

Introduzione alla Conversione alternata-continua

Appunti didattici a.a. 2010-2011

Insegnamento di
Gestione Razionale dei
Sistemi Elettrici

Antonio Quercia
Napoli. Novembre, 2010



Indice

Nota sulla versione	4
1 Alcune funzioni notevoli. Cenni sulle funzioni generalizzate	5
1.1 Funzioni notevoli	5
1.2 Funzioni generalizzate	6
2 Introduzione allo studio delle reti in regime variabile	8
2.1 Regime lentamente variabile	8
2.2 Scambi energetici e valore efficace	8
2.3 Richiami sulle reti in regime sinusoidale	9
2.4 Il passaggio dal dominio del tempo al dominio della frequenza	11
2.5 Serie di Fourier	11
2.5.1 Forma compatta	12
2.5.2 Componente continua e componente alternata	13
2.5.3 Analisi Armonica. Spettro di ampiezza e spettro di fase	14
2.5.4 Caratteri di simmetria	14
2.5.5 Troncamento della serie di Fourier	15
2.5.6 Forma esponenziale	15
2.5.7 Interpretazione della forma esponenziale: curve piane chiuse	16
2.5.8 Alcune proprietà	16
2.6 Integrale di Fourier	18
2.6.1 Rappresentazione di una funzione non periodica	18
2.6.2 Proprietà e applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier	19
2.6.3 Esempi di trasformate	20
2.6.4 Trasformata di Fourier di una funzione periodica	21
2.6.5 Serie e integrale di Fourier per le funzioni di più variabili	21
2.7 Reti elettriche in regime periodico	22
2.7.1 Tensioni e/o correnti non sinusoidali	22
2.7.2 Generalizzazione del metodo simbolico. Esempi	22
2.7.3 Valore efficace. Espressione armonica della potenza	23
2.7.4 Principali effetti dell'inquinamento armonico	26
3 Convertitori Statici	28
3.1 Generalità	28
3.2 Componenti dei convertitori	28
3.2.1 Diodo ideale. Modello circuitale del diodo ideale	28
3.2.2 Diodo reale. Caratteristica corrente-tensione	28
3.2.3 Cenni sui dispositivi a semiconduttore	28
3.2.4 Drogaggio dei semiconduttori e giunzione pn	29
3.2.5 Diodo a semiconduttore	29
3.2.6 Corrente massima diretta e tensione massima inversa. Potenza nominale	29
3.2.7 Caratteristica esponenziale corrente-tensione (equazione di Shockley)	30
3.2.8 Modelli semplificati del diodo reale e circuiti equivalenti. Esempio	30
3.2.9 Cenni sull'uso del diodo come generatore di tensione di riferimento	30
3.2.10 Comportamento in commutazione	30
3.2.11 Tiristore (o SCR) ideale. Modello del tiristore ideale	31
3.2.12 Argomenti accennati	31
3.3 Conversione ac-dc	31
3.3.1 Analisi del circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda	31
3.3.2 Parametri prestazionali	32
3.3.3 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con filtro	34
3.3.4 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con induttore e diodo di ricircolo (cenni)	34
3.3.5 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda: punti chiave	34
3.3.6 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda (con trasformatore a presa centrale e a ponte di Graetz)	34
3.3.7 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda con filtro	35
3.3.8 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda: punti chiave	36

3.3.9	Dimensionamento del convertitore ac/dc	36
3.3.10	Generalità sui raddrizzatori controllati	36
3.3.11	Analisi del circuito di raddrizzamento controllato a semplice semionda	36
3.3.12	Convertitori monofase a ponte intero	36
3.3.13	Transitori di commutazione	36
3.3.14	Filtraggio in uscita dei circuiti di raddrizzamento	36
3.4	Raddrizzamento da rete trifase	36
3.4.1	Cenni sui collegamenti degli avvolgimenti nei trasformatori trifase	37
3.4.2	Raddrizzatori polifasi a gruppi di commutazione	38
3.4.3	Raddrizzatori polifasi a ponte di Graetz	38
3.4.4	Raddrizzatori controllati polifase (cenni)	42
3.4.5	In futuro	42
3.5	Sistemi elettrici in corrente continua	42
A	Cenni sui materiali superconduttori	43
B	Minute delle lezioni	44
B.1	Minute delle lezioni a.a. 2010-2011	44
B.1.1	Lezione di Giovedì 21 Ottobre 2010 (3 ore)	44
B.1.2	Lezione di Giovedì 28 Ottobre 2010 (3 ore)	44
B.1.3	Lezione di Giovedì 04 Novembre 2010 (3 ore)	45
B.1.4	Lezione di Giovedì 11 Novembre 2010 (2 ore, Coccoresese)	46
B.1.5	Lezione di Giovedì 18 Novembre 2010 (3 ore)	46
B.1.6	Lezione di Giovedì 25 Novembre 2010 (3 ore)	48
	Indice analitico	50

Nota sulla versione

Il presente documento è in versione ALPHA, ovvero è incompleto. In particolare mancano molte figure e alcuni concetti sono richiamati ma non compiutamente illustrati. Tuttavia tutti gli argomenti e gli sviluppi analitici sono già in versione pressochè definitiva e utilizzabile per lo studio da parte degli allievi. Inoltre sono indicati nel dettaglio i riferimenti dove reperire il materiale per integrare le parti incomplete.

Capitolo 1

Alcune funzioni notevoli. Cenni sulle funzioni generalizzate

1.1 Funzioni notevoli

Inserire immagini

grafico funzione segno $\operatorname{sgn} x$

grafico funzione di Heaviside o funzione gradino unitario $H(x) = 1(x) = u(x)$

grafico funzione finestra rettangolare $\Pi(x) = 1(x + \frac{1}{2}) - 1(x - \frac{1}{2})$

grafico funzione finestra triangolare $\Lambda(x) = \Pi(\frac{x}{2})(1 - |x|)$

La *funzione segno* è definita come

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad 1.1$$

sgn è quindi discontinua per $x = 0$; essa può essere approssimata, per piccoli valori di σ , mediante una funzione continua

$$\sigma \ll |x| \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn} x \cong \tanh\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad 1.2$$

Un numero reale può esprimersi come prodotto del suo valore assoluto e del suo segno $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$. Si noti che $\frac{d|x|}{dx} = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$, e $\frac{d \operatorname{sgn} x}{dx} = 2\delta(x)$, dove $\delta(x)$ è la funzione impulso di Dirac, definita nel § successivo.

La *funzione di Heaviside*, indicata alternativamente con i simboli H , Θ , 1 , u , è definita come

$$H(x) = \Theta(x) = 1(x) = u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad 1.3$$

Non è in genere rilevante definire il valore assunto dalla funzione di Heaviside in $x = 0$. Tuttavia talvolta ciò occorre, e si possono incontrare le definizioni $H(0) = 0$, o $H(0) = \frac{1}{2}$ oppure $H(0) = 1$. Per rimuovere l'ambiguità si può usare un pedice che specifichi il valore

$$H_a(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad 1.4$$

La scelta $a = \frac{1}{2}$ massimizza la simmetria della funzione, ed è completamente consistente con la funzione segno

$$H_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn} x}{2} \quad 1.5$$

Risulta poi

$$H_0(x) = \operatorname{sgn} x \frac{1 + \operatorname{sgn} x}{2} \quad 1.6$$

$H(x)$ può essere approssimata mediante le funzioni

$$\sigma \ll |x| \quad \Rightarrow \quad H(x) \cong \frac{1 + \tanh(\frac{x}{\sigma})}{2} = \frac{1}{1 + e^{-2\frac{x}{\sigma}}} \quad \text{funzione logistica} \quad 1.7$$

$$\cong \frac{1 + \frac{2}{\pi} \arctan(\frac{x}{\sigma})}{2} \quad 1.8$$

$$\cong \frac{1 + \operatorname{erf}(\frac{x}{\sigma})}{2} \quad 1.9$$

dove erf è la *funzione degli errori*, e risulta

$$H_{\frac{1}{2}}(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{-2\frac{x}{\sigma}}} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2}{\pi} \arctan(\frac{x}{\sigma})}{2} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{erf}(\frac{x}{\sigma})}{2} \quad 1.10$$

La funzione *finestra rettangolare*, o *impulso unitario*, e la funzione *finestra triangolare*, sono definite da

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} & \Lambda(x) &= \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \\ &= H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right) & &= \Pi\left(\frac{x}{2}\right)(1 - |x|) \\ &= H\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot H\left(\frac{1}{2} - x\right) & &= \max(0, 1 - |x|) \end{aligned} \quad 1.11$$

La funzione integrale della funzione di Heaviside è la funzione *rampa unitaria*

$$H^{(-1)}(x) = u^{(-1)}(x) = \frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \quad 1.12$$

$$= \int_{-\infty}^x H(y) dy \quad 1.13$$

da cui $\frac{dH^{(-1)}}{dx} = H(x)$.

Si noti che $H(x)$ è adimensionale, mentre $H^{(-1)}(x)$ ha le stesse dimensioni fisiche della variabile indipendente x .

inserire figura $u^{(-1)}(x)$

1.2 Funzioni generalizzate

teorema dell'impulso o teorema della quantità di moto Mencuccini I 109-110

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad 1.14$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{q}}{dt} dt = \int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} d\mathbf{q} \quad 1.15$$

$$\mathbf{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} dt = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = m_2 \mathbf{v}_2 - m_1 \mathbf{v}_1 \quad 1.16$$

L'equazione precedente viene detta *teorema dell'impulso* (o *teorema della quantità di moto*), e si esprime dicendo che *l'impulso della forza agente su di un punto materiale fra gli istanti ...*

[Bobbio and Gatti 1991² 790+]
Carlson 53+

Inserire immagini

grafico funzione $p_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} \Pi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$
grafico funzione $\ell_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} \Lambda\left(\frac{x}{\sigma}\right)$

Consideriamo le seguenti funzioni finestra dipendenti dal parametro σ

$$p_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} \Pi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad \ell_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} \Lambda\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad 1.17$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\sigma(x) dx = \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{1}{\sigma} dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \ell_\sigma(x) dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{1}{\sigma} \left(1 - \left|\frac{x}{\sigma}\right|\right) dx = 1 \quad \forall \sigma > 0 \quad 1.18$$

Nell'ambito della *teoria delle distribuzioni* (o *funzioni generalizzate*) si ha

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} p_\sigma(x) = \delta(x) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \ell_\sigma(x) = \delta(x) \quad 1.19$$

dove δ è la distribuzione (o funzione) *impulsiva* di Dirac. Intuitivamente la δ , *concentrata* nel punto x_0 , può essere definita nel seguente modo

$$\begin{cases} \delta(x - x_0) = 0 & x \neq x_0 \\ \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x - x_0) dx = 1 & \forall \epsilon > 0 \end{cases} \quad 1.20$$

inserire grafico $\delta(x - x_0)$

La funzione gradino unitario $1(t)$ in senso classico non è derivabile in $t = 0$. Nell'ambito della teoria delle distribuzioni risulta invece

$$\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t) \quad \left(\text{e in generale } \frac{d}{dt}1(t - t_0) = \delta(t - t_0) \right) \quad 1.21$$

Infatti dalla definizione data di funzione impulsiva si ha

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad 1.22$$

$$= 1(t - t_0) \quad 1.23$$

differenziando la quale si ottiene la relazione precedente.

proprietà campionamento, carlson 55

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0) \quad 1.24$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t) \quad \alpha \neq 0 \quad 1.25$$

Capitolo 2

Introduzione allo studio delle reti in regime variabile

2.1 Regime lentamente variabile

2.2 Scambi energetici e valore efficace

Al fine di evitare la possibile confusione tra il concetto di *energia* e quello di *trasferimento energetico*, è opportuno ricordare brevemente alcuni concetti generali.

La descrizione macroscopica di un sistema è fatta in termini di *proprietà* fisiche che possono essere in linea di principio misurate con l'aiuto di appropriati strumenti di laboratorio. Le proprietà sono delle *funzioni puntuali*, nel senso che il loro valore è solo funzione dello stato e che quindi la loro variazione conseguente ad un cambiamento di stato è univocamente determinata dagli stati iniziali e finali. Sono sinonimi di proprietà: *funzione (o parametro, o grandezza, o variabile) di stato*, e *coordinata* (termodinamica).

L'*energia* E di un sistema è una *proprietà estensiva* del sistema stesso. Il *contenuto di energia* può essere variato secondo due differenti modalità: in un caso si parla di *lavoro* L , nell'altro di *calore* Q . L e Q sono pertanto grandezze connesse al *trasferimento di energia (rappresentano flussi di energia)* e non sono delle proprietà. Secondo la convenzione usualmente adottata in termodinamica, il lavoro è ritenuto positivo se attraversa il sistema verso l'ambiente (lavoro erogato dal sistema), mentre il calore è ritenuto positivo se è in ingresso per il sistema (calore assorbito). Con questa convenzione la prima legge della termodinamica si scrive

$$\Delta E = Q - L$$

Nello studio della termodinamica classica è consueta la divisione dell'energia di un sistema in energia cinetica E_c ed energia potenziale E_p , che sono aliquote di E direttamente misurabili dall'esterno del sistema in relazione allo stato di moto ed alla posizione nel campo gravitazionale del sistema, nonché in energia interna U , che rappresenta la somma di tutti i contributi microscopici di energia associati alle particelle elementari costituenti il sistema, e che quindi è detta interna poiché non è connessa ad un riferimento esterno, come nel caso di E_c ed E_p . Si ha pertanto

$$\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U = Q - L$$

e, nei casi in cui non vi sono variazioni di energia cinetica e potenziale

$$\Delta U = Q - L$$

Ribadiamo che il lavoro, pur essendo dimensionalmente omogeneo ad un'energia, *non è una proprietà* del sistema considerato. Il lavoro può essere di vari tipi, ad esempio *lavoro meccanico* o *lavoro elettrico*.¹

Nello studio dei sistemi elettrici considereremo senza particolare preferenza il lavoro elettrico *erogato* oppure quello *assorbito*.²

Si consideri un bipolo di una rete elettrica e si scelgano su di esso versi di riferimento per la tensione $v(t)$ e la corrente $i(t)$ corrispondenti alla convenzione dell'utilizzatore. Nell'ipotesi che la rete operi in *regime lentamente variabile* si può dimostrare, a partire dalle equazioni generali dell'elettromagnetismo, che il *lavoro elettrico* elementare $d\ell$ *assorbito* dal bipolo nell'intervallo elementare $(t, t + dt)$ vale

$$d\ell = v(t)i(t)dt \quad 2.1$$

Se la convenzione adottata fosse quella del generatore la 2.1 esprimerebbe invece il lavoro elettrico elementare *erogato* dal bipolo. Si parlerà in generale di *lavoro scambiato* intendendo con ciò lavoro assorbito o erogato a seconda del caso specifico. Si definisce *potenza istantanea* il lavoro elettrico scambiato per unità di tempo (*referito all'istante t*)

$$p(t) \triangleq \frac{d\ell}{dt} = v(t)i(t)$$

Il lavoro elettrico $L(t_1, t_2)$ scambiato dal bipolo in un intervallo *finito* (t_1, t_2) si ottiene sommando i contributi elementari

$$L(t_1, t_2) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} d\ell = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt \quad 2.2$$

¹Una definizione abbastanza generale di lavoro è la seguente: *Il trasferimento di energia come lavoro tra due sistemi si ha quando l'interazione è tale che l'effetto conseguente in ciascuno avrebbe potuto essere ottenuto, per entrambi, con il solo cambiamento di quota di un peso in un campo gravitazionale.*

²Spesso si parla impropriamente di "lavoro generato" o di "energia generata", intendendo con ciò lavoro erogato. La dicitura è impropria in quanto la legge di conservazione afferma proprio che l'energia non può essere generata né distrutta.

e il lavoro elettrico scambiato *per unità di tempo* risulta pari al valore medio della potenza istantanea (*potenza media*) $P(t_1, t_2)$

$$\frac{L(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} p(t) dt}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} p(t) dt}{\Delta t} \triangleq P(t_1, t_2) \quad 2.3$$

Ricordiamo che si definisce *valore efficace, relativamente all'intervallo* (t_1, t_2) , di una grandezza $a(t)$ *comunque variabile nel tempo*, la quantità

$$A_{\text{eff}}(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} a^2(t) dt}{\Delta t}} \quad \text{per grandezze comunque variabili nel tempo} \quad 2.4$$

Se come bipolo si considera in particolare un *resistore lineare e tempo invariante*, si ottiene che la potenza media scambiata $P(t_1, t_2)$ è pari alla resistenza moltiplicata per il quadrato del valore efficace della corrente

$$P(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t) dt}{\Delta t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t) dt}{\Delta t} = RI_{\text{eff}}^2(t_1, t_2) \quad 2.5$$

Se inoltre la corrente è costante $i(t) = I$, risulta

$$P(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} RI^2 dt}{\Delta t} = \frac{RI^2(t_2 - t_1)}{\Delta t} = RI^2 = P \quad 2.6$$

ovvero, come è ovvio, il valore efficace coincide con il valore costante I e la potenza media P coincide con la potenza istantanea e non dipende dagli istanti t_1 e t_2 . Stante la definizione 2.3 di potenza media, in termini energetici si ha

$$L(t_1, t_2) = RI_{\text{eff}}^2(t_1, t_2) \Delta t \quad \text{per corrente comunque variabile} \quad 2.7$$

$$L(\Delta t) = RI^2 \Delta t \quad \text{per corrente costante} \quad 2.8$$

Abbiamo quindi la seguente

interpretazione del valore efficace: *il valore efficace di una corrente comunque variabile è uguale al valore di una corrente continua che attraversando una stessa resistenza produce un'eguale quantità di calore nell'intervallo di tempo considerato.*

Nel caso di grandezze sinusoidali di periodo T (o più in generale periodiche di periodo T), il valore efficace ovviamente ha particolare significato se definito con riferimento ad un intervallo di durata pari al periodo

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_1+T} a^2(t) dt}{T}} \quad \text{per grandezze sinusoidali (o periodiche) di periodo } T \quad 2.9$$

2.3 Richiami sulle reti in regime sinusoidale

[Someda 1977¹⁵ 306+]

Inserire figura bipolo

Inserire figura Someda 307

Nel regime sinusoidale isofrequenziale tutte le grandezze nella rete sono sinusoidali nel tempo, periodiche con un certo periodo T , frequenza $f_0 = \frac{1}{T}$ e pulsazione $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$$v(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \alpha) = \sqrt{2}V \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{V} = V e^{i\alpha} \quad 2.10$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \beta) = \sqrt{2}I \cos(\omega_0 t + \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{I} = I e^{i\beta} \quad 2.11$$

oppure, alternativamente

$$v(t) = V_M \sin(\omega_0 t + \gamma) = \sqrt{2}V \sin(\omega_0 t + \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{V} = V e^{i\gamma} \quad 2.12$$

$$i(t) = I_M \sin(\omega_0 t + \delta) = \sqrt{2}I \sin(\omega_0 t + \delta) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{I} = I e^{i\delta} \quad 2.13$$

Si noti che, essendo ad esempio $\cos(\omega_0 t + \alpha) = \sin(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$, e $\gamma = \alpha + \frac{\pi}{2}$, alle due suindicate convenzioni per l'assegnazione dei fasori corrispondono dei valori assegnati ai fasori stessi che sono differenti nei due casi. Tuttavia le relazioni di fase tra due fasori qualsiasi restano invariate (nel caso indicato $\alpha - \beta = \gamma - \delta$).

