma integralmente (o in massima parte) in calore (eventualmente in parte anche in radiazione elettromagnetica, ad esempio la luce emessa dalle lampadine ad incandescenza)

- **Bipolo generalizzato (o sottorete) a-dinamico non inerte**

contiene al suo interno generatori ideali

6.1.2 Classificazione dei componenti a più terminali

La classificazione dei componenti a più terminali costituisce la naturale generalizzazione di quella relativa ai bipoli, ad esempio:

- **Doppio bipolo a-dinamico passivo**

$p^{\text{as}}(t) \geq 0$ (cioè $v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \geq 0$ nel caso di convenzione dell’utilizzatore ad entrambe le porte)

ovvero, avendo fatto la convenzione dell’utilizzatore ad entrambe le porte, le 2 relazioni caratteristiche sono tali da rendere soddisfatta la disuguaglianza indicata

- Esempio: Il trasformatore ideale è un doppio bipolo a-dinamico perchè le sue relazioni caratteristiche sono algebriche ($\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = T$ e $\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{1}{T}$ ad esempio nel caso di convenzione dell’utilizzatore ad entrambe le porte). Esso è trasparente alle potenze: ($p(t) = v_1i_1 + v_2i_2 = v_1i_1 + \frac{v_1}{T}(-Ti_1) = 0$) e quindi è passivo

- **Doppio bipolo dinamico passivo**

$L^{\text{er}}(t_1, t_2) \leq L^{\text{as}}(-\infty, t_1)$ (dove $L^{\text{er}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p^{\text{er}}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} [-v_1(t)i_1(t) - v_2(t)i_2(t)]dt$, nel caso di convenzione dell’utilizzatore ad entrambe le porte)

Non può erogare più energia (lavoro elettrico) di quanto ne abbia assorbito in precedenza

- Esempio 1: Il trasformatore (mutuo accoppiamento induttivo senza perdite) è un doppio bipolo dinamico perchè le sue relazioni caratteristiche sono differenziali. Il fatto che è passivo lo si può ad esempio dedurre dal fatto che il suo modello equivalente è costituito da bipoli passivi (induttori) e da un trasformatore ideale, e utilizzando il teorema di conservazione delle potenze
- Esempio 2: Il trasformatore reale (mutuo accoppiamento induttivo con perdite) è un doppio bipolo dinamico passivo, perchè il suo modello equivalente è costituito da bipoli passivi (resistori e induttori) e da un trasformatore ideale

6.1.3 Classificazione dei circuiti

- **Circuito lineare**

È composto da elementi (bipoli, N -poli, M -bipoli) le cui relazioni costitutive sono relazioni a caratteristica lineare

- **Circuito non lineare**

Almeno uno degli elementi componenti il circuito è descritto da relazioni costitutive non lineari

- **Circuito tempo-invariante**

È composto da elementi le cui relazioni costitutive non dipendono esplicitamente dal tempo

- **Circuito dissipativo**

È tale che, nell’evoluzione libera, l’energia immagazzinata in tutti i componenti costituenti il circuito tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow \infty$

6.2 Relazioni essenziali

6.2.1 Potenza scambiata da un bipolo in regime sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha) \quad i(t) = I_M \cos(\omega t + \beta) \quad \phi = \alpha - \beta \quad \beta = \alpha - \phi \quad \alpha + \beta = 2\alpha - \phi$$

$$p(t) = v(t)i(t) = V_M I_M \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) = \frac{V_M I_M}{2} [\cos \phi + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)]$$

$$= VI \cos \phi + VI \cos(2\omega t + \alpha + \beta) = P + p_f(t)$$

6.2.2 Espressioni nel metodo dei fasori

$$\bar{V} = V e^{i\alpha} \quad \bar{I} = I e^{i\beta} \quad \phi = \alpha - \beta$$

$$\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \quad \dot{Z} = R + iX \quad \frac{\bar{Z}}{Z} = \frac{R}{Z} + i \frac{X}{Z} \quad \tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{X/Z}{R/Z} = \frac{X}{R}$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{R + iX} = \frac{R - iX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - i \frac{X}{Z^2} = G + iB$$

$$P = VI \cos \phi = VI \frac{R}{Z} = \frac{V}{Z} IR = RI^2$$

$$Q = VI \sin \phi = VI \frac{X}{Z} = \frac{V}{Z} IX = XI^2$$

$$\dot{A} = \bar{V} \dot{\bar{I}} = VI e^{i\phi} = VI \cos \phi + iVI \sin \phi = P + iQ$$

Casi particolari

$$R: \quad \dot{A}_R = \bar{V} \dot{\bar{I}} = R \bar{I} \dot{\bar{I}} = RI^2 = R \left(\frac{V}{R} \right)^2 = \frac{V^2}{R} \quad P_R = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad Q_R = 0$$

$$L: \quad \dot{A}_L = \bar{V} \dot{\bar{I}} = iX_L \bar{I} \dot{\bar{I}} = iX_L I^2 = iX_L \left(\frac{V}{X_L} \right)^2 = i \frac{V^2}{X_L} \quad Q_L = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} \quad P_L = 0$$

$$C: \quad \dot{A}_C = \bar{V} \dot{\bar{I}} = -iX_C \bar{I} \dot{\bar{I}} = -iX_C I^2 = -iX_C \left(\frac{V}{X_C} \right)^2 = -i \frac{V^2}{X_C} \quad Q_C = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C} \quad P_C = 0$$

