

## CAPITOLO I

### CAMPI ELETTROMAGNETICI RICHIAMI ED APPROFONDIMENTI

#### § I.1 Modello generale dell'elettromagnetismo [1-4]

Si ricorda che la massima sintesi dell'Elettromagnetismo risiede nelle equazioni di Maxwell che, in forma integrale, si ricollegano anche a leggi sperimentali ben note per le notevoli ricadute tecnologiche ed industriali della seconda metà dell'Ottocento:

$$(I.1) \quad \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl = - \frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS_{\gamma} \quad (\text{legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Neumann})$$

$$(I.2) \quad \oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{legge di Gauss})$$

$$(I.3) \quad \oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = 0 \quad (\text{legge di conservazione del flusso})$$

$$(I.4) \quad \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dl = \mu_0 \iint_{S_{\gamma}} \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS_{\gamma} \quad (\text{legge di Ampère-Maxwell})$$

dove  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono campi vettoriali (convenzionalmente indicati come “elettrico” e “magnetico”),  $\gamma$  è una curva chiusa,  $S_{\gamma}$  è una superficie orlata da  $\gamma$  e  $\Sigma$  una superficie chiusa. La (I.1) indica che la circuitazione del campo elettrico è pari alla derivata temporale del flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie orlata da  $\gamma$  (la superficie può essere generica per la proprietà (I.3) di conservazione del flusso). La (I.2) indica che il flusso attraverso una superficie chiusa (valutato con la normale orientata verso l'esterno) del campo elettrico è pari alla carica elettrica in essa contenuta <sup>(1)</sup>. La (I.4) indica che la circuitazione del campo magnetico è pari al flusso del campo vettoriale composto dalla densità di corrente di conduzione  $\mathbf{J}$  <sup>(2)</sup> e dalla densità di corrente di spostamento <sup>(3)</sup>, legato alla variazione temporale del campo elettrico <sup>(4)</sup>.

<sup>1</sup> La carica  $Q$  [C] può essere “puntiforme” ovvero sia immaginata concentrata in un punto interno alla superficie, oppure distribuita nel volume interno alla superficie con densità volumetrica  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>], oppure distribuita su una superficie interna (ad esempio un elettrodo) con densità superficiale  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>], oppure su una linea interna con densità lineare  $\lambda$  [C/m].

<sup>2</sup> il campo densità di corrente è dato dal campo di velocità di migrazione (vedi avanti) delle cariche moltiplicato per il valore della densità volumetrica della carica stessa ( $\mathbf{J} = qN\mathbf{v} = q\mathbf{v}$ ). La natura di tali cariche è del tutto generale, intendendosi comprese anche quelle “vincolate” agli atomi. Nel caso stazionario, per “corrente elettrica” si intende il fenomeno di migrazione (deriva, drift) di cariche elettriche; tale “moto medio” (che avviene nei conduttori metallici in condizioni ordinarie a velocità dell'ordine di 0.1 mm/s) va nettamente distinto dal moto di agitazione termica (con valori istantanei della velocità anche di 1-10 km/s); il detto moto medio viene indicato come *corrente elettrica di conduzione* (in altri casi possono aversi correnti di *convezione* o, nel

Le leggi di Maxwell in forma integrale, con opportune precisazioni, conducono rapidamente alla formulazione “circuitale”, ad esempio attraverso la definizioni di bipoli e di tutti gli elementi topologici e caratteristici delle Reti Elettriche (e Reti Magnetiche analoghe) come si è visto nei corsi di Elettrotecnica e similari [5-11].

## §I.2 Le equazioni di Maxwell in forma locale

Laddove le grandezze (scalari e vettoriali) presenti nelle (I.1)-(I.4) siano continue e derivabili, il campo elettromagnetico può essere descritto in tutti i punti dello spazio attraverso gli operatori differenziali spaziali e temporali divergenza e rotore (<sup>5</sup>).

---

caso non stazionario, *correnti di spostamento*); al fenomeno possiamo quindi associare il campo vettoriale di velocità di migrazione  $\mathbf{v}$  delle particelle. Si definiscono **conduttori** i materiali in cui possono aver luogo significativi fenomeni di migrazione di carica; i conduttori più diffusi sono i metalli; possono tuttavia manifestarsi rilevanti fenomeni di conduzioni in altri materiali solidi, in liquidi ed in particolari condizioni anche nei gas. Si definiscono **isolanti** i materiali che non consentono significativi fenomeni di migrazione di carica; gli isolanti possono essere solidi, liquidi e gassosi; l’isolante ideale è il vuoto assoluto (tuttavia, come si vedrà, anche in camere a vuoto possono aver luogo fenomeni di migrazione di cariche provenienti dalle pareti).

<sup>3</sup> la densità di corrente di spostamento è significativa solo in presenza di campi variabili. In ogni punto dello spazio (anche vuoto)  $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$  prende il nome di “spostamento elettrico” ed è direttamente correlabile alla densità di carica superficiale sugli elettrodi e comunque alle cariche libere. Nel caso di presenza di mezzi materiali, il campo di spostamento  $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$  è collegabile alle distribuzioni di cariche libere (ad es. sugli elettrodi) e non alle cariche vincolate appartenenti al mezzo materiale.

<sup>4</sup> Anche nel caso magnetico viene introdotto un campo ausiliario  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ ) riconducibile, in caso stazionario, alle sole correnti “libere”.

<sup>5</sup> La divergenza di un campo vettoriale  $\mathbf{A}$  in un punto  $P$  è una quantità scalare e può essere definita (cfr. *il teorema della divergenza*) con un processo al limite a partire dal flusso del vettore attraverso una superficie chiusa racchiudente  $P$ , rapportato al volume definito dalla superficie stessa e facendo implodere la superficie chiusa intorno al punto  $P$ . L’operatore di divergenza si indica con  $(\nabla \cdot)$  o con *div*. Un campo a divergenza nulla è *indivergente* o *solenoidale*.

Il rotore di un campo vettoriale  $\mathbf{A}$  in un punto  $P$  è un vettore che può essere definito (cfr. *il teorema di Stokes*) considerando una superficie elementare orientata (es. un cerchio) contenente il punto  $P$ ; il modulo del rotore è pari al massimo valore – al variare della giacitura della superficie – della circuitazione lungo l’orlo della superficie stessa, la direzione ed il verso essendo definiti dalla normale alla superficie nella posizione in cui la circuitazione è massima. L’operatore di rotore si indica con  $(\nabla \times)$  o con *rot* o *curl*. Un campo a rotore nullo è *irrotazionale*.

Un ulteriore operatore differenziale spaziale è il gradiente  $(\nabla)$ . Esso opera su un campo scalare  $f(P)$  ovunque differenziabile: il suo modulo è individuato dalla massima derivata direzionale condotta su ogni retta orientata passante per il punto  $P$ , la direzione ed il verso sono dettati dalla retta orientata per cui si ha la massima derivata. Le componenti (ad es. cartesiane) possono generare una *forma differenziale esatta* (la circuitazione del gradiente lungo una qualsiasi linea chiusa è nulla). Nel caso elettrostatico la funzione  $f(P)$  è il potenziale (elettrostatico) ed il suo gradiente è (a parte il segno) pari al campo elettrico. ./.

$$(I.1') \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(I.2') \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(I.3') \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(I.4) \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Per integrare queste equazioni nello spazio occorre conoscere le “condizioni al contorno” (all’infinito o al finito) e le “condizioni iniziali”<sup>(6)</sup>.

### §I.3 La forza di Lorentz

Su ogni carica  $q$  dotata di velocità  $\mathbf{v}$ , in presenza di campo elettromagnetico, agisce una forza

$$(I.5) \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Se la carica è ferma, il campo magnetico non ha effetti, per cui possiamo definire il campo elettrico come una forza specifica (newton/coulomb) su una carica ferma. In caso di moto, il campo magnetico produce un effetto ortogonale alla velocità, per cui la particella necessariamente devia (vedi ad esempio le applicazioni nelle grandi macchine quali il ciclotrone).

E' fondamentale la determinazione alla sollecitazione elettrica (**stress**) agente sulle singole particelle o potenzialmente ad esse applicabile. Ciò permetterà di valutare il margine rispetto alle prestazioni nominali ossia alle sollecitazione massime accettabili in condizioni di sicurezza (**strength**)<sup>(7)</sup>, oppure le condizioni di progressivo collasso del materiale stesso ed i tempi tipici del collasso: un opportuno controllo delle condizioni di lavoro del materiale ne consente una gestione efficace e previene guasti e danni diretti ed indiretti spesso di notevole entità. Lo sviluppo di diagnostiche non distruttive, on-line ed off-line, possono consentire una ragionevole previsione di vita del materiale e dei componenti di un sistema elettrico<sup>(8)</sup>.

./ Il gradiente della divergenza è detto laplaciano ( $\nabla \nabla \cdot \equiv \nabla^2$ ).

Si riconosce che la divergenza del rotore è nulla e quindi anche il flusso del rotore attraverso una superficie chiusa è nullo.

Un campo ovunque solenoidale è conservativo per il flusso e può essere descritto come il rotore di un altro campo vettoriale detto potenziale vettore (esempio il potenziale vettore magnetico)

La circuitazione di un campo ovunque irrotazionale è sempre nulla; il campo si dice conservativo per il lavoro (es campo elettrostatico). Tali proprietà possono essere opportunamente valutate anche in domini limitati.

<sup>6</sup> Per maggiori approfondimenti si può consultare, ad esempio, il §I.8.

<sup>7</sup> Tale termine potrebbe tradursi con “rigidità”; l’uso tecnico di tale termine è molto diffuso e spesso usato in modo improprio o ambiguo. E' preferibile far riferimento al concetto di “sollecitazione limite”, precisando che essa dipende da numerosi parametri e condizioni operativi

<sup>8</sup> Alla sollecitazione sul materiale è utile associare alcuni aspetti energetici; ad esempio, si può considerare la *densità di energia* ossia l’energia riferita un volumetto elementare. Se un materiale “lineare” è interessato

## §I.4 Sorgenti del campo elettromagnetico

Le equazioni di Maxwell in forma locale ci evidenziano le sorgenti del campo elettromagnetico, in termini di divergenza (“fontane o pozzi”) o in termine di rotore (“vortici”).

Le sorgenti possono dipendere direttamente dai campi (“sorgenti interne”, a tratteggio) o meno (“sorgenti esterne”); in realtà, anche le sorgenti “esterne” possono essere “prodotte” dai campi.

$$(I.1'') \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(I.2'') \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(I.3'') \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(I.4'') \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Come si nota, le uniche sorgenti esterne previste nelle equazioni locali di Maxwell sono le densità volumetriche di carica e le densità di corrente. Altri tipi di sorgenti (cariche puntiformi, lineari o superficiali, ovvero correnti laminari ecc.) determinano singolarità nelle relazioni differenziali; se ne può tener conto nelle relazioni integrali, che danno luogo a *condizioni di raccordo* alla frontiera dei sottodomini all’interno dei quali i campi sono continui e derivabili (vedi oltre).

Nel caso di moto stazionario di cariche in migrazione ( ad es. in un conduttore filiforme), non vi è variazione media della carica in moto in ogni volume; in ogni punto è costante la velocità  $v$  di migrazione (non considerando il moto di agitazione termica e il moto vario nell’intervallo tra due interazioni)<sup>9</sup>. Si può quindi ritenere che sia nulla, in media, la risultante delle forze che agiscono sulla carica  $q$  in movimento, nel nostro caso la forza  $q\mathbf{E}$  nel senso del moto ed una “forza d’attrito equivalente”  $-kv$  diretta in senso opposto alla prima. In un *circuito semplice* (ad esempio una regione di spazio di forma anulare), il campo velocità di migrazione delle cariche ha linee di flusso anulari e tutte orientate in senso orario o

localmente da un campo elettrico  $E$  o un campo magnetico  $B$ , le *densità di energia elettrica e magnetica* valgono, rispettivamente

$$w_e = \frac{\Delta W_e}{\Delta \tau} \Big|_{\Delta \tau \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad w_m = \frac{\Delta W_m}{\Delta \tau} \Big|_{\Delta \tau \rightarrow 0} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Con riferimento ad esempio a componenti in aria (condensatori ed induttori) ed a campi tipici ( $E=10\text{kV/cm}$ ,  $B=0,1\text{ T}$ ) si hanno densità di energia elettrica di circa  $4,5\text{ J/m}^3$  e magnetica di  $4\text{ kJ/m}^3$ . Tale esempio numerico dà conto della “convenienza” del ricorso all’energia magnetica nelle grandi applicazioni industriali, favorita anche dalla presenza di materiali magnetici che consentono di elevare il campo magnetico in aria di un ordine di grandezza rispetto al valore in esempio e quindi l’energia specifica di due ordini di grandezza.

<sup>9</sup> per il rame tale tempo è dell’ordine di  $10^{-14}\text{ s}$

antiorario. Quindi la circuitazione del campo di velocità  $\mathbf{v}$  e del campo di corrente  $\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}$  non può essere nulla, ossia il campo di corrente stazionaria non può essere conservativo. Poiché il moto di migrazione è non è vario e il campo equivalente d'attrito è sempre opposto al senso del moto, *il campo di forze sulle cariche ed il relativo campo elettrico complessivo* (che, si ricorda, è la forza applicata alla particella riferita alla carica della particella) *non possono essere conservativi* <sup>(10)</sup>.

Il sistema di equazioni differenziali di Maxwell si presta a soluzioni analitiche dirette solo in alcuni casi (ad es. propagazione di onde piane).

Dal punto di vista generale occorrerà considerare che le equazioni di Maxwell sono differenziali nello spazio e nel tempo e quindi occorrerà conoscere (vedi oltre) le condizioni al contorno del dominio di indagine (o le condizioni all'infinito, nel caso di domini illimitati) e le condizioni iniziali.

## §1.5 Richiami sulle proprietà fondamentali dei campi vettoriali

Un campo vettoriale a *divergenza nulla in tutto lo spazio* è anche **conservativo per il flusso**: il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa è zero, il flusso  $\Phi$  attraverso una superficie aperta orientata non varia se si considera una qualsiasi superficie che ha lo stesso orlo  $\gamma$  orientato in modo congruente; in questo caso di flusso  $\Phi_\gamma$  si dice *concatenato* con la linea  $\gamma$ . Poiché il rotore è definito a partire dalla circuitazione elementare di un vettore, la sua divergenza è nulla. Posso quindi associare ad un vettore indivergente in tutto lo spazio (ad es. il campo magnetico  $\mathbf{B}$ ) un campo vettoriale  $\mathbf{A}$ , il cui rotore sia pari a  $\mathbf{B}$ . Il campo  $\mathbf{A}$  si chiama potenziale vettore; per il teorema di Stokes, il flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con la linea  $\gamma$  è pari alla circuitazione del potenziale vettore  $\mathbf{A}$ .

---

<sup>10</sup> Poiché il campo elettrico derivante da una distribuzione di cariche elettriche è conservativo, ne discende che un moto stazionario di cariche non può essere generato da una distribuzione (fissa) di cariche. Occorrerà quindi considerare una sorgente di campo elettrico *non di tipo elettrostatico, chiamato campo elettromotore*. Il campo elettromotore è quindi un campo di forza specifica, di natura meccanica, chimica, elettrica .... ma non elettrostatica (trattandosi di campo non conservativo), che agisce sulle cariche tenendole separate in un mezzo conduttore e consentendo per esse un moto stazionario (o anche non stazionario). In un circuito semplice interessato da corrente stazionaria, ci deve essere almeno una parte (*tratto generatore*) in cui il campo elettromotore è diverso da zero; l'eventuale parte complementare, in cui il campo elettromotore è nullo, prende il nome **di tratto utilizzatore**. Nel tratto utilizzatore la forza specifica sulle cariche è quella derivante dalla distribuzione di cariche (causata a sua volta dal campo elettromotore) ed è quindi un campo a potenziale: nel tratto utilizzatore la tensione elettrica (integrale del campo elettrico) valutata tra due punti non dipende dalla curva di integrazione ma solo dagli estremi di integrazione (all'interno del tratto generatore, viceversa, la tensione dipende dalla curva scelta). Se quindi il campo elettromotore è diverso da zero solo in una parte del circuito semplice, di sezioni estreme A e B, la tensione  $V_{AB}$  sarà indipendente dalla curva scelta solo a patto di non "entrare" nel tratto generatore. Le sezioni A e B individuano quindi i confini tra un "bipolo generatore" - identificabile attraverso una caratteristica V-I valutata *all'esterno* del tratto generatore - ed un "bipolo utilizzatore" in cui non vi sono vincoli per la valutazione della tensione.

Un campo vettoriale a rotore nullo in tutto lo spazio è anche **conservativo per il lavoro**: la circuitazione del vettore è zero qualunque linea chiusa  $\gamma$  consideri, l'integrale lineare tra due punti P e Q del campo non dipende dalla curva ma solo dagli estremi P e Q e potremo individuare una funzione scalare di punto  $\phi$  (potenziale scalare<sup>11</sup>) tale che tale integrale sia pari alla differenza di potenziale  $[\phi(P)-\phi(Q)]$ .

a) ogni campo vettoriale è scomponibile in un campo solenoidale ed un campo conservativo **(1. teorema di Helmotz)**;

b) l'integrale su tutto lo spazio del prodotto scalare tra un campo solenoidale ed uno conservativo è nullo (*analogo del teorema di Tellegen per i circuiti*);

c) **2.teorema di Helmotz** : Assegnata la divergenza ed il rotore di un campo vettoriale **C** in tutto lo spazio, esso può essere espresso come

$$\mathbf{C} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{con}$$

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau_\infty} \frac{\nabla \cdot \mathbf{C}(Q)}{r_{PQ}} d\tau \quad ; \quad \mathbf{A}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau_\infty} \frac{\nabla \times \mathbf{C}(Q)}{r_{PQ}} d\tau$$

d) Se la divergenza ed il rotore di un campo vettoriale sono definiti in tutti i punti interni ad una superficie  $\Sigma$ , e sulla stessa è assegnata la componente normale del campo, il campo è univocamente determinato (**teorema di unicità**).

---

<sup>11</sup> E' usuale utilizzare per i campi la "rappresentazione di Faraday", in cui vengono disegnate le "superfici equipotenziali" corrispondenti alla relazione implicita  $\varphi(P) = \varphi_0$ . Nel caso piano ed in coordinate cartesiane, avremo una curva nel piano (x,y) eventualmente descritta dalla relazione  $y = y_1(x) \Big|_{\varphi=\varphi_0}$  con coefficiente

angolare  $m = \frac{dy_1}{dx} \Big|_{\varphi=\varphi_0}$ . Al variare del parametro  $\varphi_0$  si descrive la famiglia delle curve equipotenziali. La

maggiore o minore "distanza" tra due curve equipotenziali prossime "rappresenta" un minore o maggiore gradiente ( modulo) ovverosia una minore o maggiore intensità del campo elettrico. La famiglia di curve

ortogonali, di coefficiente angolare  $n = \frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{dy_1}{dx} \Big|_{\varphi=\varphi_0}}$  rappresenta le linee gradienti o di flusso (equiflusso) e,

considerato un riferimento, descrivono la *funzione di flusso*.

## § I.6 Potenziali elettromagnetici - Equazioni di Poisson

Le equazioni di Maxwell permettono di identificare rapidamente potenziale vettore e potenziale scalare. Infatti abbiamo

$$(I.6) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\mathbf{A} \text{ è il potenziale vettore})^{12}$$

Quindi

$$(I.7) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$

dove  $\Phi$  è il *potenziale scalare elettromagnetico*, riconducibile, in caso stazionario, al potenziale elettrostatico.

$$(I.8) \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi_{es} \Leftrightarrow \Phi(A) = \Phi(B) + \int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl$$

*Il campo elettrico ammette un potenziale scalare solo nel caso stazionario (o quasi-stazionario), mentre il campo magnetico ammette sempre potenziale vettore.*

Sostituendo la (I.7) nella (I.2) si ha

$$(I.9) \quad \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \Phi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Sostituendo nella (I.4) dalla (I.6) e dalla (I.9) si ottiene

$$(I.10) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \epsilon_0 \mu_0 \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J}$$

Nelle (I.9)-(I.10) non compaiono più i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , ma i potenziali vettore e scalare, in funzione delle distribuzioni di carica e di densità di corrente.

Per avere una espressione più “leggibile” della (I.10), si ricorda che il potenziale vettore  $\mathbf{A}(P,t)$  è <sup>13</sup>definito a meno del gradiente di una funzione scalare  $\Psi_0(P,t)$  e la sua divergenza è arbitraria. Si indichi con  $\mathbf{A}_0(P,t)$  un potenziale vettore indivergente. Qualsiasi altro potenziale vettore  $\mathbf{A}$  dovrà rispettare la condizione:

$$(I.11) \quad \nabla \cdot \mathbf{A}_0 = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla \Psi_0 \Rightarrow \nabla^2 \Psi_0 = -\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{gauge di Coulomb})$$

<sup>12</sup> Il potenziale vettore è un campo vettoriale di cui non è in partenza assegnata la divergenza ( che potrà essere assegnata con opportune condizioni o *gauges*). Il potenziale vettore è sempre definito a meno del gradiente di una funzione scalare, in quanto il rotore di un gradiente è nullo.