Per le grandezze sinusoidali valgono le seguenti proprietà:

$$V_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt = 0 \quad \text{valore medio nullo: la grandezza sinusoidale sono grandezze} \quad 2.14$$

$$V_{m\frac{T}{2}} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{\gamma}{\omega_0}}^{-\frac{\gamma}{\omega_0} + \frac{T}{2}} v(t) dt = \frac{2}{\pi} V_M \cong 0.6366 V_M \quad \text{valore medio nella semionda} \quad 2.15$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \cong 0.7071 V_M \cong 0.707 V_M \quad \text{valore efficace} \quad 2.16$$

$$\frac{V}{V_{m\frac{T}{2}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1.111 \quad \text{fattore di forma} \quad 2.17$$

In generale le grandezze periodiche a valor medio nullo si dicono *alternate*.

Operazioni con il metodo simbolico [Someda 1977¹⁵ 318+, 309+]

- Somma tra due fasori
- Prodotto di un fasore per uno scalare costante
- Derivata $d(t) = \frac{d}{dt}a(t) \Leftrightarrow \bar{D} = i\omega_0 \bar{A}$ [Someda 1977¹⁵ 319]
- Prodotto e rapporto di un fasore per un operatore complesso $\hat{Z}$
- Prodotto di due fasori $\rightarrow$ pulsazione doppia (ma non corrisponde al prodotto tra le rispettive funzioni sinusoidali, Someda 322)

Potenza in regime sinusoidale [Someda 1977¹⁵ 330]

Inserire figure Someda 330–333

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega_0 t + \alpha) & i(t) &= I_M \cos(\omega_0 t + \beta) & \phi &= \alpha - \beta & \beta &= \alpha - \phi & \alpha + \beta &= 2\alpha - \phi \\ p(t) &= v(t)i(t) = V_M I_M \cos(\omega_0 t + \alpha) \cos(\omega_0 t + \beta) = \frac{V_M I_M}{2} [\cos \phi + \cos(2\omega_0 t + \alpha + \beta)] \\ &= VI \cos \phi + VI \cos(2\omega_0 t + \alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$p(t) = v(t)i(t) \quad \text{potenza istantanea} \quad 2.18$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = VI \cos \phi \quad \text{potenza media o reale o attiva} \quad 2.19$$

$$Q \triangleq VI \sin \phi \quad \text{potenza reattiva} \quad 2.20$$

$$P_a \triangleq VI = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{potenza apparente} \quad 2.21$$

La potenza reale P è il prodotto del valore efficace della tensione V per il valore della componente $I \cos \phi$, nella direzione di $\bar{V}$ o, ciò che è lo stesso, il prodotto del valore efficace della corrente I per il valore della componente $V \cos \phi$, secondo la direzione di $\bar{I}$; essa è altresì il prodotto scalare dei ‘vettori’ $\bar{V}$ ed $\bar{I}$ (Fig nn).

La potenza reattiva Q è il prodotto del valore efficace della tensione V per il valore della componente $I \sin \phi$, nella direzione ortogonale a $\bar{V}$ (o simmetricamente scambiando $\bar{I}$ e $\bar{V}$) (Fig nn).

La potenza reale P *assorbita dal tratto AMB* (Fig nn) è positiva per $\phi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e negativa per $\phi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$; se positiva, ciò sta ad indicare che il flusso energetico è effettivamente assorbito dal tratto di circuito considerato.

Se la corrente è in ritardo rispetto alla tensione ($\beta < \alpha$, ovvero $\phi > 0$), Q è positiva, altrimenti sarà negativa.

Inserire figura Someda 335

Questa parte la devo aggiustare o togliere, perchè la ho inserita prima

Nel caso di un resistore, $\bar{V} = R\bar{I}$, quindi $\phi = 0$ e $P = VI = \frac{V^2}{R} = RI^2$. Possiamo quindi dire che *il valore efficace di una corrente alternata è uguale al valore di una corrente continua che attraversando una stessa resistenza produce un'eguale quantità di calore nell'intervallo di tempo considerato*. Si verifica facilmente che questo enunciato è valido *comunque vari la corrente nell'intervallo di tempo considerato*, e non solo nel caso sinusoidale.

Nel caso dell'induttore, *pur avendosi circolazione di corrente sotto una definita differenza di potenziale, la potenza media è nulla*. La giustificazione fisica di ciò è la seguente. **Se consideriamo separatamente i quattro quarti di un periodo ... Vedi Someda 342**

La differenza essenziale fra circuito ohmico e circuito induttivo è questa: il circuito ohmico trasforma tutta l'energia che riceve in calore; il circuito induttivo immagazzina sotto forma di energia magnetica ($w_m(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$) tutta l'energia che riceve durante un quarto di periodo ($W_{mM} = \frac{1}{2}LI_M^2$) e la restituisce integralmente nel quarto successivo. Si noti che $Q = \omega_0 W_{mM} = 2\omega_0 W_{m,media}$. [Someda 1977¹⁵ 343]

Analogamente nel caso del capacitore si ha $w_e(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$, $W_{eM} = \frac{1}{2}CV_M^2$, $Q = -\omega_0 W_{eM} = -2\omega_0 W_{e,media}$.

2.4 Il passaggio dal dominio del tempo al dominio della frequenza

2.5 Serie di Fourier

Grandezze periodiche di periodo T

$$f(t) = f(t+T) \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_1 \quad f\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) = f\left(\frac{\theta+2\pi}{\omega_1}\right) \quad 2.22$$

La funzione $f(t)$ è periodica di periodo T ; normalizzando rispetto al periodo si ottiene la funzione $g(\theta) = f\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)$ che è periodica di periodo 2π .

Condizioni di Dirichlet [Lanczos 208] [Bobbio and Gatti 1991² 769] [Fiorenza 1986 vol2 p187]

Si dice che una funzione $f(t)$, periodica con periodo T , soddisfa le *condizioni di Dirichlet*, se $f(t)$ ed $f'(t)$ sono generalmente continue e limitate nel periodo, cioè se sono continue, fatta eccezione eventualmente per un numero finito di punti in cui la $f(t)$ (e/o la $f'(t)$) ha discontinuità di prima specie.

Teorema B.2.1 [Bobbio and Gatti 1991² 769]

Ogni funzione $f(t)$, periodica con periodo T , soddisfacente le condizioni di Dirichlet, può essere rappresentata dalla seguente serie di Fourier

$$f_{\Sigma}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad 2.23$$

e risulta

$$f(t) \stackrel{\text{gp}}{=} f_{\Sigma}(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} \quad \text{gp} = \text{generalmente nel periodo} \quad 2.24$$

con (t_0 è arbitrario e le espressioni di destra si ottengono con il cambio di variabili $\omega_1 t = \theta$)

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta \quad \text{valor medio} \quad 2.25$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \cos n\theta d\theta \quad n \geq 0 \quad 2.26$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \sin n\theta d\theta \quad n \geq 1 \quad (b_0 = 0) \quad 2.27$$

In altre parole si ha che:

- in ogni punto t in cui la f è continua ed in cui esistono finite la derivata sinistra e la derivata destra della f (in particolare in cui la f è derivabile), la serie di Fourier converge ed ha per somma $f(t)$

$$f(t^-) = f(t^+), |f'(t^-)| < \infty, |f'(t^+)| < \infty \Rightarrow f_{\Sigma}(t) = f(t)$$

- in ogni punto t in cui la f ha discontinuità di prima specie ed in cui esistono finite la derivata sinistra e la derivata destra della f , la serie di Fourier converge ed ha per somma un valore pari alla media fra il limite sinistro e il limite destro di f in t

$$f(t^-) \neq f(t^+), \quad |f(t^-)|, |f(t^+)|, |f'(t^-)|, |f'(t^+)| < \infty \quad \Rightarrow \quad f_{\Sigma}(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$$

L'istante t_0 (o l'angolo $\theta_0 = \omega_1 t_0$) è arbitrario; valori tipici sono ad esempio $t_0 = 0$ o $t_0 = -\frac{T}{2}$ (e corrispondentemente $\theta_0 = 0$ o $\theta_0 = -\pi$).

Il primo termine sinusoidale, di pulsazione ω_1 , è detto *onda fondamentale* o semplicemente *fondamentale*; tutti gli altri termini sinusoidali, di frequenza multipla della fondamentale, che possono essere in numero finito o infinito, sono detti *armoniche* (o *armoniche superiori*).

Verifichiamo l'espressione dei coefficienti dello sviluppo. Calcoliamo ad esempio l'integrale $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_1 t dt$. Essendo le due funzioni $f(t) \cos n\omega_1 t$ e $f_{\Sigma}(t) \cos n\omega_1 t$ uguali generalmente nel periodo, i loro integrali sono uguali:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_1 t dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} f_{\Sigma}(t) \cos n\omega_1 t dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega_1 t + b_m \sin m\omega_1 t) \right] \cos n\omega_1 t dt \\ &= \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{a_0}{2} \cos n\omega_1 t dt}_{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} a_m \cos m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt}_{=0 \text{ per } m \neq n} + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} b_m \sin m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt}_{=0 \text{ } \forall m} \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} a_n \cos^2 n\omega_1 t dt = a_n \frac{T}{2} \end{aligned}$$

cioè $a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_1 t dt$ come volevasi provare.

Nota Le condizioni di Dirichlet, richieste alla $f(t)$ per la sviluppabilità in serie di Fourier, sono *condizioni sufficienti* ma *non necessarie*. Ad esempio, la versione trigonometrica del *Weierstrass approximation theorem* richiede che la f sia continua ma non fa ipotesi sulla derivata f' , e assicura che f può essere approssimata in modo arbitrariamente accurato mediante polinomi trigonometrici, anche se non necessariamente mediante proiezione (serie di Fourier troncata) o interpolazione (analoga alla serie di Fourier troncata ma con coefficienti opportuni) [Wright, Javed, Montanelli, Trefethen, Extension of Chebfun to periodic functions, ArXiv 2015, pag 6]. Altra ipotesi comune, che garantisce la convergenza in media quadratica, è che $f \in L^2(0, T)$, cioè che f sia di quadrato sommabile ($\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$). Nell'ambito della teoria delle funzioni generalizzate sussiste il seguente risultato

Teorema generale [Guidobaldi 19], [Amerio]

Ogni distribuzione temperata $f(t)$, periodica con periodo T , è sviluppabile in serie trigonometrica di Fourier.

La conoscenza della teoria delle distribuzioni e della relativa terminologia non è necessaria per i nostri scopi. In sostanza il teorema garantisce la sviluppabilità per tutte le applicazioni di interesse.

Osservazione L'espansione in serie di Fourier può applicarsi anche alle funzioni *non periodiche* definite in un intervallo *limitato* (a, b) . Infatti, una $f(t)$ non periodica può associarsi in infiniti modi ad una funzione periodica. Ad esempio, posto $t_0 = a$ e $T = b - a$, è periodica la funzione che si ottiene replicando la $f(t)$ in ciascuno degli intervalli $(a + kT, b + kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2.5.1 Forma compatta

Si consideri il numero complesso $a_n + ib_n$ di modulo C_{nM} e argomento α'_n (se a_n e b_n sono entrambi positivi essi costituiscono i cateti di un triangolo rettangolo, con α'_n angolo adiacente al cateto a_n e ν_n angolo adiacente al cateto b_n , come in Fig nm). La serie di Fourier può essere scritta più concisamente nel seguente modo

$$f(t) \stackrel{\text{gp}}{=} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \sin(n\omega_1 t + \nu_n) \quad 2.28$$

dove

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad (\text{può essere anche negativo}) \quad 2.29$$

$$C_{nM} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} > 0 \quad 2.30$$

$$\alpha_n = -\alpha'_n = -\arg(a_n + ib_n) = -\arctan \frac{b_n}{a_n} + \pi u_r(a_n) \quad 2.31$$

$$\nu_n = \frac{\pi}{2} + \alpha_n \quad 2.32$$

$$u_r(x) = H_0(-x) = \operatorname{sgn} x \frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \quad 2.33$$

avendo indicato con il simbolo $\arg$ l'argomento del numero complesso (anche denotato con $\angle$), sgn è la funzione segno, definita in §1.1, e u_r è una versione riflessa rispetto all'asse delle ordinate della funzione *gradino unitario di Heaviside* (anch'essa definita in §1.1), per la quale è espressamente specificato che debba valere 0 in $x = 0$.

Inserire figura triangolo rettangolo a_n b_n C_{nM}
 α'_n è l'angolo adiacente al cateto orizzontale a_n e ν_n è l'angolo adiacente al cateto verticale b_n

Infatti, dalla Fig nn si vede che

$$\begin{aligned} C_{nM} &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & \frac{a_n}{C_{nM}} &= \cos \alpha'_n & \frac{b_n}{C_{nM}} &= \sin \alpha'_n & \tan \alpha'_n &= \frac{b_n}{a_n} \\ \alpha'_n &= \arg(a_n + ib_n) = \arctan \frac{b_n}{a_n} + \pi u_r(a_n) \\ a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t &= C_{nM} (\cos \alpha'_n \cos n\omega_1 t + \sin \alpha'_n \sin n\omega_1 t) \\ &= C_{nM} \cos(n\omega_1 t - \alpha'_n) = C_{nM} \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) = C_{nM} \sin(n\omega_1 t + \nu_n) \\ \alpha_n &= -\alpha'_n & \nu_n &= \frac{\pi}{2} - \alpha'_n & \cos x &= \sin(x + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Si noti che i coefficienti C_{nM} sono sempre tutti positivi (o nulli), mentre ciò non vale per gli a_n e b_n . L'informazione contenuta nel segno di a_n e b_n è trasferita sulla fase iniziale α_n (o ν_n). C_0 può anche essere negativo.

Considerando i valori efficaci delle singole componenti armoniche $C_n = \frac{C_{nM}}{\sqrt{2}}$ abbiamo

$$f(t) \stackrel{\text{gp}}{=} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} C_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad 2.34$$

2.5.2 Componente continua e componente alternata

$$F_{\text{dc}} \triangleq C_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{componente continua} \quad 2.35$$

$$f_{\text{ac}}(t) \triangleq f(t) - F_{\text{dc}} \quad \text{componente alternata} \quad 2.36$$

$$f(t) = F_{\text{dc}} + f_{\text{ac}}(t) \quad 2.37$$

$$f_{\text{ac}}(t) \stackrel{\text{gp}}{=} \frac{f_{\text{ac}}(t^-) + f_{\text{ac}}(t^+)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} C_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad 2.38$$

Esempio [Bobbio and Gatti 1991² 769-770], onda quadra alternata, dispari, di periodo T , $-F < f(t) < F$

$$f(t) = \frac{4F}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots) = \frac{4F}{\pi} \sum_{n \text{ dispari}} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t$$

Esempio [Sameda 1977¹⁵ 407-408], onda triangolare alternata, dispari, di periodo T , $-F < f(t) < F$

$$f(t) = \frac{8F}{\pi^2} (\sin \omega_1 t - \frac{1}{9} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{25} \sin 5\omega_1 t + \dots)$$

2.5.3 Analisi Armonica. Spettro di ampiezza e spettro di fase

La *analisi armonica* di una funzione periodica consiste nella determinazione dei coefficienti C_0 C_n α_n (o ν_n), o equivalentemente dei a_0 a_n b_n .

Le successioni $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ e $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (o $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) sono dette rispettivamente *spettro di ampiezza* e *spettro di fase* della funzione periodica.

2.5.4 Caratteri di simmetria

Molte delle funzioni periodiche che sono di interesse per le applicazioni godono di particolari caratteri di simmetria il cui riconoscimento è importante in quanto permette di escludere la presenza di alcuni termini della serie e di semplificare perciò l'analisi armonica.

[Someda 1977¹⁵ 405] (incluso il par. "5-94. Esempi" a pag. 406)

[Guarnieri and Stella 2004⁷ 359]

[Rashid 2007¹² 400]

I più importanti caratteri di simmetria sono i seguenti:

1. $f(t)$ è *alternata*, cioè l'area positiva e il modulo dell'area negativa sono uguali $\Rightarrow a_0 = 0$
2. $f(t)$ è *pari*, $f(t) = f(-t) \Rightarrow b_n = 0 \forall n \Rightarrow$ le armoniche sono tutte coseni ($\forall n: \alpha_n = 0, \pi; \nu_n = \pm \frac{\pi}{2}$)
3. $f(t)$ è *dispari*, $f(t) = -f(-t) \Rightarrow a_0 = 0$ e $a_n = 0 \forall n \Rightarrow$ la componente continua è nulla e le armoniche sono tutte seni ($\forall n: \alpha_n = \pm \frac{\pi}{2}; \nu_n = 0, \pi$)
4. la componente alternata di $f(t)$ è *dispari*, $f_{ac}(t) = -f_{ac}(-t) \Rightarrow a_n = 0 \forall n > 0 \Rightarrow$ le armoniche sono tutte seni ($\forall n > 0: \alpha_n = \pm \frac{\pi}{2}; \nu_n = 0, \pi$)
5. $f(t)$ presenta una *simmetria a semionda*, cioè la semionda negativa, ribaltata rispetto all'asse delle ascisse, è sovrapponibile con una traslazione alla semionda positiva, $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$, oppure $f(\frac{\theta}{\omega_1}) = -f(\frac{\theta+\pi}{\omega_1}) \Rightarrow a_0 = 0$ e $C_{2k} = 0 \forall k$, mancano la componente continua e tutte le armoniche di ordine pari (ovvero per $n = 2, 4, 6, \dots$), e sono presenti solo le armoniche di ordine dispari (ovvero per $n = 1, 3, 5, \dots$)

Esempio

Inserire figura dente di sega alternato, fatto di una successione di triangoli rettangoli positivi e negativi

6. $f(t)$ presenta una *simmetria a quarto d'onda*, $f(t) = -f(t + \frac{T}{4})$, oppure $f(\frac{\theta}{\omega_1}) = -f(\frac{\theta+\pi}{\omega_1})$ [Rashid 2007¹² 401]
7. sia la prima semionda ($0 < t < \frac{T}{2}$) che la seconda semionda ($\frac{T}{2} < t < T$) si compongono di due parti simmetriche rispetto al proprio asse verticale centrale, cioè $f(t) = f(\frac{T}{2} - t)$ per $0 < t < \frac{T}{2}$, e $f(t) = f(\frac{3}{2}T - t)$ per $\frac{T}{2} < t < T$ (in termini indipendenti dal periodo ciò si scrive $f(\frac{\theta}{\omega_1}) = f(\frac{\pi-\theta}{\omega_1})$ per $0 < \theta < \pi$, e $f(\frac{\theta}{\omega_1}) = f(\frac{3\pi-\theta}{\omega_1})$ per $\pi < \theta < 2\pi$) $\Rightarrow a_n = 0 \forall n$, mancano tutti i termini in coseno, cioè tutte le armoniche hanno valore nullo nei nodi della fondamentale caso c) su [Someda 1977¹⁵ 405-6], da verificarne il senso/significato
ho verificato che $\int_0^\pi f(\frac{\theta}{\omega_1}) \cos n\theta d\theta = (1 + (-1)^n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\theta}{\omega_1}) \cos n\theta d\theta$, cioè vale zero solo per n dispari
devo verificare che lo stesso vale per $\int_\pi^{2\pi} f(\frac{\theta}{\omega_1}) \cos n\theta d\theta$ (per $n = 1$ direi che è visivamente immediato)

Esempi

Inserire figura con prima semionda a trapezio positivo e asse centrale a $t = \frac{T}{4}$, e seconda semionda a triangolo negativo e asse centrale a $t = \frac{3}{4}T$

Inserire figura dell'andamento della corrente raddrizzata da un raddrizzatore a singola semionda

$$i(t) = \begin{cases} I_M \sin \omega_1 t & \text{quando } \sin \omega_1 t \geq 0 \\ 0 & \text{quando } \sin \omega_1 t < 0 \end{cases} \quad 2.39$$

$$= I_M \frac{\sin \omega_1 t + |\sin \omega_1 t|}{2} = I_M u^{(-1)}(\sin \omega_1 t) \quad 2.40$$

Inserire figura con prima semionda come parte positiva del seno, e seconda semionda come parte negativa del seno ma con ampiezza ridotta

$$i(t) = \begin{cases} I_M \sin \omega_1 t & \text{quando } \sin \omega_1 t \geq 0 \\ \frac{I_M}{3} \sin \omega_1 t & \text{quando } \sin \omega_1 t < 0 \end{cases} \quad 2.41$$

$$= I_M \frac{\sin \omega_1 t + |\sin \omega_1 t|}{2} + \frac{I_M}{3} \frac{\sin \omega_1 t - |\sin \omega_1 t|}{2} \quad 2.42$$

2.5.5 Troncamento della serie di Fourier

La serie di Fourier può avere un numero infinito di armoniche. Se alla somma infinita si sostituisce la somma finita delle sole armoniche di ordine fino a k , si introduce un errore di troncamento che è tipicamente tanto più contenuto quanto maggiore è k .

