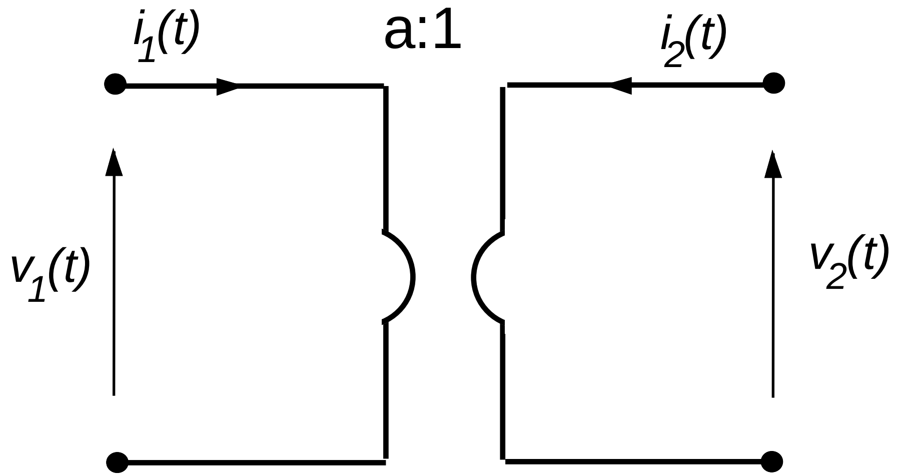
Lez.23 Accoppiamento mutuo

Doppio bipolo Trasformatore Ideale

È un doppio bipolo caratterizzato da un solo parametro *a*, detto rapporto di trasformazione



$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{v_1} = a \\ \dfrac{i_1}{i_2} = -\dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Proprietà del Trasformatore ideale:

1) Elevatore di tensione e abbassatore di corrente se $a < 1$;

2) Abbassatore di tensione ed elevatore di corrente se $a > 1$;

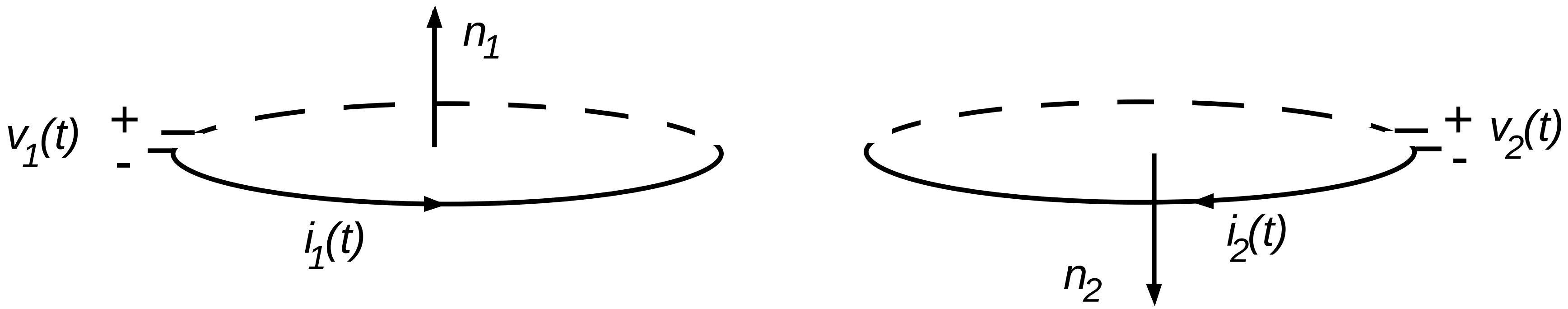
3) Trasparente alle potenze;

4) Trasporto :$R_{eq1} = a^2 R_2$.

5) Trasporto nel dominio simbolico: $z_{eq1} = a^2 z_2$

Induttori accoppiati - Doppio bipolo accoppiamento mutuo

Una bobina di N_1 spire, realizzata con conduttore ideale percorso da corrente $i_1(t)$ è posta in vicinanza di una bobina analoga realizzata con N_2 spire percorsa dalla corrente $i_2(t)$



Se le bobine sono a distanza sufficiente, il campo magnetico generato dalla corrente in una spira non interagisce con l'altra e viceversa.