6.2.3 Conservazione delle potenze in regime sinusoidale

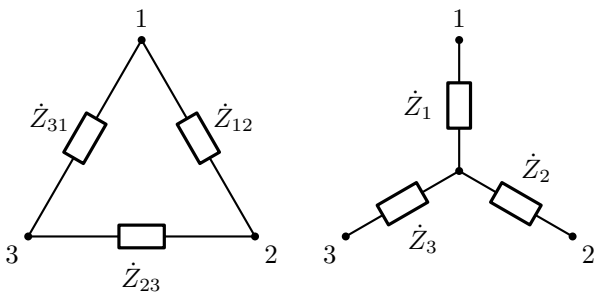
$$\sum_1^\ell \bar{V}_k \dot{\bar{I}}_k = 0 \quad \sum_1^\ell (P_k + iQ_k) = 0$$

$$\sum_1^\ell P_k = 0 \quad \sum_1^\nu P_k^{\text{gen}} = \sum_{\nu+1}^\ell P_k^{\text{ass}} = \sum_{\nu+1}^\ell R_k I_k^2 \quad (\text{con } R_k = 0 \text{ in quei rami in cui la parte resistiva è assente})$$

$$\sum_1^\ell Q_k = 0 \quad \sum_1^\nu Q_k^{\text{gen}} = \sum_{\nu+1}^\ell Q_k^{\text{ass}} = \sum_{\nu+1}^\ell X_k I_k^2 = \quad (\text{con } X_k = 0 \text{ in quei rami in cui la parte reattiva è assente})$$

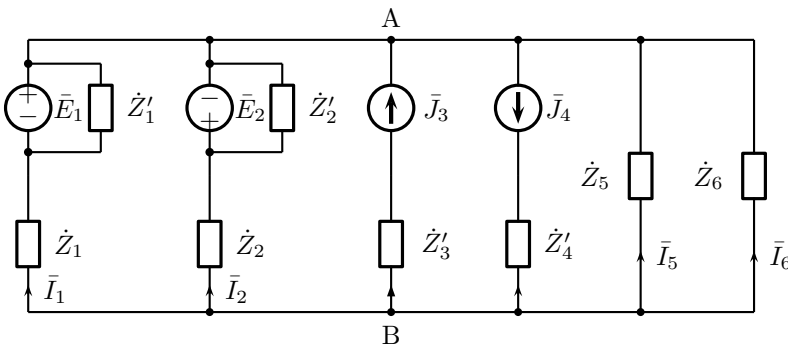
$$= \sum_k X_{Lk} I_{Lk}^2 - \sum_k X_{Ck} I_{Ck}^2 = \sum_k \frac{V_{Lk}^2}{X_{Lk}} - \sum_k \frac{V_{Ck}^2}{X_{Ck}}$$

6.2.4 Trasformazioni Triangolo ↔ Stella (Δ ↔ Y)



$$\begin{aligned} \dot{Z}_{s\Delta} &= \dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31} & \dot{Y}_{pY} &= \frac{1}{\dot{Z}_{pY}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3} \\ \dot{Z}_1 &= \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{s\Delta}} & \dot{Z}_{12} &= \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_{pY}} \\ \dot{Z}_2 &= \frac{\dot{Z}_{23}\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{s\Delta}} & \dot{Z}_{23} &= \frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_{pY}} \\ \dot{Z}_3 &= \frac{\dot{Z}_{31}\dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{s\Delta}} & \dot{Z}_{31} &= \frac{\dot{Z}_3\dot{Z}_1}{\dot{Z}_{pY}} \\ \dot{Z}_Y &= \frac{\dot{Z}_\Delta}{3} \end{aligned}$$

6.2.5 Formula di Millman



Si applica quando ci sono un certo numero di rami tutti connessi in parallelo. In questo esempio tra i nodi A e B ci sono 6 rami in parallelo. Si ha

$$\begin{aligned} \bar{V}_{AB} &= \bar{E}_1 - \dot{Z}_1 \bar{I}_1 & \bar{V}_{AB} &= -\bar{E}_2 - \dot{Z}_2 \bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_1} & \bar{I}_2 &= \frac{-\bar{E}_2 - \bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_2} \\ \bar{I}_3 &= \bar{J}_3 & \bar{I}_4 &= -\bar{J}_4 & \bar{I}_5 &= \frac{-\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_5} & \bar{I}_6 &= \frac{-\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_6} \end{aligned}$$

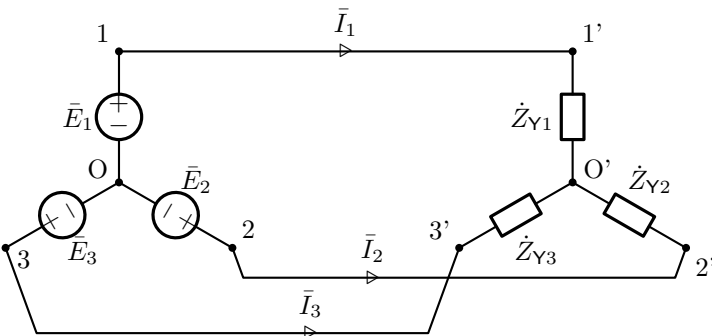
Imponendo la legge di Kirchhoff al *macronodo* B:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 \bar{I}_k &= 0 & \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_1} + \frac{-\bar{E}_2 - \bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_2} + \bar{J}_3 - \bar{J}_4 - \frac{\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_5} - \frac{\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_6} &= 0 \\ \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} - \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \bar{J}_3 - \bar{J}_4 &= \bar{V}_{AB} \left(\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_5} + \frac{1}{\dot{Z}_6} \right) \\ \bar{V}_{AB} &= \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} - \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \bar{J}_3 - \bar{J}_4}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_5} + \frac{1}{\dot{Z}_6}} \end{aligned}$$