Dato che le funzioni periodiche di interesse applicativo presentano armoniche di ampiezze rapidamente decrescenti all'aumentare dell'ordine n , limitando la somma a poche armoniche inferiori (spesso sono sufficienti le prime tre o quattro armoniche), si introduce un'approssimazione generalmente accettabile.

esempio, inserire grafico come [Guarnieri and Stella 2004⁷ 360]

2.5.6 Forma esponenziale

È possibile scrivere la serie di Fourier nella seguente *forma esponenziale*

$$f(t) \stackrel{\text{gp}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_n e^{in\omega_1 t} \quad 2.43$$

con coefficienti complessi

$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) e^{-in\theta} d\theta \quad 2.44$$

Infatti, dalla $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (che in questo contesto possiamo considerare come la definizione di esponenziale con argomento immaginario) e conseguente $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, si ricavano le seguenti

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{formule di Eulero} \quad 2.45$$

e si ha [Romano 2007¹³ 211]

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_n e^{in\omega_1 t} &= \bar{F}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{F}_k e^{ik\omega_1 t} + \bar{F}_{-k} e^{-ik\omega_1 t}) = \bar{F}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{F}_k (\cos k\omega_1 t + i \sin k\omega_1 t) + \bar{F}_{-k} (\cos k\omega_1 t - i \sin k\omega_1 t)] \\ &= \bar{F}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(\bar{F}_k + \bar{F}_{-k}) \cos k\omega_1 t + i(\bar{F}_k - \bar{F}_{-k}) \sin k\omega_1 t] \end{aligned}$$

La precedente espressione risulta identica alla 2.23 se e solo se

$$\begin{aligned} \bar{F}_k + \bar{F}_{-k} &= a_k \\ \bar{F}_k - \bar{F}_{-k} &= \frac{b_k}{i} = -ib_k \end{aligned}$$

dunque deve essere

$$\begin{aligned} \bar{F}_0 &= \frac{a_0}{2} \\ \bar{F}_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \\ \bar{F}_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2} = \check{F}_k \quad (\text{valida per funzioni } f \text{ reali; in generale per } f \text{ complessa risulta } \check{F}_k = \frac{\check{a}_k + i\check{b}_k}{2} \neq \bar{F}_{-k}) \end{aligned}$$

da cui segue anche la 2.44.

La 2.44 consente di associare ad una data $f(t)$ una successione di numeri complessi $\bar{F}_n$, e questa permette a sua volta, tramite la 2.43, di *ricostruire* la $f(t)$. La 2.44 può dunque essere riguardata come una operazione che trasforma la funzione *reale* $f(t)$

della variabile continua t in una funzione *complessa* $\bar{F}_n$ della variabile *discontinua* n , mentre la 2.43 può essere interpretata come l'operazione inversa.

2.5.7 Interpretazione della forma esponenziale: curve piane chiuse

Due funzioni $x(t)$ e $y(t)$, periodiche e con periodo comune T , descrivono nel piano una curva chiusa. Tale curva può essere convenientemente rappresentata dalla funzione periodica a valori complessi $z(t) = x(t) + iy(t)$. Sussistono evidentemente le seguenti relazioni

$$\begin{cases} z(t) = x(t) + iy(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_z(n) e^{in\omega_1 t} & x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n) e^{in\omega_1 t} & y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_y(n) e^{in\omega_1 t} \\ c_z(n) = c_x(n) + ic_y(n) &= \frac{1}{T} \int_T z(t) e^{-in\omega_1 t} dt & c_x(n) = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-in\omega_1 t} dt & c_y(n) = \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-in\omega_1 t} dt \end{cases}$$

dove con il simbolo $\int_T$ si intende integrazione su un intervallo di durata T , e dove si sono indicati i coefficienti di Fourier della funzione $z(t)$ con la nuova notazione $c_z(n)$, e analogamente per $x(t)$ e $y(t)$. Si ha inoltre

$$\begin{cases} c_z(n) + c_z(-n) = \frac{2}{T} \int_T z(t) \cos n\omega_1 t dt = a_z(n) & c_x(n) + c_x(-n) = a_x(n) & c_y(n) + c_y(-n) = a_y(n) \\ c_z(n) - c_z(-n) = \frac{-2i}{T} \int_T z(t) \sin n\omega_1 t dt = -ib_z(n) & c_x(n) - c_x(-n) = -ib_x(n) & c_y(n) - c_y(-n) = -ib_y(n) \\ \begin{cases} c_z(0) = \frac{a_z(0)}{2} \\ c_z(+n) = \frac{a_z(n) - ib_z(n)}{2} \\ c_z(-n) = \frac{a_z(n) + ib_z(n)}{2} \neq \check{c}_z(+n) \end{cases} & \begin{cases} c_x(0) = \frac{a_x(0)}{2} \\ c_x(+n) = \frac{a_x(n) - ib_x(n)}{2} \\ c_x(-n) = \frac{a_x(n) + ib_x(n)}{2} = \check{c}_x(+n) \end{cases} & \begin{cases} c_y(0) = \frac{a_y(0)}{2} \\ c_y(+n) = \frac{a_y(n) - ib_y(n)}{2} \\ c_y(-n) = \frac{a_y(n) + ib_y(n)}{2} = \check{c}_y(+n) \end{cases} & n \geq 1 \\ a_z, b_z \text{ complex} & a_x, b_x \text{ real} & a_y, b_y \text{ real} \end{cases}$$

In particolare, dati i coefficienti della forma complessa $c_z(n)$, i coefficienti della forma reale di $x(t)$ e $y(t)$ possono calcolarsi come

$$\begin{cases} c_z(0) = \frac{1}{T} \int_T [x(t) + iy(t)] dt = \frac{a_x(0)}{2} + i \frac{a_y(0)}{2} = \frac{a_z(0)}{2} \\ c_z(n) + c_z(-n) = \frac{2}{T} \int_T [x(t) + iy(t)] \cos n\omega_1 t dt = a_x(n) + ia_y(n) = a_z(n) \\ i[c_z(n) - c_z(-n)] = \frac{2}{T} \int_T [x(t) + iy(t)] \sin n\omega_1 t dt = b_x(n) + ib_y(n) = b_z(n) \end{cases} \quad n \geq 1 \quad 2.46$$

L'interpretazione dei coefficienti $c_z(n) = |c_z(n)| e^{i\alpha_z(n)}$ è la seguente. La curva chiusa $z(t)$ si ottiene come somma di una costante $c_z(0)$ e di vettori rotanti del tipo $z_n(t) = |c_z(n)| e^{i(n\omega_1 t + \alpha_z(n))}$. I termini con $n > 0$ ruotano (per t crescente) in senso antiorario e quelli con $n < 0$ in senso orario. Quindi ci si aspetta che per una curva "antioraria" ("oraria") il coefficiente della componente fondamentale, cioè quello con modulo maggiore, sia $c_z(1)$ ($c_z(-1)$).

Consideriamo come esempio una ellisse antioraria avente centro in $z_0 = x_0 + iy_0$, semiasse maggiore A e minore B e ruotata di un angolo α

$$z(t) = z_0 + (A \cos \omega_1 t + iB \sin \omega_1 t) e^{i\alpha} = z_0 + \left(\frac{A+B}{2} e^{i\omega_1 t} + \frac{A-B}{2} e^{-i\omega_1 t} \right) e^{i\alpha} \quad 2.47$$

È evidente che in questo semplice caso non occorre calcolare i coefficienti, che risultano essere $c_z(0) = z_0$, $c_z(1) = \frac{A+B}{2} e^{i\alpha}$, $c_z(-1) = \frac{A-B}{2} e^{i\alpha}$. Come atteso si ha $|c_z(1)| > |c_z(-1)|$, e in particolare $|c_z(-1)| = 0$ nel caso circolare $B = A$. I coefficienti a_x, b_x, a_y, b_y possono ottenersi come

$$\begin{aligned} c_x(1) + c_x(-1) &= \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \right) e^{i\alpha} = A e^{i\alpha} = +A \cos \alpha + iA \sin \alpha = a_x(1) + ia_y(1) \\ i[c_x(1) - c_x(-1)] &= i \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \right) e^{i\alpha} = iB e^{i\alpha} = -B \sin \alpha + iB \cos \alpha = b_x(1) + ib_y(1) \end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} c_n &= c_z(n) & \gamma_n &= \angle c_n & \delta_n &= \frac{\gamma_n + \gamma_{-n}}{2} & \sigma_n &= \frac{\gamma_n - \gamma_{-n}}{2} & A_n &= |c_n| + i|c_{-n}| = |A_n| e^{i\alpha_n} \\ c_n e^{in\omega_1 t} + c_{-n} e^{-in\omega_1 t} &= |c_n| e^{i\gamma_n} e^{in\omega_1 t} + |c_{-n}| e^{i\gamma_{-n}} e^{-in\omega_1 t} = e^{i\delta_n} [|c_n| e^{i(n\omega_1 t + \sigma_n)} + |c_{-n}| e^{-i(n\omega_1 t + \sigma_n)}] \\ &= |A_n| [\cos \alpha_n e^{i(n\omega_1 t + \sigma_n)} + \sin \alpha_n e^{-i(n\omega_1 t + \sigma_n)}] \\ &= |A_n| [\cos \alpha_n (c + is) + \sin \alpha_n (c - is)] \\ &= |A_n| [(\cos \alpha_n + \sin \alpha_n) \cos(n\omega_1 t + \sigma_n) + i(\cos \alpha_n - \sin \alpha_n) \sin(n\omega_1 t + \sigma_n)] \end{aligned}$$

2.5.8 Alcune proprietà

Ai fini delle applicazioni sono infine molto importanti i seguenti due teoremi:

derivabilità e integrabilità termine a termine, vedi Teorema B.2.1 [Bobbio and Gatti 1991² 771-2]

Se f e f_n sono distribuzioni si ha in generale, nel senso delle distribuzioni [Guidobaldi 13]

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f' \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f'_n = f'\end{aligned}$$

Si noti che trattasi di un teorema molto lontano dall'analogo teorema valido per le funzioni in senso classico in termini di semplicità: nel caso delle distribuzioni non occorrono ipotesi!

Tra le varie conseguenze, ciò comporta in particolare [Guidobaldi 13] la possibilità di derivare termine a termine *nel senso delle distribuzioni* le serie trigonometriche di Fourier, convergenti in media quadratica. Così, ad esempio, si consideri la funzione periodica $f(t)$ in [figura nn](#) ed il suo sviluppo in serie di Fourier, il quale converge in media quadratica su ogni compatto; si ha

inserire figura come Guidobaldi 13

$$f(t) = \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \dots + \frac{1}{n} \sin nt + \dots$$

e derivando

$$-\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k2\pi) = \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt + \dots$$

da cui

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k2\pi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt$$

Sostituendo $\omega_1 t$ al posto di t e usando la proprietà di scaling $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$, si ottiene l'espressione valida per periodo T generico [si veda anche Guidobaldi 19]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_1 t = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_1 t} \quad 2.48$$

e in particolare ad esempio

$$\delta(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_1 t, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad 2.49$$

Convoluzione

$$\begin{aligned}c_{xy}(n) &= \frac{1}{T} \int_T x(t)y(t)e^{-in\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_T \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_x(m)e^{im\omega_1 t} y(t)e^{-in\omega_1 t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_x(m) \frac{1}{T} \int_T y(t)e^{-i(n-m)\omega_1 t} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_x(m)c_y(n-m) = c_x * c_y(n) = c_y * c_x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_x(n-m)c_y(m) \\ a_{xy}(n) &= \frac{2}{T} \int_T x(t)y(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_T \left[\frac{a_x(0)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_x(m) \cos m\omega_1 t + b_x(m) \sin m\omega_1 t) \right] y(t) \cos n\omega_1 t dt \\ &= \frac{a_x(0)}{2} \frac{2}{T} \int_T y(t) \cos n\omega_1 t dt + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_x(m) \frac{2}{T} \int_T y(t) \cos m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt + b_x(m) \frac{2}{T} \int_T y(t) \sin m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt \right] \\ &= \frac{a_x(0)a_y(n)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_x(m) \frac{2}{T} \int_T y(t) \frac{\cos(m-n)\omega_1 t + \cos(m+n)\omega_1 t}{2} dt + b_x(m) \frac{2}{T} \int_T y(t) \frac{\sin(m-n)\omega_1 t + \sin(m+n)\omega_1 t}{2} dt \right] \\ &= \frac{a_x(0)}{2} \frac{a_y(n) + a_y(-n)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_x(m) \frac{a_y(m-n) + a_y(m+n)}{2} + b_x(m) \frac{b_y(m-n) + b_y(m+n)}{2} \right] \\ &= \dots\end{aligned}$$

2.6 Integrale di Fourier

2.6.1 Rappresentazione di una funzione non periodica

[Balestrino and Celentano 1982¹ 148-150]
[Ghizzetti and Ossicini 1971⁴]

La scomposizione di una funzione in un intervallo secondo la serie di Fourier può essere applicata anche per intervalli *molto ampi*. Ovvero si può pensare di considerare, per una funzione non periodica $f(t)$, il procedimento limite relativo alla scomposizione per un intervallo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ con $T \rightarrow \infty$. In tal caso la pulsazione fondamentale $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ tende a zero, e si può immaginare di sostituire una variabile continua ω alla variabile discontinua $n\omega_1$. Si comprende allora come la distribuzione delle armoniche tenda ad essere una distribuzione continua lungo l'asse ω . La formula di scomposizione implicherà, anziché la sommatoria di termini di valore finito, una conveniente integrazione.

Si dimostra infatti che, *condizione sufficiente* affinché la suddetta estensione al caso delle funzioni non periodiche sia valida è che la funzione $f(t)$ verifichi le condizioni di Dirichlet in ogni intervallo limitato dell'asse reale e che, inoltre, f sia *sommabile*, cioè esista e sia finito l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$.

Effettuando formalmente le sostituzioni sopra indicate si ottiene (in luogo della (???.??))

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega \quad 2.50$$

con

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad \text{e} \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad \omega \geq 0 \quad 2.51$$

Osserviamo che il termine A_0 è scomparso dalla (???.??), essendo ciò legato all'ipotesi di sommabilità della f .

Tali relazioni sono utili quando si voglia collegare il comportamento di un sistema elettrico sottoposto ad un regime qualsiasi al suo comportamento in regime sinusoidale.

Analogamente, la (???.??) diventa

$$f(t) = \int_0^{\infty} C(\omega) \cos(\omega t - \varphi'(\omega)) d\omega \quad 2.52$$

dove (Fig nn)

$$C(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} > 0 \quad 2.53$$

$$\varphi'(\omega) = \arg(a(\omega) + ib(\omega)) = \arctan \frac{b(\omega)}{a(\omega)} + \pi u_r(a(\omega)) \quad 2.54$$

Inserire figura triangolo $a(\omega)$ $b(\omega)$ $C(\omega)$ $\varphi'(\omega)$

e, infine, la (???.??) diventa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad 2.55$$

con

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \omega \in R \quad 2.56$$

L'integrale a secondo membro della (???.??) consente quindi di passare dalla funzione reale $f(t)$ alla funzione complessa $F(\omega)$: questa è detta *trasformata di Fourier* di $f(t)$, e si indica anche con $\mathcal{F}f(t)$. L'operazione di antitrasformazione si indica con $\mathcal{F}^{-1}$.

Si verifica che la parte reale $\Re F(\omega)$ di $F(\omega)$ è una funzione pari, mentre il coefficiente della parte immaginaria $\Im F(\omega)$ è dispari, e analogamente per il modulo $M(\omega) = |F(\omega)|$ e l'argomento $\varphi(\omega) = \angle F(\omega)$:

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$= \underbrace{\Re F(\omega)}_{\text{pari}} + i \underbrace{\Im F(\omega)}_{\text{dispari}} = |F(\omega)| e^{i\angle F(\omega)} = \underbrace{M(\omega)}_{\text{pari}} e^{i \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{dispari}}} \quad 2.57$$

A $M(\omega)$ si dà il nome di *spettro di ampiezza* della $f(t)$; a $\varphi(\omega)$ quello di *spettro di fase*.