Il campo magnetico prodotto dalla corrente $i_1(t)$ genererà un flusso concatenato con le N_1 spire che dà luogo al flusso totale $\varphi_1(t)$.

Analoga considerazione potrà essere fatta per la seconda bobina.

Se i campi non interagiscono, usando la convenzione dell'utilizzatore:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{d\varphi_1}{dt} \\ v_2 = \dfrac{d\varphi_2}{dt} \end{cases}$$

In linearità ($\varphi_1 = L_1 i_1, \varphi_2 = L_2 i_2$) e tempo invarianza,

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Otteniamo le caratteristiche di due induttori.

Avvicinando le bobine, i campi interagiscono:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} \\ \varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22} \end{cases}$$

Ad esempio, il flusso totale φ_1 concatenato con il primo circuito è dato dalla somma di due contributi: quello di $i_1(t)$ e quello di $i_2(t)$. Analogamente per il flusso totale φ_2 concatenato con il circuito 2.

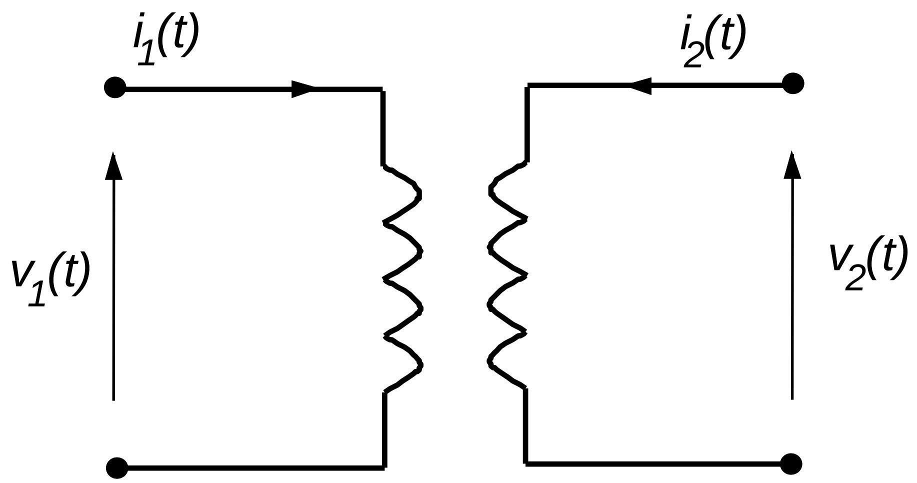
$$\begin{cases} \varphi_{11} = \varphi_1|_{(i_1 \neq 0; i_2 = 0)} \\ \varphi_{12} = \varphi_1|_{(i_1 = 0; i_2 \neq 0)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_{21} = \varphi_2|_{(i_1 \neq 0; i_2 = 0)} \\ \varphi_{22} = \varphi_2|_{(i_1 = 0; i_2 \neq 0)} \end{cases}$$

In linearità e tempo invarianza:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{d}{dt}(L_{11} i_1) + \frac{d}{dt}(M_{12} i_2) \\ v_2 = \frac{d}{dt}(M_{21} i_1) + \frac{d}{dt}(L_{22} i_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Il doppio bipolo accoppiamento mutuo è definito dal parametro L_{11} coefficiente di autoinduzione del primo avvolgimento, L_{22} coefficiente di autoinduzione del secondo avvolgimento, M_{12} coefficiente di mutua induzione del secondo avvolgimento sul primo e M_{21} coefficiente di mutua induzione del primo avvolgimento sul secondo

Il simbolo grafico è:



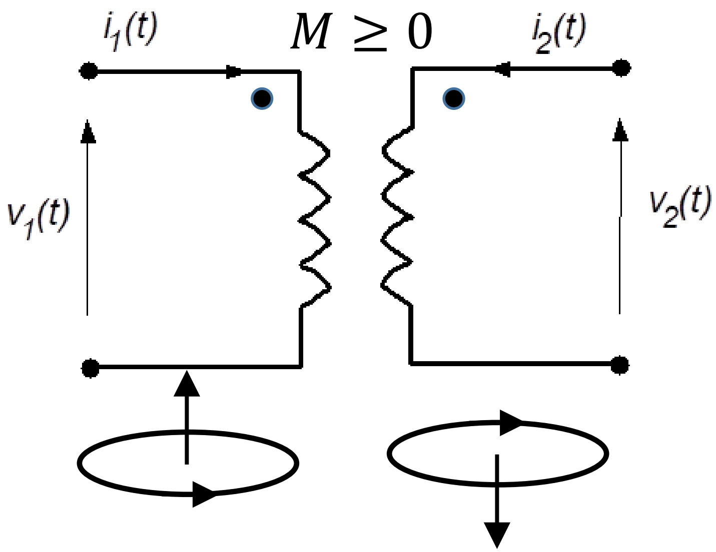
Proprietà del doppio bipolo accoppiamento mutuo

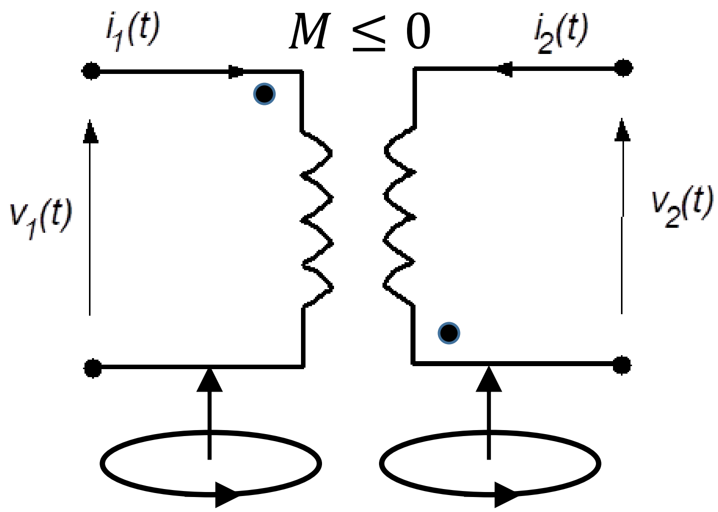
1) $L_{11} \geq 0$ e $L_{22} \geq 0$, il coefficiente di autoinduzione è positivo;

2) $M_{12} = M_{21} = M$ per la proprietà di reciprocità (e per motivi energetici);

3) M può assumere segno qualsiasi perché dipende dalle convenzioni

4) $M^2 \leq L_{11}L_{22}$ per questioni energetiche.





Potenza ed energia del doppio bipolo accoppiamento mutuo

La potenza assorbita risulta:

$$p_a(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = \left(L_{11} \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) i_1 + \left(M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \right) i_2$$

Il differenziale $dW(t)$ dell'energia è:

$$dW = (L_{11} di_1 + M_{12} di_2) + (M_{21} di_1 + L_{22} di_2)$$

Il differenziale dell'energia deve essere un differenziale esatto perché l'energia è una funzione di stato e la variazione di energia tra due stati diversi (ad esempio lo stato 1 e lo stato 2) non può dipendere dal cammino fatto per raggiungerli, ma solo dallo stato iniziale e finale.

Affinché il differenziale dell'energia sia esatto deve accadere che $M_{12} = M_{21} = M$. Solo in questo caso, infatti, può definirsi una funzione energia interna $W(t)$ tale che $dW = W'(t)dt$ e:

$$\int_1^2 dW = W(2) - W(1)$$

Per cui:

$$dW(t) = L_{11} di_1 i_1 + M di_2 i_1 + M di_1 i_2 + L_{22} di_2 i_2$$

$$dW(t) = d\left(\frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2\right)$$

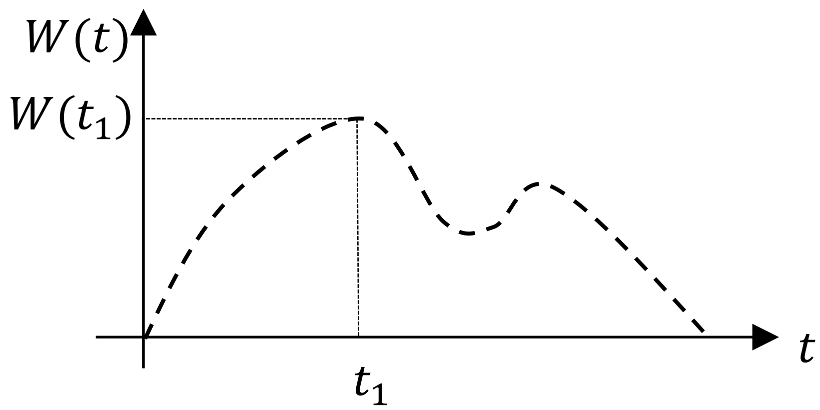
E l'energia interna del doppio bipolo è:

$$W(t) = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

L’energia interna all’istante t del doppio bipolo accoppiamento mutuo dipende solo dal valore delle correnti i_1 e i_2 in quell’istante.

L’accoppiamento mutuo è un componente passivo. Esso può fornire tutta l’energia che ha precedentemente immagazzinato, ma non ne può fornire una quantità maggiore.

Per dimostrarlo, basta considerare una qualsiasi evoluzione delle correnti.



Ad esempio:

1) si parte da uno stato iniziale in cui le correnti sono nulle e l'energia interna è pertanto nulla ($i_1(t_0) = 0; i_2(t_0) = 0$);

2) si fa assorbire energia, passando ad un nuovo stato in cui $i_1(t_1) = I_{10}$ e $i_2(t_0) = I_{20}$ e l'energia è $W(t_1) = \frac{1}{2}L_{11}I_{10}^2 + MI_{10}I_{20} + \frac{1}{2}L_{22}I_{20}^2$;

3) si fa evolvere liberamente il circuito e si verifica che, da questo momento, la massima energia erogabile si ha quando $i_1(t_2) = i_2(t_2) = 0$. Tale energia è non superiore a quella posseduta in t_1, pari a $W(t_1)$.

L'accoppiamento mutuo è un doppio bipolo *conservativo* perché l'energia assorbita dal componente viene immagazzinata nel campo magnetico sotto forma di energia interna per poi essere restituita al circuito.

L'energia immagazzinata (nel campo magnetico) è per definizione una quantità positiva ($W_\tau = \iiint_\tau \left(\frac{B^2}{\mu}\right) d\tau$) e dipende da i_1 e i_2:

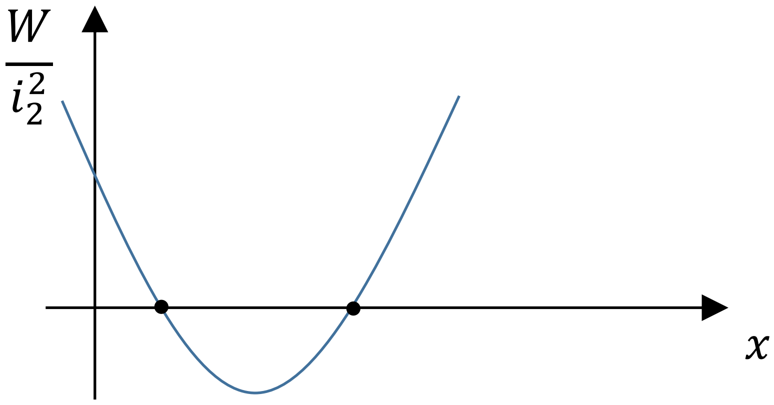
$$W(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 \geq 0$$

Può essere riscritta come

$$\frac{W(i_1, i_2)}{i_2^2} = \left[\frac{1}{2} L_{11} \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2 + M \frac{i_1}{i_2} + \frac{1}{2} L_{22}\right] \geq 0$$

Posto $x = (\frac{i_1}{i_2})$, l'espressione nel piano $(W/i_2^2, x)$ è una parabola di equazione:

$$\frac{W}{i_2^2} = \frac{1}{2} L_{11} x^2 + M x + \frac{1}{2} L_{22}$$



Questa parabola non deve mai intersecare l'asse delle x perché non deve esistere una coppia di valori (i_1,i_2) della corrente in corrispondenza della quale l'energia immagazzinata è negativa. Ciò può accadere solo se l'equazione $\frac{1}{2}L_{11}x^2 + Mx + \frac{1}{2}L_{22} = 0$ ha radici complesse.