<sup>13</sup> Si ricorda che la proiezione sui tre assi cartesiani del laplaciano di un vettore dà luogo a tre laplaciani scalari nelle componenti cartesiane del vettore.

Nella (I.10) avremo

$$(I.12) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_0) - \varepsilon_0 \mu_0 \left( -\frac{\partial^2 (\mathbf{A} - \nabla \Psi_0)}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J}$$

Ricordando la definizione di Laplaciano vettore

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

si ha dalla (I.12)

$$(I.13) \quad \nabla^2 \mathbf{A}_0 + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_0}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \left( \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J}$$

Ponendo

$$(I.14) \quad \Phi_0 = \Phi - \frac{\partial \Psi_0}{\partial t}$$

si ottiene

$$(I.15) \quad -\nabla^2 \mathbf{A}_0 + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_0}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

ed inoltre

$$(I.16) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} - \nabla \Phi_0 \right) = -\nabla^2 \Phi_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Con le posizioni (I.11)-(I.16) si è pervenuti ad una equazione di Poisson il cui termine noto è legato dalla sola distribuzione volumetrica delle cariche. In altri termini, la soluzione  $\Phi_0$  corrisponde ad un caso “elettrostatico” noto costituito dalla soluzione “coulombiana” relative ad una distribuzione di carica racchiusa in un volume  $\Delta\tau$ :

$$(I.17) \quad \Phi_0(P, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Delta\tau} \frac{\rho(Q, t)}{r_{PQ}} d\tau$$

Questo risultato ha una importanza solo simbolica, poiché il campo elettrico non discende da questo potenziale scalare, ma occorre anche affrontare la difficile soluzione della (I.15).<sup>14</sup>

Nel caso stazionario le (I.15)-(I.16) diventano

$$(I.18) \quad -\nabla^2 \mathbf{A}_0 = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$(I.19) \quad -\nabla^2 \Phi_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

<sup>14</sup> In luogo della gauge di Coulomb, potrebbe essere usata un'altra condizione (*gauge di Lorentz*) tra la divergenza del potenziale vettore ed la derivata locale potenziale scalare per ottenere, sia per il potenziale scalare che per il potenziale vettore, una struttura tipica della equazione delle onde.



note come equazioni di Poisson. Nel prossimo paragrafo si esamineranno alcuni casi fondamentali.

Si nota che, nel caso stazionario, le equazioni di Maxwell si disaccoppiano e spariscono le sorgenti “interne”.

## §I.7 Campi ausiliari

In assenza di mezzi materiali, si introducono due campi vettoriali ausiliari:

- il vettore spostamento elettrico, formalmente legato al campo elettrico dalla relazione  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ; si riconosce immediatamente che il vettore spostamento è omogeneo con una densità superficiale di carica e corrisponde, nel caso del condensatore ordinario nel vuoto, alla densità di carica superficiale sull’elettrodo; il flusso dei tubi di  $\mathbf{D}$  è pari alla carica intercettata sull’elettrodo;
- il vettore campo magnetico  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ ; si riconosce immediatamente che tale vettore è omogeneo con una densità lineare di corrente e quindi la sua circuitazione definisce una intensità di corrente “concatenata libera” (di conduzione e/o di spostamento).

Consideriamo ora la presenza di mezzi materiali.

Distinguiamo le sorgenti vincolate da quelli libere.

I fenomeni di **polarizzazione elettrica** possono essere descritti attraverso il vettore polarizzazione  $\mathbf{P}$ , inteso come momento risultante per unità di volume dei momenti dei dipoli elettrici intorno al punto in esame. Il vettore polarizzazione, anch’esso omogeneo con una densità superficiale di carica, è quindi legato alla deformazione della materia per effetto delle sorgenti libere. Il campo all’interno della materia risulterà pertanto pari a

$$(I.20) \quad \bar{\mathbf{E}} = \frac{\bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{P}}}{\epsilon_0}$$

Nel caso dei mezzi lineari  $\bar{\mathbf{P}} = \chi \bar{\mathbf{E}} \Rightarrow \bar{\mathbf{D}} = (\epsilon_0 + \chi) \bar{\mathbf{E}} = \epsilon \bar{\mathbf{E}} = \epsilon_r \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}}$  dove si introduce la permittività del mezzo  $\epsilon_r$ .

Il contributo ai fenomeni di magnetizzazione della materia può essere considerato un contributo al campo d’induzione magnetico aggiuntivo a quello delle correnti libere e può essere descritto attraverso il momento magnetico per unità di volume dei dipoli magnetici intorno al punto in esame (vettore magnetizzazione  $\mathbf{M}$ )

$$(I.21) \quad \bar{\mathbf{B}} = \mu_0 (\bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{M}})$$

Nel caso dei mezzi lineari  $\bar{\mathbf{B}} = \mu_0 (\bar{\mathbf{H}} + \zeta_r \bar{\mathbf{H}}) = \mu_0 \mu_r \bar{\mathbf{H}}$  dove si introduce la permeabilità relativa  $\mu_r$ .

Le equazioni ausiliarie di Maxwell diventano

$$(I.22) \quad \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \iint_{S_{\gamma}} \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS_{\gamma}$$

$$(I.23) \oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = Q$$

$$(I.24) \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$(I.25) \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Dalle equazioni di Maxwell integrali possono essere derivate le seguenti condizioni di raccordo alla frontiera di due domini di diverse caratteristiche elettriche o magnetiche

- le componenti tangenziali del campo elettrico E sono continue (salvo singolarità temporali di B);
- le componenti normali del campo B sono continue; di conseguenza, le componenti normali di H sono inversamente proporzionali alle permeabilità;
- le componenti normali di D differiscono per la densità superficiale di carica libera eventualmente presente sulla superficie di discontinuità; di conseguenza, le componenti normali di E non sono continue e sono, in assenza di carica superficiale, inversamente proporzionali alla permittività.

## §I.8 Problema di Laplace – Poisson

Se il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è irrotazionale in tutto lo spazio escluse le zone in cui sia presente un campo impresso di natura non elettrostatica, esso viene collegato ad un campo scalare detto **potenziale elettrico**  $V(P)$  [ $\Phi(P)$ ], dando origine al cosiddetto **problema di Poisson**, ovvero al **problema di Laplace**, se la sua divergenza è

$$\nabla^2 V(P) = f(P)$$

$$\nabla^2 V(P) = 0$$

identicamente nulla. Le equazioni corrispondenti prendono il nome rispettivamente di **equazione di Poisson** ed **equazione di Laplace**<sup>15</sup>.

Un problema di Poisson (o di Laplace) si dirà **ben posto** se sono verificate le condizioni perché la soluzione sia unica.

<sup>15</sup> Espressione del laplaciano in alcuni sistemi di coordinate

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (\text{coordinate cartesiane})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (\text{coordinate cilindriche})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] \quad (\text{coordinate sferiche})$$

Si considerino due possibili soluzioni  $V'(P)$  e  $V''(P)$  due soluzioni all'equazione di Poisson e la funzione  $W(P)=V'(P)-V''(P)$ , continua e derivabile; il laplaciano di  $W$  è nullo. Se si considera il dominio di indagine  $\tau_\Sigma$  di contorno  $\Sigma$  ed campo vettoriale che si ottiene moltiplicando  $W(P)$  per il gradiente di  $W(P)$ , il flusso attraverso  $\Sigma$  di tale campo, per il teorema della divergenza, sarà

$$\iint_{\Sigma} W \nabla W \cdot \bar{n} d\Sigma = \iiint_{\tau_\Sigma} \nabla \cdot (W \nabla W) d\tau_\Sigma$$

da cui

$$\iint_{\Sigma} W \frac{dW}{dn} d\Sigma = \iiint_{\tau_\Sigma} (|\nabla W|^2 + W \nabla^2 W) d\tau_\Sigma =$$

$$\iiint_{\tau_\Sigma} |\nabla W|^2 d\tau_\Sigma$$

Risulta quindi evidente che se si vuole che i gradienti di  $V'$  e  $V''$  siano gli stessi **in tutto il dominio**, è sufficiente che **sul contorno** abbiano la stessa derivata normale ( $dW/dn=0$ ) o lo stesso valore ( $W=0$ ); in quest'ultimo caso, ovviamente avremo lo stesso valore del potenziale in tutto il dominio. L'assegnazione del valore sul contorno prende il nome di **condizione di Dirichlet**, l'assegnazione della derivata normale –lato interno per il *problema interno*, lato esterno per il *problema esterno* – prende il nome di **condizione di Neumann**.

Nel primo caso, è univocamente individuato il potenziale scalare, nel secondo caso è univocamente definito il campo elettrico, grandezza significativa dal punto di vista ingegneristico in quanto rappresenta la sollecitazione specifica sulle cariche e quindi definisce il moto delle particelle o il comportamento del mezzo materiale. La ricerca della soluzione prende il nome di **problema di Dirichlet** o **problema di Neumann**. Possono presentarsi anche **problemi misti** o raccordati, nel senso che le condizioni al contorno non sono tutte dello stesso tipo e/o sono collegabili ad analoghe condizioni in domini contigui.

Nei due casi, il problema è per noi **ben posto**, avendo interesse alla sollecitazione elettrica, cioè al gradiente.

Altri casi, in cui le condizioni al contorno sono di tipo diverso, andranno esaminati a parte. Se il dominio è illimitato, occorrerà introdurre le opportune condizioni all'infinito, anche in relazione alla presenza di cariche all'infinito (es. caso piano e cilindrico).

Si può dimostrare che un problema di Poisson con condizioni alla Dirichlet può essere ricondotto ad un problema di Laplace.

Sia assegnata infatti la distribuzione di carica all'interno di un dominio e il valore del potenziale sul contorno; la **soluzione nello spazio libero**  $V_L$  a partire dai valori assunti dal laplaciano all'interno del dominio vale

$$V_L(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(P)}{r_{PQ}} d\tau_P.$$

Per l'unicità della soluzione del problema di Poisson assegnato, basterà che alla soluzione nello spazio libero vada sommata la soluzione di una equazione di Laplace con condizioni al contorno pari alla differenza tra i valori assegnati ed i valori assunti dalla soluzione nello spazio libero in corrispondenza dei punti del contorno (fig.I.1).

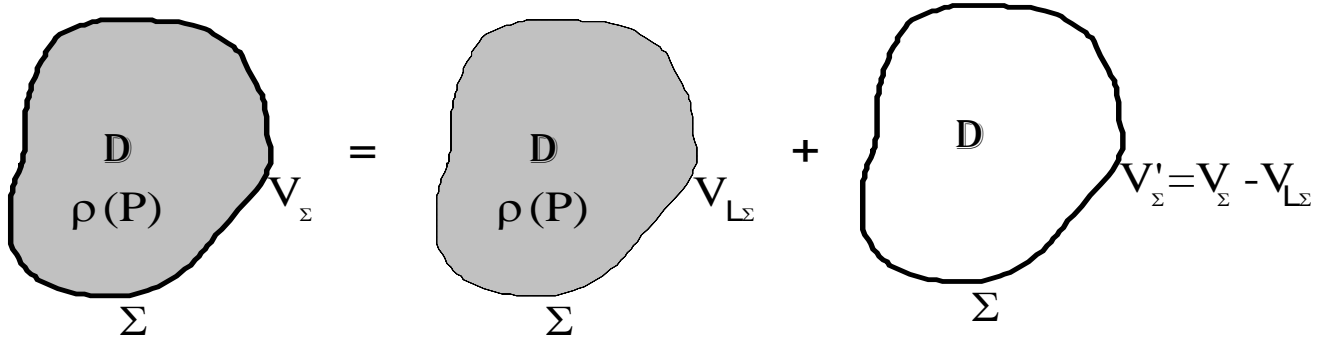


fig.I.1

Più avanti si mostrerà una soluzione generale al problema di Laplace con condizioni alla Dirichlet a partire da una soluzione di un problema particolare di Poisson (*funzione di Green*).

La soluzione del problema di Laplace-Poisson può essere affrontato con diversi metodi:

- a) **metodi analitici**, in cui la soluzione viene trovata in forma analitica (esatta o approssimata);
- b) **metodi numerici**, in cui la soluzione viene sostenuta da un algoritmo di calcolo numerico approssimante;
- c) **metodi analogici**, in cui la soluzione (analitica o numerica) viene mutuata da un altro campo vettoriale, anche di diversa natura;
- d) **metodi grafici**: la soluzione viene disegnata "a mano libera" e vengono considerate le proprietà della rappresentazione grafica del campo (es. ortogonalità tra superfici equipotenziali e tubi o superfici di flusso).

## §I.9 Analogia tra campi vettoriali di natura elettromagnetica

Dal prospetto che segue, si nota che il campo di corrente stazionario, il campo elettrostatico ed il campo magnetico stazionario possono essere descritti da *relazioni formalmente identiche*, con qualche restrizione sui domini di indagine.

CAMPO DI CORRENTE (escluse le regioni con campo impresso)	CAMPO ELETTROSTATICO	CAMPO MAGNETOSTATICO (in domini monoconnessi in cui $\mathbf{J}=0$ )
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\mathbf{E} = \eta \mathbf{J}$ $\mathbf{E} = -\nabla V$ $\nabla^2 V = \mathbf{E} \cdot \nabla \frac{1}{\eta}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ $\mathbf{E} = -\nabla V$ $\nabla^2 V = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon - \frac{\rho_l}{\varepsilon}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ $\mathbf{H} = \nabla \Psi_H$ $\nabla^2 \Psi_H = -\frac{1}{\mu} \mathbf{H} \cdot \nabla \mu$

Avremo quindi *soluzioni formalmente identiche*<sup>16</sup> (in termine di potenziale scalare) a patto di considerare i parametri corrispondenti

$$\frac{1}{\eta} \Leftrightarrow \varepsilon \Leftrightarrow \mu$$

In via del tutto generale, le soluzioni si presentano ardue, perché il valore del laplaciano dipende dal campo incognito. Il problema si semplifica notevolmente nel caso di domini *omogenei*.

Infatti, se il materiale *non è omogeneo* [e/o se è presente una carica spaziale] occorre risolvere un problema di Poisson, con le stesse equazioni al contorno (quindi il problema continua ad essere ben posto).

Nel caso ad esempio del *campo di corrente in mezzo disomogeneo* avremo

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \frac{\mathbf{E}}{\eta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\eta} \nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \nabla \frac{1}{\eta} \Rightarrow \nabla^2 V = \eta \mathbf{E} \cdot \nabla \frac{1}{\eta}$$

L'equazione da risolvere corrisponde ad un problema di Poisson, analogamente al caso elettrostatico con una "carica libera equivalente" di densità volumetrica pari a

$$\rho_{leq} = -\eta \cdot \varepsilon \cdot \left[ \mathbf{E} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\eta} \right) \right]$$

In tal caso il valore del Laplaciano dipende dal campo (che è ovviamente non noto). Occorrerà procedere in genere per via numerica.

<sup>16</sup> Si osserva che interessanti risultati sono stati ottenuti utilizzando analogie con altri casi non elettromagnetici (es. deformazione di una membrana elastica).

## §I.10 Risoluzione delle equazioni di Poisson e Laplace in casi fondamentali

### §I.10.1 Geometria piana (mezzo omogeneo)

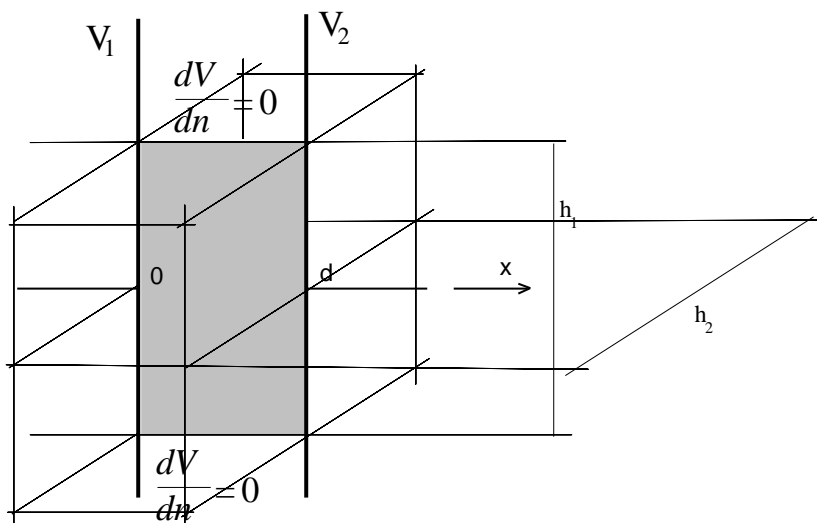


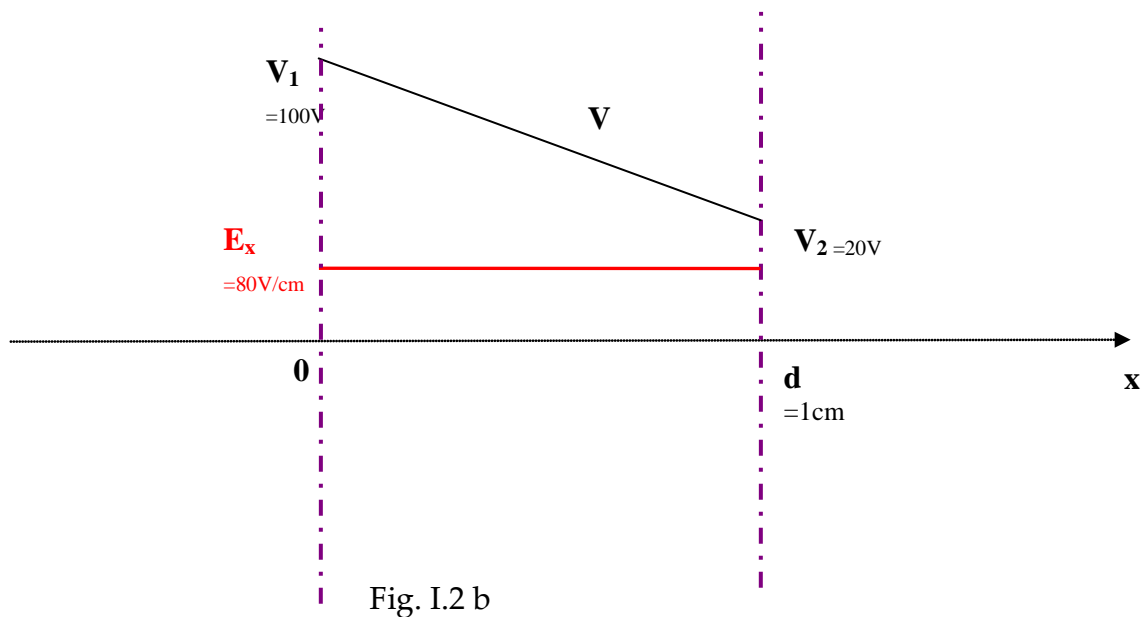
Fig.I.1.2

Consideriamo due elettrodi piani paralleli indefiniti a distanza  $d$  (fig.I.2) tra cui è interposto un mezzo omogeneo ed isotropo, privo di carica libera, caratterizzato dalla conducibilità  $1/\eta$  [e/o dalla costante dielettrica  $\epsilon$ ].

In condizioni stazionarie sia  $V_1$  il potenziale dell'elettrodo 1 e  $V_2$  il potenziale dell'elettrodo 2. Potremmo pensare di collegare i due elettrodi ad un generatore di tensione  $\Delta V = V_1 - V_2$ .

I campi non possono che dipendere da una sola coordinata ( $x$ ) ed avere una componente non nulla solo lungo tale asse. Infatti, se il campo elettrico avesse una componente lungo un altro asse ortogonale, non potrebbe essere rispettata l'irrotazionalità del campo (basti pensare al calcolo della circuitazione lungo un rettangolo su un piano ortogonale all'elettrodo, con un lato appoggiato ad esso).

Se si limita lo studio dei campi ad un dominio "tagliato" da due coppie di piani paralleli ortogonali agli elettrodi ed ortogonali tra di loro a distanza  $h_1$  e  $h_2$  tra di loro, individuiamo che tale dominio è una porzione di tubo di flusso del campo elettrico e del campo di corrente [del campo di spostamento]. Da notare che il problema è ben posto, in quanto sugli elettrodi conosciamo il potenziale, sulle pareti laterali è nulla la componente normale del campo e quindi è nulla la derivata normale del potenziale (condizione di Neumann)  $\frac{dV}{dn} = 0$ .



In questo caso è immediato valutare la **conduttanza** [la **capacità**] **equivalente** tra le sezioni degli elettrodi in tal modo individuate:

$$\nabla^2 V = 0 \rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = -E_x = k_1 \rightarrow V(x) = k_1 x + k_2 \quad (\text{fig.I.1.2b})$$

$$k_2 = V(0) = V_1$$

$$k_1 = \frac{V(d) - V(0)}{d} = -E_x$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{V_1 - V_2} = \frac{\iint \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS}{\int_0^d \mathbf{E} \cdot \mathbf{1}_x dx} = \gamma \frac{\Delta S}{d}$$

con  $\Delta S = h_1 h_2$ .

Tale espressione ricorda quella introdotta per il conduttore filiforme.

Nel caso sia presente una *distribuzione volumetrica di carica assegnata* fra gli elettrodi (fig.I.3), il Laplaciano è noto e l'equazione di Poisson può essere integrata direttamente.