Segue anche che $F(-\omega) = F^*(\omega)$, dunque

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^0 F(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= - \int_{\infty}^0 F(-\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} F^*(\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \left(\int_0^{\infty} F(\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma \right)^* + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2\Re \left(\int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) = 2 \int_0^{\infty} \Re[F(\omega) e^{i\omega t}] d\omega \end{aligned}$$

e pertanto la (2.57) può essere riscritta nella forma

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re[F(\omega) e^{i\omega t}] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re[|F(\omega)| e^{i \arg F(\omega)} e^{i\omega t}] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)| \cos[\omega t + \arg F(\omega)] d\omega$$

Confrontando quest'ultima con la (2.56) si ottiene

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi} |F(\omega)| = \frac{1}{\pi} M(\omega) \quad 2.58$$

$$\varphi'(\omega) = -\arg F(\omega) = -\varphi(\omega) \quad 2.59$$

Esempi [Bobbio and Gatti 1991² 773-5]

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = \tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} = \tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2}$$

$$f(t) = \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = \tau \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right)^2 = \tau \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega\tau}{2}$$

Esempi: traslazione in frequenza, modulazione di ampiezza, moltiplicazione a divisione di frequenza (FDM)

2.6.2 Proprietà e applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier

Le proprietà che enunceremo con riferimento all'integrale di Fourier (e alla trasformata omonima) di una funzione aperiodica valgono naturalmente anche per la serie di Fourier di una funzione periodica.

Proprietà (linearità, derivazione): [Bobbio and Gatti 1991² 775+]

Cenni sulle applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier: [Bobbio and Gatti 1991² 775+]

Se $f(t)$ è non derivabile, discontinua di prima specie, nei punti $t = t_i$, $i = 1, \dots, n$, e la derivata $\frac{df}{dt}$ è intesa *in senso classico* (piuttosto che *nel senso delle distribuzioni* o *funzioni generalizzate*, come vedremo in seguito), allora risulta

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega F(\omega) - \sum_{i=1}^n [f(t_i^+) - f(t_i^-)] e^{-i\omega t_i} \quad 2.60$$

Ad esempio

$$f(t) = \begin{cases} ae^{t-t_1} & t < t_1 \\ be^{-(t-t_1)} & t > t_1 \end{cases} \quad \frac{df}{dt} = \begin{cases} ae^{t-t_1} & t < t_1 \\ -be^{-(t-t_1)} & t > t_1 \end{cases} \quad 2.61$$

$$F(\omega) = \frac{a+b+i\omega(a-b)}{1+\omega^2} e^{-i\omega t_1} \quad \mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{a-b+i\omega(a+b)}{1+\omega^2} e^{-i\omega t_1} \quad 2.62$$

e si verifica immediatamente che $i\omega F(\omega) - (b-a)e^{-i\omega t_1}$ risulta uguale a $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right)$.

Se invece $f(t)$ è non derivabile, ma continua, nei punti $t = t_i$, allora ovviamente discende $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega F(\omega)$.

Come vedremo, se la derivata $\frac{df}{dt}$ è intesa nel senso della teoria delle funzioni generalizzate, la (?.?) non si applica, e resta valida soltanto la $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega F(\omega)$, anche per funzioni non derivabili in senso classico.

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad 2.63$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega) d\omega \quad 2.64$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) \quad 2.65$$

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0) \quad \text{traslazione in } \omega \quad 2.66$$

$$\mathcal{F}[2f(t) \cos \omega_0 t] = F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0) \quad \text{modulazione} \quad 2.67$$

$$\mathcal{F}[2f(t) \cos(\omega_0 t + \phi)] = e^{i\phi} F(\omega - \omega_0) + e^{-i\phi} F(\omega + \omega_0) \quad \text{modulazione} \quad 2.68$$

2.69

Aggiungere altre proprietà [Balestrino and Celentano 1982¹ 149]

Dalla (?.?) si ha

$$\mathcal{E}_f \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \text{energia di } f \quad 2.70$$

che giustifica il nome di *densità spettrale di energia* che viene dato alla funzione $\frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2$.

2.6.3 Esempi di trasformate

Nell'ambito della teoria delle distribuzioni praticamente tutte le funzioni sono dotate di trasformata di Fourier.

far vedere che l'integrale $\mathcal{F} 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$ non esiste in senso classico

$$\mathcal{F} 1 = 2\pi\delta(\omega) \quad 2.71$$

$$\mathcal{F} 1(t) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \quad 2.72$$

$$\mathcal{F}\delta(t) = 1 \quad 2.73$$

$$\mathcal{F} e^{i\omega_0 t} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad 2.74$$

$$\mathcal{F} \sin \omega_0 t = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}\right) = -i\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad 2.75$$

$$\mathcal{F} \cos \omega_0 t = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad 2.76$$

$$\mathcal{F} \sin(\omega_0 t + \alpha) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i(\omega_0 t + \alpha)} - e^{-i(\omega_0 t + \alpha)}}{2i}\right) = -i\pi[\delta(\omega - \omega_0)e^{i\alpha} - \delta(\omega + \omega_0)e^{-i\alpha}] \quad 2.77$$

$$\mathcal{F} \cos(\omega_0 t + \alpha) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + e^{-i(\omega_0 t + \alpha)}}{2}\right) = \pi[\delta(\omega - \omega_0)e^{i\alpha} + \delta(\omega + \omega_0)e^{-i\alpha}] \quad 2.78$$

Trasformate di funzioni frequentemente utilizzate su [Balestrino and Celentano 1982¹ 149-150]

2.6.4 Trasformata di Fourier di una funzione periodica

Esempio

$f(t)$ funzione periodica $\Rightarrow$ è sviluppabile in serie di Fourier.

$$f(t) \stackrel{\text{qo}}{=} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad 2.79$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left(C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \cos(n\omega_1 t + \alpha_n)\right) = 2\pi C_0 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \pi [\delta(\omega - n\omega_1) e^{i\alpha_n} + \delta(\omega + n\omega_1) e^{-i\alpha_n}] \quad 2.80$$

Se ad esempio $C_0 = 1$, $C_{nM} = \frac{1}{n}$ e $\alpha_n = 0$, allora $f(t) \stackrel{\text{qo}}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\omega_1 t$ e $F(\omega) = 2\pi \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n} [\delta(\omega - n\omega_1) + \delta(\omega + n\omega_1)]$

Inserire figura spettro a righe

Spettro continuo e spettro a righe

La serie di Fourier è un caso particolare della trasformata di Fourier

2.6.5 Serie e integrale di Fourier per le funzioni di più variabili

Tutti i risultati precedenti possono estendersi alle funzioni di più variabili $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ definite in $\mathbb{R}^n$.

Si consideri una funzione di due variabili $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ periodica in ciascuna delle variabili (sia L_i il periodo della generica variabile x_i). Per ogni fissato valore di x_2 si può sviluppare la funzione in serie di Fourier nella variabile x_1

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \bar{F}_{k_1}(x_2) e^{ik_1 \omega_1 x_1} \quad \bar{F}_{k_1}(x_2) = \frac{1}{L_1} \int_{a_1}^{a_1+L_1} f(x_1, x_2) e^{-ik_1 \omega_1 x_1} dx_1$$

I coefficienti $\bar{F}_{k_1}(x_2)$ sono funzioni (*complesse*) periodiche di periodo L_2 , quindi può porsi

$$\bar{F}_{k_1}(x_2) = \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \bar{F}_{k_1 k_2} e^{ik_2 \omega_2 x_2} \quad \bar{F}_{k_1 k_2} = \frac{1}{L_2} \int_{a_2}^{a_2+L_2} \bar{F}_{k_1}(x_2) e^{-ik_2 \omega_2 x_2} dx_2$$

Sostituendo si ha

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \bar{F}_{k_1 k_2} e^{i(k_1 \omega_1 x_1 + k_2 \omega_2 x_2)} \quad 2.81$$

$$\bar{F}_{k_1 k_2} = \frac{1}{L_1 L_2} \int_{a_1}^{a_1+L_1} \int_{a_2}^{a_2+L_2} f(x_1, x_2) e^{-i(k_1 \omega_1 x_1 + k_2 \omega_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad 2.82$$

Nel caso generale di n variabili, definendo i vettori $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ e $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \mathbf{v}_{k_1 \dots k_n} = (k_1 \omega_1, \dots, k_n \omega_n)$, gli intervalli $I_i = (a_i, a_i + L_i)$, il rettangolo $R = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ e la sua misura $\mu(R) = L_1 L_2 \dots L_n$, si ottiene

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k_1, \dots, k_n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}} \quad 2.83$$

$$\bar{F}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\mu(R)} \int_R f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad 2.84$$

Con analogo procedimento si ottiene la trasformata di Fourier di una funzione di due variabili indipendenti

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad 2.85$$

$$F(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad 2.86$$

e in generale di n variabili indipendenti

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\omega} \quad F(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad 2.87$$

2.7 Reti elettriche in regime periodico

2.7.1 Tensioni e/o correnti non sinusoidali

Bipoli in regime periodico non sinusoidale [Guarnieri and Stella 2004⁷ 360]
 Caso lineare: proprietà di sovrapposizione degli effetti [Somedà 1977¹⁵ 408], [Guarnieri and Stella 2004⁷ 364]
 Caso non lineare: inquinamento armonico, anche se i forzamenti sono sinusoidi pure e isofrequenziali [Guarnieri and Stella 2004⁷ 360]
 Generatori di tensione in serie e generatori di corrente in parallelo [Guarnieri and Stella 2004⁷ 364]

Se una tensione (o una corrente) *periodica non sinusoidale* viene applicata ad un *bipolo lineare*, tale risulta pure l'altra sua grandezza (corrente o tensione).

Se invece una tensione (o una corrente) *sinusoidale* viene applicata ad un *bipolo non lineare*, l'altra sua grandezza (corrente o tensione) risulta *periodica non sinusoidale*.

In entrambi i casi il bipolo si trova in *regime periodico non sinusoidale*, dato che la tensione o la corrente o entrambe sono non sinusoidali; se tensione e corrente presentano forme d'onda diverse si dice che sono *distorte* l'una rispetto all'altra.

Si definiscono *reti elettriche in regime periodico* le reti aventi grandezze elettriche tutte periodiche di pari periodo T ; il regime sinusoidale ne è un caso particolare. Quando le grandezze elettriche, pur tutte periodiche di periodo T , differiscono dalla forma sinusoidale in modo così marcato da non permettere di essere considerate sinusoidali nemmeno in prima approssimazione si presenta il *regime periodico non sinusoidale*.

Lo studio delle reti elettriche (costituite da bipoli e doppi bipoli, e più in generale da N -poli ed M -porte) in regime periodico non sinusoidale avviene nel *dominio della frequenza*, facendo uso della serie di Fourier. Così si avrà, ad esempio per un bipolo

$$v(t) \stackrel{\text{gp}}{=} V_0 + v_{\text{ac}}(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad 2.88$$

$$i(t) \stackrel{\text{gp}}{=} I_0 + i_{\text{ac}}(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega_1 t + \beta_n) \quad 2.89$$

2.7.2 Generalizzazione del metodo simbolico. Esempi

Si consideri lo sviluppo di Fourier per gli ingressi della rete, ovvero per i generatori di tensione e di corrente

$$e(t) \stackrel{\text{gp}}{=} E_0 + e_{\text{ac}}(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad 2.90$$

$$j(t) \stackrel{\text{gp}}{=} j_0 + j_{\text{ac}}(t) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} j_n(t) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} J_n \sin(n\omega_1 t + \beta_n) \quad 2.91$$

La prima di queste espressioni può essere interpretata come la somma delle tensioni impresse da più generatori ideali di tensione (E_0 e gli $e_n(t)$) connessi in serie (in teoria in numero infinito, ma in pratica la serie viene troncata), mentre la seconda come la somma delle correnti impresse da più generatori ideali di corrente connessi in parallelo.

Nel caso di reti costituite da componenti *lineari* può applicarsi allora la *proprietà di sovrapposizione degli effetti*, facendo agire di volta in volta gli addendi di uguale ordine: prima tutti gli addendi costanti del tipo E_0 e J_0 , poi gli addendi di armonica fondamentale del tipo $e_1(t)$ e $j_1(t)$, quindi gli addendi di seconda armonica e così via per le armoniche superiori.

Se i componenti sono a *parametri costanti* (i vari R , L , C , M , ecc), per la soluzione corrispondente alla n -ma armonica può applicarsi il metodo simbolico, in quanto risultano verificate, in tale ipotesi, le proprietà di *unicità*, *linearità* e *derivazione*. In particolare risulta

$$v_{Rn}(t) = Ri_{Rn}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{V}_{Rn} = R\bar{I}_{Rn} \quad 2.92$$

$$v_{Ln}(t) = L \frac{di_{Ln}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{V}_{Ln} = in\omega_1 L \bar{I}_{Ln} = iX_{Ln} \bar{I}_{Ln} \quad X_{Ln} = n\omega_1 L \quad 2.93$$

$$i_{Cn}(t) = C \frac{dv_{Cn}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{I}_{Cn} = in\omega_1 C \bar{V}_{Cn} = \frac{\bar{V}_{Cn}}{-iX_{Cn}} \quad X_{Cn} = \frac{1}{n\omega_1 C} \quad 2.94$$

Per un generico bipolo *lineare* passivo su cui insista una tensione rappresentata dalla sua serie di Fourier, si ha che anche la corrente sarà rappresentata da una serie di Fourier i cui termini si calcolano in base a ciascun termine della tensione in relazione con la corrispondente impedenza

$$\dot{Z}_n = Z_n e^{i\varphi_n} \quad 2.95$$

ovvero, associando a ciascuna armonica il fasore corrispondente

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \sqrt{2}V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) & \Leftrightarrow & \quad \bar{V}_n = V_n e^{i\alpha_n} \\ i_n(t) &= \sqrt{2}I_n \sin(n\omega_1 t + \beta_n) & \Leftrightarrow & \quad \bar{I}_n = I_n e^{i\beta_n} \end{aligned}$$

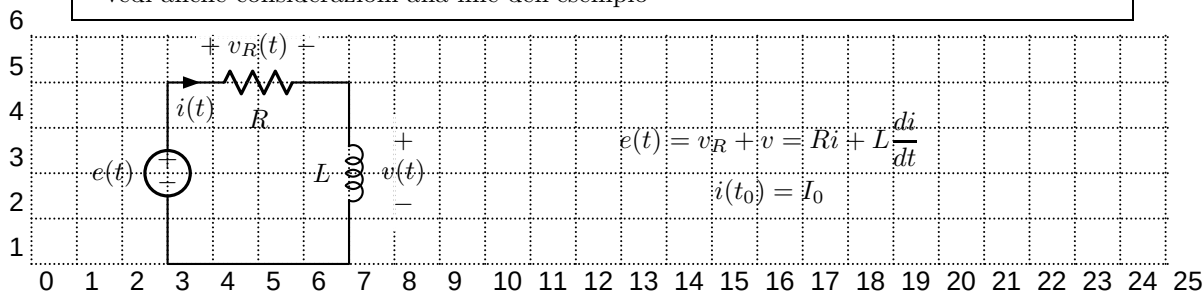
risulta

$$\bar{I}_n = \frac{\bar{V}_n}{\dot{Z}_n} = \frac{V_n e^{i\alpha_n}}{Z_n e^{i\varphi_n}} = \frac{V_n}{Z_n} e^{i(\alpha_n - \varphi_n)} \quad I_n = \frac{V_n}{Z_n} \quad \beta_n = \alpha_n - \varphi_n \quad 2.96$$

$$i(t) \stackrel{\text{gp}}{=} \frac{V_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{V_n}{Z_n} \sin(n\omega_1 t + \alpha_n - \varphi_n) \quad 2.97$$

dove Z_0 è la resistenza corrispondente al regime stazionario.

Esempio [Someda 1977¹⁵ 409-411]: serie RL alimentata da un generatore di tensione, vedi anche considerazioni alla fine dell'esempio



Inserire materiale Someda 409-410

...

Inserire diagramma Someda 410

Tale corrente è rappresentata in Fig ???; essa mostra chiaramente che le relazioni di ampiezza e di fase delle armoniche di corrente sono diverse da quelle di tensione.

Nel caso in questione, la terza armonica di corrente è in rapporto alla fondamentale meno ampia della corrispondente armonica di tensione; ciò perchè la reattanza magnetica cresce col numero di ordine dell'armonica.

L'inverso avviene in presenza di una reattanza magnetica capacitiva; le armoniche di corrente di ordine superiore tendono cioè ad esaltarsi.

Solo in circuiti dotati di pura resistenza ohmica la curva di corrente riproduce l'andamento della tensione cioè le relazioni di ampiezza e di fase delle varie armoniche sono le stesse per le due grandezze.

2.7.3 Valore efficace. Espressione armonica della potenza

Valore efficace

Inserire figura generatore di tensione

$$e(t) \stackrel{\text{gp}}{=} E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{nM} \sin(n\omega_1 t + \gamma_n) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_n \sin(n\omega_1 t + \gamma_n) = E_{dc} + e_{ac}(t) \quad 2.98$$

$$E = E_{rms} \triangleq \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} e^2\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta} \quad \theta = \omega_1 t \quad 2.99$$

Infatti, facendo uso della appropriata formula di Werner

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \quad \sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2} \quad \cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} \quad 2.100$$

si ha

$$\begin{aligned} e_{ac}^2(t) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_n \sin(n\theta + \gamma_n) \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2} E_m \sin(m\theta + \gamma_m) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2 E_n E_m \sin(n\theta + \gamma_n) \sin(m\theta + \gamma_m) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_n E_m \{ \cos[(n-m)\theta + \gamma_n - \gamma_m] - \cos[(n+m)\theta + \gamma_n + \gamma_m] \} \\ e^2(t) &= E_0^2 + 2E_0 e_{ac}(t) + 2e_{ac}^2(t) \\ &= E_0^2 + 2E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_n \sin(n\theta + \gamma_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_n E_m \{ \cos[(n-m)\theta + \gamma_n - \gamma_m] - \cos[(n+m)\theta + \gamma_n + \gamma_m] \} \\ \int_{t_0}^{t_0+T} e^2(t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} E_0^2 dt + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} 2E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_n \sin(n\omega_1 t + \gamma_n) dt}_{=0} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_n E_m \int_{t_0}^{t_0+T} \underbrace{\cos[(n-m)\omega_1 t + \gamma_n - \gamma_m]}_{\text{non dà contributo per } n \neq m} - \underbrace{\cos[(n+m)\omega_1 t + \gamma_n + \gamma_m]}_{\text{non dà contributo } \forall n, m} dt \\ &= T E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(0) dt = T E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} T E_n^2 = T \sum_{n=0}^{\infty} E_n^2 \end{aligned}$$

$$E = E_{\text{rms}} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} E_n^2} = \sqrt{E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2} = \sqrt{E_{dc}^2 + E_{ac}^2} \quad 2.101$$

$$E_{ac} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} E_n^2} \quad \text{valore efficace della componente alternata} \quad 2.102$$

Il valore efficace di una grandezza periodica è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci dei termini della serie di Fourier.