Considerando il discriminante dell'equazione ($\Delta = M^2 - L_{11}L_{22}$), si ricava la condizione di fisica realizzabilità:

$$M^2 \leq L_{11}L_{22}$$

Tale condizione può essere espressa anche tramite il coefficiente di accoppiamento k definito come:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}$$

e si esprime con $-1 \leq k \leq +1$

La condizione $k = 1$ ($M^2 = L_{11} L_{22}$) individua l'accoppiamento perfetto. In tal caso esiste una coppia di valori (i_1, i_2) per i quali l'energia immagazzinata W è nulla e ciò significa che è nullo in ogni punto dello spazio il campo magnetico associato al doppio bipolo. Esiste una coppia di correnti tali che è possibile annullare il campo prodotto dalla corrente in un avvolgimento, facendo circolare un'opportuna corrente nel secondo avvolgimento.

Accoppiamento mutuo in regime sinusoidale

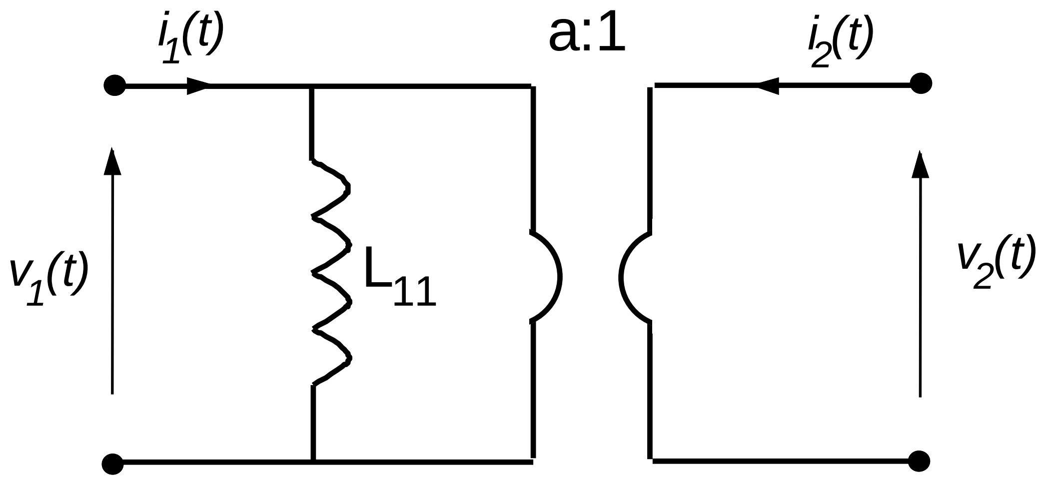
$$\begin{cases} \overline{V_1} = j\omega L_{11}\overline{I_1} + j\omega M\,\overline{I_2} \\ \overline{V_2} = j\omega M\,\overline{I_1} + j\omega L_{22}\overline{I_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{V_1}}{j\omega L_{11}} = \overline{I_1} + \dfrac{M}{L_{11}}\overline{I_2} \\ \dfrac{\overline{V_2}}{j\omega M} = \overline{I_1} + \dfrac{L_{22}}{M}\overline{I_2} \end{cases}$$

Con accoppiamento perfetto ($M^2 = L_{11}L_{22}$), i secondi membri sono uguali:

$$\frac{\overline{V_1}}{j\omega L_{11}} = \frac{\overline{V_2}}{j\omega M} \qquad\qquad \frac{\overline{V_1}}{\overline{V_2}} = \frac{L_{11}}{M} = \frac{M}{L_{22}} = a$$

$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \dfrac{\overline{V}_1}{j\omega L_{11}} - \dfrac{1}{a}\overline{I}_2 \\ \dfrac{\overline{V}_1}{\overline{V}_2} = a \end{cases}$$



Un mutuo induttore ad accoppiamento magnetico perfetto è equivalente a un trasformatore ideale avente in parallelo alla prima porta un induttore di induttanza L_{11}

Nell'ipotesi in cui sia $L_{11} \to \infty$, si ottiene un trasformatore ideale.