Si noti che $\dot{Z}'_1 \dot{Z}'_2 \dot{Z}'_3 \dot{Z}'_4$ non influenzano la \bar{V}_{AB}

6.3 Trifase

6.3.1 Carico a Stella



$$\begin{aligned} e_1(t) &= E_{M1} \sin(\omega t + \alpha_1) & \bar{E}_1 &= E_1 e^{i\alpha_1} \\ e_2(t) &= E_{M2} \sin(\omega t + \alpha_2) & \bar{E}_2 &= E_2 e^{i\alpha_2} \\ e_3(t) &= E_{M3} \sin(\omega t + \alpha_3) & \bar{E}_3 &= E_3 e^{i\alpha_3} \end{aligned}$$

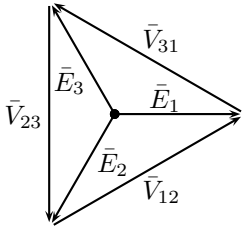
$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_{Y1}} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_{Y2}} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_{Y3}}}{\frac{1}{\dot{Z}_{Y1}} + \frac{1}{\dot{Z}_{Y2}} + \frac{1}{\dot{Z}_{Y3}}}$$

Sistema di tensioni diretto, cioè $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{2}{3}\pi$, e scegliendo $\alpha_1 = 0$:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= E_{M1} \sin \omega t & \bar{E}_1 &= E_1 \\ e_2(t) &= E_{M2} \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) & \bar{E}_2 &= E_2 e^{-i\frac{2}{3}\pi} \\ e_3(t) &= E_{M3} \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi) & \bar{E}_3 &= E_3 e^{-i\frac{4}{3}\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_{12} &= \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = V_{12} e^{i\gamma_{12}} \\ \bar{V}_{23} &= \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = V_{23} e^{i\gamma_{23}} \\ \bar{V}_{31} &= \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = V_{31} e^{i\gamma_{31}}\end{aligned}$$

Dalla legge di Kirchhoff alle maglie si vede che risulta sempre $\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0$, mentre invece in generale $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 \neq 0$. Se il sistema di tensioni è diretto e simmetrico ($E_1 = E_2 = E_3 = E$) allora:



$$\begin{aligned}\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 &= E(1 + e^{-i\frac{2}{3}\pi} + e^{-i\frac{4}{3}\pi}) = 0 \\ \bar{V}_{12} &= \sqrt{3} \bar{E}_1 e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E e^{i(\alpha_1 + \frac{\pi}{6})} = V e^{i\frac{\pi}{6}} \\ \bar{V}_{23} &= \sqrt{3} \bar{E}_2 e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E e^{i(\alpha_2 + \frac{\pi}{6})} = V e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ \bar{V}_{31} &= \sqrt{3} \bar{E}_3 e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E e^{i(\alpha_3 + \frac{\pi}{6})} = V e^{i\frac{5}{6}\pi}\end{aligned} \quad V = \sqrt{3} E$$

Sistema di tensioni diretto e simmetrico e carico equilibrato ($\dot{Z}_{Y1} = \dot{Z}_{Y2} = \dot{Z}_{Y3} = \dot{Z}_Y = Z_Y e^{i\phi}$):

$$\bar{V}_{O'O} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_k = \frac{\bar{E}_k}{\dot{Z}_Y} = \frac{E}{Z_Y} e^{i(\alpha_k - \phi)}$$

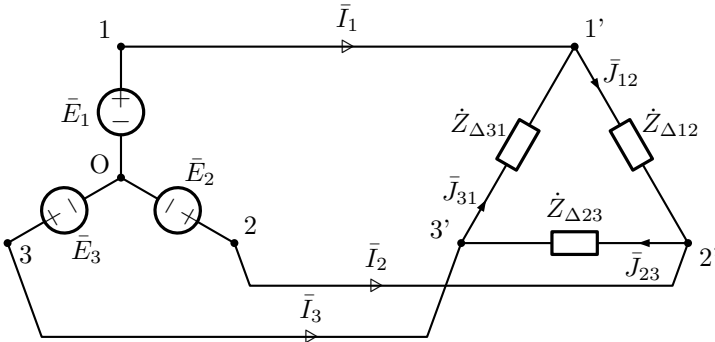
$$\begin{aligned}p(t) &= e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 = \sum_{k=1}^3 E_M I_M \sin(\omega t + \alpha_k) \sin(\omega t + \alpha_k - \phi) = E_M I_M \sum_{k=1}^3 \frac{\cos \phi - \cos(2\omega t + 2\alpha_k - \phi)}{2} \\ &= \frac{3E_M I_M \cos \phi}{2} - \frac{E_M I_M}{2} \sum_{k=1}^3 \cos(2\omega t + 2\alpha_k - \phi) = 3EI \cos \phi - EI \sum_{k=0}^2 \cos(2\omega t - \frac{4k}{3}\pi - \phi) = 3EI \cos \phi\end{aligned}$$

$$p(t) = P = 3EI \cos \phi = \sqrt{3}VI \cos \phi = A \cos \phi$$

$$Q = 3EI \sin \phi = \sqrt{3}VI \sin \phi = A \sin \phi$$

$$A = 3EI = \sqrt{3}VI$$

6.3.2 Carico a Triangolo



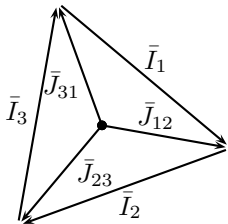
$$\bar{J}_{hk} = \frac{\bar{V}_{hk}}{\dot{Z}_{\Delta hk}}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23}$$