Potenza attiva e reattiva

Inserire figura bipolo

$$p(t) = v(t)i(t) \quad \text{potenza istantanea (valida per regime lentamente variabile)} \quad 2.103$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} p\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta \quad \text{potenza media o reale o attiva} \quad 2.104$$

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = [V_0 + v_{ac}(t)][I_0 + i_{ac}(t)] = V_0 I_0 + v_{ac}(t)i_{ac}(t) + V_0 i_{ac}(t) + I_0 v_{ac}(t) \\ &= P_{dc} + p_{ac}(t) + V_0 i_{ac}(t) + I_0 v_{ac}(t) \end{aligned}$$

Nel caso particolare di sovrapposizione di un regime stazionario e di un regime sinusoidale puro si ha

$$\begin{aligned} p(t) &= [V_0 + v_1(t)][I_0 + i_1(t)] = V_0 I_0 + v_1(t)i_1(t) + \{V_0 i_1(t) + I_0 v_1(t)\} \\ &= V_0 I_0 + 2V_1 I_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \sin(\omega_1 t + \beta_1) + \{V_0 \sqrt{2} \sin(\omega_1 t + \beta_1) + I_0 \sqrt{2} \sin(\omega_1 t + \alpha_1)\} \end{aligned}$$

La presenza del termine aggiuntivo tra parentesi graffe ci dice che per le potenze istantanee non vale la sovrapposizione degli effetti. Per le potenze medie invece vale, e vale in generale, come si evince dai passaggi seguenti.

$$\begin{aligned} v\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)i\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) &= P_{dc} + V_0 i_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) + I_0 v_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) + v_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)i_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \\ &= P_{dc} + V_0 i_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) + I_0 v_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} V_n \sin(n\theta + \alpha_n) \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2} I_m \sin(m\theta + \beta_m) \\ &= P_{dc} + V_0 i_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) + I_0 v_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2 V_n I_m \sin(n\theta + \alpha_n) \sin(m\theta + \beta_m) \\ &= P_{dc} + V_0 i_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) + I_0 v_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_n I_m \left[\cos((n-m)\theta + \alpha_n - \beta_m) - \cos((n+m)\theta + \alpha_n + \beta_m) \right] \quad \begin{array}{l} \text{prima} \\ \text{formula} \\ \text{di Werner} \end{array} \\
& \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} v\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) i\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta = P_{dc} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} d\theta + V_0 \underbrace{\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} i_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta}_{=0} + I_0 \underbrace{\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} v_{ac}\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta}_{=0} \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_n I_m \underbrace{\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \left[\cos((n-m)\theta + \alpha_n - \beta_m) - \cos((n+m)\theta + \alpha_n + \beta_m) \right] d\theta}_{=0 \text{ per } n \neq m} \\
& = P_{dc} 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} [\cos(\alpha_n - \beta_n) - \cos(2n\theta + \alpha_n + \beta_n)] d\theta \\
& = P_{dc} 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \cos \phi_n dt \quad \phi_n = \alpha_n - \beta_n \\
& = 2\pi V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n 2\pi \cos \phi_n \\
& P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos \phi_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \quad \text{2.105}
\end{aligned}$$

$P_n = V_n I_n \cos \phi_n$ è la potenza attiva associata alla n -esima armonica ($n \neq 0$) e $\cos \phi_n$ ne è il fattore di potenza.

L'espressione stabilisce che in regime periodico la potenza attiva è pari alla somma della potenza in continua e delle potenze associate alle singole armoniche.

A prima vista tale conclusione appare sorprendente, perchè ammette la sovrapposizione delle potenze che in generale (e ad esempio in termini di potenze istantanee) non è valida. Tale proprietà deriva dal fatto che gli integrali dei prodotti di armoniche di tensione e corrente aventi ordine diverso forniscono contributo nullo alla potenza media in un periodo.

Come esempio chiarificatore preliminare si può riportare l'espressione di $p(t)$ nel caso in cui sono presenti solo la componente continua e la fondamentale [come in Chua, Desoer, Ku 550]

In analogia si definisce la potenza reattiva

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \sin \phi_n \quad \text{2.106}$$

Può accadere che delle due grandezze tensione e corrente relative ad un certo bipolo, una sola sia distorta, mentre l'altra è una sinusoide pura. Se ad esempio la tensione non è distorta, solo la V_1 è non nulla, cioè $v(t) = \sqrt{2}V_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$, e risultano valide le relazioni del regime sinusoidale puro $P = V_1 I_1 \cos \phi_1$ e $Q = V_1 I_1 \sin \phi_1$.

Potenza apparente

$$P_a = VI = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 \sum_{m=0}^{\infty} I_m^2} = \sqrt{(V_0^2 + V_{ac}^2)(I_0^2 + I_{ac}^2)} \quad \text{2.107}$$

$$P_a^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad \text{2.108}$$

$$P_a^2 = P^2 + N^2 \quad \text{2.109}$$

Potenza deformante

$$\begin{aligned}
\phi_0 & \triangleq 0 \quad \Rightarrow \quad P = \sum_{n=0}^{\infty} V_n I_n \cos \phi_n \quad Q = \sum_{n=0}^{\infty} V_n I_n \sin \phi_n \\
P_a^2 & = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 \sum_{m=0}^{\infty} I_m^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} V_n^2 I_m^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(V_n^2 I_n^2 + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n^2 I_m^2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 I_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n^2 I_m^2 \\
P^2 & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos \phi_n \cos \phi_m \\
Q^2 & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \sin \phi_n \sin \phi_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^2 + Q^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 I_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m) \\
D^2 &= P_a^2 - P^2 - Q^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n^2 I_m^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} (V_n^2 I_m^2 + V_m^2 I_n^2) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m) \\
D^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} [V_n^2 I_m^2 - V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m)] \tag{2.110}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} [V_n^2 I_m^2 + V_m^2 I_n^2 - 2V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m)] \tag{2.111}$$

la sommatoria è estesa a tutte le coppie di armoniche di ordine n e m (con $n \neq m$).

Se risulta $\frac{V_n}{I_n} = \frac{V_m}{I_m}$ e $\phi_n = \phi_m \forall n, m$, allora $D = 0$. Ciò si verifica quando il bipolo è un resistore, per cui si ha anche $Q = 0$ e $|P| = P_a$. In tutti gli altri casi D è diversa da zero e la forma d'onda della corrente assorbita dal bipolo non è simile a quella della tensione ad esso applicata [Someda 1977¹⁵ 413].

Esempio: potenza media assorbita da un resistore

Inserire figura resistore

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \tag{2.112}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Ri^2(t)dt = RI^2 = R \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \tag{2.113}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{v^2(t)}{R} dt = \frac{V^2}{R} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2}{R} \tag{2.114}$$

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad V^2 = R^2 I^2 \quad V = RI \quad P = VI = P_a \tag{2.115}$$

La potenza media assorbita da un induttore o da un capacitore è zero.

Si ricordi quanto detto in precedente riguardo il significato fisico del valore efficace (pag 9)

Potenza non attiva

$$N = \sqrt{P_a^2 - P^2} \tag{2.116}$$

Fattore di potenza

$$\cos \phi = \frac{P}{P_a} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + N^2}} \leq 1 \tag{2.117}$$

in questo contesto $\cos \phi$ è un mero simbolo privo di significato trigonometrico.

Esempio [Someda 1977¹⁵ 413+], dove si vede come, in presenza di armoniche, cio' che rende la potenza apparente diversa dalla potenza attiva non è la sola potenza reattiva, ma è qualcosa di più grande

2.7.4 Principali effetti dell'inquinamento armonico

- Sottoutilizzo della potenza apparente P_a (che in teoria sarebbe tutta disponibile, utilizzabile), e conseguenti maggiori perdite sulle linee

- Le armoniche costituiscono disturbi indesiderati, in particolare (ma non solo) nelle frequenze audio
- ora [Guarnieri and Stella 2004⁷ 360-3]
- Cenni su rifasamento e compensazione delle armoniche

Come in regime sinusoidale, anche in regime periodico non sinusoidale la condizione di funzionamento ottimale dei sistemi elettrici, ossia il migliore funzionamento, si realizza quando la potenza apparente è minima a parità di potenza attiva P , ne qual caso si ha

$$P_a = |P| \quad \text{ovvero} \quad |\cos \phi| = 1 \quad \mathbf{2.118}$$

Questi criteri sono formalmente uguali a quelli che realizzano il funzionamento ottimale in regime sinusoidale e che sono stati considerati quando si è trattato il rifasamento del carico.

Per ottenere il funzionamento ottimale in regime periodico non sinusoidale non sono sufficienti le tecniche di rifasamento proprie del regime sinusoidale. Si ricorre invece a tecniche (tipicamente elettroniche) atte ad assicurare il *rifasamento alla pulsazione fondamentale* e la *compensazione delle armoniche superiori*, con l'obiettivo di limitare il più possibile la potenza non attiva N .

Capitolo 3

Convertitori Statici

appunti aq 9+

3.1 Generalità

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 89]

In numerose applicazioni elettriche sono necessarie tensioni e correnti continue, o meglio *unidirezionali*, ossia variabili ma sempre dello stesso segno; tali grandezze possono essere ottenute da una rete di alimentazione in corrente alternata (monofase o trifase) effettuando la *conversione alternata/continua (ac/dc)*. In altri casi è necessario convertire tensioni e correnti continue in grandezze sinusoidali, o almeno alternate, monofasi o trifasi, e si parla di *conversione continua/alternata (dc/ac)*.

Queste conversioni vengono preferibilmente eseguite con *macchine convertitrici statiche*, ossia *prive di organi in movimento*, che utilizzano componenti elettronici di potenza a *semiconduttore*. Nel caso della conversione ac/dc si parla di *raddrizzatori*, mentre nel caso della conversione dc/ac si parla di *invertitori (inverter)*.

È possibile ricorrere alla conversione statica anche per passare da un sistema in corrente continua ad un altro anch'esso in continua, ma con un diverso livello di tensione. Ciò si può ottenere con un invertitore ed un invertitore collegati in cascata, eventualmente interponendo tra essi un trasformatore; per molte applicazioni si può anche utilizzare un'unica macchina statica, detta *chopper*.

3.2 Componenti dei convertitori

3.2.1 Diodo ideale. Modello circuitale del diodo ideale

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 89], o appunti 9

[Sedra and Smith 1991¹⁴ 117], o appunti 9

esempio Diode OR Gate: battery backup [Horowitz and Hill 1989⁸ 49], o appunti 9

3.2.2 Diodo reale. Caratteristica corrente-tensione

inserire figura [Grove 1993⁵ 195], o appunti 9

inserire figura [Horowitz and Hill 1989⁸ 44], o appunti 9

I componenti considerati in precedenza, come resistore, induttore e condensatore (con R , L e C costanti) sono lineari, per cui raddoppiando l'ampiezza della tensione applicata ad esempio ad un resistore, raddoppierà la corrente in esso circolante.

Il diodo è invece un componente non lineare, per cui nelle reti in cui sono presenti diodi si generano armoniche diverse da quelle imposte dai generatori. In una rete contenente diodi non si può applicare il teorema di Thevenin/Norton, o meglio lo si può applicare ad una sottorete non contenente diodi.

3.2.3 Cenni sui dispositivi a semiconduttore

[Mencuccini and Silvestrini 1988¹⁰ 531+]

[Sedra and Smith 1991¹⁴ 169,1055]

[Grove 1993⁵]

[Sze 1991¹⁷ 1]

[Soncini 1986¹⁶]

[Rashid 2007¹² 34+]

Millman

Millman-Halkias

- valori tipici di conducibilità per isolanti, semiconduttori e conduttori
- elettroni nei singoli atomi isolati

- quantizzazione dell'energia
- principio di esclusione di Pauli
- elettroni nei solidi
- bande permesse e bande proibite
- distribuzione statistica degli elettroni nei livelli energetici permessi secondo la legge di distribuzione di Fermi-Dirac
- nell'occupare i livelli energetici permessi gli elettroni, avendo spin semi-intero, debbono comunque soddisfare il principio di Pauli. Essi tendono inoltre a sistemarsi assumendo gli stati di minima energia
- conduzione nei solidi. l'intervallo di variabilità della resistività (Fig 3.1 [Sze 1991¹⁷ 1]) copre più di 25 ordini di grandezza: $\sim 10^{-8} \Omega\text{m}$ per il rame, $\sim 10^{16} \Omega\text{m}$ per il quarzo fuso (SiO_2)

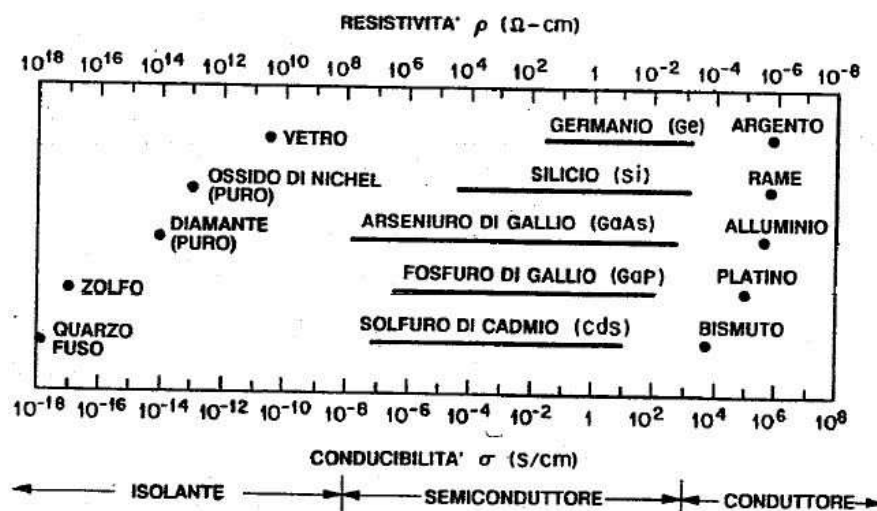


Figura 3.1 Valori tipici di resistività per isolanti, semiconduttori e conduttori

- nei semiconduttori la banda di valenza è separata da quella di conduzione da una banda proibita (gap) di ampiezza E_G nel mezzo della quale cade l'energia di Fermi E_F

3.2.4 Drogaggio dei semiconduttori e giunzione pn

3.2.5 Diodo a semiconduttore

[Guarnieri and Stella 2004⁷ 36]

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 89-92]

[Rashid 2007¹² 4]

[Rashid 2007¹² 10-12]

3.2.6 Corrente massima diretta e tensione massima inversa. Potenza nominale

La corrente massima diretta $I_{F\max}$ e tensione massima inversa $V_{R\max}$ sono specificate dal produttore.

Tensione e corrente nominale diretta $V_F @ I_F$

valore tipico $V_F = 0.7 \text{ V}$

valore tipico $V_F = 0.4 \text{ V}$ per i diodi Schottky, che sono diodi veloci, utili in certe applicazioni

valore tipico $V_F = 1.1 \text{ V}$ per i diodi di potenza

$V_{R\max} = 600 - 1200 \text{ V}$ per i nuovi diodi Schottky SiC, veloci

vedi [Rashid 2007¹² 4]

Potenza nominale di un diodo reale $V_{R\max} I_{F\max}$

3.2.7 Caratteristica esponenziale corrente-tensione (equazione di Shockley)

[Rashid 2007¹² 35]

Dipendenza della curva $i(v)$ dalla temperatura $-2\text{mV}/^\circ\text{C}$

$$I_S \propto n_i^2 \propto T^3 e^{-\frac{E_{G0}}{KT}} \Rightarrow i \propto T^3 e^{-\frac{E_{G0}-qV}{KT}} \quad 3.1$$

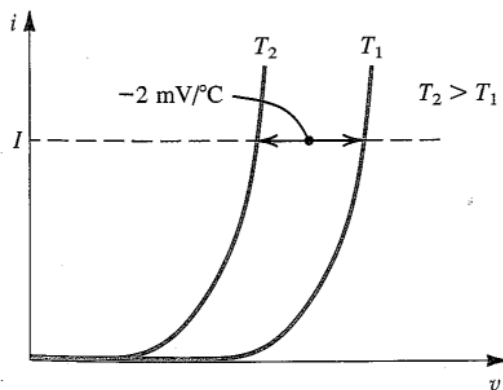


Figura 3.2 Dipendenza della caratteristica del diodo dalla temperatura in polarizzazione Forward. Per un dato livello di corrente, la caduta di tensione diminuisce di circa 2 mV per ogni incremento della temperatura di 1 °C

3.2.8 Modelli semplificati del diodo reale e circuiti equivalenti. Esempio

[Sedra and Smith 1991¹⁴ 132+], o appunti 10

inserire figure [Sedra and Smith 1991¹⁴ 133,134], o appunti 10

La caratteristica del diodo ...

$$i_D = \frac{u^{(-1)}(v_D - V_{D0})}{r_F} = \begin{cases} 0 & v_D \leq V_{D0} \\ \frac{v_D - V_{D0}}{r_F} & v_D > V_{D0} \end{cases} \quad 3.2$$

dove $u^{(-1)}$ è la funzione *rampa unitaria*, definita in §1.1, e r_F è la resistenza differenziale in modalità forward del modello semplificato del diodo, $r_F = \left. \frac{dv_D}{di_D} \right|_{v_D > V_{D0}}$. Nel limite $r_F \rightarrow 0$ la semiretta inclinata diventa verticale.

inserire figure [Sedra and Smith 1991¹⁴ 135], o appunti 10

- Corretta polarizzazione del diodo (circuito esterno tale da non far danneggiare il diodo, ad esempio resistenza in serie che limiti la corrente) [Sedra and Smith 1991¹⁴ 118], appunti miei 9
- Caduta di tensione diretta V_D

3.2.9 Cenni sull'uso del diodo come generatore di tensione di riferimento

- in configurazione forward [Sedra and Smith 1991¹⁴ 142+]
- operazione in regione di breakdown - diodo Zener (Clarence Melvin Zener descrisse questa proprietà) [Sedra and Smith 1991¹⁴ 144-150]

3.2.10 Comportamento in commutazione

[Rashid 2007¹² 38+]

Tempo di recupero inverso (*reverse recovery time*) t_{rr}

Tempo di recupero diretto (*forward recovery time*) o tempo di accensione (*turn on time*) t_{fr}

Per *ideale* si intende un diodo che, oltre ad avere la caratteristica $i-v$ ideale vista prima, e con tensione di soglia diretta $V_D = 0$, abbia anche il tempo di recupero inverso $t_{rr} = 0$. [Rashid 2007¹² 42,63]

3.2.11 Tiristore (o SCR) ideale. Modello del tiristore ideale

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 94-6]

3.2.12 Argomenti accennati

- Panoramica sui vari tipi di diodi (PiN, Schottky, Schottky SiC) e parametri caratteristici tipici [Rashid 2007¹² n]

3.3 Conversione ac-dc

La conversione alternata-continua consiste nel trasformare tensioni e correnti alternate in tensioni e correnti unidirezionali. I circuiti più semplici, che impiegano semplici diodi, consentono di ottenere tensioni e correnti unidirezionali di valore non regolabile; si parla allora semplicemente di *conversione ac/dc* o *raddrizzamento*.