Nel caso ad esempio di alcuni tubi a scarica, possiamo immaginare una *distribuzione uniforme* di carica spaziale  $\rho$  in un gas a bassa pressione.

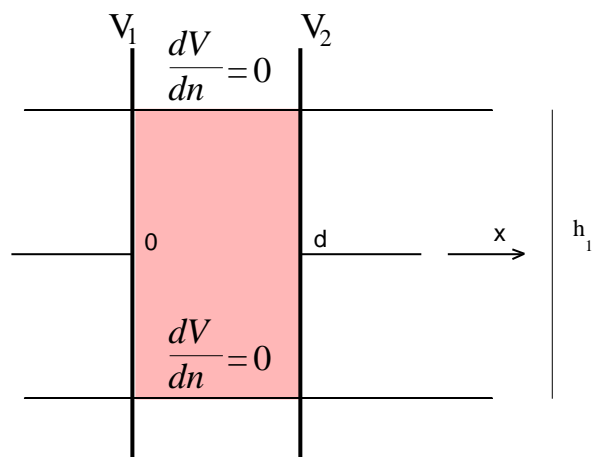


fig.I.1.3

In tal caso, con le stesse condizioni al contorno prima assunte, abbiamo

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow \frac{dV}{dx} = -E_x = -\frac{\rho}{\epsilon}x + k_1 \rightarrow V(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon}x^2 + k_1x + k_2$$

dove

$$k_2 = V(0) = V_1$$

$$V(d) = V_2 = -\frac{\rho}{2\epsilon}d^2 + k_1d + V_1$$

$$k_1 = \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} = \frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon}d$$

$$V(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon}(x-d)x + \frac{V_2 - V_1}{d}x + V_1$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon}(2x-d)$$

La distribuzione di potenziale nel caso di presenza di carica si modifica rispetto al caso geometrico (nel nostro caso lineare) per un termine parabolico che si annulla agli estremi dell'intervallo. Il massimo scostamento dalla soluzione "geometrica" (cioè dipendente dalla configurazione elettrodica in assenza di carica spaziale) si avrà quindi al centro dove vale  $\Delta V_{max} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{d^2}{8}$ . In presenza di carica spaziale, si potrà avere un

massimo o un minimo del potenziale all'interno dello spazio interelettrodico (V non è

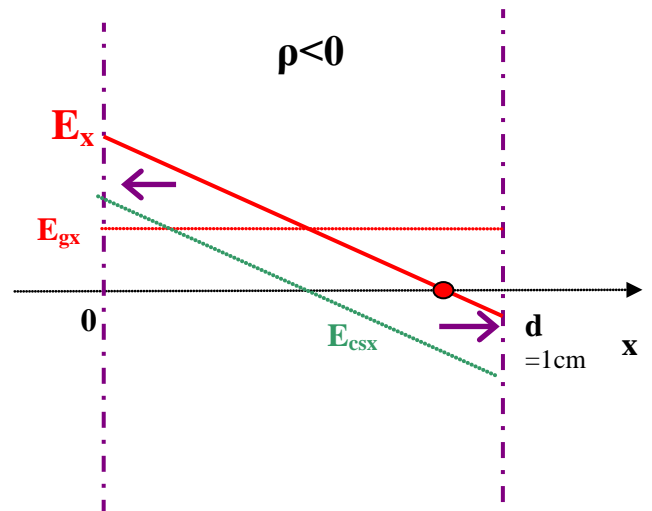
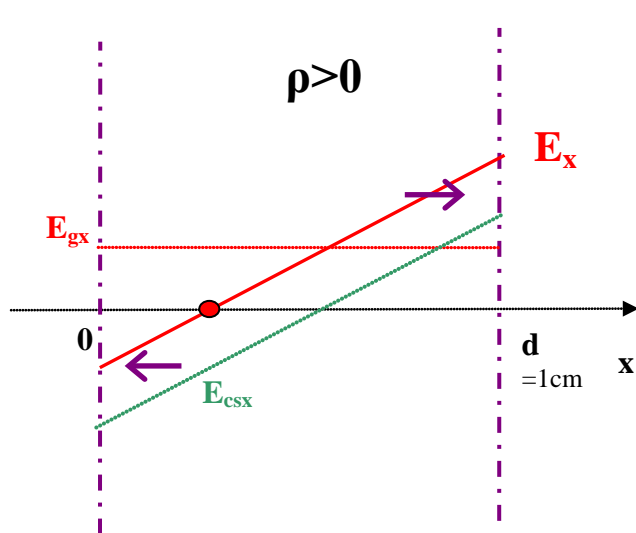
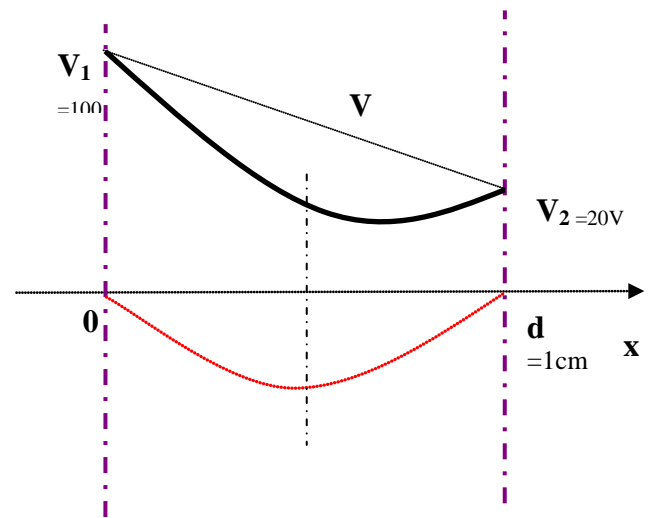
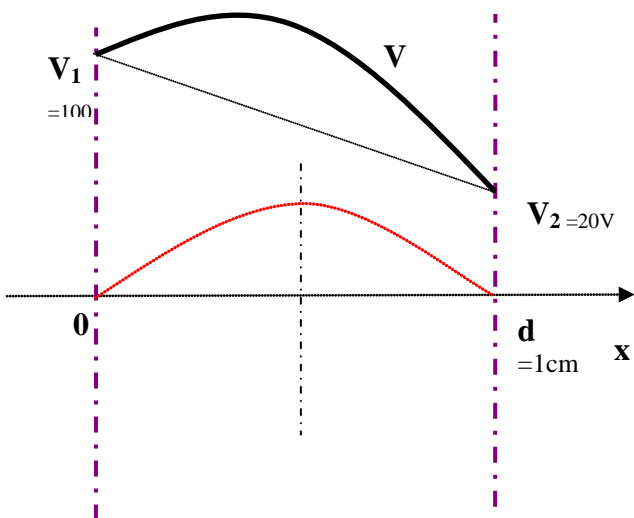
armonica) 
$$x_M = \frac{\frac{V_2 - V_1}{d}}{\frac{\rho}{\epsilon}} + \frac{d}{2}$$

se la densità di carica è sufficientemente elevata da determinare un campo di carica spaziale competitivo con quello geometrico, ossia se è verificata la condizione



$$\left| \frac{\frac{V_2 - V_1}{d}}{\frac{\rho}{\varepsilon}} \right| < \frac{d}{2} \Rightarrow |\rho| > 2\varepsilon \cdot \left| \frac{V_2 - V_1}{d^2} \right|$$

In corrispondenza di  $x_V$  il campo cambia senso. In relazione al segno dei potenziali e della densità di carica, in  $x_M$  si avrà un *anodo* o un *catodo virtuale*; in tale zona il campo cambia verso determinando da un lato un "serbatoio di contenimento" della carica spaziale, dall'altro una zona di forte sollecitazione (N.B. nell'analisi che abbiamo fin qui condotto si è fatta l'ipotesi di carica spaziale "bloccata"; essa si può riferire sia al caso dei gas – considerando una distribuzione "stazionaria"- oppure alla carica "intrappolata" nei solidi).



### §I.10.2 Tempo di rilassamento di materiali omogenei

Per la stessa geometria a partire dalla espressione della conduttanza  $G=\Delta S/(\eta d)$ , si può ricavare la capacità  $C=\epsilon\Delta S/(d)$ .

Un materiale reale tipicamente isolante presenta una conducibilità non nulla a causa delle impurità. In tal caso si può considerare la co-presenza del campo di corrente e del campo elettrostatico. Considerato quindi un componente reale, se ne può definire sia la capacità che la conduttanza. Posto  $R=1/G$  (resistenza), il prodotto  $RC$  è uguale a  $\epsilon\eta$  e rappresenta il cosiddetto **tempo di rilassamento** del materiale cioè l'intervallo di tempo tipico in cui l'eventuale stato iniziale di carica viene ridotto di  $1/e$  ( $\approx 66\%$ ). Tale tempo varia da frazioni di secondo per gli isolanti mediocri a ore per isolanti di pregiata qualità.

### §I.10.3 Geometria sferica (mezzo omogeneo)

Se consideriamo due elettrodi sferici concentrici (fig.I.4), a potenziali fissati (ad es. collegati ad un generatore di f.e.m. ideale), con interposto un mezzo a resistività  $\eta$ , il campo elettrico (e quello di corrente) non potrà che essere dipendente solo dalla coordinata radiale e a componente solo radiale (ogni altra componente determinerebbe una circuitazione non nulla del campo elettrico in una regione priva di campo impresso). Le linee di campo sono radiali, le superfici equipotenziali sfere concentriche.

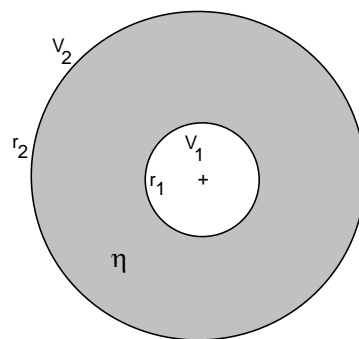


fig.I.4

Si potrà definire una resistenza equivalente tra i due elettrodi

$$R_{12} = \frac{V_1 - V_2}{I_{12}} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \eta \mathbf{J}(r) \cdot \mathbf{t} dr}{\iint_{\Sigma(r)} \mathbf{J}(r) \cdot \mathbf{n} d\Sigma} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \eta \frac{I_{12}}{4\pi r^2} dr}{I_{12}} = \frac{\eta}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

per  $r_2 \gg r_1$ , si ha

$$R_{1\infty} = \frac{\eta}{4\pi r_1}$$

In generale, per r generico

$$R_{1r}(r) = \frac{V_1 - V(r)}{I_{12}} = \frac{\int_{r_1}^r \eta \mathbf{J}(r) \cdot \mathbf{t} dr}{\iint_{\Sigma(r)} \mathbf{J}(r) \cdot \mathbf{n} d\Sigma} = \frac{\int_{r_1}^r \eta \frac{I_{12}}{4\pi r^2} dr}{I_{12}} = \frac{\eta}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

Il potenziale all'aumentare di r varia quindi con legge iperbolica:

$$V_1 - V(r) = R_{1r} I_{12} = \frac{\eta}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) I_{12}$$

Il campo massimo si trova in prossimità dell'elettrodo interno

$$E_{\max} = E(r_1) = - \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r_1} = \frac{\eta}{4\pi} \frac{I_{12}}{r_1^2} = \frac{V_1 - V_2}{r_1^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

Il campo tende ad infinito (a tensione fissata) sia quando il raggio interno tende a zero, sia quando tende a zero la differenza  $\delta = r_2 - r_1$ . In quest'ultimo caso la distribuzione di campo tende ad essere uniforme e pari a

$$E_{\max} \Big|_{r_2 \rightarrow r_1} = \frac{V_1 - V_2}{r_1^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \cong \frac{V_1 - V_2}{\delta}$$

Il valore minimo del campo massimo (al variare del rapporto tra i raggi) come si può facilmente controllare, si ha per  $r_2 = 2r_1$ . Il campo massimo vale in tal caso

$$E_{\max} \Big|_{r_2 = 2r_1} = \frac{V_1 - V_2}{r_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \right)} = 2 \frac{V_1 - V_2}{r_1}$$

Nelle migliori condizioni quindi, il campo elettrico sferico ha un valore massimo che è il doppio del campo uniforme a parità di distanza elettrodica (che, in questo caso, è pari a  $r_1$ ). In altri termini, le sollecitazioni sul materiale (anche dal punto di vista termico) sono sensibilmente non uniformi anche nel caso di configurazione elettrodica ottimale.

### §I.10.4 Applicazioni: il dispersore di terra emisferico

I resistori sferici non sono in pratica utilizzati.

Il campo *emisferico* si ottiene considerando un taglio equatoriale. Le condizioni al contorno del dominio emisferico sono le stesse del campo sferico (potenziali assegnati agli elettrodi e derivata normale nulla sulla superficie del taglio; la distribuzione di campo e potenziale rimane inalterata). A parità di tensione applicata, la intensità di corrente  $I'_{12}$  è dimezzata rispetto alla corrente  $I_{12}$  del caso sferico:

$$R'_{12} = \frac{\eta}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$R_{1\infty} = \frac{\eta}{2\pi r_1} = R_T$$

$$V_1 - V(r) = \frac{\eta}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) I'_{12}$$

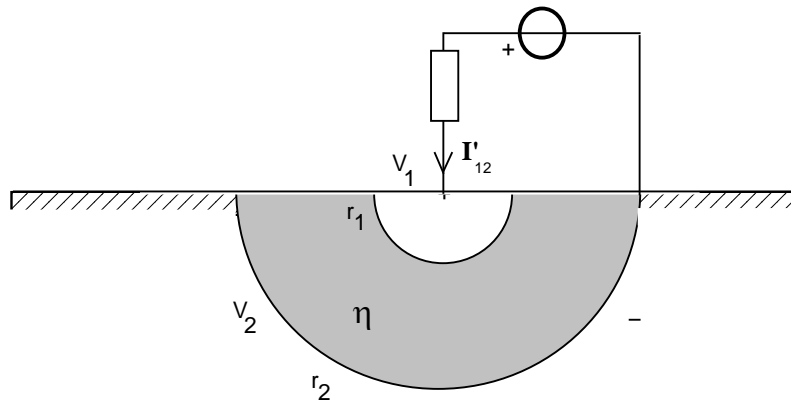


fig.I.5

Per  $r_2$  tendente a valori infinitamente grandi (generatore "lontano"), si ha la configurazione del *dispersore di terra emisferico* (fig.I.5), in intimo contatto con il terreno, che può essere inserito in un *Impianto di terra*.

In condizioni di perdita accidentale dell'isolamento tra un conduttore della linea di alimentazione di una apparecchiatura e la carcassa metallica dell'involucro della stessa, il collegamento linea - involucro - persona - terreno, richiudendosi sul generatore, può essere interessato da corrente. La tensione  $V_{AB}$  applicata al corpo umano<sup>17</sup> (fig.I.6) viene chiamata in questo caso *tensione di contatto*.

<sup>17</sup>La resistenza equivalente del corpo umano dipende dai punti di contatto, dallo stato del contatto - es. mani e piedi bagnati o isolati - e da condizioni soggettive (0,5- 3kΩ)

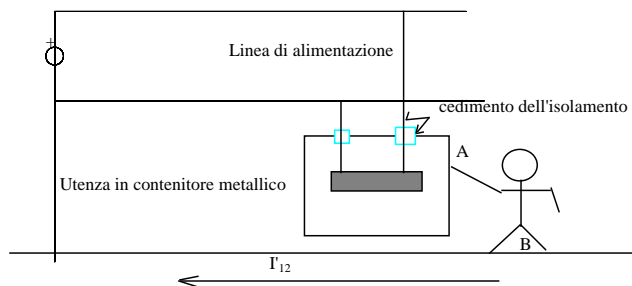
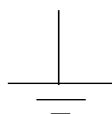


fig.I.6

Per limitare drasticamente i valori della tensione di contatto (in modo che sia  $< 50V$ , tensione di sicurezza), si costruiscono gli impianti di terra collegando al dispersore tutte le masse metalliche esistenti nell'area interessata.

Il collegamento ad un dispersore di terra viene indicato con il simbolo



In presenza dell'impianto di terra, la tensione di contatto è estremamente ridotta, in quanto il corpo umano si trova, in prima approssimazione, in "parallelo", rispetto al generatore, al "ramo" contenente il dispersore ; la corrente  $I'$ , a patto di una buona progettazione e manutenzione dell'impianto di terra, può diventare trascurabile rispetto alla corrente di  $I'$  di guasto (per il cui valore deve essere opportunamente progettato l'intervento degli interruttori di protezione) (fig.I.7).

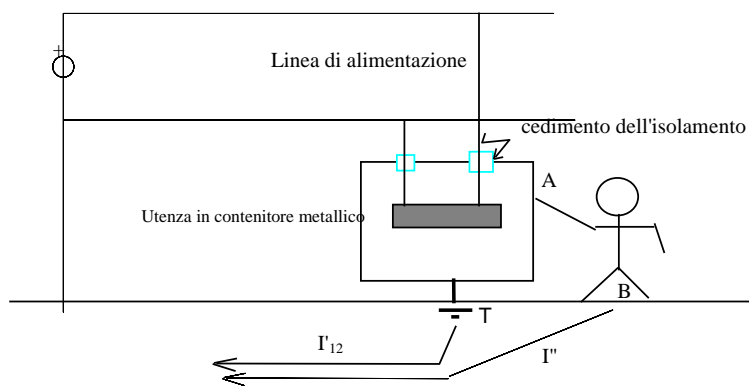


fig.I.7

Per il dimensionamento del dispersore, occorre conoscere la massima corrente di guasto verso terra (dipendente dall'impianto e dagli organi di interruzione)  $I'_{12M}$ ; la *resistenza di terra* del dispersore deve essere quindi, cautelativamente,

$$R_T = R'_{1\infty} = \frac{\eta}{2\pi r_1} < \frac{50}{I'_{12M}}$$

Il valore richiesto sarà tanto più facilmente realizzabile quanto più conduttivo è il terreno ( $\eta$  varia da 30-200  $\Omega\text{m}$  per i terreni argillosi ad oltre 1000  $\Omega\text{m}$  per i terreni rocciosi) e quanto minore è la corrente massima di guasto che determina l'intervento della protezione.

Tuttavia, la presenza dei dispersori comporta una insidia: in prossimità degli stessi occorre controllare la **tensione di passo**, ossia la massima tensione che può stabilirsi tra due punti del corpo umano poggiati al suolo (tipicamente tra i due piedi di una persona che cammina nei dintorni del dispersore) (fig.I.8). Anche la tensione di passo deve essere inferiore a 50 V.

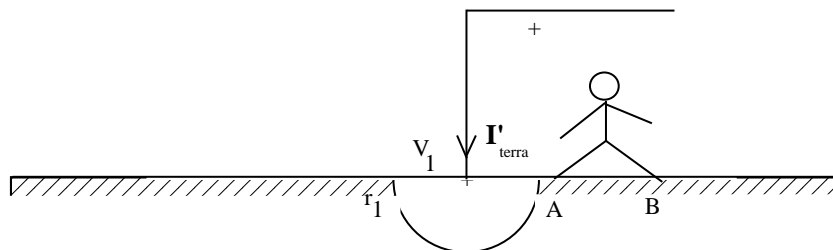


fig.I.8

La tensione di passo (indicando con  $p$  la distanza di un passo, tipicamente pari a 1m) vale

$$V_1 - V(r_1 + p) = \frac{\eta}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + p} \right) I_{12} = R_T I_{12} \left( 1 - \frac{r_1}{r_1 + p} \right) = R_T I_{12} \left( \frac{p}{r_1 + p} \right)$$

ed è quindi opportuno, per sicurezza, spesso ritenerla pari alla tensione

$$V_{1\infty} = R_T I'_{12}$$

considerando che vi sono casi di "passi" più lunghi quali quelli dei grossi quadrupedi o comunque di appoggi a distanza maggiore del passo ordinario.

A partire dal dispersore sferico, potranno essere individuati modelli di funzionamento di dispersori puntuali o lineari. Si può quindi rapidamente pervenire al modello di funzionamento del *paletto di terra* o "puntazza", il più diffuso tipo di dispersore [5, Cap.I,§7].

Un paletto di diametro  $d$  infisso per una profondità  $h$  può essere assimilato ad un semiellissoide di rotazione (fig.I.9);

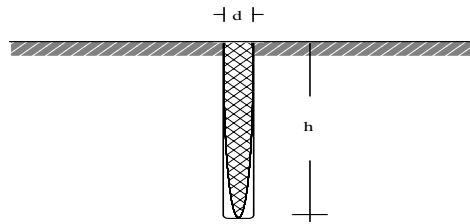


fig.I.9

il corrispondente valore della resistenza di terra può essere valutato come [5,cap I,§7]:

$$R_{T\text{elliss}} = \frac{\eta}{2\pi h} \ln \frac{4h}{d}$$

Altri tipi di dispersori usati nelle cabine elettriche o nei laboratori di prove elettriche sono a rete o a lastra interrata.

### §I.10.5 Geometria cilindrica (mezzo omogeneo) – Cavo coassiale

Nel caso di simmetria cilindrica, potremo sviluppare considerazioni analoghe al caso sferico. Se consideriamo due cilindri coassiali, a potenziali fissati (ad es. collegati ad un generatore di f.e.m. ideale), con interposto un mezzo a resistività  $\eta$ , il campo elettrico (e quello di corrente) non potrà che essere dipendente solo dalla coordinata assiale e a componente solo radiale (ogni altra componente determinerebbe una circuitazione non nulla del campo elettrico in una regione priva di campo impresso).