Applicando la legge di Kirchhoff ad un macronodo che comprende le tre impedenze, si comprende che risulta sempre $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$, ma in generale invece $\bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} + \bar{J}_{31} \neq 0$ (come si vede nella seguente figura considerando un caso in cui il punto centrale è spostato ad esempio verso \bar{I}_1 , in modo che $\bar{J}_{12} + \bar{J}_{31} \approx 0$, e quindi $\bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} + \bar{J}_{31} \approx \bar{J}_{23} \neq 0$). Se invece il sistema di tensioni è simmetrico e il carico è equilibrato (quindi $\dot{Z}_{\Delta 12} = \dot{Z}_{\Delta 23} = \dot{Z}_{\Delta 31} = \dot{Z}_\Delta = Z_\Delta e^{i\phi}$) allora:



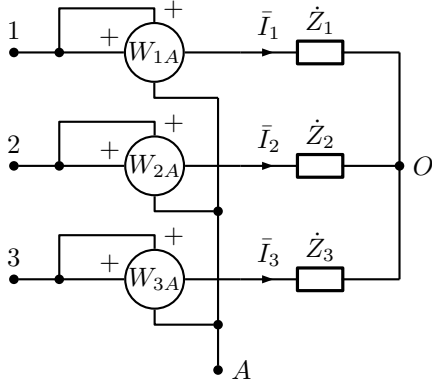
$$\bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} + \bar{J}_{31} = \frac{\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31}}{\dot{Z}_\Delta} = 0$$

$$J = J_{12} = J_{23} = J_{31} = \left| \frac{\bar{V}_{hk}}{\dot{Z}_{\Delta hk}} \right| = \frac{V}{Z_\Delta}$$

$$I = \sqrt{3} J$$

6.3.3 Misura della potenza e Inserzione Aron nei sistemi trifase a 3 fili

In figura il nodo A può essere connesso a piacimento: poiché la linea voltmetrica dei wattmetri si comporta come un circuito aperto in essa la corrente è nulla, e quindi il tutto funzionerà sempre alla stessa maniera indipendentemente da dove venga connesso il morsetto A . Infatti dalla derivazione riportata si vede che la somma delle letture dei 3 wattmetri coincide sempre con la potenza assorbita dal carico trifase.



$$\text{Sistema trifase a 3 fili} \Rightarrow \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

$$P = P_{\dot{Z}_1} + P_{\dot{Z}_2} + P_{\dot{Z}_3}$$

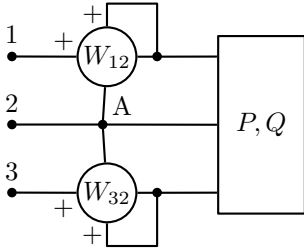
$$P_{\dot{Z}_k} = \text{Re}(\bar{V}_{kO} \check{I}_k) = \text{Re}(\bar{E}_k \check{I}_k) = \text{Re}(E_k I_k e^{i\phi_k}) = E_k I_k \cos \phi_k$$

$$\begin{aligned} W_{1A} + W_{2A} + W_{3A} &= \text{Re}(\bar{V}_{1A} \check{I}_1 + \bar{V}_{2A} \check{I}_2 + \bar{V}_{3A} \check{I}_3) \\ &= \text{Re}[(\bar{V}_{1O} + \bar{V}_{OA}) \check{I}_1 + (\bar{V}_{2O} + \bar{V}_{OA}) \check{I}_2 + (\bar{V}_{3O} + \bar{V}_{OA}) \check{I}_3] \\ &= \text{Re}[\bar{V}_{1O} \check{I}_1 + \bar{V}_{2O} \check{I}_2 + \bar{V}_{3O} \check{I}_3 + \bar{V}_{OA}(\check{I}_1 + \check{I}_2 + \check{I}_3)] \\ &= \text{Re}[\bar{V}_{1O} \check{I}_1 + \bar{V}_{2O} \check{I}_2 + \bar{V}_{3O} \check{I}_3] = P_{\dot{Z}_1} + P_{\dot{Z}_2} + P_{\dot{Z}_3} = P \end{aligned}$$

In particolare il morsetto A si può connettere ad una delle tre linee. Se lo si collega ad esempio alla linea 2 la linea voltmetrica del secondo wattmetro sarà in cortocircuito e la corrispondente tensione sarà nulla, da cui $W_{2A} = W_{22} = 0$ e $P = W_{1A} + W_{3A} = W_{12} + W_{32}$. Dunque il secondo wattmetro diventa inutile e si può non inserire affatto, come mostrato nella figura seguente. Si parla in tal caso di *inserzione Aron*.

Si noti che non si è fatta alcuna ipotesi (tranne il fatto che il sistema trifase sia a 3 fili) quindi, per la validità dell'espressione $P = W_{12} + W_{32}$, non è richiesto che il sistema di tensioni sia simmetrico, né tantomeno che il carico sia equilibrato.