Circuiti più complessi, che utilizzano ad esempio tiristori, permettono di ottenere tensioni e correnti di valore regolabile entro un certo campo; in questo caso si parla di *conversione controllata ac/dc* o *raddrizzamento controllato*.

inserire figura schema a blocchi di un circuito raddrizzatore (trasformatore, diodi, filtro, regolatore di tensione, carico), preso da [Sedra and Smith 1991¹⁴ 151], ma aggiungendo il blocco filtro all'ingresso che che attenua le armoniche in entrambe le direzioni

inserire figure UPS e schema generico di conversione di potenza [Rashid 2007¹² 24,27]

Effetti indesiderati [Rashid 2007¹² 25]

3.3.1 Analisi del circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda

[Rashid 2007¹² 63]

Marino 7-8

interessante su [Sedra and Smith 1991¹⁴ 153]

- corrente unidirezionale in linea [Rashid 2007¹² 64]
- *tensione inversa di picco* (*peak inverse voltage*) sui diodi $PIV = V_M$
- assumendo che il diodo sia ideale (caratteristica $i-v$ ideale e comportamento in commutazione ideale) si ha $v_o(t) = u^{(-1)}(v_s(t))$, dove $u^{(-1)}$ è la funzione *rampa unitaria* definita in § 1.1
- se invece non si assume la caratteristica ideale per il diodo, ma il modello semplificato con $V_{D0} \neq 0$ (fermo restando il comportamento in commutazione ideale), risulta $v_o(t) = \frac{1}{1+\frac{r_D}{R}} u^{(-1)}(v_s(t) - V_{D0})$, dove r_D è la resistenza del diodo.

inserire figura [Sedra and Smith 1991¹⁴ 153]

- analisi armonica nel caso in cui il diodo è considerato ideale [Rashid 2007¹² p72 esempio 3.3]

$$\begin{aligned}
 v_s(t) &= V_M \sin \omega_1 t = \sqrt{2} V_s \sin \omega_1 t \\
 v_o(t) &= \begin{cases} V_M \sin \omega_1 t & \text{quando } \sin \omega_1 t \geq 0, \text{ cioè } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \text{ cioè } 0 \leq \omega_1 t \leq \pi \\ 0 & \text{quando } \sin \omega_1 t \leq 0, \text{ cioè } \frac{T}{2} \leq t \leq T, \text{ cioè } \pi \leq \omega_1 t \leq 2\pi \end{cases} \\
 &= u^{(-1)}(v_s(t)) = V_M \frac{\sin \omega_1 t + |\sin \omega_1 t|}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{dc} &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T v_o(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} v_o(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V_M \sin \theta d\theta = \frac{V_M}{2\pi} [-\cos \theta]_0^\pi = -\frac{V_M}{2\pi} [-1 - 1] = \frac{V_M}{\pi} = \frac{\sqrt{2}V_s}{\pi} \cong 0.3183V_M \cong 0.4502V_s \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V_M \sin \theta \cos n\theta d\theta \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \int_0^\pi [\sin(1-n)\theta + \sin(1+n)\theta] d\theta \quad \begin{array}{l} \text{seconda} \\ \text{formula} \\ \text{di Werner} \end{array} \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi [\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta] d\theta}_{=0 \text{ per } n=1, \text{ quindi } a_1=0} \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} \right]_0^\pi = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right] \\
&\begin{cases} a_{2k+1} = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{2k+2}}{2k+2} + \frac{(-1)^{2k-1} - 1}{2k-1} \right] = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1-1}{2k+2} + \frac{1-1}{2k} \right] = 0 & n = 2k+1 \text{ (n dispari)} \\ a_{2k} = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{2k+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k-1} - 1}{2k-1} \right] = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1-(-1)}{2k+1} + \frac{(-1)-1}{2k-1} \right] = -\frac{V_M}{\pi} \frac{2}{(2k)^2-1} & n = 2k \text{ (n pari)} \end{cases} \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V_M \sin \theta \sin n\theta d\theta \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(1-n)\theta - \cos(1+n)\theta] d\theta \quad \begin{array}{l} \text{prima} \\ \text{formula} \\ \text{di Werner} \end{array} \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] d\theta \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right]_0^\pi = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{\sin(n-1)\pi - 0}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\pi - 0}{n+1} \right] = 0 \quad n \geq 2 \\
b_1 &= \frac{V_M}{2\pi} \int_0^\pi [1 - \cos 2\theta] d\theta = \frac{V_M}{2} \\
v_o(t) &= \frac{V_M}{\pi} + \frac{V_M}{2} \sin \omega_1 t - \frac{2V_M}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \cos 2k\omega_1 t \\
&= \frac{V_M}{\pi} + \frac{V_M}{2} \sin \omega_1 t - \frac{2V_M}{3\pi} \cos 2\omega_1 t - \frac{2V_M}{15\pi} \cos 4\omega_1 t - \frac{2V_M}{35\pi} \cos 6\omega_1 t - \dots
\end{aligned}$$

3.3

3.3.2 Parametri prestazionali

[Rashid 2007¹² 64]

- valor medio della tensione d'uscita (di carico)

$$V_{dc}$$

- valor medio della corrente d'uscita (di carico)

$$I_{dc}$$

- potenza d'uscita in continua

$$P_{dc} = V_{dc} I_{dc}$$

- valore efficace (*root-mean-square*, *rms*) della tensione d'uscita

$$V_{rms}$$

- valore efficace della corrente d'uscita

$$I_{rms}$$

- potenza apparente d'uscita

$$P_{ao} = V_{rms} I_{rms}$$

- *efficienza (o rapporto di raddrizzamento)*

$$\eta = \frac{P_{dc}}{P_{ao}}$$

- *valore efficace della componente alternata della tensione d'uscita*

$$V_{ac} = \sqrt{V_{rms}^2 - V_{dc}^2}$$

- *fattore di forma (form factor)*

$$FF = \frac{V_{rms}}{V_{dc}}$$

- *fattore di ripple (ripple factor, letteralmente 'fattore di ondulazione')*

$$RF = \frac{V_{ac}}{V_{dc}} = \sqrt{\frac{V_{rms}^2}{V_{dc}^2} - 1} = \sqrt{FF^2 - 1}$$

(attenzione: la definizione di fattore di ondulazione data su [Guarnieri and Stella 2003⁶ 100] e' diversa, talvolta piu' facile da calcolare, ma meno corretta a mio parere)

- *angolo di spostamento*

$$\phi_1$$

è l'angolo di sfasamento fra le componenti fondamentali della corrente di ingresso $i_s(t)$ e della tensione di ingresso $v_s(t)$

- *fattore di spostamento (displacement factor) o fattore di potenza di spostamento (displacement power factor)*

$$DF = DPF = \cos \phi_1$$

- *fattore armonico (harmonic factor) o distorsione armonica totale (total harmonic distortion)*

$$HF = THD = \sqrt{\frac{I_s^2 - I_{s1}^2}{I_{s1}^2}} = \sqrt{\frac{I_s^2}{I_{s1}^2} - 1}$$

dove I_s è il valore efficace della corrente di ingresso e I_{s1} è il valore efficace della componente fondamentale della corrente di ingresso.

- *potenza apparente di ingresso*

$$P_{as} = V_s I_s = V_{s1} I_s$$

dove V_s e I_s sono i valori efficace della tensione e della corrente di ingresso, e $V_s = V_{s1}$ perchè $v_s(t)$ è sinusoidale pura ($V_{sn} = 0$ per $n \neq 1$)

- *potenza media di ingresso*

$$P_s = \sum_{n=0}^{\infty} V_{sn} I_{sn} \cos \phi_n = V_{s1} I_{s1} \cos \phi_1 = P_{s1} = V_s I_{s1} \cos \phi_1$$

- *fattore di potenza di ingresso (power factor)*

$$PF = \cos \phi = \frac{P_s}{P_{as}} = \frac{I_{s1}}{I_s} \cos \phi_1$$

Se la corrente di ingresso è una sinusoide pura, allora $I_{s1} = I_s$ e il fattore di potenze diventa uguale al fattore di spostamento

- *fattore di cresta (crest factor)*

$$CF = \frac{I_{s(\text{peak})}}{I_s}$$

Un raddrizzatore ideale dovrebbe avere $\eta = 100\%$, $V_{ac} = 0$, $RF = 0$, $HF = THD = 0$ e $DF = DPF = 1$

Parametri prestazionali di un raddrizzatore a semplice semionda

[Rashid 2007¹² 67]

3.3.3 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con filtro

[Sedra and Smith 1991¹⁴ 158-9]

- condensatore in uscita, $\tau = RC \gg T$
- ampiezza ripple picco-picco $\Delta V_r \cong V_M \frac{T}{\tau}$
- corrente massima nel resistore $I_{RM} \cong \frac{V_M}{R}$
- nel diodo picchi di elevata corrente e di breve durata
- corrente media nel diodo $i_{Dav} \cong I_{RM} \left(1 + \pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}}\right)$
- corrente massima nel diodo $i_{Dmax} \cong I_{RM} \left(1 + 2\pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}}\right)$
- $\Delta V_r \ll V_M \Rightarrow i_{Dmax} \cong 2i_{Dav} \cong I_{RM} 2\pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}} \gg I_{RM}$

3.3.4 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con induttore e diodo di ricircolo (cenni)

[Rashid 2007¹² 69-70]

3.3.5 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda: punti chiave

[Rashid 2007¹² 73]

3.3.6 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda (con trasformatore a presa centrale e a ponte di Graetz)

[Rashid 2007¹² p73-77 fino a prima di Esempio 3.6]

anche figura [Sedra and Smith 1991¹⁴ 155]

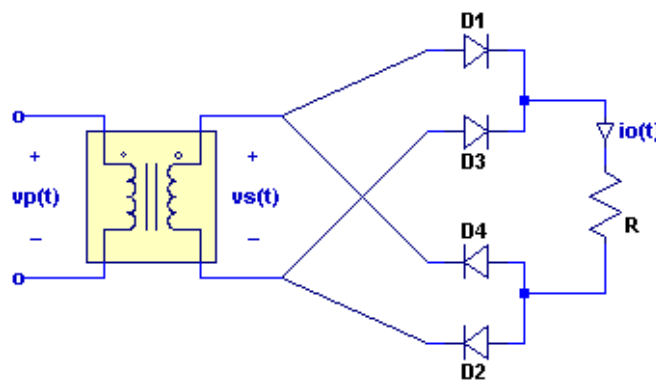


Figura 3.3 RaddrNonControlGraetz clear

- ripple a frequenza doppia
- *tensione inversa di picco (peak inverse voltage) PIV* sui diodi
 - $PIV = 2V_M$ per il circuito con trasformatore a presa centrale
 - $PIV = V_M$ per il circuito a ponte di Graetz
- assumendo che i diodi siano ideali (caratteristica $v-i$ ideale e comportamento in commutazione ideale) si ha $v_o(t) = |v_s(t)|$

- se invece non si assume la caratteristica ideale per i diodi, ma il modello semplificato con $V_{D0} \neq 0$ (fermo restando il comportamento in commutazione ideale), risulta, trascurando anche la resistenza r_D del diodo $v_o(t) = u^{(-1)}(v_s(t) - V_{D0}) + u^{(-1)}(-v_s(t) - V_{D0})$

inserire figura [Sedra and Smith 1991¹⁴ 155]

- V_{dc} , I_{dc} , P_{dc} , V_{rms} , I_{rms} , P_a , η , RF
- Analisi armonica nel caso che i diodi siano ideali

Essendo $v_o(t) = |v_s(t)| = V_M |\sin \omega_1 t|$ risulta $v_o(-t) = V_M |\sin \omega_1(-t)| = V_M |-\sin \omega_1 t| = V_M |\sin \omega_1 t| = v_o(t)$ cioè $v_o(t)$ è una funzione pari (come è ovvio dal grafico). Dato che le funzioni $\cos n\omega_1 t$ e $\sin n\omega_1 t$ sono rispettivamente pari e dispari, i prodotti $v_o(t) \cos n\omega_1 t$ e $v_o(t) \sin n\omega_1 t$ saranno anch'essi rispettivamente pari e dispari. Come conseguenza si ha che il calcolo dei coefficienti b_n è banale, mentre per gli a_n ci si riconduce al caso già visto del raddrizzatore non controllato a semplice semionda, infatti risulta

$$\begin{aligned}
 V_{dc} &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_o(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} v_o(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_M \sin \theta d\theta = \frac{2V_M}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}V_s}{\pi} \cong 0.6366V_M \cong 0.9003V_s \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \cos n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \cos n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_M \sin \theta \cos n\theta d\theta \\
 &\begin{cases} a_{2k+1} = 0 & n = 2k+1 \text{ (n dispari)} \\ a_{2k} = -\frac{V_M}{\pi} \frac{4}{(2k)^2-1} & n = 2k \text{ (n pari)} \end{cases} \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right) \sin n\theta d\theta = 0 \quad (\text{funzione integranda dispari})
 \end{aligned}$$

La tensione di uscita assume quindi l'espressione

$$\begin{aligned}
 v_o(t) &= \frac{2V_M}{\pi} - \frac{4V_M}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2-1} \cos 2k\omega_1 t \\
 &= \frac{2V_M}{\pi} - \frac{4V_M}{3\pi} \cos 2\omega_1 t - \frac{4V_M}{15\pi} \cos 4\omega_1 t - \frac{4V_M}{35\pi} \cos 6\omega_1 t - \dots
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Come era già chiaro dall'analisi, manca la fondamentale e tutte le armoniche dispari. Da ciò risulta che il ripple ha frequenza doppia rispetto alla fondamentale. Dunque l'uscita di un raddrizzatore a doppia semionda contiene esclusivamente armoniche di ordine pari. L'armonica dominante è la seconda e la sua frequenza è $2f_1$ ($2f_1 = 100\text{ Hz}$ in Italia, 120 Hz negli USA).

3.3.7 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda con filtro

[Sedra and Smith 1991¹⁴ 162]

- ripple a frequenza doppia
- condensatore in uscita, $\tau = RC \gg T$
- ampiezza ripple picco-picco $\Delta V_r \cong V_M \frac{T}{2\tau}$
- nei diodi picchi di elevata corrente e di breve durata
- corrente media nei diodi $i_{Dav} \cong I_{RM} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}}\right)$
- corrente massima nei diodi $i_{Dmax} \cong I_{RM} \left(1 + \pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}}\right)$
- $\Delta V_r \ll V_M \Rightarrow i_{Dmax} \cong 2i_{Dav} \cong I_{RM} \pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}} \gg I_{RM}$
- a parità di V_M , f , R , ΔV_r , occorre una C di valore metà rispetto al caso del circuito a semplice semionda, e anche la corrente nei diodi è dimezzata

3.3.8 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda: punti chiave

[Rashid 2007¹² 79, tranne limite d'impiego in potenza]

3.3.9 Dimensionamento del convertitore ac/dc

- diodi in serie per incrementare V_{Rmax}
- diodi in parallelo (per incrementare I_{Fmax}); occorre porre un resistore in serie a ciascun diodo per evitare derive distruttive
- negli schemi misti serie/parallelo si hanno n rami in parallelo, e ciascun ramo è costituito dalla serie di m diodi e di un resistore

3.3.10 Generalità sui raddrizzatori controllati

[Rashid 2007¹² 293]

3.3.11 Analisi del circuito di raddrizzamento controllato a semplice semionda

[Rashid 2007¹² 293-297 fino a prima del par. 9.3]

- angolo di innesco (o di ritardo o di accensione, delay angle) α [Rashid 2007¹² 294]
- espressione della tensione V_{dc} in funzione dell'angolo di innesco [Rashid 2007¹² 295]
- (argomento non svolto) differenza di fase in ingresso fra tensione $v_s(t)$ e corrente $i_s(t)$ a frequenza fondamentale e potenza reattiva risultante (calcolare i coefficienti di fourier analiticamente o numericamente con matlab)

3.3.12 Convertitori monofase a ponte intero

cenni, fatto vedere il circuito [Rashid 2007¹² p298 fig 9.2a solamente, senza induttanza e generatore]) e analizzato rapidamente

3.3.13 Transitori di commutazione

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 106]

3.3.14 Filtraggio in uscita dei circuiti di raddrizzamento

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 106-7]

inserire figura [Guarnieri and Stella 2003⁶ 107]

L'energia magnetica immagazzinata nell'induttore $w_m(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t)$ si deve conservare, per cui $w_m(t)$ non può essere una funzione discontinua, e di conseguenza lo stesso vale per la corrente nell'induttore. Analogamente dovendosi conservare l'energia elettrica immagazzinata nel condensatore $w_e(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t)$, la tensione ai capi del condensatore deve essere una funzione continua.

L'induttore si oppone a variazioni brusche della corrente che in esso circola, e il condensatore si oppone a variazioni brusche della tensione presente ai suoi capi.