Si potrà definire una resistenza equivalente

$$R_{12} = \frac{V_1 - V_2}{I_{12}} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \eta \mathbf{J}(r) \cdot \mathbf{t} dr}{\iint_{\Sigma(r)} \mathbf{J}(r) \cdot \mathbf{n} d\Sigma} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \eta \frac{I_{12}}{2\pi r l} dr}{I_{12}} = \frac{\eta}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Il potenziale all'aumentare di  $r$  varia con legge logaritmica, il campo con legge iperbolica:

$$V_1 - V(r) = \frac{\eta}{2\pi l} I_{12} \ln \frac{r}{r_1}; E(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{\eta}{2\pi l} \frac{I_{12}}{r} = \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Il campo elettrico massimo si trova in prossimità dell'elettrodo interno

$$E_{\text{max}} = E(r_1) = -\frac{dV}{dr} \Big|_{r_1} = \frac{\eta}{2\pi l} \frac{I_{12}}{r_1} = \frac{V_1 - V_2}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Il valore minimo del campo massimo, come si può facilmente controllare, si ha per  $r_1=r_2/e$ . Il campo massimo vale

$$E_{\max}|_{r_2=er_1} = \frac{V_1 - V_2}{r_1} = \frac{V_1 - V_2}{r_2 - r_1} \frac{r_2 - r}{r_1} = \frac{V_1 - V_2}{r_2 - r_1} (e - 1)$$

Nelle migliori condizioni quindi, il campo ha un valore massimo che è circa il 70% in più del campo uniforme a parità di distanza elettrodica. In altri termini, le sollecitazioni sul materiale (anche dal punto di vista termico), sono sensibilmente non uniformi anche nel caso di configurazione elettrodica ottimale.

### §I.10.5.1 - Resistenza di isolamento e capacità di un cavo coassiale

La *resistenza di isolamento* di un cavo coassiale per unità di lunghezza, per  $\eta=10^{13} \Omega\text{m}$ , presenta i seguenti valori per unità di lunghezza al variare del rapporto dei raggi:

$\frac{r_2}{r_1}$	2	5	10	20	50	100
$R_l$ [M $\Omega$ ]	1100	2600	3700	4800	6200	7300

La misura di questi valori così elevati di resistenza richiede metodi di misura particolari, con *megaohmmetri* (alimentazione a 500-1000 V) o di metodi *balistici* (cioè determinando la costante di tempo di carica del cavo in esame).

Inoltre, per l'analogia che si è detta in precedenza potrà essere valutata la *capacità* del cavo

$$C_{12} = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_2}{V_2 - V_1} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

La *capacità* di un cavo coassiale per unità di lunghezza, per  $\epsilon=\epsilon_0$ , presenta i seguenti valori per unità di lunghezza al variare del rapporto dei raggi:

$\frac{r_2}{r_1}$	1.6	1.8	2	2.5	3.0	4.0	5.0
$C/l$ [nF/km]	118.	94.6	80.2	60.7	50.6	40.1	34.6



### §I.10.5.2 Ottimizzazione del peso di un cavo coassiale

Assegnata la tensione di esercizio di un cavo ed il valore limite  $E^*$  del campo elettrico, ci si chiede quale rapporto  $x=r_2/r_1$  ci debba essere tra i raggi del cavo perché lo stesso abbia il minimo peso (dell'isolante; il dimensionamento del conduttore centrale è guidato essenzialmente da considerazioni di tipo termico).

Detto  $p$  il peso specifico dell'isolante, il peso per unità di lunghezza sarà

$$P = p_s \pi (r_2^2 - r_1^2) = p_s \pi r_2^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$E^* = E(r_1) = \frac{V_1 - V_2}{r_1 \ln x} = \frac{(V_1 - V_2)x}{r_2 \ln x} \rightarrow r_2 = \frac{(V_1 - V_2)x}{E^* \ln x}$$

$$P = p_s \pi (r_2^2 - r_1^2) = p_s \pi \frac{(V_1 - V_2)^2 x^2}{E^{*2} \ln^2 x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \left[ p_s \pi \frac{(V_1 - V_2)^2}{E^{*2}} \right] \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x}$$

La condizione di ottimo può essere ottenuta dalla condizione

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x} \right) = 0 \rightarrow 2x \ln^2 x - \frac{2(x^2 - 1) \ln x}{x} = 0 \rightarrow x^2 (\ln x - 1) + 1 = 0 \rightarrow \ln \left( \frac{x}{e} \right) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2} = \ln \left( \frac{e}{x} \right)$$

tale relazione è significativa con  $x$  appartenente all'intervallo (aperto) (1,e) ed ammette (a parte la soluzione impraticabile  $x=1$ ) la soluzione  $x=2,22$ , ossia il raggio interno è più piccolo del raggio esterno di un fattore 2,22 (e non 2,71 come prima mostrato).

Dalla condizione sul campo massimo si ricavano i valori di progetto dei raggi:

$$E^* = \frac{V_1 - V_2}{r_1 \ln x} \rightarrow r_{1opt} = \frac{V_1 - V_2}{E^* \ln 2,22} \rightarrow r_{2opt} = 2,22 r_{1opt}$$

### §I.10.6 Monospira

Si consideri ad esempio una struttura tubolare tagliata lateralmente ed alimentata lato taglio (fig.I.10). Si suppone che la struttura abbia resistività uniforme  $\eta$ , sia immersa in un mezzo isolante perfetto, e sia alimentata tramite due elettrodi conduttori perfetti ad assetto radiale, separati di un piccolo angolo  $\Delta\alpha$ ; il problema risulta ben posto.

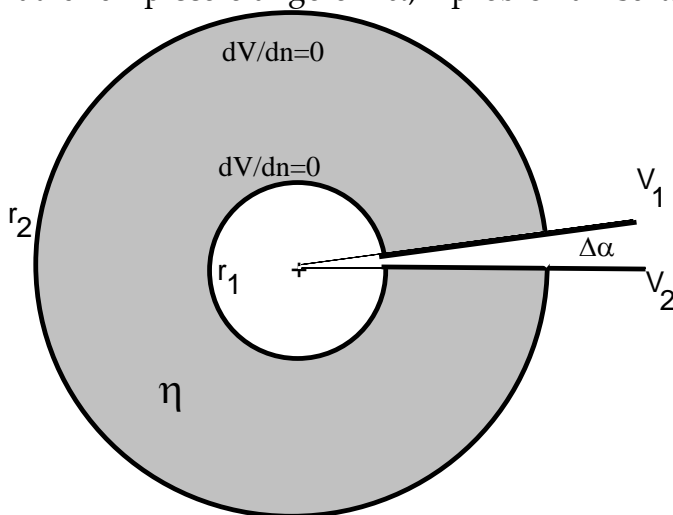


fig.I.10

In questo caso le linee di campo saranno circolari. La resistenza equivalente agli elettrodi vale

$$R_{12} = \frac{V_1 - V_2}{I_{12}} = \frac{\int_0^{2\pi - \Delta\alpha} \mathbf{E} \cdot \mathbf{1}_\varphi r d\varphi}{\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{1}_\varphi (l dr)} = \frac{E_\varphi(r) r (2\pi - \Delta\alpha)}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{E_\varphi(r)}{\eta} l dr} = \frac{V_1 - V_2}{(V_1 - V_2) \left( \frac{l}{\eta(2\pi - \Delta\alpha)} \right) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}} = \frac{\eta(2\pi - \Delta\alpha)}{l \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

## §I.11 Soluzioni analitiche generali dell'equazione di Laplace

Si è osservato che la soluzione di una equazione di Poisson in dominio limitato con assegnate condizioni al contorno può essere ricondotta ad una equazione di Laplace con condizioni al contorno opportunamente modificate. In questo modo si può utilizzare il notevole studio analitico condotto sull'equazione di Laplace.

Una funzione  $V(P)$  che soddisfa l'equazione di Laplace viene detta **armonica**. Ad esempio la funzione  $V(x,y,z)=ax+by+cz$  è armonica.

### §I.11.1 Principali proprietà delle funzioni armoniche

- il valore che una funzione armonica assume in un punto è pari alla media dei valori assunti su una sfera di raggio qualsiasi centrata nel punto (*teorema della media*)
- una funzione armonica in un dominio **non presenta massimi e minimi** all'interno del dominio; essi quindi vanno cercati sulla frontiera;
  - una funzione armonica definita all'interno [esterno] di una frontiera su cui sono assegnati i valori, è **univocamente determinata** al suo interno [esterno, se regolare all'infinito] (Dirichlet); è determinata univocamente a meno di una costante se si assegna sulla frontiera la derivata normale (Neumann).

### §I.11.2 Rappresentazione dei campi armonici

I campi vettoriali vengono normalmente rappresentati dalle "linee di forza" tanto più ravvicinate quanto più intenso è il campo (convenzione di Faraday). Una linea di forza è una linea orientata ed ha la proprietà che per ogni punto in cui il campo non sia nullo o infinito passa una linea la cui tangente ha la stessa direzione e verso del campo e quindi del gradiente di potenziale.

In un campo armonico, le *superfici equipotenziali* sono caratterizzate dal valore del potenziale e dal fatto che il campo (il gradiente) è ad esso ortogonale. I *tubi di flusso* sono porzioni di spazio caratterizzati dal fatto che in ogni punto della parete del tubo il campo è tangente e per ogni punto della parete passa una linea di flusso; se si considerano due sezioni trasversali del tubo di flusso con due riferimenti congruenti, il tubo può essere caratterizzato dal *valore del flusso* del campo attraverso una delle sezioni

e si può costruire una *funzione di flusso*; le superfici equiflusso saranno caratterizzate dallo stesso valore della funzione di flusso.

Superfici equipotenziali e superfici equiflusso sono in ogni punto *ortogonali* e quindi danno luogo ad un reticolo ortogonale. Date le proprietà di ortogonalità, le superfici dei due tipi possono essere scambiate.

La rappresentazione grafica di un campo avviene mediante il disegno di superfici equidistanziate per intervallo di potenziale e di funzione di flusso.

### § I.11.3 Metodi di risoluzione analitica dell'equazione di Laplace

Con metodi analitici possiamo pervenire ad una grande varietà di soluzioni e dare lo spunto nella progettazione di componenti ed impianti; queste soluzioni possono però essere generalmente utilizzate per la verifica del campo in domini irregolari di interesse applicativo.

Tra i metodi analitici si rimarcano i seguenti:

- 1) risoluzione diretta (casi di simmetrie semplici)
- 2) metodo di separazione delle variabili
- 3) metodo della funzione di Green
- 4) metodo delle funzioni analitiche e trasformazioni conformi
- 5) metodo di composizione

### §I.11.4 Risoluzione diretta (casi di simmetrie semplici)

Sono già stati esaminati (§I.10) i casi piani, cilindrici, sferici attraverso la osservazione che il laplaciano in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche nei tre casi era direttamente integrabile.

Occorre tuttavia fare qualche ulteriore considerazione:

- a) per il caso piano è cilindrico è stato necessario considerare un sottodominio limitato con condizioni al contorno fondate sulle simmetrie; la presenza di sorgenti all'infinito non consentirebbe infatti di considerare il problema ben posto richiedendosi per tale condizione la regolarità ovunque all'infinito;
- b) nel caso piano, mantenendo fissa la densità di carica  $\sigma$  sui due piani e variando la distanza (e quindi la tensione), potremo vedere l'insieme come un doppio strato di carica (a distanza infinitesima) o come un singolo strato di carica (con l'altro a distanza infinita); per quest'ultimo caso saremo in presenza di un salto del modulo del campo  $\mathbf{D}$  pari a l valore assoluto di  $\sigma$ ;

- c) nel caso cilindrico e sferico, il laplaciano presenta una singolarità per  $r$  tendente a zero, per cui, in presenza di cariche lineari o puntiformi, occorrerebbe considerare intorno ad esse un volumetto piccolo ma non infinitesimo in cui le stesse cariche possano vedersi “polverizzate”;
- d) nel caso cilindrico, l’aumento del raggio esterno (a parità di tensione applicata) non comporta significative diminuzioni del campo in prossimità dell’elettrodo interno; se poi si manda all’infinito l’elettrodo esterno, lasciando quello interno a potenziale  $V$ , il potenziale all’infinito va come il logaritmo naturale di  $r$ , quindi all’infinito; la condizione di regolarità all’infinito (lungo una direzione radiale) è assicurata dal fatto che il modulo del campo va a zero come  $1/r$ .

### §I.11.5 Metodo della separazione delle variabili

Tale metodo si presta alla soluzione di problemi di Laplace bi- e tridimensionali in geometria cartesiana, cilindrica e sferica. Per semplicità esso viene illustrato con riferimento alla soluzione del problema rappresentato in fig.I.11. Si tratta di un condotto a sezione rettangolare di lunghezza infinita nella direzione dell'asse  $z$ ; la presenza dei gap isolanti assicura la funzionalità elettrica del sistema nonché la compatibilità delle condizioni al contorno.

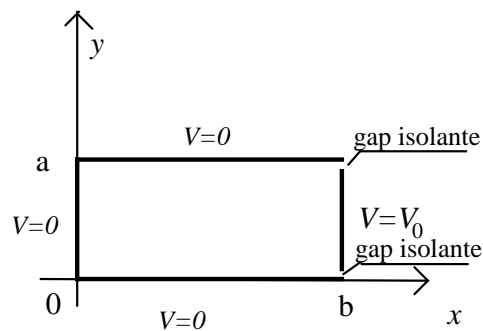


fig.I.11

Il problema è descritto da un'equazione di Laplace bidimensionale (infatti la struttura si ripete indefinitamente lungo  $z$ ) in coordinate cartesiane

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (I.26)$$

e dalle seguenti condizioni al contorno:

$$V(x, y) = 0 \quad 0 \leq x \leq b, y = 0 \quad (\text{I.27a})$$

$$V(x, y) = 0 \quad x = 0, 0 \leq y \leq a \quad (\text{I.27b})$$

$$V(x, y) = 0 \quad 0 \leq x \leq b, y = a \quad (\text{I.27c})$$

$$V(x, y) = V_0 \quad x = b, 0 < y < a \quad (\text{I.27d})$$

Cerchiamo una soluzione del problema del tipo:

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (\text{I.28})$$

in cui il potenziale sia esprimibile come prodotto di una funzione della sola  $x$  e di una della sola  $y$ . Sostituendo la (I.28) nella (I.26)

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad (\text{I.29})$$

e dividendo per  $XY$  si ottiene:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \quad (\text{I.30})$$

ovvero:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \quad (\text{I.31})$$

Si osserva che in tale equazione affinché il primo membro, che è funzione della sola variabile  $x$ , risulti uguale al secondo, funzione della sola  $y$ , per ogni scelta  $(x,y)$  occorre che essi siano separatamente uguali ad una costante  $\lambda$ , detta costante di separazione.

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \quad (\text{I.32})$$

Risolvere la (5) risulta equivalente alla soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0 \\ Y'' + \lambda Y &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

Consideriamo ora la soluzione del sistema (I.33) in dipendenza del valore assunto dalla costante di separazione.

**Caso a:  $\lambda=0$**

In tal caso la seconda delle (I.33) diventa  $Y'' = 0 \Rightarrow Y(y) = Ay + B$  con le costanti da ricavare sulla base delle condizioni al contorno. Imponendo la (I.27a) e la (I.27c)

$$Y(y)\Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$Y(y)\Big|_{y=a} = 0 \quad Aa = 0 \Rightarrow A = 0$$

si ottiene la soluzione banale  $V(x, y) = X(x)Y(y) = 0$  che escludiamo per ipotesi.

**Caso b:  $\lambda < 0$**

In tal caso, ponendo  $\lambda = -a^2$ , la seconda delle (I.33) diventa

$$Y'' - a^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = Ae^{ay} + Be^{-ay}$$

con le costanti da ricavare sulla base delle condizioni al contorno. Imponendo ancora la (I.27a)

$$Y(y)\Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow Y(y) = 2A \sinh \alpha y$$

e la (I.27c)

$$Y(y)\Big|_{y=a} = 0 \Rightarrow 2A \sinh \alpha y\Big|_{y=a} = 0 \Rightarrow A = 0$$

si ottiene anche in questo caso la soluzione banale, essendo per ipotesi  $a \neq 0$ .

**Caso c:  $\lambda > 0$**

Dalla precedente discussione risulta pertanto evidente che l'unica possibilità è che risulti  $\lambda > 0$ .

Poniamo quindi  $\lambda = b^2$ . In tal caso la soluzione delle (I.33) risulta:

$$X'' - b^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$$

$$Y'' + \beta^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y$$

e quindi il potenziale sarà esprimibile come:

$$V(x, y) = X(x)Y(y) = \left( A e^{\beta x} + B e^{-\beta x} \right) \left( C \cos \beta y + D \sin \beta y \right) \quad (\text{I.34})$$

Le costanti di integrazione si ottengono imponendo le condizioni al contorno.

Per la (I.27a)

$$V(x, y) = \left( A e^{\beta x} + B e^{-\beta x} \right) \left( C \cos \beta y + D \sin \beta y \right) \Big|_{\forall x \in [0, b], y=0} = 0 \Rightarrow C = 0$$

e per la (I.27b)

$$V(x, y) = \left( A e^{\beta x} + B e^{-\beta x} \right) \left( D \sin \beta y \right) \Big|_{x=0, \forall y \in [0, a]} = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

e quindi

$$V(x, y) = A \left( e^{\beta x} - e^{-\beta x} \right) \left( D \sin \beta y \right) = A^* \sinh \beta x \cdot \sin \beta y$$

avendo posto  $A^* = 2AD$ . Imponiamo ora la (I.27c):

$$V(x, y) = A^* \sinh \beta x \cdot \sin \beta y \Big|_{\forall x \in [0, b], y=a} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

in quanto è esclusa la soluzione  $A^*=0$  al fine di non ricadere nella soluzione banale; notiamo, inoltre, che  $n \neq 0$  poichè  $\beta \neq 0$ . I valori calcolati di  $\beta$  vengono detti autovalori e le funzioni corrispondenti autofunzioni.

$$V_n(x, y) = A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \quad (\text{I.35})$$

Rimane a questo punto da imporre la quarta condizione al contorno (I.27d):

$$V(x, y) = A^* \sinh \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \Big|_{x=b, \forall y \in [0, a]} = V_0 \quad (\text{I.36})$$



Risulta evidente che tale equazione non può essere soddisfatta  $\forall y \in [0, a]$ . Osserviamo peraltro che utilizzando il metodo della separazione delle variabili siamo riusciti a soddisfare tre delle quattro condizioni al contorno e che a causa della linearità della equazione di Laplace si può applicare la sovrapposizione degli effetti. Se le autofunzioni (I.35) sono soluzioni della eq. di Laplace anche la combinazione lineare:

$$V(x, y) = c_1 V_1(x, y) + c_2 V_2(x, y) + \dots + c_n V_n(x, y)$$

con  $c_1, c_2, c_n$  costanti arbitrarie, risulterà soluzione della (I.26). E' lecito, pertanto, ricercare una soluzione del tipo:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \quad (I.37)$$

in cui le costanti  $c_n A_n^*$  vanno determinate sulla base della condizione al contorno (I.27d). In particolare si ha:

$$V(x = b, y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a} b \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \quad (I.38)$$

Al fine di soddisfare questa condizione consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier della funzione rappresentata graficamente in fig. I.12: si tratta di un'onda rettangolare di ampiezza  $V_0$  e periodo  $2a$ . Osserviamo che questa funzione assume il valore pari a  $V_0$  nell'intervallo di interesse pari ad  $a$ .