Si noti inoltre che per sistemi trifase a 4 fili dissimmetrici e/o squilibrati risulta $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \neq 0$, quindi la dimostrazione di cui sopra cade in difetto e l'inserzione di Aron non si può utilizzare. Per sistemi trifase a 4 fili simmetrici ed equilibrati invece l'equazione $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$ è soddisfatta, e quindi l'inserzione Aron si potrebbe usare, ma essa risulta sconveniente, perchè la potenza assorbita in tal caso da ciascuno dei 3 rami del carico trifase è la stessa, e quindi basta un solo wattmetro per la misura.



$$W_{12} + W_{32} = P \quad \text{valida in generale (nei sistemi a 3 fili)}$$

$$W_{12} - W_{32} = -\frac{Q}{\sqrt{3}} \quad \text{valida solo nel caso simmetrico ed equilibrato}$$

In generale si dirà che *la misura della potenza nei circuiti trifasi senza filo neutro può essere eseguita con due wattmetri, inseriti come in figura, con le bobine amperometriche disposte in due qualsiasi dei tre fili e le corrispondenti voltmetriche derivate tra il filo che contiene l'amperometrica ed il terzo filo.*

Specificamente, siano rispettivamente h e k le linee a cui sono connessi i morsetti positivi dei circuiti voltmetrici dei wattmetri W_{hl} e W_{kl} , essendo l la linea in comune (ad esempio in figura è $hkl = 132$). Si ha, come già provato

$$W_{hl} + W_{kl} = \text{Re}(\bar{V}_{hl} \check{I}_h + \bar{V}_{kl} \check{I}_k) = E_h I_h \cos \phi_h + E_l I_l \cos \phi_l + E_k I_k \cos \phi_k = P$$

Nel caso particolare di sistema di tensioni simmetrico e diretto e carico equilibrato, e per $hkl = 132$, dal diagramma fasoriale si ha

$$\begin{aligned} \bar{V}_{12} &= \sqrt{3} \bar{E}_1 e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E e^{i\alpha_1} e^{i\frac{\pi}{6}} = V e^{i(\alpha_1 + \frac{\pi}{6})} & \bar{I}_1 &= \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} = \frac{E e^{i\alpha_1}}{Z e^{i\phi}} = I e^{i(\alpha_1 - \phi)} & \bar{V}_{12} \check{I}_1 &= V I e^{i(\phi + \frac{\pi}{6})} \\ \bar{V}_{32} &= \sqrt{3} \bar{E}_3 e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E e^{i\alpha_3} e^{-i\frac{\pi}{6}} = V e^{i(\alpha_3 - \frac{\pi}{6})} & \bar{I}_3 &= \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}} = \frac{E e^{i\alpha_3}}{Z e^{i\phi}} = I e^{i(\alpha_3 - \phi)} & \bar{V}_{32} \check{I}_3 &= V I e^{i(\phi - \frac{\pi}{6})} \end{aligned}$$

da cui

$$W_{12} \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_{12}(t)i_1(t)dt = \operatorname{Re}[\bar{V}_{12}\check{I}_1] = VI \cos(\phi + \frac{\pi}{6}) = VI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi - \frac{1}{2} \sin \phi \right) = \frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}}$$

$$W_{32} \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_{32}(t)i_3(t)dt = \operatorname{Re}[\bar{V}_{32}\check{I}_3] = VI \cos(\phi - \frac{\pi}{6}) = VI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi + \frac{1}{2} \sin \phi \right) = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2\sqrt{3}}$$

$$W_{12} - W_{32} = -\frac{Q}{\sqrt{3}}$$

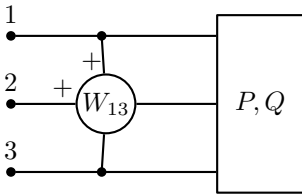
In caso di permutazione di hkl rispetto alla configurazione 132, mentre la somma delle letture dei due wattmetri come abbiamo visto fornisce sempre P , la differenza tra le letture dei due wattmetri dà luogo invece ad un cambio di segno; ciò avviene dunque per $hkl = 123$ e per $hkl = 231$:

$$W_{13} \stackrel{123}{=} \operatorname{Re}(\bar{V}_{13}\check{I}_1) = W_{21} \stackrel{231}{=} \operatorname{Re}(\bar{V}_{21}\check{I}_2) = VI \cos(\frac{\pi}{6} - \phi)$$

$$W_{23} \stackrel{123}{=} \operatorname{Re}(\bar{V}_{23}\check{I}_2) = W_{31} \stackrel{231}{=} \operatorname{Re}(\bar{V}_{31}\check{I}_3) = VI \cos(\frac{\pi}{6} + \phi)$$

$$W_{13} - W_{23} = W_{21} - W_{31} = VI[\cos(\frac{\pi}{6} - \phi) - \cos(\frac{\pi}{6} + \phi)] = VI \sin \phi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad \text{per } hkl = 123, 231$$