3.4 Raddrizzamento da rete trifase

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 100]

[Rashid 2007¹² 86]

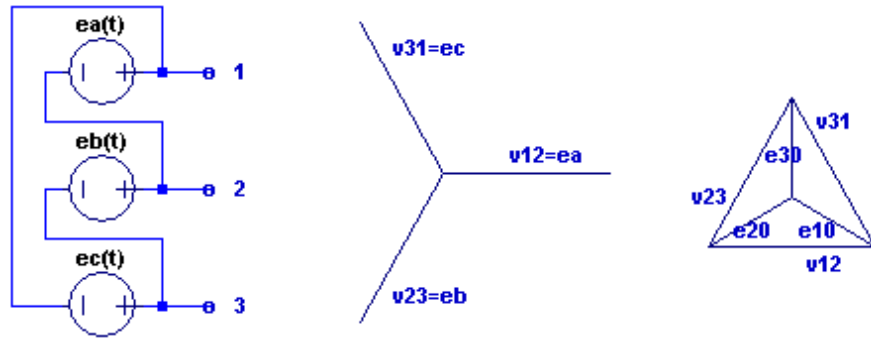


Figura 3.4 Diagrammi fasoriali per la prima configurazione con secondario collegato a triangolo. In questo caso il trasformatore appartiene al gruppo 1 se il primario è collegato a stella

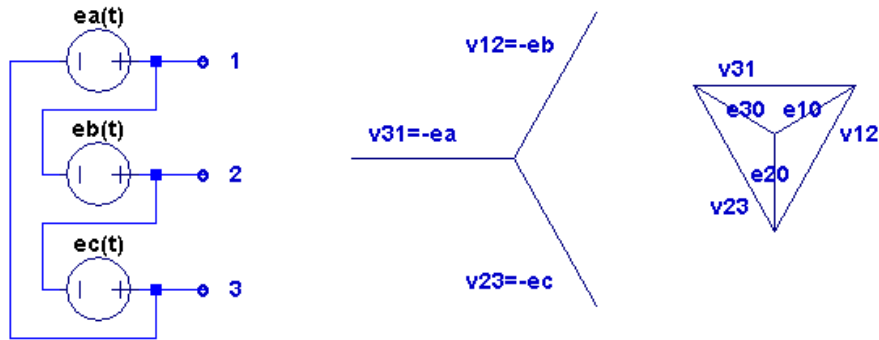


Figura 3.5 Diagrammi fasoriali per la seconda configurazione con secondario collegato a triangolo. In questo caso il trasformatore appartiene al gruppo 11 se il primario è collegato a stella

3.4.1 Cenni sui collegamenti degli avvolgimenti nei trasformatori trifase

Indichiamo le tensioni fisiche delle singole fasi dei 3 avvolgimenti al secondario come

$$e_a(t) = E_M \sin \omega_1 t \quad e_b(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3}) \quad e_c(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{4\pi}{3})$$

Le tensioni di fase (o tensioni stellate) non necessariamente coincidono con le tensioni fisiche delle fasi, e la coincidenza o meno dipende dal tipo di collegamento degli avvolgimenti. Valutando lo sfasamento *in ritardo* α (in gradi), si definisce *gruppo* (o *indice orario*) di un trasformatore la quantità numerica $i = \frac{\alpha}{30^\circ}$, ovvero il rapporto a $\frac{\pi}{6}$ dell'angolo del quale si deve ruotare in senso antiorario la stella delle tensioni stellate secondarie per farla sovrapporre alla stella delle tensioni stellate primarie.¹ Si comprende che il gruppo non dipende solo dal modo in cui sono collegati tra loro gli avvolgimenti secondari, ma anche da come sono collegati tra loro quelli primari. Se, per fissare le idee, consideriamo il caso in cui gli avvolgimenti primari sono collegati a stella, le tensioni di fase secondarie (indicate rispetto al potenziale del centro stella 0) saranno allora, per un trasformatore di gruppo i

$$e_{10}(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{i\pi}{6}) \quad e_{20}(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{i\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}) \quad e_{30}(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{i\pi}{6} - \frac{4\pi}{3})$$

Consideriamo alcuni casi

- Secondario a stella (gruppo 0)
 $e_{10}(t) = e_a(t) = E_M \sin \omega_1 t \quad e_{20}(t) = e_b(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3}) \quad e_{30}(t) = e_c(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{4\pi}{3})$
- Secondario a triangolo configurazione 1 (gruppo 1, Fig 3.4)
 $v_{12}(t) = e_a(t) \quad v_{23}(t) = e_b(t) \quad v_{31}(t) = e_c(t)$
 $e_{10}(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{\pi}{6}) \quad e_{20}(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}) \quad e_{30}(t) = E_M \sin(\omega_1 t - \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3})$
- Secondario a triangolo configurazione 2 (gruppo 11, Fig 3.5)
 $v_{12}(t) = -e_b(t) \quad v_{23}(t) = -e_c(t) \quad v_{31}(t) = -e_a(t)$
 $e_{10}(t) = E_M \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{6}) \quad e_{20}(t) = E_M \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}) \quad e_{30}(t) = E_M \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3})$
- Secondario a zig-zag

¹ Si può dimostrare che la variazione di fase è sempre un multiplo di $\frac{\pi}{6}$ [Macchiaroli 1981⁹ 93]. Con i vari collegamenti si possono ottenere tutti i gruppi compresi tra 0 e 11 con esclusione dei gruppi 3 e 9 ($\pm 90^\circ$). Sono quasi esclusivamente utilizzati trasformatori appartenenti ai gruppi 0, 5, 6 e 11 [Guarnieri and Stella 2003⁶ 75].

3.4.2 Raddrizzatori polifasi a gruppi di commutazione

Analisi del circuito di raddrizzamento trifase con 3 diodi

inserire figura [Guarnieri and Stella 2003⁶ 101]

Se l'alimentazione a disposizione è trifase senza filo neutro, il neutro si può ottenere impiegando un trasformatore trifase con secondario a stella (Fig 3.6, [Rashid 2001¹¹ 145])

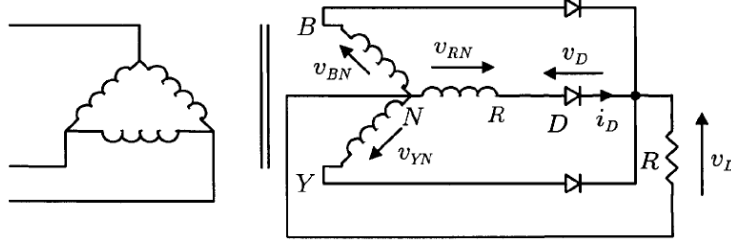


Figura 3.6 Raddrizzatore trifase a stella. Il secondario del trasformatore a stella fornisce il neutro mancante

$$e_1(t) = E_M \sin \omega_1 t \quad e_2(t) = E_M \sin \left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad e_3(t) = E_M \sin \left(\omega_1 t - \frac{4\pi}{3} \right) \quad 3.5$$

$$v_o(t) = \max(e_1(t), e_2(t), e_3(t)) \quad 3.6$$

$$V_{dc} = \frac{1}{T} \int_0^T v_o(t) dt = \frac{3}{T} \int_{\frac{T}{4} - \frac{T}{6}}^{\frac{T}{4} + \frac{T}{6}} E_M \sin \omega_1 t dt = \frac{3}{T} \int_{-\frac{T}{6}}^{\frac{T}{6}} E_M \cos \omega_1 \tau d\tau = \frac{3E_M}{T} \left[\frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1} \right]_{-\frac{T}{6}}^{\frac{T}{6}} = \frac{3E_M}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} \quad 3.7$$

$$\Delta V_r = v_{omax} - v_{omin} = E_M \left(1 - \cos \frac{\omega_1 T}{6} \right) = E_M \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{E_M}{2} \quad 3.8$$

Analisi del circuito di raddrizzamento a q -fasi con q diodi

$$e_k(t) = E_M \sin \left(\omega_1 t - \frac{2k-2}{q} \pi \right) \quad k = 1, \dots, q \quad 3.9$$

$$v_o(t) = \max_{k=1, \dots, q} e_k(t) \quad 3.10$$

$$V_{dc} = \frac{q}{T} \int_{-\frac{T}{2q}}^{\frac{T}{2q}} E_M \cos \omega_1 \tau d\tau = \frac{qE_M}{T} \left[\frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1} \right]_{-\frac{T}{2q}}^{\frac{T}{2q}} = E_M \frac{q}{\pi} \sin \frac{\pi}{q} \quad 3.11$$

$$\Delta V_r = v_{omax} - v_{omin} = E_M \left(1 - \cos \frac{\omega_1 T}{2q} \right) = E_M \left(1 - \cos \frac{\pi}{q} \right) = E_M 2 \sin^2 \frac{\pi}{2q} \quad 3.12$$

$$q = 3 \text{ (alimentazione trifase)} \Rightarrow V_{dc} \cong 0.8270 E_M \quad \Delta V_r = 0.5000 E_M \quad 3.13$$

$$q = 6 \text{ (alimentazione esafase)} \Rightarrow V_{dc} \cong 0.9549 E_M \quad \Delta V_r \cong 0.1340 E_M \quad 3.14$$

$$q = 12 \text{ (alimentazione dodecafase)} \Rightarrow V_{dc} \cong 0.9886 E_M \quad \Delta V_r \cong 0.03407 E_M \quad 3.15$$

Il caso esafase ($q = 6$) si può ad esempio realizzare impiegando un trasformatore trifase con secondario a stella nella configurazione a presa centrale, come in Fig 3.7 [Rashid 2001¹¹ 148].

3.4.3 Raddrizzatori polifasi a ponte di Graetz

Analisi del circuito di raddrizzamento trifase a ponte di Graetz (raddrizzatore a 6 impulsi)

inserire figura [Guarnieri and Stella 2003⁶ 102]

inserire figura intervalli di conduzione e corrente nei diodi [Rashid 2001¹¹ 147]

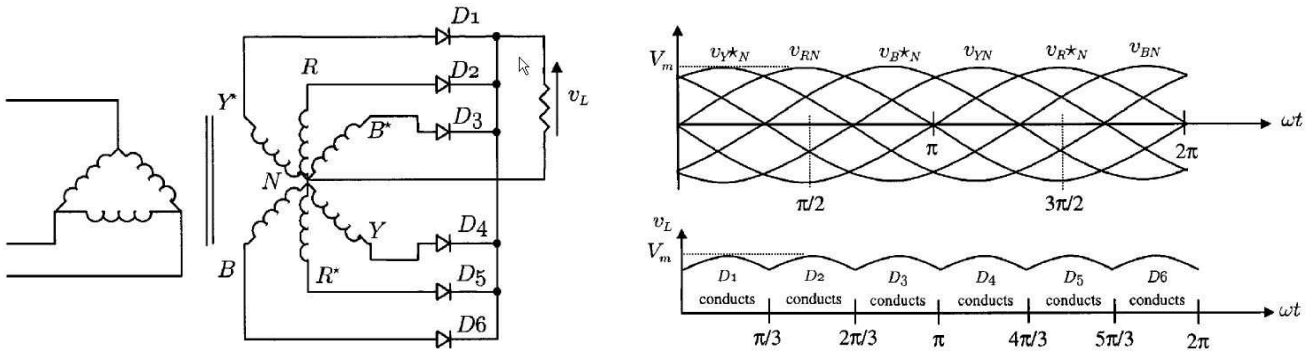


Figura 3.7 Raddrizzatore esafase a stella con trasformatore a presa centrale

Le sei tensioni concatenate si possono valutare agevolmente considerando il triangolo delle tensioni (Fig 3.8)

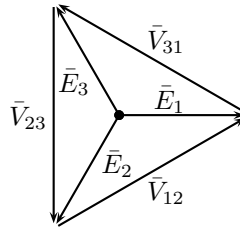


Figura 3.8 Fasi delle sei tensioni concatenate dal triangolo delle tensioni

Inserire figura con tutti e 6 i fasori $\bar{V}_{hk}$

$$v_{21}(t) = e_2(t) - e_1(t) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t - \frac{5\pi}{6}\right) \quad 3.16$$

$$v_{23}(t) = e_2(t) - e_3(t) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t - \frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad 3.17$$

$$v_{13}(t) = e_1(t) - e_3(t) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{6}\right) \quad 3.18$$

$$v_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{6}\right) \quad 3.19$$

$$v_{32}(t) = e_3(t) - e_2(t) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t + \frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad 3.20$$

$$v_{31}(t) = e_3(t) - e_1(t) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t + \frac{5\pi}{6}\right) \quad 3.21$$

La formula generale che esprime le suindicate tensioni concatenate si può calcolare utilizzando la formula di prostaferesi $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ e l'insieme

$$S_3 = \{(2, 1), (2, 3), (1, 3), (1, 2), (3, 2), (3, 1)\} = \{(h, k) : h, k = 1, 2, 3; |h - k| = 1, 2\} \quad 3.22$$

Si ha

$$\begin{aligned} v_{hk}(t) &= e_h(t) - e_k(t) = E_M \sin\left(\omega_1 t - \frac{2h-2}{3}\pi\right) - E_M \sin\left(\omega_1 t - \frac{2k-2}{3}\pi\right) \\ &= E_M 2 \cos\left(\omega_1 t - \frac{h+k-2}{3}\pi\right) \sin \frac{k-h}{3}\pi \\ &= 2E_M \operatorname{sgn}(k-h) \sin \frac{|k-h|}{3}\pi \sin\left(\omega_1 t - \frac{2h+2k-7}{6}\pi\right) \\ &= \operatorname{sgn}(k-h) \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t + \frac{7-2h-2k}{6}\pi\right) \\ &= \operatorname{sgn}(h-k) \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_1 t + \frac{13-2(h+k)}{6}\pi\right) \quad (h, k) \in S_3 \end{aligned} \quad 3.23$$

da cui

$$v_o(t) = \max_{(h,k) \in S_3} (e_h(t) - e_k(t)) \quad 3.24$$

$$V_{dc} = \frac{6}{T} \int_{-\frac{T}{12}}^{\frac{T}{12}} \sqrt{3} E_M \cos \omega_1 \tau d\tau = \frac{6\sqrt{3} E_M}{T} \left[\frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1} \right]_{-\frac{T}{12}}^{\frac{T}{12}} = \sqrt{3} E_M \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} \quad 3.25$$

$$\Delta V_r = v_{o\max} - v_{o\min} = \sqrt{3} E_M \left(1 - \cos \frac{\omega_1 T}{12} \right) = \sqrt{3} E_M \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} \right) \quad 3.26$$

Analisi del circuito di raddrizzamento ad m -fasi a ponte di Graetz (raddrizzatore a $2m$ impulsi)

inserire figura [Guarnieri and Stella 2003⁶ 103]

caso esa-fase, $m = 6$, 12 impulsi: inserire figura 6 tensioni stellate $e_1, \dots, e_6$ e 6 tensioni concatenate ad ampiezza massima $\pm v_{14}, \pm v_{25}, \pm v_{36}$

inserire figura 12 tensioni stellate $e_1, \dots, e_{12}$ e 24 tensioni concatenate $\pm v_{1,5}, \pm v_{2,6}, \pm v_{3,7}, \pm v_{4,8}, \pm v_{5,9}, \pm v_{6,10}, \pm v_{7,11}, \pm v_{8,12}, \pm v_{9,1}, \pm v_{10,2}, \pm v_{11,3}, \pm v_{12,4}$

In realtà le figure riportate su [Guarnieri and Stella 2003⁶ 103-104] non sono corrette. Infatti, nella semplice configurazione a ponte, nel caso di m fasi con m dispari è vero che si ottiene una tensione di uscita che ha $2m$ impulsi nel periodo T , ma viceversa per m pari l'uscita ha invece soltanto m impulsi nel periodo.

inserire figura fasoriale che mostra questo fatto, vedi [Guarnieri and Stella 2003⁶ pag ??] in particolare nella parte dove tratta i trasformatori trifase a triangolo, ci sono i diagrammi fasoriali dove si può anche capire che avendo un secondario a stella ed uno a triangolo le 6 tensioni non sono sfasate in modo uniforme

Poiché non è agevole realizzare sistemi polifasi con m dispari, bisogna ricorrere ad altri schemi.

Raddrizzamento esafase a ponte in configurazione serie (raddrizzatore a 12 impulsi)

Adoperando un trasformatore trifase con due secondari, uno a triangolo e l'altro a stella, e raddrizzando separatamente le uscite dei due secondari mediante ponti di Graetz trifase indipendenti, come in Fig 3.9, si ottengono due uscite $v_1(t)$ e $v_2(t)$, che hanno 6 impulsi nel periodo e sono temporalmente sfasate tra loro di $\frac{T}{12}$ ($\frac{\pi}{6}$ in termini di fasi) [Rashid 2001¹¹ 149]. Ponendo i due ponti in serie si ha l'uscita desiderata a 12 impulsi

$$v_L(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad 3.27$$

Questo circuito si usa nelle applicazioni dove è richiesta una elevata tensione in uscita.

Raddrizzamento esafase a ponte in configurazione parallelo (raddrizzatore a 12 impulsi)

Nelle applicazioni in cui è richiesta una elevata corrente in uscita si usa il circuito raddrizzatore esafase a ponte in configurazione parallelo [Rashid 2001¹¹ 150], mostrato in Fig 3.10, in cui si rende anche necessario inserire un *trasformatore interfase* che connette le uscite dei due ponti al carico, altrimenti, come precisato, non si avrebbero 12 impulsi in uscita, ma soltanto 6.

Il trasformatore interfase lo si può vedere (trascurando l'accoppiamento mutuo) come costituito da due induttori di uguale valore, quindi si può calcolare la generica componente armonica della tensione sul carico $v_{Ln}(t)$, e poi la $v_L(t)$ applicando la sovrapposizione degli effetti. A tale scopo, il circuito da considerare per il calcolo del fasore $\bar{V}_{Ln}$ per la n -ma armonica, si trova nella configurazione di Millmann, essendo costituito da 3 rami in parallelo, dunque

$$\bar{V}_{Ln} = \frac{\frac{\bar{V}_{1n}}{\bar{Z}_n} + \frac{\bar{V}_{2n}}{\bar{Z}_n}}{\frac{1}{\bar{Z}_n} + \frac{1}{\bar{Z}_n} + \frac{1}{\bar{R}_L}} = \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2 + \frac{\bar{Z}_n}{\bar{R}_L}} = \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2 + \frac{j n \omega_1 L}{\bar{R}_L}} \quad 3.28$$

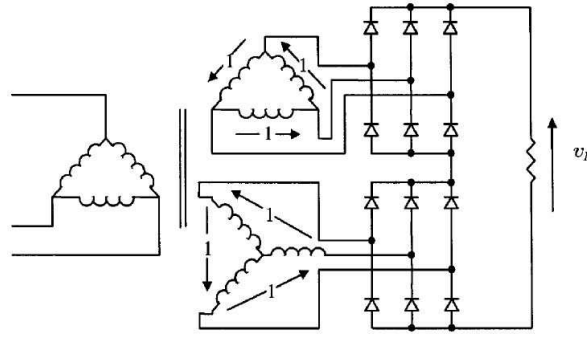


Figura 3.9 Raddrizzatore esafase a ponte in configurazione serie

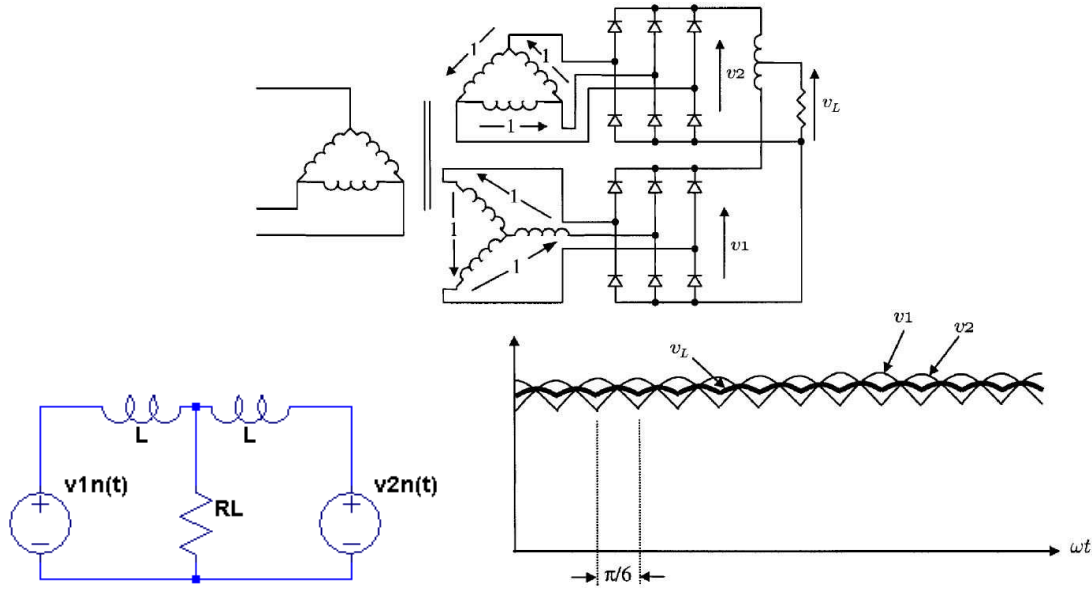


Figura 3.10 Raddrizzatore esafase a ponte in configurazione parallelo

da cui si vede che, per n sufficientemente piccolo, risulta $\bar{V}_{Ln} \cong \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2}$, mentre per valori maggiori di n , il fasore corrispondente sul carico $\bar{V}_{Ln}$ risulterà attenuato e sfasato rispetto al valore medio $\frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2}$. Si ricordi anche che i moduli dei fasori $\bar{V}_{1n}$ e $\bar{V}_{2n}$ divengono via via più piccoli al crescere di n e la serie di Fourier può essere troncata. Scegliendo allora il valore delle due induttanze L in modo da avere $n\omega_1 L \ll R_L$ per le armoniche maggiormente significative, si avrà

$$\bar{V}_{Ln} \cong \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2} \quad v_{Ln}(t) \cong \frac{v_{1n}(t) + v_{2n}(t)}{2}$$

da cui, sommando tutte le armoniche

$$v_L(t) \cong \frac{v_1(t) + v_2(t)}{2} \quad 3.29$$

L'uso del simbolo $\cong$ riflette il fatto che le armoniche superiori sono filtrate, e ciò corrisponde ad uno smussamento dei punti angolosi sulla tensione di uscita $v_L(t)$.