Se l'accoppiamento non è perfetto ($M^2 < L_{11}L_{22}$), è possibile imporre le seguenti condizioni

$$\begin{cases} L_{11} = L'_{11} + L''_{11} \\ L_{22} = L'_{22} + L''_{22} \\ M^2 = L''_{11}\, L''_{22} \end{cases}$$

In modo da ricavare una coppia di valori $L''_{11}\, L''_{22}$ tali che $M^2 = L''_{11}\, L''_{22}$

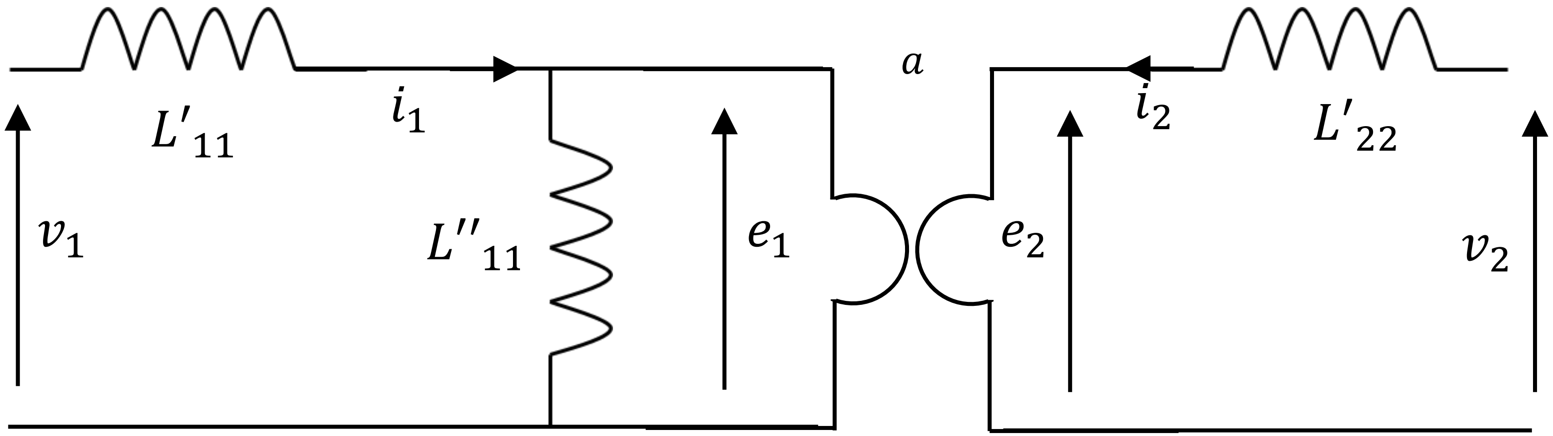
Potremo scrivere:

$$\begin{cases} \overline{V_1} = j\omega L'_{11}\, \overline{I_1} + \left(j\omega L''_{11}\, \overline{I_1} + j\omega M\, \overline{I_2} \right) \\ \overline{V_2} = j\omega L'_{22}\, \overline{I_2} + \left(j\omega M\, \overline{I_1} + j\omega L''_{22}\, \overline{I_2} \right) \end{cases}$$

I termini in parentesi descrivono un accoppiamento perfetto con

$$M^2 = L''_{11} L''_{22} \text{ e } a = \frac{L''_{11}}{M} = \frac{M}{L''_{22}} \qquad \begin{cases} \overline{E_1} = j\omega L''_{11}\overline{I_1} + j\omega M\overline{I_2} \\ \overline{E_2} = j\omega M\overline{I_1} + j\omega L''_{22}\overline{I_2} \end{cases}$$

Il circuito equivalente si ottiene poi aggiungendo $j\omega L'_{11}\overline{I_1}, j\omega L'_{22}\overline{I_2}$



Come si realizza, fisicamente, un accoppiamento perfetto?

Gli avvolgimenti devono essere realizzati in modo tale che siano trascurabili i termini L'_{11} e L'_{22}, ossia in modo che sia nullo il flusso disperso, cioè non esistano linee di campo che si concatenano con un avvolgimento e non con l'altro.

Se poi gli avvolgimenti sono realizzati su materiale con permeabilità magnetica estremamente elevata ($\mu \rightarrow \infty$), per cui sia ha che $L''_{11} \rightarrow \infty$, allora si riesce ad ottenere un trasformatore ideale.