6.3.4 Misura della potenza reattiva con wattmetro in quadratura



Nel caso della figura il wattmetro misura per definizione il valore medio della grandezza $v_{13}(t)i_2(t)$, che può calcolarsi come $\operatorname{Re}[\bar{V}_{13}\check{I}_2]$. Nel caso simmetrico ed equilibrato dal diagramma fasoriale si ha

$$\bar{V}_{13} = \sqrt{3}\bar{E}_2 e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}E e^{i(\alpha_2 + \frac{\pi}{2})} \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\check{Z}} = \frac{E e^{i\alpha_2}}{Z e^{i\phi}} = I e^{i(\alpha_2 - \phi)} \quad \bar{V}_{13}\check{I}_2 = \sqrt{3}EI e^{i(\frac{\pi}{2} + \phi)}$$

$$W_{13} \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_{13}(t)i_2(t)dt = \operatorname{Re}[\bar{V}_{13}\check{I}_2] = \sqrt{3}EI \cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = -\frac{3EI}{\sqrt{3}} \sin \phi = -\frac{Q}{\sqrt{3}} \quad (6.1)$$

Capitolo 7

Convenzioni OCTAVE/MATLAB

Le soluzioni dei problemi proposti agli esami sono spesso presentate nella forma di codice eseguibile compatibile con gli ambienti di programmazione OCTAVE (software gratuito scaricabile dal sito www.octave.org) e MATLAB (software commerciale). L'interfaccia principale di OCTAVE è di tipo testuale ma qualora lo si desidera è disponibile anche il front-end grafico QtOctave.

Le variabili complesse sono indicate con un nome che ha come ultimo carattere il simbolo underscore `_`; i moduli di tali grandezze sono indicate con lo stesso nome ma senza il simbolo underscore.

- `abs` è il modulo, quindi ad esempio `E2=abs(E2_)`
- `sqrt` è la radice quadrata
- `real` e `imag` sono la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria
- `conj` è il complesso coniugato
- `*` oppure `.*` è l'operatore di moltiplicazione
- `/` oppure `./` è l'operatore di divisione
- `^` oppure `.^` è l'operatore di elevazione a potenza

Come visto sopra i comuni operatori di moltiplicazione `*`, divisione `/` ed elevazione a potenza `^`, talvolta li si trova preceduti da un punto (nel qual caso diventano `.*` `./` `.^`, questa notazione è dovuta ad Hadamard); la operazione che questi ultimi eseguono è la stessa nel caso in cui gli operandi sono grandezze scalari; nel caso di operandi vettoriali o matriciali la corrispondente operazione viene eseguita elemento per elemento. Per quello che ci concerne sono quindi da considerarsi equivalenti. L'operazione `.*` è anche detta *prodotto esterno tra matrici*.

Il punto e virgola alla fine di una espressione sopprime la visualizzazione del valore calcolato, esempio:

```
E2=abs(E2_);
```

Eliminando i punti e virgola dal codice si possono quindi visualizzare i valori calcolati delle grandezze intermedie.

Per risolvere un problema di elettrotecnica la cosa più conveniente da fare è creare un file di testo contenente la sequenza delle istruzioni che calcolano le grandezze richieste. Esistono due tipi di file OCTAVE/MATLAB, gli *script* e le *function*. Per entrambi il nome del file deve avere estensione `.m`, e le *function* si distinguono per il fatto che la prima istruzione deve iniziare con la keyword `function`.

Si faccia attenzione che di default in ambiente Windows© non vengono visualizzate le estensioni dei files, il che implica che quando si digita `problema.m` in realtà si stà probabilmente creando il file `problema.m.txt`. Occorre quindi disabilitare l'opzione *non visualizzare l'estensione per i tipi di file conosciuti* nelle impostazioni di visualizzazione delle cartelle.

Esempio: file di testo di nome `problemax.m` contenente le istruzioni:

```
% questo è un commento
R1 = 3;
I1 = 5;
V1 = R1*I1
Z2_ = 3+i*4;
I2_ = 5+i*7;
V2_ = Z2_*I2_
A2_ = V2_*conj(I2_) % potenza complessa
P2 = real(A2_)
Q2 = imag(A2_)
A2 = abs(A2_)
```

La funzione `paral`, spesso richiamata negli script risolvitori problemi assegnati agli esami, non è una funzione predefinita in OCTAVE/MATLAB. Se lo studente volesse implementarla, basta creare il file di testo di nome `paral.m` contenente le uniche due righe seguenti:

```
function c=paral(a,b)
c=a.*b./(a+b);
```

Capitolo 8

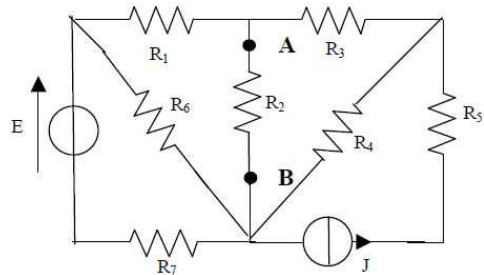
Soluzioni di alcune prove d'esame

8.1 Prova Unicz del 10-01-2011

8.1.1 Problema 1

Determinare la potenza assorbita dal resistore R_2 applicando il generatore equivalente di Norton ai nodi A-B.

$$\begin{aligned} E &= 40; & J &= 10; \\ R_1 &= 80; & R_2 &= 80; & R_6 &= 80; & R_7 &= 80; \\ R_3 &= 160; & R_4 &= 160; & R_5 &= 160; \end{aligned}$$



Per il calcolo della corrente di cortocircuito si ha $J_{cc} = I_{ABcc} = I_{1cc} + I_{3cc}$. In queste condizioni di cortocircuito R_1 ed R_6 si trovano 'elettricamente' in parallelo, così come pure R_3 ed R_4 .