L'interposizione del trasformatore interfase tra le uscite dei due ponti consente quindi di ottenere un'uscita sul carico che ha 12 impulsi nel periodo, ed è pari alla media delle uscite dei due ponti.

Nel caso in cui si pensasse di utilizzare, al posto del trasformatore interfase, due condensatori di eguale valore C , si avrebbe $\bar{V}_{Ln} = \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2 + \frac{1}{in\omega_1\tau}} = \frac{in\omega_1\tau}{2in\omega_1\tau + 1}(\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n})$, con $\tau = R_L C$ da cui, se $C \gg \frac{1}{\omega_1 R_L}$ allora $\bar{V}_{Ln} \cong \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2} \forall n$. Di conseguenza le armoniche superiori non risulterebbero filtrate e i punti angolosi sulla tensione di uscita sarebbero riprodotti fedelmente, la quale cosa è indesiderabile.

3.4.4 Raddrizzatori controllati polifase (cenni)

3.4.5 In futuro

Chopper

Guarnieri-Stella 113

3.5 Sistemi elettrici in corrente continua

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 304,285,288]

Appendice A

Cenni sui materiali superconduttori

Come visto (vedi [Mencuccini and Silvestrini 1988¹⁰ 147]) la resistività dei metalli diminuisce al diminuire della temperatura assoluta ($\rho \propto \sqrt{T}$), e ciò è qualitativamente interpretabile in base a un semplice modello microscopico.

Molti metalli, e molte leghe metalliche, a temperatura molto bassa (dell'ordine di pochi gradi Kelvin, o di una frazione di Kelvin) divengono *superconduttori*: la loro resistività elettrica scende bruscamente a zero. Questo fenomeno non può essere interpretato in base alla fisica classica, ma solo ricorrendo alla meccanica quantistica (teoria di Bardeen, Cooper e Schrieffer). La temperatura a cui un materiale diviene superconduttore è detta *temperatura critica*. In un circuito costituito di materiale allo stato superconduttivo, la corrente può circolare senza dissipazioni: una volta avviata la circolazione, essa può mantenersi senza l'azione di alcuna forza elettromotrice. In spire superconduttrici è stata fatta così circolare corrente per anni senza che si sia osservata alcuna diminuzione della intensità della corrente stessa.

I materiali superconduttori godono di altre proprietà notevoli: se immersi in un campo magnetico di intensità inferiore ad un certo valore critico, espellono il campo magnetico stesso (*effetto Meissner*). Se il campo magnetico supera il valore critico, il campione cessa però di essere superconduttore anche se la sua temperatura è inferiore a quella critica.

Esistono materiali ceramici per i quali la temperatura critica è assai alta (da molte decine di Kelvin e fino a oltre 200 Kelvin): ciò può aprire spazi ad applicazioni di grande interesse, oltre alle già interessanti applicazioni dei superconduttori classici.

Inserire figura e tabella [Mencuccini and Silvestrini 1988 ¹⁰ 176]

Appendice B

Minute delle lezioni

B.1 Minute delle lezioni a.a. 2010-2011

B.1.1 Lezione di Giovedì 21 Ottobre 2010 (3 ore)

Argomenti svolti:

- Alcune funzioni notevoli. Cenni sulle funzioni generalizzate e la teoria delle distribuzioni
- Funzione segno e sua approssimazione con funzioni continue
- Funzione di Heaviside, sue espressioni analitiche e approssimazione con funzioni continue, funzione logistica
- Funzioni finestra e funzione triangolare
- Funzione rampa unitaria, sua espressione analitica e legame con la funzione di Heaviside
- Generalità sulle funzioni generalizzate e necessità/opportunità di introdurle
- Famiglie di funzioni convergenti alla δ di Dirac
- Legame tra la δ e il gradino, proprietà di campionamento della δ , e proprietà di scaling
- Richiami di elettrotecnica
- Lavoro elettrico elementare $d\ell$ scambiato da un bipolo nell'intervallo infinitesimo dt in regime lentamente variabile
- Potenza istantanea
- Lavoro elettrico scambiato in un intervallo finito e potenza media
- Valore medio, valore efficace, significato del valore efficace
- Il passaggio dal dominio del tempo al dominio della frequenza
- Serie di Fourier, condizioni sufficienti di Dirichlet
- Teorema generale di sviluppabilità in serie trigonometrica di Fourier nell'ambito della teoria delle distribuzioni
- Frequenza fondamentale e armoniche di tensione e di corrente
- Forma compatta della serie di Fourier
- Componenti continua e alternata di una funzione periodica

B.1.2 Lezione di Giovedì 28 Ottobre 2010 (3 ore)

Argomenti svolti:

- Esempi: onda quadra alternata, onda triangolare alternata
- Analisi armonica. Spettro di ampiezza e spettro di fase
- Espansione in serie di Fourier di una funzione con carattere di simmetria: funzione alternata; funzione pari; funzione dispari; funzione avente componente alternata dispari; funzione con simmetria a semionda (esempio dente di sega alternato); funzione con simmetria a quarto d'onda
- Esempio, corrente sinusoidale raddrizzata mediante diodo
- Troncamento della serie di Fourier
- Forma esponenziale della serie di Fourier
- Derivabilità e integrabilità termine a termine della serie di Fourier
- Derivabilità termine a termine della serie trigonometrica di Fourier nel senso delle distribuzioni

- Esempio: rappresentazione della δ (o di una sequenza di funzioni delta) in termini di una somma di coseni (o di esponenziali complessi)
- Integrale di Fourier
- Rappresentazione di una funzione non periodica
- Funzioni sommabili, funzioni di quadrato sommabile
- Energia di un segnale e densità spettrale di energia
- Proprietà (linearità, derivazione, modulazione, ...)
- Proprietà di simmetria di spettro di ampiezza e di fase
- Esempi di trasformate di Fourier
- Trasformata di Fourier di una funzione periodica. Spettro continuo e spettro a righe
- Trasformate di funzioni frequentemente utilizzate
- Cenni sulle applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier: soluzione di equazioni differenziali, traslazione in frequenza, modulazione di ampiezza, moltiplicazione a divisione di frequenza (FDM)
- Cenni sulla serie e l'integrale di Fourier per le funzioni di più variabili e loro utilità

B.1.3 Lezione di Giovedì 04 Novembre 2010 (3 ore)

Argomenti svolti:

- Reti elettriche in regime periodico. Tensioni e/o correnti non sinusoidali
- Valore efficace. Valore efficace della componente alternata
- Generatori di tensione equivalenti in serie e generatori di corrente equivalenti in parallelo (proprietà di sovrapposizione in reti lineari)
- Richiami sul metodo simbolico
- Generalizzazione del metodo simbolico
- Caso lineare: sovrapposizione degli effetti
- Caso non lineare: inquinamento armonico, anche se i forzamenti sono sinusoidi pure e isofrequenziali
- Esempi di reti in regime periodico non sinusoidale
- Espressione armonica della potenza nelle reti elettriche in regime periodico
- Potenza reattiva. Potenza apparente. Potenza deformante. Potenza non attiva
- Uguaglianza di potenza attiva e apparente per un resistore
- Fattore di potenza
- Esempio semplice RL, in cui si vede che la potenza non attiva è maggiore della sola potenza reattiva
- Principali effetti dell'inquinamento armonico (sottoutilizzo della potenza erogabile dai generatori, perdite sulle linee, disturbi)
- Cenni su rifasamento e compensazione delle armoniche
- Generalità sui convertitori statici
- Diodo ideale. Modello circuitale del diodo ideale
- Diodo reale. Caratteristica corrente-tensione
- Corrente massima diretta I_{Fmax} e tensione massima inversa V_{Rmax}
- Caratteristica esponenziale corrente-tensione (equazione di Shockley)

- Dipendenza della curva $i(v)$ del diodo dalla temperatura
- Corretta polarizzazione del diodo (circuito esterno tale da non far danneggiare il diodo, appunti miei 9)

Argomenti accennati:

- Espressione della potenza deformante D
- Condizione affinché su un biopolo sia $D = 0$ ($\Rightarrow$ resistore)
- Valori tipici di resistività per isolanti, semiconduttori e conduttori
- Superconduttori e superisolanti
- Drogaggio dei semiconduttori e giunzione pn
- Diodo a semiconduttore
- Panoramica sui vari tipi di diodi (PiN, Schottky, Schottky SiC) e parametri caratteristici

B.1.4 Lezione di Giovedì 11 Novembre 2010 (2 ore, Coccoresese)

Argomenti svolti:

- Generalità sulla conversione statica dell'energia. Convertitori ac/dc, dc/ac, dc/dc, ac/ac
- Raddrizzatori a diodi. Raddrizzatore a semplice semionda. Forme d'onda. Valori medi della tensione e corrente. Parametri prestazionali: potenza in continua, potenza apparente, efficienza, fattore di forma, fattore di ripple, fattore di potenza.
- Raddrizzatore monofase a ponte di Graetz
- Richiami sul metodo simbolico
- Tiristori. Principio fisico di funzionamento
- Raddrizzatori controllati a tiristori. Regolazione della tensione in uscita. Fattore di potenza

B.1.5 Lezione di Giovedì 18 Novembre 2010 (3 ore)

Argomenti svolti:

- Modelli semplificati del diodo reale e circuiti equivalenti. Esempio
- Cenni sull'uso del diodo come generatore di tensione di riferimento
- Uso del diodo in configurazione Zener
- Caduta di tensione diretta V_D
- Comportamento in commutazione. Reverse recovery time t_{rr} e Forward recovery time t_{fr} . Diodo ideale
- Schema a blocchi di un circuito raddrizzatore (filtro di linea, trasformatore, diodi, filtro, regolatore di tensione, carico)
- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda:
 - corrente unidirezionale in linea
 - analisi armonica nel caso di diodi ideali
- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda: parametri prestazionali
 - valor medio della tensione/corrente d'uscita (di carico) V_{dc} , I_{dc}
 - potenza d'uscita in continua $P_{dc} = V_{dc}I_{dc}$
 - valore efficace della tensione/corrente d'uscita V_{rms} , I_{rms}
 - potenza apparente d'uscita $P_{ac} = V_{rms}I_{rms}$
 - valore efficace della componente alternata della tensione d'uscita V_{ac}
 - fattore di ripple $RF = \frac{V_{ac}}{V_{dc}} = \sqrt{\frac{V_{rms}^2}{V_{dc}^2} - 1}$
 (attenzione: la definizione di fattore di ondulazione data su [Guarnieri and Stella 2003⁶ 100] e' diversa, talvolta piu' facile da calcolare, ma meno corretta a mio parere)

- efficienza (o rapporto di raddrizzamento) $\eta = \frac{P_{dc}}{P_{ac}}$
- distorsione armonica totale (THD) o fattore armonico (HF)
- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con filtro
 - condensatore in uscita, $\tau = RC \gg T$
 - picchi di corrente di breve durata
- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda: punti chiave
- Potenza nominale di un diodo reale ($V_{Rmax} I_{Fmax}$)
- Diodo ideale (caduta di tensione diretta $V_D = 0$ e reverse recovery time $t_{rr} = 0$)
- Filtraggio in uscita dei circuiti di raddrizzamento
 - gli induttori stabilizzano la corrente e i capacitori stabilizzano la tensione
 - cenni sugli stabilizzatori elettronici
- Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda (con trasformatore a presa centrale e a ponte di Graetz)
 - V_{dc} , I_{dc} , P_{dc} , V_{rms} , I_{rms} , P_{ac} , η , RF
 - analisi armonica nel caso di diodi ideali, manca la fondamentale e le armoniche dispari (il ripple ha frequenza doppia)
- Raddrizzatore ideale ($\eta = 100\%$, $V_{ac} = 0$, RF = 0, THD = 0)
- Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda con filtro
 - condensatore in uscita, $\tau = RC \gg T$
 - picchi di corrente di breve durata
 - ripple a frequenza doppia
 - a parità di V_m , f , R , $\Delta V_{rippleMax}$, occorre una C di valore metà rispetto al caso a semplice semionda, e anche la corrente nei diodi è dimezzata
- Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda: punti chiave
- Dimensionamento del convertitore ac/dc. Diodi in serie e diodi in parallelo
- Tiristore (o SCR) ideale. Modello del tiristore ideale
- Generalità sui raddrizzatori controllati
- Analisi del circuito di raddrizzamento controllato a semplice semionda
 - angolo di innesco (o di ritardo o di accensione, delay angle) α
 - espressione della tensione V_{dc} in funzione dell'angolo di innesco
- Convertitore controllato monofase a ponte intero
- Raddrizzamento da rete trifase
- Analisi del circuito di raddrizzamento trifase con 3 diodi ed estensione al caso di alimentazione con q fasi. V_{dc} e ΔV_r (picco-picco del ripple) nel caso generale di q fasi, e caso limite di q “molto grande”
- Utilizzo di un trasformatore con secondario a stella nel caso di non disponibilità del neutro
- Raddrizzatore esafase a stella con trasformatore trifase con secondario a presa centrale (raddrizzatore a 6 impulsi)
- Analisi del circuito di raddrizzamento trifase a ponte di Graetz (raddrizzatore a 6 impulsi). Espressione delle 6 tensioni concatenate. V_{dc} e ΔV_r

Argomenti accennati:

- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con induttore e diodo di ricircolo

B.1.6 Lezione di Giovedì 25 Novembre 2010 (3 ore)

Argomenti svolti:

- Cenni sui collegamenti degli avvolgimenti nei trasformatori trifase (a triangolo, a stella, a zig-zag)
- Non immediata generalizzazione per il raddrizzatore polifase a ponte nel caso di q fasi in ingresso impiegando trasformatori trifase con più secondari
- Raddrizzamento esafase a ponte in configurazione serie (per elevate tensioni). Espressione della tensione di uscita
- Raddrizzamento esafase a ponte in configurazione parallelo (per elevate correnti). Necessità di impiego del trasformatore interfase per disaccoppiare il funzionamento dei due ponti. Espressione della tensione di uscita
- Raddrizzatori controllati polifase (cenni)

Bibliografia

- [1] A Balestrino and G Celentano. *Teoria dei Sistemi*, volume III. Liguori, 1982.
- [2] Scipione Bobbio and Emilio Gatti. *Elettromagnetismo Ottica*. Boringhieri, 1991.
- [3] G Toraldo di Francia and P Brusaglioni. *Onde Elettromagnetiche*. Zanichelli, 1988.
- [4] Aldo Ghizzetti and Alessandro Ossicini. *Trasformate di Laplace e Calcolo Simbolico*. UTET, 1971.
- [5] Andrew S Grove. *Fisica e Tecnologia dei Dispositivi a Semiconduttore*. Franco Angeli, 5^a edition, 1993.
- [6] Massimo Guarnieri and Andrea Stella. *Principi ed Applicazioni di Elettrotecnica*, volume II. Edizioni Progetto Padova, terza edition, 2003.
- [7] Massimo Guarnieri and Andrea Stella. *Principi ed Applicazioni di Elettrotecnica*, volume I. Edizioni Progetto Padova, terza edition, 2004.
- [8] Paul Horowitz and Winfield Hill. *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, 2^a edition, 1989.
- [9] Bruno Macchiaroli. *Lezioni di Macchine e Impianti Elettrici*. Liguori, II edition, 1981.
- [10] Corrado Mencuccini and Vittorio Silvestrini. *Fisica II*. Liguori, 1988.
- [11] Muhammad H Rashid. *Power Electronics Handbook*. Academic Press, 2001.
- [12] Muhammad H Rashid. *Elettronica di Potenza*, volume 1. Pearson Education, 3^a edition, 2007.
- [13] Antonio Romano. *Meccanica Analitica*. Apogeo, 2007.
- [14] Adel S Sedra and Kenneth C Smith. *Microelectronic Circuits*. Oxford University Press, Third edition, 1991.
- [15] Giovanni Someda. *Elementi di Elettrotecnica Generale*. Patron, Nona edition, 1977.
- [16] Giovanni Soncini. *Tecnologie Microelettroniche*. Boringhieri, 1986.
- [17] Simon M Sze. *Dispositivi a semiconduttore*. Hoepli, 1991.

Indice analitico

Balestrino and Celentano [1], 18, 20, 49
Bobbio and Gatti [2], 6, 11, 13, 16, 19, 49
Ghizzetti and Ossicini [4], 18, 49
Grove [5], 28, 49
Guarnieri and Stella [6], 28, 29, 31, 33, 36–38, 40, 42, 46, 49
Guarnieri and Stella [7], 14, 15, 22, 27, 29, 49
Horowitz and Hill [8], 28, 49
Macchiaroli [9], 37, 49
Mencuccini and Silvestrini [10], 28, 43, 49
Rashid [11], 38, 40, 49
Rashid [12], 14, 28–34, 36, 49
Romano [13], 15, 49
Sedra and Smith [14], 28, 30, 31, 34, 35, 49
Someda [15], 9–11, 13, 14, 22, 23, 26, 49
Soncini [16], 28, 49
Sze [17], 28, 29, 49
di Francia and Brusaglioni [3], 49

chopper, 28
convergenza
 in media quadratica, 17

effetto Meissner, 43

gruppo, 37

indice orario, 37

raddrizzamento, 31
raddrizzamento controllato, 31

superconduttori, 43

temperatura critica, 43
trasformata di Fourier, 18