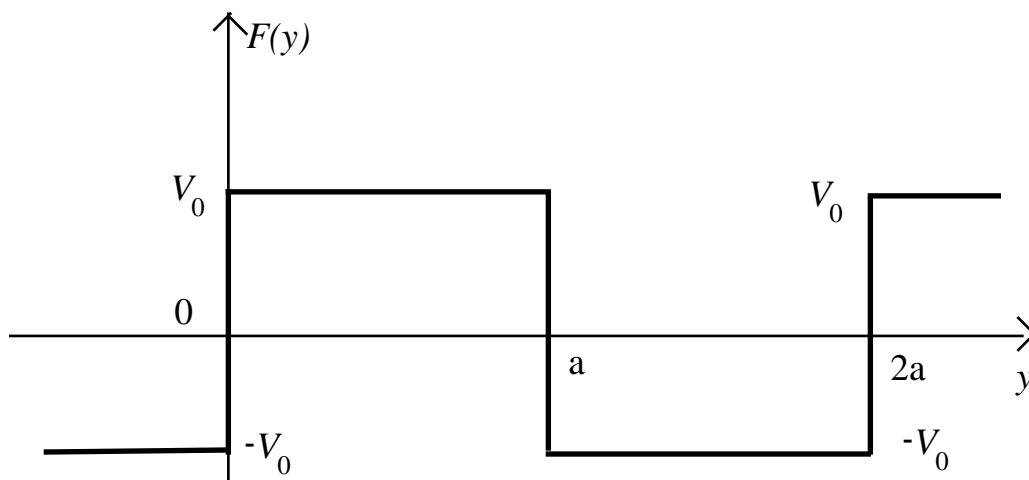


fig. I.12

E' facile mostrare che questa funzione, per le sue caratteristiche di simmetria, ammette uno sviluppo del tipo:

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T}\right) y \quad n \text{ dispari}, T = 2a \quad (\text{I.39})$$

con  $F(y) = V_0 \quad \forall y \in ]0, a[$  e

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & n = \text{dispari} \\ 0 & n = \text{pari} \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

Confrontando la (I.39) con la (I.38) si osserva che ponendo

$$\gamma_n = \frac{4V_0}{n\pi} = c_n A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a} b \quad n \text{ dispari} \quad (\text{I.41})$$

la condizione (I.27d) può essere soddisfatta. In definitiva la soluzione del problema potrà essere posta nella forma

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sinh \frac{n\pi}{a} b} \sinh \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \quad n \text{ dispari} \quad (\text{I.42})$$

In realtà, nella pratica, non sarà necessario considerare gli infiniti termini dello sviluppo in serie di armoniche ma già dopo pochi termini si otterrà una stima sufficientemente precisa del potenziale all'interno della struttura. In particolare, nelle figg. I.13 e I.14 sono riportati i risultati di due elaborazioni nelle quali sono state considerate rispettivamente 10 e 20 armoniche per un condotto avente  $a=5\text{cm}$  e  $b=10\text{cm}$  ed ipotizzando  $V_0=100\text{V}$ : sono rappresentate le curve equipotenziali con intervallo pari a 10V. Si nota che con 20 armoniche la condizione sul lato destro così come il potenziale all'interno del condotto risulti meglio soddisfatta rispetto al caso di 10 armoniche. Si nota inoltre in entrambi i casi che la zona interessata da una distribuzione di potenziale apprezzabile risulta limitata rispetto all'intera sezione del condotto.

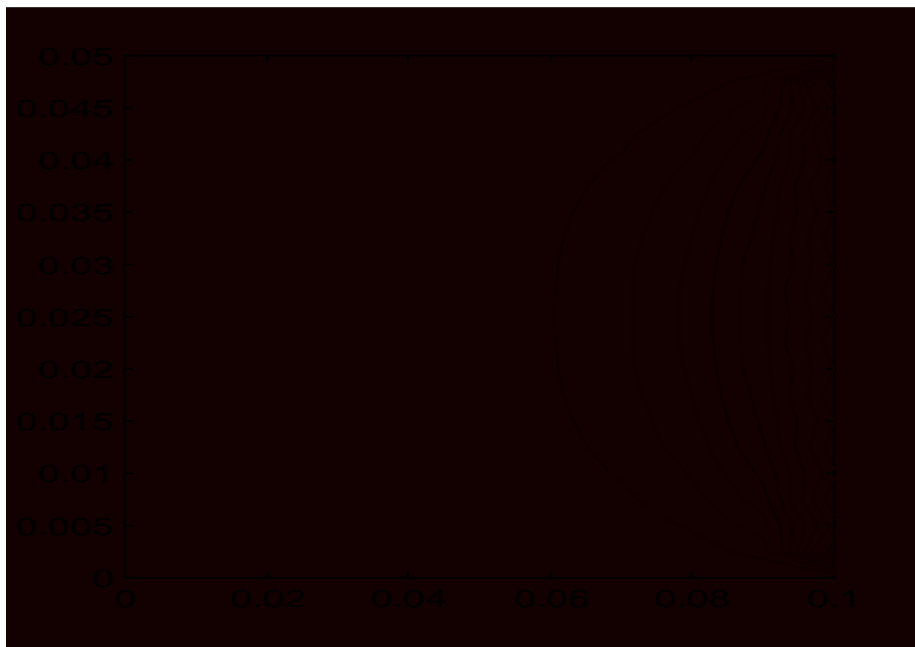


fig. I.13

N.armoniche=10; N. sudd. su asse x=10; N. sudd. su asse y=20;  $V_0=100V$ .

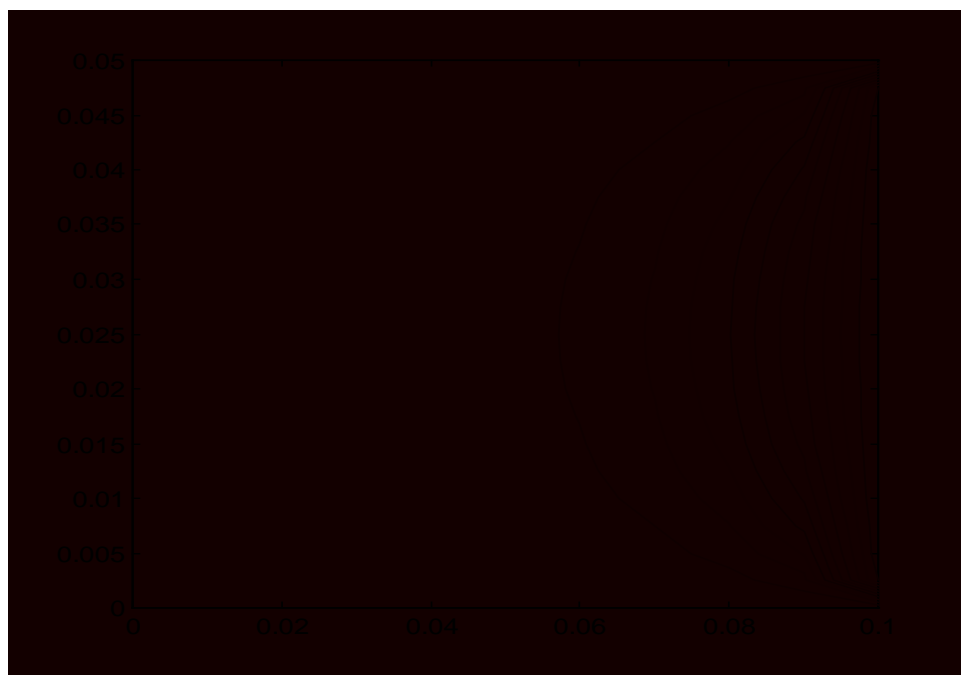


fig.I.14

N.armoniche=20; N. sudd. su asse x=10; N. sudd. su asse y=20;  $V_0=100V$ .

### §I.10.6 Metodo della funzione di Green<sup>(18)</sup>

Una soluzione analitica che è univocamente correlata ad dominio finito (generico) di interesse è la *funzione di Green*; trattasi della soluzione di una particolare equazione di Poisson nel dominio assegnato, che permette di determinare la soluzione dell'equazione di Laplace nello stesso dominio con qualsiasi condizione al contorno.

Consideriamo ora la funzione  $G_D(P,Q)$  che descriva la soluzione in termine di potenziale elettrico, *assegnato nullo sulla frontiera*, in ogni punto P interno al dominio D, individuando come sorgente una sola carica puntiforme in Q, di valore q=1.

Il laplaciano di tale funzione in D potrà essere presentato come

$$\nabla^2 G_D(P,Q) = -\frac{\delta(P-Q)}{\epsilon}$$

dove  $\delta(P-Q)$  rappresenta la funzione impulsiva unitaria centrata in Q, nulla per  $P \neq Q$ ; per ogni volume  $\Delta\tau$  contenente Q, si ha invece

$$\iiint_{\Delta\tau} \delta(P-Q) d\tau = 1$$

Si avrà allora

$$\iiint_{\Delta\tau} \nabla^2 G_D d\tau = -\iiint_{\Delta\tau} \frac{\rho}{\epsilon} d\tau = -\frac{1}{\epsilon} \iiint_{\Delta\tau} \delta(P-Q) d\tau = -\frac{1}{\epsilon}$$

Infatti, il laplaciano in un punto è pari alla densità di carica  $\rho$  in quel punto, divisa per  $\epsilon$ ; nel nostro caso

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(P) = 0 \text{ per } P \neq Q \\ \iiint_{\Delta\tau_Q} \rho(P) d\tau_Q = 1 \text{ per ogni intorno di } Q \end{array} \right.$$

<sup>18</sup> Dall'Analisi Matematica si ricordano i *lemmi di Green*

$$\psi \nabla^2 \varphi = \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) - \nabla \psi \cdot \nabla \varphi$$

$$\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi)$$

Ed i *teoremi di Green* (conversione da integrali di volume a integrali di superficie)

$$\iiint_{\Delta\tau} (\psi \nabla^2 \varphi - \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) d\tau = \iint_{\Sigma} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\Sigma$$

$$\iiint_{\Delta\tau} (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) d\tau = \iint_{\Sigma} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Sigma$$

Se le due funzioni ( $\psi$ ) e ( $\varphi$ ), per  $r$  tendente all'infinito, tendono a zero come  $1/r$  e le derivate normali come  $1/r^2$ , le due funzioni si dicono *normali* all'infinito

La funzione  $G_D(P,Q)$ , detta *funzione di Green*, è quindi la soluzione in termini di potenziale di un particolare problema di Poisson: sorgente puntiforme in un punto (generico)  $Q$ , di valore  $q=1 \cdot \varepsilon$  e potenziale nullo sul contorno di  $D$ .

Incidentalmente, i valori della derivata normale sul contorno di  $D$  della  $G_D$  devono, per il teorema della divergenza, soddisfare la condizione:

$$\iiint_{\Delta \tau} \nabla^2 G_D d\tau = -\frac{1}{\varepsilon} = \iiint_{\Delta \tau} \nabla \cdot \nabla G_D d\tau = \oiint_{\Sigma} \frac{dG_D}{dn} d\Sigma$$

essendo  $\Sigma$  la frontiera di  $D$  (*condizione integrale sul gradiente*).

La conoscenza della funzione di Green, in particolare i valori della derivata normale sulla frontiera, permette di risolvere un qualsiasi problema di Laplace ( $\nabla^2 V=0$ ) con valori del potenziale  $V$  assegnati sulla frontiera (problema di Dirichlet). Infatti, applicando a  $G_D(P,Q)$  ed a  $V(P)$  l'identità di Green, si ha

$$\iiint_{\Delta \tau} (V \nabla^2 G_D - G_D \nabla^2 V) d\tau = \oiint_{\Sigma} V \Big|_{\Sigma} \frac{dG_D}{dn} d\Sigma$$

essendo  $G_D$  nulla sulla frontiera. Poiché il laplaciano di  $G_D(P,Q)$  è nullo dappertutto tranne che in  $Q$  e  $V$  è una funzione regolare nell'intorno di  $Q$ <sup>19</sup>, sarà

$$\iiint_{\Delta \tau} (V \nabla^2 G_D - G_D \nabla^2 V) d\tau = \iiint_{\Delta \tau} V \nabla^2 G_D d\tau \cong V(Q) \iiint_{\Delta \tau} \nabla^2 G_D d\tau = V(Q) \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right)$$

e, di conseguenza,

$$V(Q) = -\varepsilon \oiint_{\Sigma} V \Big|_{\Sigma} \frac{dG_D}{dn} d\Sigma$$

Il valore del potenziale in un punto generico  $Q$  interno a  $D$  si otterrà pesando sulla frontiera i valori assegnati del potenziale con i valori della derivata normale della funzione di Green sulla frontiera, con sorgente in  $Q$ .

Resta ovviamente aperto il problema della determinazione della funzione di Green, risolto analiticamente solo in pochi casi. In generale, si dovrà ricorrere a tecniche numeriche.

<sup>19</sup> Occorre considerare che anche  $G_D$  è integrabile in ogni intorno limitato di  $Q$ .

### §I.11.7 Metodo delle funzioni analitiche - trasformazioni conformi (casi piani)

Si consideri una arbitraria coppia ordinata di numeri reali, ossia un punto  $P(x,y)$  arbitrario su un piano cartesiano. Essa può essere indicata anche con la ordinaria notazione dei numeri complessi ( $z=x+jy$ ) ed essere interpretata come variabile indipendente di una *funzione di variabile complessa*

$$f(z)=f(x,y)=f(x+jy)=u(x,y)+jv(x,y)$$

dove  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$  rappresentano la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria della funzione  $f(z)$ .

Se  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$  soddisfano alle cosiddette condizioni di ortogonalità (Cauchy-Riemann) e al teorema di Schwartz sulle derivate miste, le funzioni  $u$  e  $v$  sono armoniche.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \nabla^2 v = 0$$

In tal caso  $f(z)$  viene chiamata analitica od olomorfa. Lo studio delle funzioni olomorfe viene notevolmente approfondito anche per metodologie generali di tipo teorico ed applicativo.

Qui basta l'osservazione che sia  $u(x,y)$  che  $v(x,y)$  sono soluzioni dell'equazione di Laplace, quindi possono rappresentare una funzione potenziale e la sua "ortogonale" funzione di flusso o viceversa.

Quale primo esempio, consideriamo la funzione

$$f(z) = (x + jy)^2 \rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2; v(x, y) = 2xy \quad (I.43)$$

Si controlla immediatamente che sono soddisfatte le condizioni di ortogonalità e quindi che  $f(z)$  è olomorfa. La funzione  $u(x,y)$  [ $v(x,y)$ ] può essere interpretata come potenziale bidimensionale (replicato per piani paralleli) e la funzione  $v(x,y)$  [ $u(x,y)$ ] come funzione di flusso.

Si nota subito che le curve (tracce delle superfici) equipotenziali e le linee (superfici) di flusso sono famiglie di iperboli ortogonali.

Questa considerazione ci consente di avere immediatamente la mappa dei potenziali e del campo elettrico in regioni delimitate da *spigoli diedri ad angolo retto*, immaginando che due semiasse coordinati siano la traccia di un cassone metallico a potenziale di riferimento e che un elettrodo in tensione abbia una sagoma iperbolica.

Se si considera la funzione olomorfa

$$f(z) = (x + jy)^n$$

potremo considerare il campo negli *spigoli diedri formanti un angolo di  $\pi/n$* .

Lo studio delle funzioni analitiche ci consente quindi di disegnare un numero notevole di soluzioni analitiche dell'equazione di Laplace, accettando però le condizioni al contorno compatibili con la soluzione stessa. Ma v'è dell'altro.

Senza voler ulteriormente richiamare la teoria delle funzioni complessa, si può osservare, nella (I.43) una possibile "trasformazione" delle rette ortogonali  $x=\text{costante}$  e  $y=\text{costante}$  nelle curve ortogonali  $u=\text{cost}$  e  $v=\text{cost}$ . Questa trasformazione è conforme perché mantiene l'ortogonalità e permette di far corrispondere ad un dominio sul piano  $(x,y)$  un dominio sul piano  $(u,v)$  con le stesse proprietà formali. Nell'esempio proposto, possiamo far corrispondere ad un condensatore definito da due piani paralleli ( $x=x_1$  ed  $x=x_2$ ) del piano  $z$  un condensatore del piano  $w(u,v)$  ad elettrodi iperbolici o a spigoli.

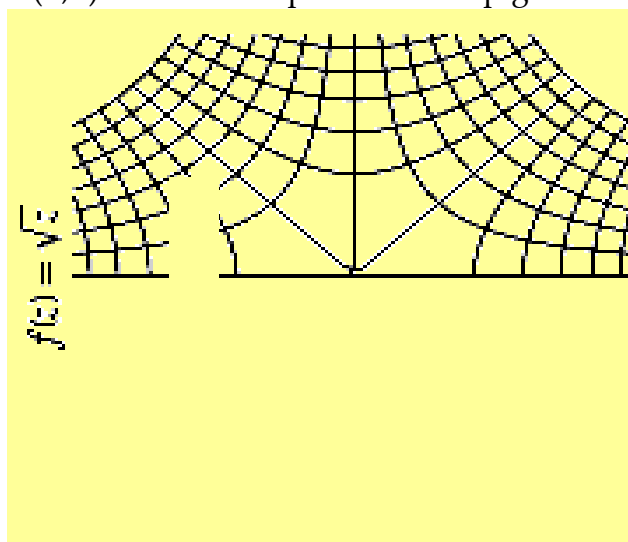


fig.I.15

Lo studio delle "trasformazioni conformi" ha portato a numerosissime mappe di campo di grande suggestione accademica, ma non sempre di interesse strettamente progettuale.

Le trasformazioni conformi più significative sono le seguenti (fig.I.16):

Lineare  $z(w) = Aw + B$  *Traslazione e ripiegamento*

Reciproca  $z(w) = C/w$  *Inversione (famiglie di cerchi: dipolo rettilineo, linea bifilare)*

Quadratica  $z(w) = Cw^2$  *corrispondenza tra rete cartesiana e rete di iperboli*

Potenza inversa  $z(w) = C\sqrt{w}$  corrisp. tra rete cartesiana e rete di parabole

Logaritmica  $z(w) = C \ln w$  corrisp. tra una rete polare ed una cartesiana

Trigonometrica  $z(w) = C \sin w^2$  sorgenti multiple

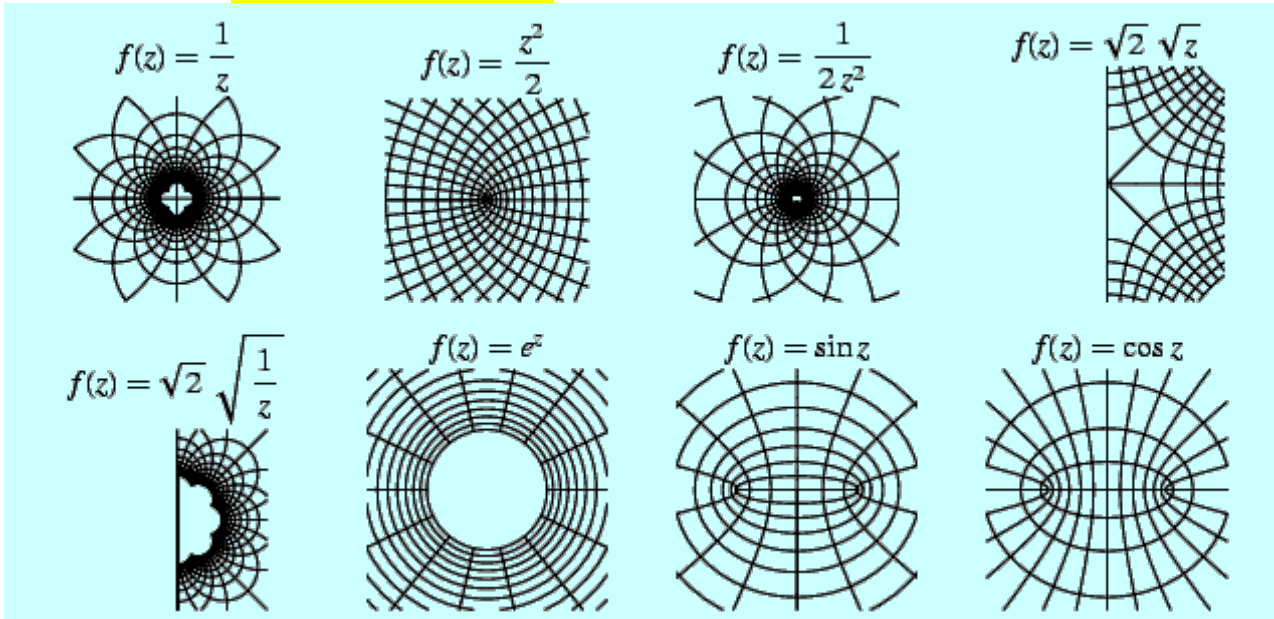


fig.I.16

Una trasformazione conforme di significativa portata è quella di Maxwell, che trasforma le equipotenziali ed equiflusso di un tradizionale condensatore piano indefinito nel piano  $w$  nelle equipotenziali ed equiflusso di un condensatore finito del piano  $z$  (fig.I.17) attraverso la relazione

$$z(w) = \frac{d}{\pi} (w + 1 + e^w) \quad (\text{I.44})$$

dove  $2d$  è la distanza interelettrica. Separando le parti reale ed immaginaria

$$x = \frac{d}{\pi} (u + 1 + e^u \cos v) \quad y = \frac{d}{\pi} (v + e^u \sin v) \quad (\text{I.45})$$

I valori del potenziale  $v$  variano tra  $0$  e  $\pi$ . Per  $v=0$  si ha  $y=0$  e  $x = \frac{d}{\pi} (u + 1 + e^u)$  assume

tutti i valori, al variare di  $u$ ; per  $v=\pi$ ,  $y=d$  e  $x = \frac{d}{\pi} (u + 1 - e^u)$  assume valori non positivi ed è nullo per  $u=0$ . Per valori intermedi di  $v$ , si possono valutare le posizioni delle altre superfici equipotenziali.