$$\begin{aligned} I_{7cc} &= E / (R_7 + \text{paral}(R_6, R_1)) & \% & 0.33333 \\ I_{1cc} &= I_{7cc} * R_6 / (R_6 + R_1) & \% & 0.16667 \\ I_{3cc} &= J * R_4 / (R_4 + R_3) & \% & 5.0000 \\ J_{cc} &= I_{1cc} + I_{3cc} & \% & 5.1667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{0a} &= R_1 + \text{paral}(R_6, R_1) & \% & 120.00 \\ R_{0b} &= R_3 + R_4 & \% & 320.00 \\ R_0 &= \text{paral}(R_{0a}, R_{0b}) & \% & 87.273 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{02} &= \text{paral}(R_0, R_2); & \% & 41.739 \\ V_{AB} &= R_{02} * J_{cc} & \% & 215.65 \\ P_2 &= V_{AB}^2 / R_2 & \% & 581.3 \end{aligned}$$

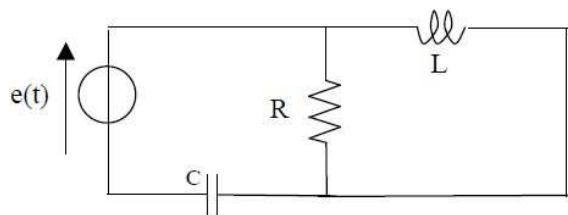
8.1.2 Problema 2

La rete è a riposo per $t < 0$. Calcolare la potenza istantanea assorbita dal resistore R per $t > 0$.

$e(t) = u(t)E_M \sin \omega t$, $u(t)$ è la funzione gradino unitario.

$E_M = 40$ V, $\omega = 100$ rad/s

$R = 10$ Ω , $L = 100$ mH, $C = 500$ μ F



Sia v la tensione ai capi del resistore.

$$\begin{cases} i_R + i_C + i_L = 0 \\ v = v_c + e \\ v = R i_R \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} \\ v = L \frac{di_L}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} v_c = v - e \\ \frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt} + \frac{di_L}{dt} = 0 \\ \frac{dv}{dt} = R \frac{di_R}{dt} \\ i_C = C \frac{dv}{dt} - C \frac{de}{dt} \\ v = L \frac{di_L}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + C \frac{d^2v}{dt^2} - C \frac{d^2e}{dt^2} + \frac{v}{L} = 0 \\ \ddot{v} + \frac{\dot{v}}{RC} + \frac{v}{LC} = \ddot{e} \\ \ddot{v} + 2\sigma\dot{v} + \omega_r^2 v = \ddot{e} \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{b}{2} = \frac{1}{2RC} = 100 \text{ s}^{-1} \quad \omega_r^2 = c = \frac{1}{LC} = 2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-2}$$

In evoluzione libera la rete si riduce ad un parallelo RLC, quindi come noto dalla teoria la rete è dissipativa.

Dopo l'estinzione del transitorio il generatore è sinusoidale, dunque il regime permanente sarà sinusoidale e può calcolarsi con il metodo simbolico, anche direttamente a partire dall'equazione dinamica appena determinata, ricordando che il fasore corrispondente alla derivata prima è $i\omega\bar{V}$, e che il fasore corrispondente alla derivata seconda è $(i\omega)^2\bar{V} = -\omega^2\bar{V}$

$$(i\omega)^2\bar{V} + 2\sigma i\omega\bar{V} + \omega_r^2\bar{V} = (i\omega)^2\bar{E} \quad \bar{V} + \frac{2\sigma}{i\omega}\bar{V} + \frac{\omega_r^2}{(i\omega)^2}\bar{V} = \bar{E} \quad \bar{V}\left(1 - i\frac{2\sigma}{\omega} - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right) = \bar{E} \quad \bar{V} = \frac{\bar{E}}{1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} - i\frac{2\sigma}{\omega}}$$

Scegliendo la corrispondenza con il seno e indicando con il pedice r la risposta a regime abbiamo

$$\bar{E} = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \quad \bar{V}_r = \frac{\frac{40}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{20000}{10000} - i\frac{200}{100}} = \frac{40/\sqrt{2}}{-1 - i2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{40(-1 + i2)}{5} = \frac{-8 + i16}{\sqrt{2}} = \frac{17.89e^{i2.034}}{\sqrt{2}} = V_r e^{i\alpha_r}$$

$$v_r(t) = \sqrt{2}V_r \sin(\omega t + \alpha_r) = 17.89 \sin(100t + 2.034)$$

Per il calcolo della risposta transitoria consideriamo l'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata

$$\lambda^2 + 2\sigma\lambda + \omega_r^2 = 0$$

$$\delta = \frac{\Delta}{4} = \sigma^2 - \omega_r^2 = -10^4 \text{ s}^{-2} < 0 \Rightarrow \text{evoluzione armonica smorzata}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_r^2 - \sigma^2} = \sqrt{-\delta} = 100 \text{ s}^{-1}$$

$$v_t(t) = Ke^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \Phi) \quad \text{risposta transitoria}$$

Per il calcolo delle condizioni iniziali si nota che per $t < 0$ la rete è in regime stazionario (essendo $e(t) = 0$) e tutte le grandezze risultano nulle

$$v(0^-) = 0 \quad v_C(0^-) = 0 \quad i_L(0^-) = 0$$

da cui

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \quad \left. \frac{de}{dt} \right|_{0^+} = E_M \omega \cos \omega t \Big|_{0^+} = \omega E_M = 4000$$

$$\dot{v} = \dot{v}_C + \dot{e} = \frac{i_C}{C} + \dot{e} = \frac{1}{C}(-i_R - i_L) + \dot{e} = -\frac{1}{C}\left(\frac{v}{R} + i_L\right) + \dot{e}$$

$$v(0^+) = v_C(0^+) + e(0^+) = 0 \quad \dot{v}(0^+) = -\frac{1}{C}\left(\frac{v(0^+)}{R} + i_L(0^+)\right) + \dot{e}(0^+) = 4000$$

Risposta completa

$$t \geq 0 \Rightarrow v(t) = v_t(t) + v_r(t) = Ke^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \Phi) + \sqrt{2}V_r \sin(\omega t + \alpha_r) \quad K \text{ e } \Phi \text{ da determinare}$$

$$\dot{v} = -\sigma Ke^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \Phi) + Ke^{-\sigma t} \omega_d \cos(\omega_d t + \Phi) + \sqrt{2}V_r \omega \cos(\omega t + \alpha_r)$$

$$\begin{cases} v(0^+) = K \sin \Phi + \sqrt{2}V_r \sin \alpha_r = 0 \\ \dot{v}(0^+) = -\sigma K \sin \Phi + K\omega_d \cos \Phi + \sqrt{2}V_r \omega \cos \alpha_r = 4000 \end{cases} \quad \begin{cases} B = K \sin \Phi = -\sqrt{2}V_r \sin \alpha_r = -22.627 \\ A = K \cos \Phi = \frac{4000 + \sigma B - \sqrt{2}V_r \omega \cos \alpha_r}{\omega_d} = 28.686 \end{cases}$$

$$K = |A + iB| = 36.54 \quad \Phi = \arctan \frac{B}{A} = -0.6679$$

$$v(t) = [36.54e^{-100t} \sin(100t - 0.6679) + 17.89 \sin(100t + 2.034)]u(t)$$

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

Soluzione Matlab:

```
EM = 40; omega = 100;
R = 10; L = 100e-3; C = 500e-6;

sigma = 1/2/R/C; omega_r = 1/sqrt(L*C);
Vr_ = 40/(-1-2i)
Vr = abs(Vr_), alfar = angle(Vr_), alfar_deg = alfar*180/pi

delta = sigma^2 - omega_r^2, omega_d = sqrt(-delta)

B = -sqrt(2)*Vr*sin(alfar)
```

```
A = (4000 + sigma*B - sqrt(2)*Vr*omega*cos(alfar) ) / omega_d
K_ = A+1i*B;
K = abs(K_),   Fi = atan(B/A),   Fi_check = angle(K_)

t = linspace(0,0.2,500);
vt = K*exp(-sigma*t).*sin(omega_d*t+Fi);   vr = sqrt(2)*Vr*sin(omega*t+alfar);
v = vt+vr;   p = v.^2/R;   plot(t,p)
```

Indice analitico

- analisi vettoriale, 15
- angoli di Eulero, 15
- antitrasformazione, 16
- autovettori
 - generalizzati, 29
- bipolo
 - conservativo, 19
 - dinamico passivo, 19
- campo, 13
 - complesso, 13
 - rotazionale, 20
- circuito
 - dissipativo, 24
- concentrazione, 21
- convergenza, 20
- corrente
 - nominale, 32
- criterio
 - di progetto, 36
- curva
 - di rendimento del trasformatore, 35
- dati
 - di targa, 32
- decomposizione
 - di Schur, 29
- differenza, 13
- divergenza, 20
- divisione, 13
- dominio
 - del tempo, 16
 - della frequenza, 16
- duty cycle, 37
- equazione
 - dei momenti, 38
- flutter aeroelastico, 26
- forma
 - algebrica, 14
 - di Jordan, 29
- function, 51
- funzioni
 - armoniche, 21
- gimbal lock, 15
- gradiente, 19
- Hadamard, 51
- Heaviside, 20
- induzione
 - elettromagnetica, 20
 - magnetoelettrica, 20
- laplaciano
 - scalare, 21
 - vettore, 21
- matrice
 - delle risposte impulsive, 30
 - di transizione, 28
 - reale simmetrica, 29
- Maxwell, 19, 20
- metodo
 - scaling and squaring, 29
 - simbolico, 23
 - validità generale, 16
- missione lunare Apollo 11, 15
- momento elettrico, 38
- notazione
 - di Hadamard, 51
- numeri
 - immaginari, 14
 - ipercomplessi, 15
- operatore
 - concentrazione, 21
 - convergenza, 20
 - divergenza, 20
 - gradiente, 19
 - laplaciano
 - scalare, 21
 - vettore, 21
 - rotore, 20
- oscillazione torsionale, 26
- porta
 - amperometrica, 22
 - voltmetrica, 22
- potenziale
 - scalare, 21
- prodotto
 - esterno tra matrici, 51
- quaternioni, 15
- quoziente, 13
- rapporto
 - di trasformazione, 32
- regime
 - continuo, 36
 - lentamente variabile, 17
 - permanente, 24, 30
 - polinomiale, 24
 - pulsato, 37
- rendimento
 - convenzionale, 35
 - in energia, 37
 - nominale, 35
- risonanza, 26
- rotazionale, 20
- rotazioni spaziali, 15

rotore, 20

script, 51

sospensione cardanica, 15

sottrazione, 13

teorema

di Poynting, 22

trasformata di Fourier, 16

trasformatore

ideale, 32

reale, 32

unità immaginaria, 14

vettore

di Poynting, 21

wattmetro

ideale, 22

in quadratura, 50