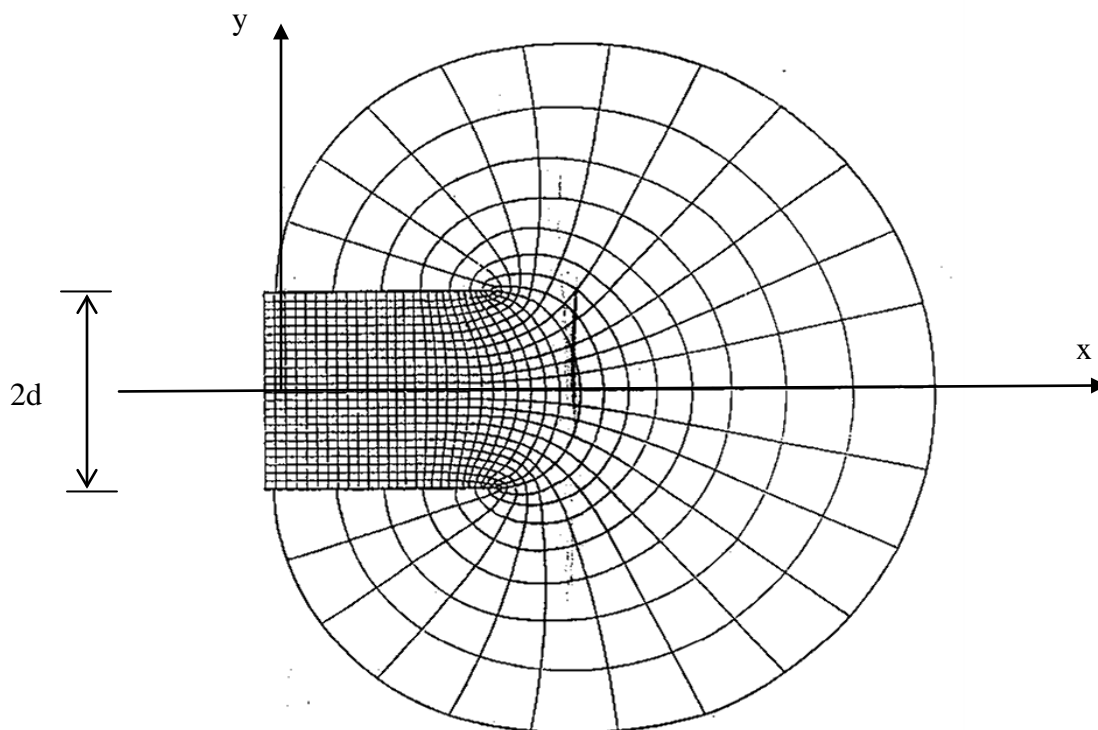


fig.I.17

Rogowski (1923) ha mostrato che il campo elettrico in corrispondenza della superficie equipotenziale  $v=\pi/2$  non è mai superiore al campo uniforme al centro. Quindi se si costruisce un elettrodo di sagoma corrispondente a quello della superficie equipotenziale “di Rogowski”, non si verificano fenomeni di scarica o ionizzazione dovuti ai bordi.

Infatti, il calcolo del gradiente e quindi dell’intensità del campo lungo una equipotenziale può essere condotto in ogni punto “muovendosi” lungo una equiflusso. Su può valutare lo spostamento infinitesimo  $ds$  lungo una linea equiflusso ( $u=\text{costante}$ ) come

$$dx = -\frac{d}{\pi}(e^u \sin v)dv \quad dy = \frac{d}{\pi}(1 + e^u \cos v)dv$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{d}{\pi}\sqrt{1 + e^{2u} + 2e^u \cos v} dv$$

Poiché  $\pi/d$  rappresenta il campo  $E_0$  “uniforme” nel gap lontano dal bordo (corrispondente ad  $u \rightarrow -\infty$ ), l’andamento del modulo del campo lungo una equipotenziale è descritto da

$$\frac{1}{E_0} \frac{dv}{ds} \Big|_{v=\text{cost}} = \frac{E(u)}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2u} + 2e^u \cos v}}$$

Comunque si segua una linea di campo ( $u=\text{costante}$ ), il campo elettrico sarà massimo quando il denominatore è minimo, ossia quando

$$\frac{\partial}{\partial u} (1 + e^{2u} + 2e^u \cos v) = 0 = 2e^{2u} + 2e^u \cos v \Rightarrow e^u = -\cos v;$$

poiché  $e^u$  è sempre positivo, dovrà essere

$$v > \frac{\pi}{2}$$

Quindi lungo una linea a potenziali non superiori a  $\pi/2$ , non si incontreranno massimi: il campo non è mai superiore al valore "uniforme".

In particolare, per il valore del potenziale pari a  $\pi/2$  (**profilo di Rogowski**), si avrà

$$\frac{1}{E_0} \frac{dv}{ds} \Big|_{v=\pi/2} = \frac{E_{Rogowski}(u)}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2u}}}$$

Per  $v > \pi/2$ , si avrà un massimo del campo del campo in corrispondenza dell'equiflusso

$$u_M = \ln(-\cos v)$$

$$E_{\max} \Big|_{v > \frac{\pi}{2}} = E(u_M) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + e^{2\ln(-\cos v)} + 2e^{\ln(-\cos v)} \cos v}}$$

Per la rappresentazione del campo e l'individuazione del profilo di Rogowski può essere utilizzata la programmazione e grafica MATLAB (fig.I.18)

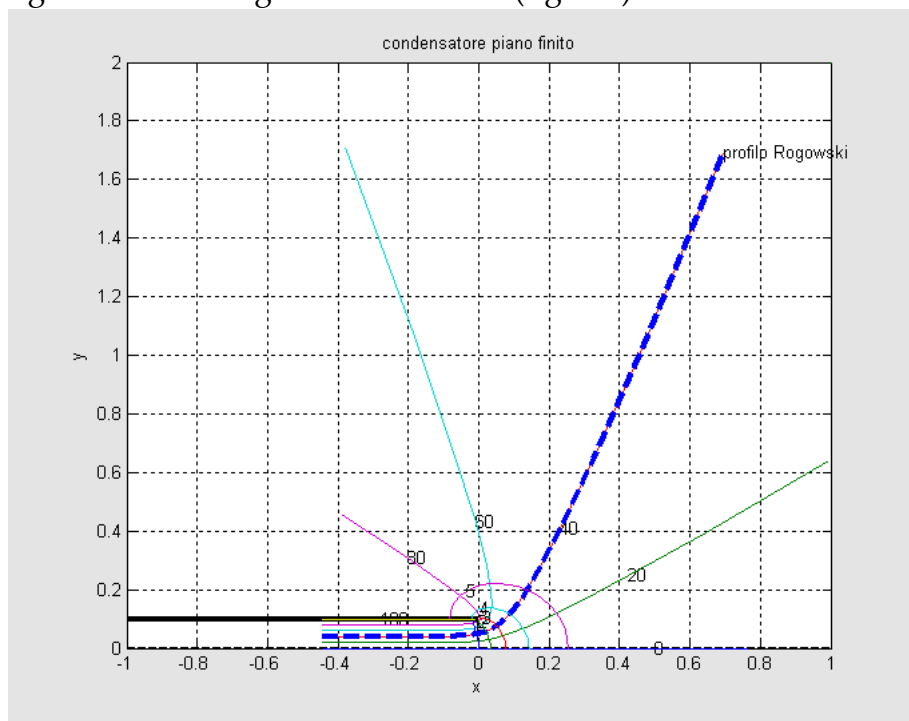


fig.I.18

### §I.10.8 Soluzioni per composizione (casi bi- e tridimensionali) - Immagini

Infinite soluzioni analitiche possono essere ottenute per combinazioni lineari di soluzioni note (il laplaciano è un operatore lineare).

#### Primo esempio : Sfera dielettrica ( $\epsilon_1$ ) in campo uniforme

Consideriamo la composizione di due soluzioni note del tipo

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = c_1 r \cos \alpha + c_2 \frac{\cos \alpha}{r^2}$$

(in cui si individua un campo lontano uniforme ed un campo vicino di tipo dipolare)

La deformazione di un campo uniforme in un mezzo a permittività  $\epsilon_1$  da parte di una particella o una bolla sferica di raggio  $R$  a permittività  $\epsilon_2$  potrebbe essere governato da un potenziale del tipo suddetto. Occorre a questo proposito considerare che la (1) deve valere sia per il volume occupato dalla particella che per il volume esterno, con le opportune condizioni di raccordo sul contorno  $\Sigma$  della particella

$$\varphi_{\text{int}} = c_{1\text{int}} r \cos \alpha + c_{2\text{int}} \frac{\cos \alpha}{r^2}; \varphi_{\text{ext}} = c_{\text{ext}1} r \cos \alpha + c_{2\text{ext}} \frac{\cos \alpha}{r^2}; \varphi_{\text{int}\Sigma} = \varphi_{\text{ext}\Sigma} \quad \left. \frac{\partial \varphi_{\text{int}}}{\partial n_{\text{int}}} \right|_{\Sigma} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left. \frac{\partial \varphi_{\text{ext}}}{\partial n_{\text{ext}}} \right|_{\Sigma}$$

Il potenziale, limitato sul bordo della sfera, deve risultare limitato all'interno in assenza di sorgenti ed inoltre il campo all'infinito sarà uniforme; quindi

$$c_{2\text{int}} = 0 \Rightarrow \varphi_{\text{int}} = c_{1\text{int}} r \cos \alpha$$

$$c_{\text{ext}1} = E_0 \Rightarrow \varphi_{\text{ext}} = E_0 r \cos \alpha + c_{2\text{ext}} \frac{\cos \alpha}{r^2}$$

$$\varphi_{\text{int}\Sigma} = \varphi_{\text{ext}\Sigma} \Rightarrow c_{1\text{int}} R \cos \alpha = E_0 R \cos \alpha + c_{2\text{ext}} \frac{\cos \alpha}{R^2}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_{\text{int}}}{\partial r_{\text{int}}} \right|_{\Sigma} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left. \frac{\partial \varphi_{\text{ext}}}{\partial r_{\text{ext}}} \right|_{\Sigma} \Rightarrow c_{1\text{int}} \cos \alpha = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left( E_0 \cos \alpha - 2c_{2\text{ext}} \frac{\cos \alpha}{R^3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_0 R \cos \alpha - 2c_{2\text{ext}} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\cos \alpha}{R^2} = E_0 R \cos \alpha + c_{2\text{ext}} \frac{\cos \alpha}{R^2}$$

$$\left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right) E_0 R \cos \alpha = c_{2\text{ext}} \left( 1 + 2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \frac{\cos \alpha}{R^2} \Rightarrow c_{2\text{ext}} = \frac{\left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right) E_0 R}{\left( 1 + 2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \frac{1}{R^2}} = \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0 R^3$$

$$c_{1\text{int}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left( E_0 - 2 \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0 R^3 \frac{1}{R^3} \right) = E_0 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left( 1 - 2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) = E_0 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left( \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right)$$

da cui

$$\varphi_{ext} = E_0 \cos \alpha \left[ r + \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right) \frac{R}{r^2} \right]$$

$$\varphi_{int} = E_0 \left( \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right) r \cos \alpha$$

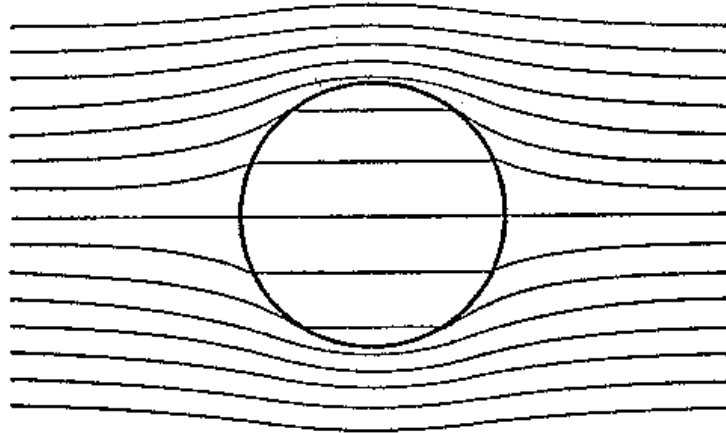


fig.I.19

Il campo all'interno della sfera è uniforme (fig.I.19) ed è circa tre volte maggiore del campo esterno se la permittività della sfera è nettamente minore di quella del mezzo circostante (caso della bolla gassosa in un liquido isolante: l'aumento del campo può portare ad una scarica parziale). Se invece la permittività della bolla è molto alta, il campo al suo interno è ridotto, mentre all'esterno è fino a tre volte più grande.

Bolle d'acqua in un olio isolante –es. in un condensatore per rifasamento, in un cavo, in un trasformatore, costituiscono “cortocircuiti dielettrici” che fanno aumentare la sollecitazione elettrica nell'olio; la pericolosità di bolle d'acqua in olio è inoltre notevolmente aggravata dalla deformabilità della bolla stessa

### Secondo Esempio: Cilindri paralleli (linea bifilare)

Se consideriamo la mappa del campo generato da un filo di diametro nullo con densità lineare di carica  $\lambda_1$  [C/m], essa sarà costituita da linee di campo radiali e da equipotenziali concentriche a mappa logaritmica. Considerata un'altra distribuzione lineare di carica  $\lambda_2$ , essa produrrà con la prima una mappa in cui le equipotenziali sono ancora cilindri, ma i loro assi non coincidono con i fili carichi (fig.I.20).

Se le due distribuzioni sono di pari valore e di segno opposto, le equipotenziali sono cilindri non coassiali simmetriche e per ogni punto passerà l'equipotenziale

$$V(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

dove  $r_1$  ed  $r_2$  sono le distanze del punto P dalle sorgenti lineari Poiché (fig.I.20) risulta

$$r_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2; r_2^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2$$

la superficie equipotenziale (cilindrica) sarà caratterizzata dalla relazione

$$V(P) = \text{costante} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = k \Rightarrow r_2^2 = k^2 r_1^2$$

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 = k^2 \left[\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right]$$

$$x^2 + y^2 + xd \frac{(1+k^2)}{(1-k^2)} + \frac{d^2}{4} = 0$$

Ogni equipotenziale sarà quindi associabile, sul piano x-y, ad una circonferenza di centro e raggio  $C_k = \left(-\frac{d}{2} \frac{(1+k^2)}{(1-k^2)}, 0\right)$ ;  $R_k|_{k<1} = \frac{kd}{1-k^2}$ ;  $R_k|_{k>1} = \frac{kd}{k^2-1}$ ; la superficie a potenziale nullo ( $k=0$ ) è caratterizzata da  $r_2=0$  ed  $r_1=d$ , ossia coincide col filo carico a sinistra in fig.I.20; la superficie per  $k$  tendente ad  $\infty$  tende al filo a destra; per  $k$  crescente nell'intervallo (0,1) la circonferenza sposta il suo centro verso l'infinito a sinistra e tende al piano centrale di simmetria, per  $k$  crescente nell'intervallo (1,  $\infty$ ) la circonferenza sposta il suo centro dall'infinito a destra fino al filo carico a destra.

La capacità di una linea bifilare (conduttori di raggio  $r$  molto più piccolo della distanza  $d$  tra di loro) di lunghezza  $L$  può essere quindi valutata "metallizzando" due superfici cilindriche equipotenziali A, B di raggio  $r$  situate intorno alle due distribuzioni di carica; la carica sui due conduttori vale  $Q_A = -Q_B = Q = \lambda L$  e la tensione tra le due linee vale

$$V_{AB} = V_A - V_B = V|_{r_1=r}^{r_2=d-r} - V|_{r_1=d-r}^{r_2=r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left( \ln \frac{d-r}{r} - \ln \frac{r}{d-r} \right) = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{d-r}{r} \cong \frac{Q}{\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{d}{r}$$

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{d}{r}}$$

Segue una tabella di valori della capacità per km di linea bifilare in aria al variare del rapporto  $d/r$ :

C/L [nF/km]	9,3	7,1	6,0	5,3	4,8	4,0
d/r	20	50	100	200	500	1000

In linea generale, assegnate le dimensioni dei due elettrodi cilindrici, la loro distanza ed i valori dei potenziali<sup>20</sup>, sarà possibile attraverso opportuni fattori di scala, pervenire alla distribuzione cercata.

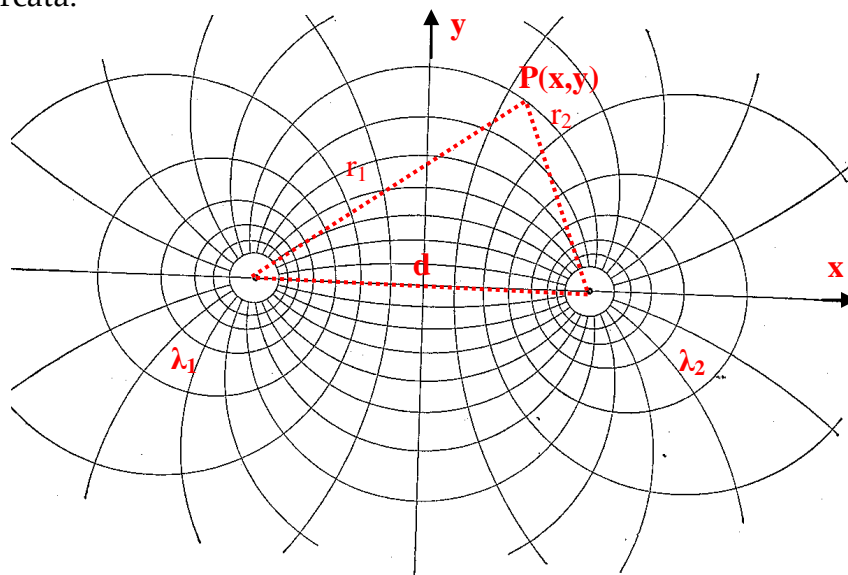


fig.I.20

**Terzo Esempio: cilindri eccentrici (anassiali).**

Anche in questo caso si può far riferimento alla linea bifilare, considerando solo uno dei due semipiani. Le equipotenziali attorno a ciascuna linea sono cilindri eccentrici (fig.I.21)

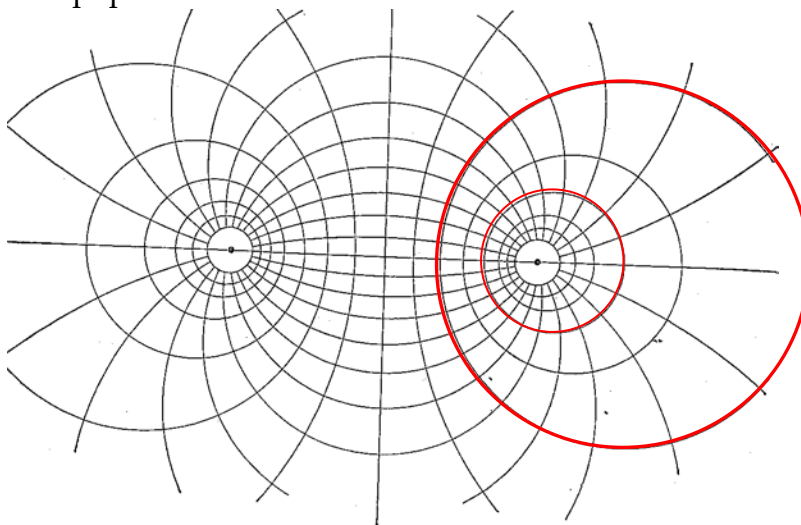


fig.I.21

**Quarto Esempio: due sfere isolate a diverso potenziale.**

Si procede come nell'esempio n.2, partendo dal campo creato da due cariche puntiformi

<sup>20</sup>se i valori dei potenziali sono uguali in modulo e di segno opposto, anche le distribuzioni di carica saranno uguali e di segno opposto: la mappa è simmetrica; se sono uguali in modulo e segno, il punto di simmetria della congiungente i centri sarà un punto di indifferenza (il campo è nullo).

Quinto Esempio: sfere eccentriche: si procede analogamente all'esempio n.3.

Sesto Esempio: cilindro-piano o sfera-piano (fig.I.22): si procede dall'esempio n.2, con gli opportuni fattori di scala.

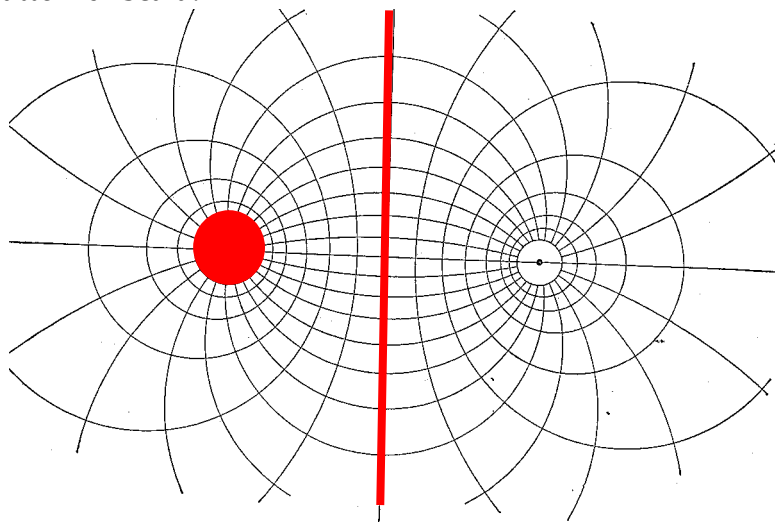


fig.I.22

Settimo esempio: ellissoidi di rotazione (da una distribuzione limitata di sorgenti lineari) e superfici coniugate iperboloidi di rotazione (distribuzioni semiillimitate di sorgenti lineari (fig.I.23). Si risolve integrando i contributi di sorgenti di lunghezza infinitesima (assimilati a sorgenti puntiformi).

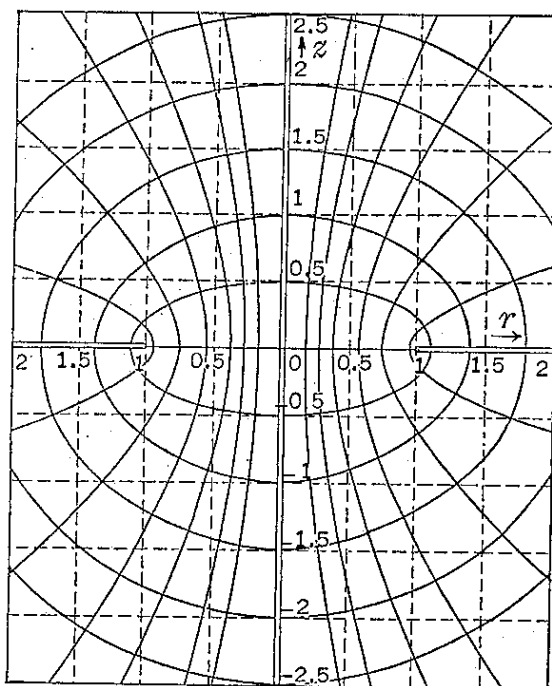
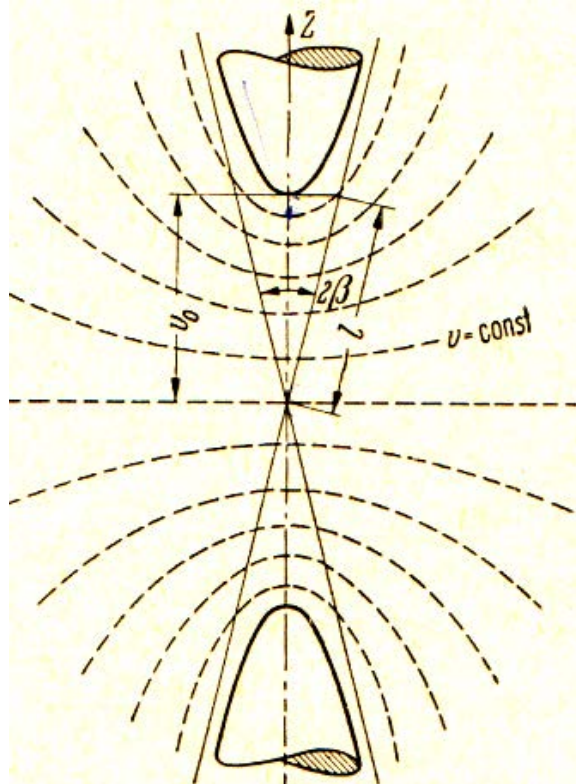


Fig.I.23

Ottavo esempio: anelli carichi;

Nono esempio: tubi limitati e cilindri concentrici (fig.I.24a);

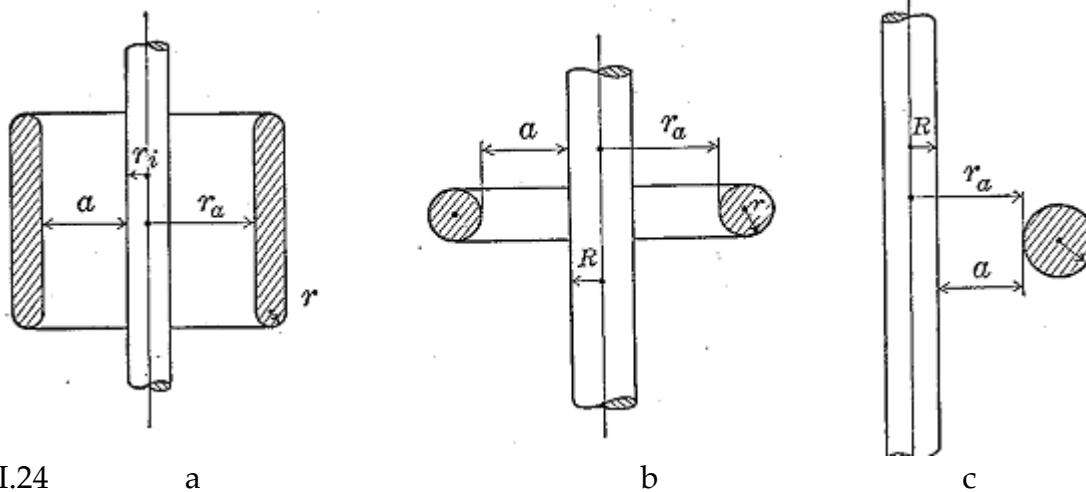


Fig.I.24

Decimo esempio: anelli e cilindri concentrici (fig.I.24b);

Undicesimo esempio cilindri incrociati (fig.I.24c).

Dodicesimo esempio: catenoidi per isolatori passanti (fig.I.25) (catenarie di rivoluzione, che sono profili a curvatura media costante e quindi a campo costante in prossimità del profilo)

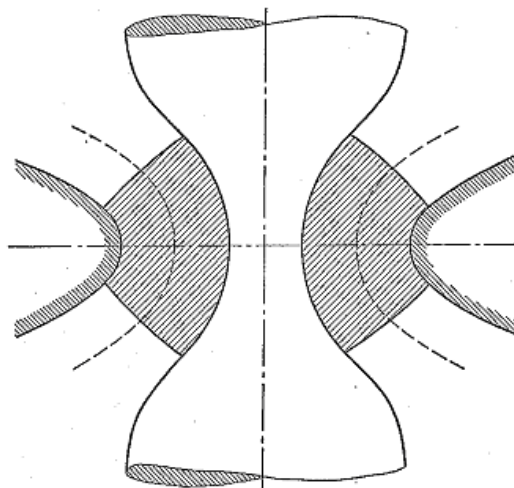


fig.I.24

Tredicesimo esempio: parabole confocali (fig.I.25); indicando con  $F_1$  e  $F_2$  le distanze focali dei due elettrodi a potenziali  $V_1=\phi_0$  e  $V_2=0$ , il modulo del campo lungo l'asse nello spazio tra le due parabole ha l'espressione



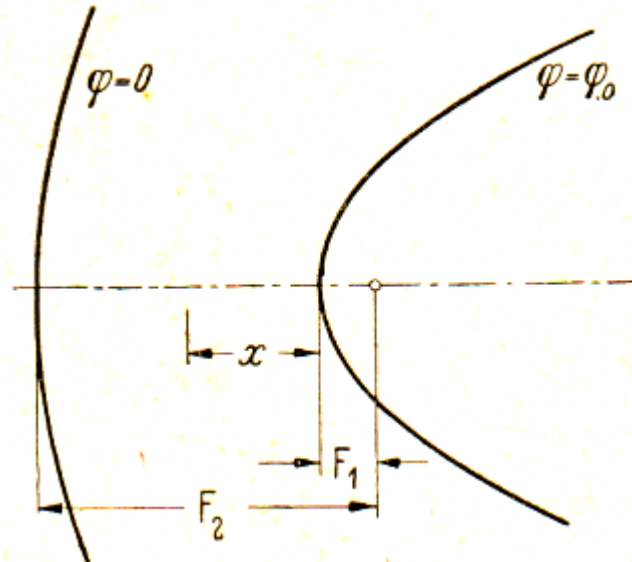


fig.I.25

$$E(x) = \left| \frac{|V_1 - V_2|}{(x + F_1) \cdot \ln(F_1 / F_2)} \right|$$

14) **lame sottili** contrapposte: con procedimento simile alla trasformazione di Maxwell per il condensatore finito, si può calcolare il campo tra due lame complanari contrapposte a distanza  $2d$ ; assumendo un'origine al centro del gap fra le due lame, a potenziali  $V_1$  e  $V_2$ , il modulo del campo ha l'espressione

$$E(x) = \frac{|V_1 - V_2|}{\pi d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2}}$$

### §I.12 Fattore di efficienza ( di Schwaiger [13])

Il rapporto  $\eta$  tra il campo medio ed in campo massimo in uno spazio interelettrodico viene indicato come fattore di **efficienza, di uniformità, di utilizzazione o di Schwaiger**; esso indica, a parità di distanza  $d$  tra i due elettrodi sottoposti a tensione  $V$ , se il materiale interposto è sollecitato “bene” cioè in modo abbastanza uniforme ( $\eta$  tendente a 1) o “male” in modo decisamente non uniforme ( $\eta$  tendente a zero).

Sono disponibili numerose tabelle indicanti il fattore di Schwaiger per configurazioni elettrodiche di interesse applicativo, sulla base del campo calcolato analiticamente.

Piano indefinito	Punta-punta
Sfere concentriche	Tubi e cilindri concentrici
Sfere eccentriche	Anelli e cilindri concentrici
Sfera-sfera	catenoidi
Sfera-piano	
Cilindri coassiali	
Cilindri paralleli	
Cilindri anassiali	
Cilindri incrociati	
Parabole confocali	
Iperboloide di rotazione -piano	

Sono considerati in genere due parametri geometrici:

$$p \quad (\text{gap/raggio})+1$$

$$q \quad (\text{raggio2/raggio1})$$

Ad esempio, nel cavo coassiale, il campo tra i due elettrodi segue una legge iperbolica ed è massimo in corrispondenza dell'elettrodo interno

$$E_{\max} = E(r_1) = \frac{V_1 - V_2}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

In questo caso ( $p=q$ ) il fattore di Schwaiger vale

$$\eta = \frac{E_{\text{medio}}}{E_{\max}} = \frac{V_1 - V_2}{r_2 - r_1} \frac{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}{V_1 - V_2} = \frac{r_1}{r_2 - r_1} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{p-1} \ln p$$

Per una valutazione qualitativa del fattore di Schwaiger si possono anche confrontare diverse configurazioni elettrodiche che, a parità di distanza (gap) e fissata la geometria di un elettrodo A dove il campo sia massimo (quindi  $p$ ), presentano capacità diverse; poiché, fissata la tensione applicata tra gli elettrodi, quindi fissato il campo medio, la capacità è proporzionale alla carica sull'elettrodo A e quindi al flusso del campo elettrico attraverso una superficie che circonda l'elettrodo A, il fattore di Schwaiger è

inversamente proporzionale alla capacità. Ad esempio se si confronta il campo di due sfere concentriche di raggio  $r_1, r_2=r_1+a$  e di due sfere spinterometriche di raggio  $r_1$  poste a distanza  $a$ , la capacità delle prime è maggiore delle seconde ed il campo risulta notevolmente più uniforme nel secondo caso (di qui l'utilizzazione diffusa di spinterometri a sfere). Considerazioni analoghe possono essere fatte nel confronto tra un cavo coassiale ed una linea bifilare.

UTILIZATION FACTORS  
(Geometric Characteristics:  $p = \frac{r+a}{r}; q = \frac{R}{r}$ )

	Structures with Cylinders											Structures with Spheres			
	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=5$	$q=10$	$q=20$	$q=\infty$	$q=3$	$q=5$	$q=10$	$q=20$	$q=p$	$q=1$	$q=\infty$	$q=p$
$p=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$p=1.5$	0.924	0.894	0.884	0.878	0.871	0.864	0.861	0.831	0.847	0.866	0.867	0.811	0.850	0.732	0.667
$p=2$	0.861	0.815	0.798	0.783	0.772	0.766	0.760	0.717	0.735	0.748	0.754	0.698	0.732	0.592	0.500
$p=3$	0.780	0.702	0.679	0.658	0.641	0.632	0.628	0.549	0.582	0.604	0.614	0.542	0.568	0.372	0.333
$p=4$	0.684	0.623	0.595	0.574	0.555	0.548	0.533	0.478	0.507	0.521	0.521	0.482	0.449	0.276	0.250
$p=5$	0.623	0.564	0.538	0.513	0.492	0.486	0.468	0.402	0.439	0.454	0.454	0.402	0.372	0.218	0.200
$p=6$	0.574	0.517	0.488	0.469	0.450	0.436	0.419	0.350	0.380	0.404	0.404	0.368	0.318	0.178	0.167
$p=7$	0.533	0.479	0.454	0.430	0.408	0.395	0.380	0.310	0.344	0.364	0.364	0.324	0.276	0.152	0.143
$p=8$	0.497	0.447	0.420	0.401	0.377	0.368	0.349	0.280	0.310	0.331	0.331	0.297	0.244	0.133	0.125
$p=9$	0.468	0.420	0.394	0.375	0.352	0.343	0.323	0.250	0.280	0.304	0.304	0.275	0.218	0.117	0.111
$p=10$	0.442	0.397	0.375	0.352	0.330	0.324	0.301	0.226	0.256	0.281	0.281	0.256	0.197	0.105	0.100
$p=15$	0.349	0.314	0.295	0.277	0.257	0.249	0.228	0.158	0.188	0.204	0.204	0.198	0.138		
$p=20$	0.291	0.263	0.248	0.232	0.214	0.202	0.186	0.158	0.168	0.168	0.168	0.168	0.158		

tab.S1 – fattore di Schwaiger per diverse configurazioni elettrodiche cilindriche e sferiche

COMPILATION OF THE MOST FAVORABLE CHARACTERISTICS  $p_0$ .  
 (Geometric Characteristics:  $p = \frac{r+a}{r} = \frac{R}{r}$ )

Constant value, dimensions	Structures using cylinders							Structures using spheres							
	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 5$	$q = 10$	$q = 20$	$q = \infty$	$q = 3$	$q = 5$	$q = 10$	$q = 20$	$q = p$	$q = 1$	$q = \infty$	$q = p$
$a + r$	3.6	3.4	3.2	3.1	3.1	3.0	3.0	2.75	2.75	2.75	2.8	2.718	2.5	2.0	2.0
$a + r + R$	4.8	5.7	6.3	7.5	9.5	12-13									
$a + r + 2R$	6.0	7.4	8.3	9.8	12.5	16-17	4.1								
$a + 2r$	4.8	4.6	4.4	4.3	4.2	4.1									
$a + 2r + R$	6.0	6.6	7.0	7.8	9.5	12-13									
$a + 2r + 2R$	6.9	8.2	9.0	10.5	13.0	16-17									
$a + R$	3.6	4.6	5.4	6.7	9.0	12-13									
$a + 2R$	4.8	6.7	7.7	9.3	12.0	16-17									

*Remarks.*—The first vertical column shows given constant dimensions for which is given the geometric constant for Maximum Puncture Voltage. With the enclosed cylinders and spheres only the important cases are given.  
 The utilization factor  $\eta$  for the values of  $p$  given in this table are found in Table D, also they are shown on Curve Sheets V to VIII.

**EXAMPLE**  
 Given: 2 adjacent cylinders.  
 Specified: 1.  $q = 3$ .  
 2. Spacing between the two outer rims  $(a + 2r + 2R) = 20$  cm.  
 Desired: 3. From Table E,  $p = q$ .  
 4. From Table D,  $\eta = 0.394$ .  
 From 1, 2, and 3, we find  $r = 1.25$ ,  $R = 3.75$ ,  $a = 10$  cm.

tab.S2 – fattore di Schwaiger per diverse configurazioni elettrode cilindriche e sferiche

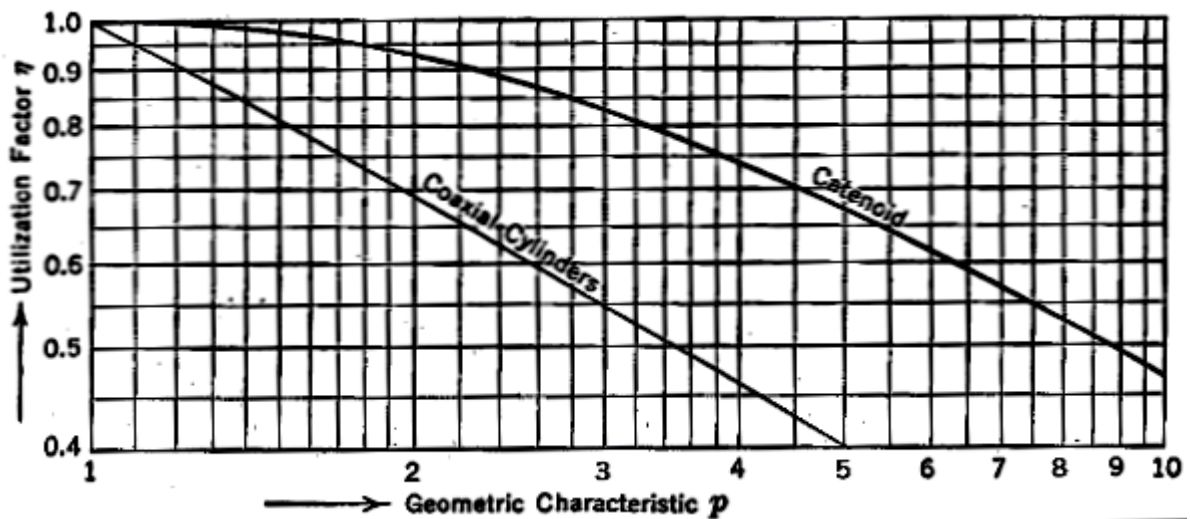


fig.I.26 - fattore di Schwaiger per diverse configurazioni elettrode cilindriche e catenoidi

## §I.13 Mezzi disomogenei

Si ricorda che su una superficie di discontinuità  $S$  tra due mezzi 1 e 2 di caratteristiche diverse, in cui si possa ipotizzare l'esistenza di una funzione potenziale scalare valgono le seguenti condizioni di raccordo (possono essere anche co-presenti):

fig.I.11.1

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow V_1(P)|_S = V_2(P)|_S$$

$$D_{2n} = D_{1n} + \sigma_S \Rightarrow \frac{\partial V_1}{\partial n_1}|_S = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\partial V_2}{\partial n_2}|_S + \frac{\sigma_S}{\epsilon_1}$$

$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \frac{\partial V_1}{\partial n_1}|_S = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\partial V_2}{\partial n_2}|_S$$

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n} \Rightarrow \frac{\partial \Psi_1}{\partial n_1}|_S = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial \Psi_2}{\partial n_2}|_S$$

$$H_{1t} = H_{2t} + J_{Sz} \Rightarrow B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t} - \mu_2 J_{sz}$$

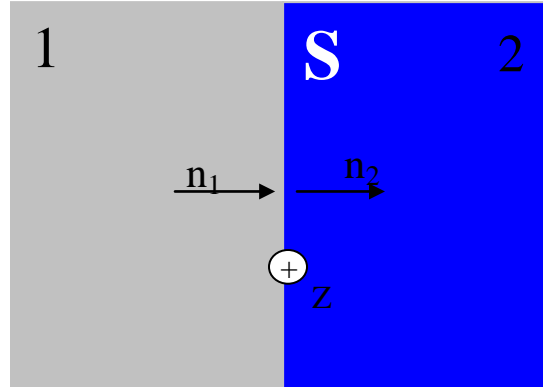


fig.I.27

In queste relazioni si è tenuto conto dell'eventuale presenza di una distribuzione di carica libera o di corrente libera sulla superficie discontinuità.

Come si può notare, le condizioni di raccordo possono essere di tipo Dirichlet o Neumann.

Se la funzione descrittiva della proprietà opportunamente continua e derivabile in tutto il dominio, il laplaciano del potenziale scalare dipende, come si è dal gradiente della caratteristica e dal campo, per cui non si può procedere direttamente, ma con metodi iterativi (vedi avanti: "soluzioni numeriche").

Seguono alcune considerazioni sui casi fondamentali.

### §I.13.1 Caso piano

Se la superficie  $S$  di separazione tra due dielettrici ideali è parallela agli elettrodi (piani e paralleli), la componente tangenziale del campo è nulla su  $S$ . Poiché la permittività dei gas è praticamente unitaria e comunque mai inferiore all'unità, la presenza di "strati" d'aria o di gas intrappolati in isolamenti solidi o liquidi determina al loro interno un valore di campo superiore a quello nel solido o nel liquido (nell'ipotesi di considerare nulla la carica su  $S$ ), con maggiore probabilità di superare valori critici e determinare fenomeni di scarica almeno parziali.

Se i due dielettrici sono reali, siamo in presenza di un campo "misto" (dielettrico e di corrente). In condizioni stazionarie, le condizioni di raccordo sono "imposte" dalla continuità della componente normale di  $\mathbf{J}$ , per cui dovrà tenersi conto della presenza di una distribuzione di **carica libera superficiale** pari a

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = (\varepsilon_1 \eta_1 - \varepsilon_2 \eta_2) J_n$$

nulla solo se i due materiali hanno lo stesso tempo di rilassamento<sup>21</sup>.

In condizioni non stazionarie questa condizione si complica per la presenza del termine dovuto alla corrente di spostamento<sup>22</sup>.

### §I.13.2 Caso cilindrico

Oltre alle considerazioni già svolte nel caso piano, osserviamo nel caso cilindrico quanto segue.

Se consideriamo due dielettrici perfetti coassiali di ugual spessore, il vettore D è radiale e continuo ed il suo modulo varia come

$$D(r) = \frac{|Q|}{2\pi r L} = \frac{C_{eq} \cdot |V_1 - V_2|}{2\pi r L}$$

Il campo elettrico sulle interfacce vale

$$E(r_1 +) = \frac{|Q|}{2\pi \varepsilon_1 r_1 L}$$

$$E(r_m -) = \frac{|Q|}{2\pi \varepsilon_1 r_m L}$$

$$E(r_m +) = \frac{|Q|}{2\pi \varepsilon_2 r_m L}$$

$$E(r_2 -) = \frac{|Q|}{2\pi \varepsilon_2 r_2 L}$$

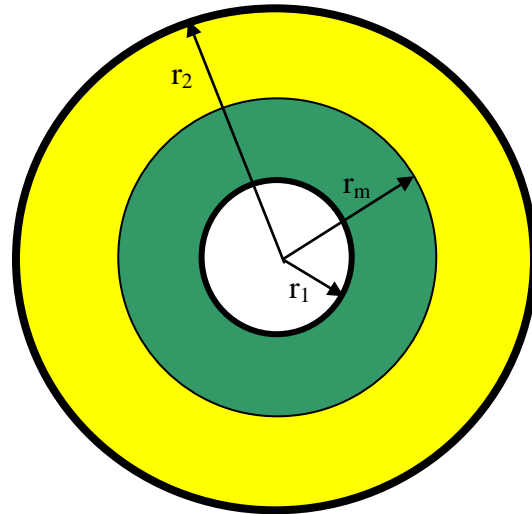


fig.I.28

Per far sì che il campo nel dielettrico esterno sia confrontabile con quello nel dielettrico interno, basterà scegliere i due dielettrici in modo che sia verificata la condizione:

<sup>21</sup> Condizione fortuita, per cui nella realtà occorre considerare sempre la presenza di una carica superficiale. Se uno dei due mezzi fosse un dielettrico perfetto, la densità di corrente stazionaria sarebbe ovunque nulla ed il campo elettrico nullo all'interno del dielettrico non perfetto. Questa circostanza deve essere tenuta presente, ad esempio, nella progettazione dei cavi in "corrente continua" (si dovrebbe dire: sottoposti a tensione costante): l'intera tensione potrebbe essere applicata agli strati di dielettrico "migliori", o addirittura ai sottili strati d'aria nelle intercapedini che diventano quindi inevitabilmente sede di scariche parziali e possono portare ad una progressiva distruzione del cavo.

<sup>22</sup> Nel caso di funzionamento in regime sinusoidale, all'aumentare della frequenza la densità di corrente di spostamento diventa sempre più importante rispetto alla corrente di conduzione, per cui, all'aumentare della frequenza, si riduce il valore massimo della carica sull'interfaccia. Per lo studio quantitativo può anche farsi riferimento alla serie di due bipoli RC parallelo.

$$E(r_1 +) = \frac{|Q|}{2\pi\epsilon_1 r_1 L} = E(r_m +) = \frac{|Q|}{2\pi\epsilon_2 r_m L}$$

$$\epsilon_1 r_1 = \epsilon_2 r_m$$

Occorrerà quindi scegliere il dielettrico più interno a permittività più elevata, in ragione inversa dei raggi.

Se si considera una molteplicità di strati coassiali (ad es. un cavo nastrato), basterà scegliere quindi materiali con permittività decrescenti verso l'esterno.

Si può arrivare in tal modo (a spese di una complicazione tecnologica) ad avere nel dielettrico di un cavo un campo praticamente uniforme

$$E(r) = \frac{|Q|}{2\pi\epsilon(r)rL} = \frac{|Q|}{2\pi\frac{\epsilon_1 r_1}{r}rL} \approx \frac{|Q|}{2\pi\epsilon_1 r_1 L} = \frac{|V_1 - V_2|}{r_2 - r_1} \Rightarrow C_{eq} = \frac{|Q|}{|V_1 - V_2|} = \frac{2\pi\epsilon_1 r_1 L}{r_2 - r_1}$$

partendo da un valore di  $\epsilon = \epsilon_1$  per il raggio minimo e diminuendo tale valore iperbolicamente fino a  $\epsilon_2 = \epsilon_1(r_2/r_1)$ .

### §I.13.3 Caso sferico

In questo caso, per ottenere una migliore distribuzione del campo, si può considerare la condizione

$$E(r_1 +) = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_1 r_1^2} = E(r_m +) = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_2 r_m^2}$$

$$\epsilon_1 r_1^2 = \epsilon_2 r_m^2$$

Occorrerà quindi scegliere il dielettrico più interno a permittività più elevata, in ragione inversa del quadrato dei raggi.

Si può arrivare in tal modo ad avere nel dielettrico di un condensatore sferico un campo praticamente uniforme

$$E(r) = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon(r)r^2} = \frac{|Q|}{4\pi\frac{\epsilon_1 r_1^2}{r^2}r^2} \approx \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_1 r_1^2} = \frac{|V_1 - V_2|}{r_2 - r_1} \Rightarrow C_{eq} = \frac{|Q|}{|V_1 - V_2|} = \frac{4\pi\epsilon_1 r_1^2}{r_2 - r_1}$$

partendo da un valore di  $\epsilon = \epsilon_1$  per il raggio minimo e diminuendo tale valore iperbolicamente fino a  $\epsilon_2 = \epsilon_1(r_2/r_1)^2$ .<sup>23</sup>

<sup>23</sup> Come ricaduta tecnologica si pensi al caso analogo del campo di corrente ed al dispersore emisferico. Scegliendo materiali (pastosi) con conducibilità più elevate nell'intorno dell'elettrodo, si può mitigare la disuniformità del campo al suolo e ricondurlo ad un valore di sicurezza inferiore a 50 V/m.

### §I.13.4 Il caso di mezzi ferromagnetici "ideali"

Sia  $\Sigma$  la superficie di separazione fra un materiale (1) caratterizzato da una permeabilità  $\mu_1$  ed un mezzo (2) di permeabilità  $\mu_2$  come schematicamente indicato in fig.I.29. Supponiamo che le due permeabilità siano legate da una relazione del tipo  $\mu_1 \gg \mu_2$ , come avviene, ad esempio, quando il materiale 1 è costituito da un materiale ferromagnetico e il mezzo 2 è l'aria ( $\mu_2 = \mu_0$ ). L'ipotesi che si considera consiste nel considerare  $\mu_1/\mu_2 \rightarrow \infty$ : tale ipotesi evidentemente non corrisponde ad alcuna situazione fisicamente realizzabile, ma può costituire una prima approssimazione per sistemi fisici di notevole interesse applicativo che comprendano materiali ferromagnetici. Noteremo inoltre che tale ipotesi consentirà di separare con successo lo studio del problema della soluzione del campo all'interno e all'esterno del materiale ferromagnetico.

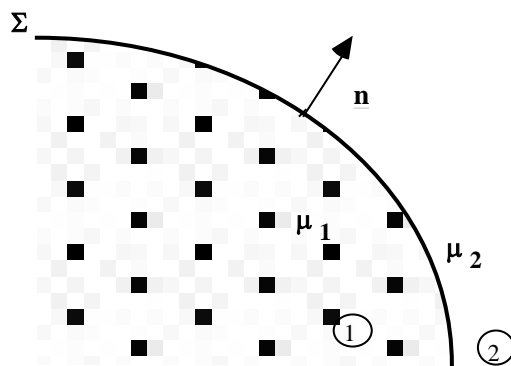


fig. I.29

Per studiare il comportamento del campo nel passaggio dal mezzo 1 al mezzo 2, cominciamo ad esaminare le due configurazioni di principio rappresentate in fig.I.30a e I.30b: in esse, O è la traccia di un conduttore filiforme rettilineo perpendicolare al piano del foglio, percorso da una corrente  $i$ . Nel caso (a), il mezzo a permeabilità infinita (che nel seguito per brevità sarà denominato "ferro") è costituito da una struttura toroidale interrotta in corrispondenza di un traferro di spessore  $2a$ ; nel caso (b), il mezzo a permeabilità infinita è costituito da un cilindro di raggio  $a$  con il conduttore percorso dalla corrente  $i$ .

Prima di esaminare gli andamenti dei campi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$ , in corrispondenza della superficie di separazione fra i due mezzi a permeabilità diverse, in generale risulta:

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}] = B_{n2} - B_{n1} = 0 \quad (I.45)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}] = \mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{J}^* \quad (I.46)$$



Si suppone, inoltre, che in questo caso sulla superficie di separazione non sia localizzata alcuna corrente superficiale libera, ovvero  $\mathbf{J}^*=0$ .

Le relazioni (I.45) e (I.46) possono essere riscritte nella forma seguente:

$$\mu_1 H_{n1} - \mu_2 H_{n2} = 0 \quad (I.47)$$

$$(B_{t1}/\mu_1) - (B_{t2}/\mu_2) = 0 \quad (I.48)$$

Per studiare le due situazioni sopra schematizzate imponiamo, inoltre, la condizione di regolarità all'infinito.

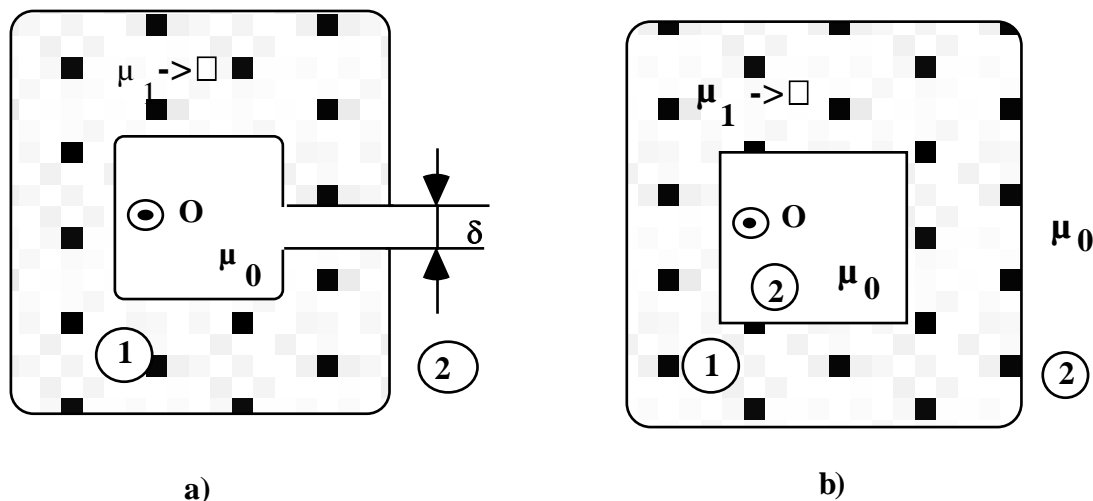


fig.I.30

### Caso (a)

Nell'aria il campo di induzione  $\mathbf{B}$  sarà senz'altro limitato; ne consegue che la componente normale di  $\mathbf{B}$ ,  $B_{n2}$ , risulta limitata (e quindi anche  $H_{n2}$ ); per la (1), anche la  $B_{n1}$  risulterà limitata e, data la caratteristica B-H del ferro, ne consegue che  $H_{n1}=0$ . In questa situazione osserviamo dunque che nel ferro il problema può essere studiato sulla base del seguente modello:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0 \end{aligned}$$

D'altra parte il ferro costituisce un dominio semplicemente connesso nel quale l'ipotesi di irrotazionalità di  $\mathbf{H}$  consente di introdurre un potenziale scalare, dal quale far discendere tale campo. Avremo cioè  $\mathbf{H} = \text{grad } \Psi$  e all'interno del ferro il problema risulta descritto da:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Psi &= 0 \\ H_{n1} &= \partial\Psi/\partial n_{1\Sigma} = 0 \end{aligned}$$

Si tratta dunque di risolvere un problema di Neumann la cui soluzione risulta peraltro banale. Infatti, su  $\Sigma$  risulta  $\Psi = \text{cost}$  che implica  $\Psi = \text{costante}$  all'interno e, di conseguenza,  $\mathbf{H} = \text{grad } \Psi = 0$  nel ferro. L'ipotesi  $\mu \rightarrow \infty$  dà, dunque, origine ad un problema che risulta formalmente simile a quello relativo alla determinazione del campo elettrico  $\mathbf{E}$  all'interno di un conduttore perfetto ( $\gamma \rightarrow \infty$ ).

La soluzione di questo problema consente inoltre di affrontare anche il problema esterno. Infatti, per la (I.46),  $H_{t1} = H_{t2} = 0$  e poichè  $B_{t2} = \mu_0 H_{t2}$  anche la componente tangente di  $\mathbf{B}$  nell'aria risulterà nulla. Ciò implica che il campo  $\mathbf{B}$  emerge perpendicolarmente da  $\Sigma$  nell'aria, dove le equazioni risultano:

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_{\text{lib}} \end{aligned}$$

con la condizione al contorno del tipo  $B_{t2} = 0$ .

Resta a questo punto da determinare l'andamento di  $\mathbf{B}$  all'interno del ferro. Tale ultimo problema può essere affrontato sulla base della conoscenza di  $\mathbf{B}$  ottenuto dalla soluzione di del problema esterno:

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

con la condizione al contorno del tipo  $B_{n1} = G(P)$ , con  $G(P)$  funzione di punto, ricavabile dalla soluzione del problema esterno.  $B_{t1}$  risulterà indeterminata (in ogni caso limitata o nulla) dovendo essere nulla la  $H_{t1}$ .

Una tabella riassuntiva servirà a chiarire gli andamenti delle componenti tangenti e normali di  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  per la configurazione in esame (Tabella I).

Un andamento qualitativo delle linee di  $\mathbf{B}$  all'interfaccia è quello rappresentato in fig. I.31.

Tabella I

	<b>Ferro (1)</b>	<b>Aria (2)</b>
$H_t$	0	0
$H_n$	0	Limitata
$B_t$	indeterminata	0
$B_n$	limitata	Limitata

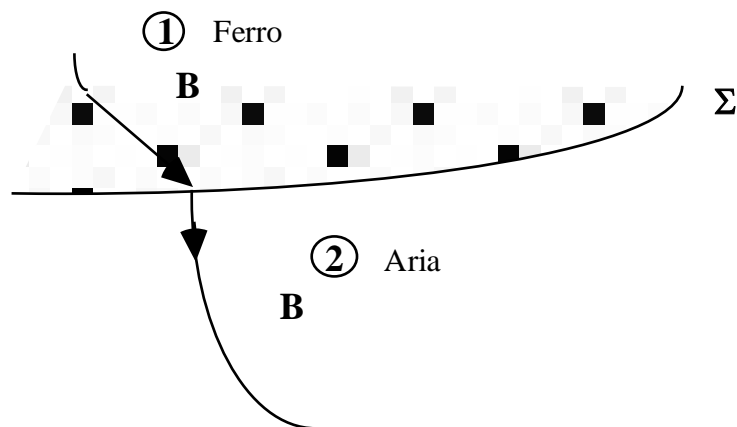


fig. I.31

**Caso b)**

Osserviamo che in questa configurazione, essendo il dominio non semplicemente connesso, non è possibile introdurre un potenziale scalare per il campo magnetico, che semplificherebbe considerevolmente l'analisi del problema. Notiamo, peraltro, che in applicazioni di notevole rilievo, come ad esempio nel caso del trasformatore, il dominio toroidale concatena una corrente nulla. Ciò consente di ritornare ad una situazione simile a quella descritta nel caso a). Una valutazione delle componenti dei campi **B** ed **H** può peraltro essere ottenuta sulla base delle seguenti considerazioni.

La componente tangente di **H** nell'aria,  $H_{t2}$ , si mantiene limitata su  $\Sigma$  dovendo soddisfare la legge di Ampère; si avrà, quindi che anche  $H_{t1}$ , per la (I.46), si manterrà limitata. Poichè  $\mu_1 \rightarrow \infty$ , essendo  $H_{t1}$  limitata, ne consegue che  $B_{t1}$  risulterà illimitata. La componente tangente di **B** nell'aria,  $B_{t2}$ , risulterà, invece, limitata ( $B_{t2} = \mu_0 H_{t2}$ ). Essendo **B** limitato nell'aria si mantiene limitata la sua componente normale  $B_{n2}$  che è continua all'interfaccia ( $B_{n2} = B_{n1}$ ): per la (I.47), risulta, dunque, nulla la componente normale  $H_{n1}$  nel ferro. Da queste posizioni discende, inoltre, che  $H_{n2}$  deve risultare limitata ( $H_{n2} = B_{n2} / \mu_0$ ). Le singole componenti dei campi **H** e **B** possono pertanto essere valutate secondo lo schema sintetico riportato nella Tabella II.

Tabella II

	Ferro (1)	Aria (2)
$H_t$	limitata	Limitata
$H_n$	0	Limitata
$B_t$	illimitata	Limitata
$B_n$	limitata	Limitata

Un andamento qualitativo delle linee di  $\mathbf{H}$  all'interfaccia è quello rappresentato in fig. I.32.

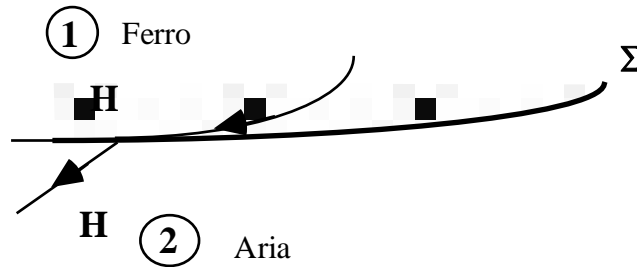


fig. I.32

La configurazione di fig. I.30a) è tipica delle applicazioni nelle quali è necessario poter disporre di un assegnato valore di campo di induzione magnetica nella regione del traferro (ad esempio negli elettromagneti).

La configurazione in cui il ferro ha struttura toroidale (del tipo di fig. I.30b) risulta, come già accennato, di notevole interesse nei casi in cui esso è concatenato con correnti uguali e opposte. In tali casi (si pensi ad esempio al caso del trasformatore), pur essendo il ferro completamente chiuso, in esso, il campo magnetico si mantiene nullo, dovendo rispettare la legge di Ampère.

## §I.14 Metodi numerici per la risoluzione dei campi [14]

### §I.14.1 Il metodo delle differenze finite (FDM)

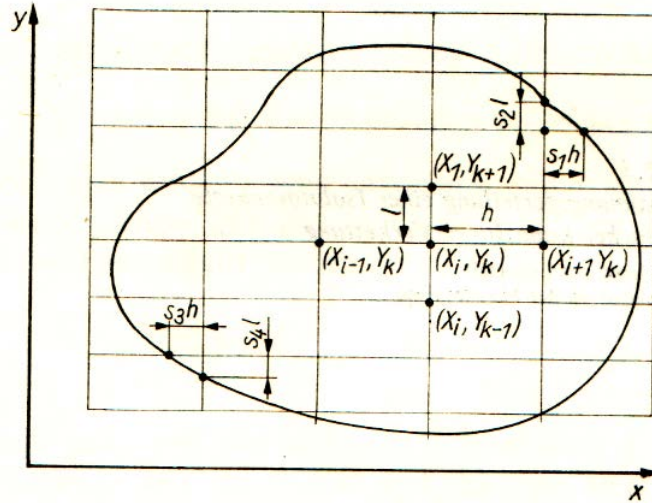


fig.I.33

Si considera una “discretizzazione” del dominio 2D in un reticolo rettangolare [3D in un reticolo parallelepipedico] di lati  $h=\Delta x$  ed  $l=\Delta y$  (fig.I.33). Si individuano  $N$  nodi interni e si riscrive l’equazione di Laplace-Poisson in ciascun “nodo”  $(x_i, y_k)$  interno del reticolo, considerando i lati sufficientemente piccoli da poter calcolare i valori del potenziale  $V(x, y)$  nei nodi adiacenti attraverso lo sviluppo in serie di Taylor:

$$V(x_{i+1}, y_k) = V(x_i, y_k) + h \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x_i, y_k} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x_i, y_k} + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{h^p}{p!} \frac{\partial^p V}{\partial x^p} \Big|_{x_i, y_k}$$

$$V(x_{i-1}, y_k) = V(x_i, y_k) - h \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x_i, y_k} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x_i, y_k} + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(-h)^p}{p!} \frac{\partial^p V}{\partial x^p} \Big|_{x_i, y_k}$$

$$V(x_i, y_{k+1}) = V(x_i, y_k) + l \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{x_i, y_k} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{x_i, y_k} + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{l^p}{p!} \frac{\partial^p V}{\partial y^p} \Big|_{x_i, y_k}$$

$$V(x_i, y_{k-1}) = V(x_i, y_k) - l \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{x_i, y_k} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{x_i, y_k} + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(-l)^p}{p!} \frac{\partial^p V}{\partial y^p} \Big|_{x_i, y_k}$$

Da cui otteniamo, nel caso di equazione di Laplace<sup>24</sup>:

<sup>24</sup> Nel caso di equazione di Poisson, la somma delle derivate seconde non è nulla, ma è pari al termine noto

$$V(x_i, y_k) = \frac{1}{4} [V(x_i, y_{k-1}) + V(x_{i-1}, y_k) + V(x_i, y_{k+1}) + V(x_{i+1}, y_k)] + f_4(x_i, y_k) + \frac{h^2}{4} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$V(x_i, y_k) = \frac{1}{2 \cdot \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{\ell^2} \right)} \left[ \frac{V(x_i, y_{k-1})}{\ell^2} + \frac{V(x_{i-1}, y_k)}{h^2} + \frac{V(x_i, y_{k+1})}{\ell^2} + \frac{V(x_{i+1}, y_k)}{h^2} \right] + f_4(x_i, y_k)$$

per  $h = \ell$

$$V(x_i, y_k) = \frac{1}{4} [V(x_i, y_{k-1}) + V(x_{i-1}, y_k) + V(x_i, y_{k+1}) + V(x_{i+1}, y_k)] + f_4(x_i, y_k)$$

Quindi, a meno di un infinitesimo del quarto ordine rispetto ai passi del reticolo monometrico, il potenziale del nodo è pari alla media dei potenziali nei nodi circostanti<sup>25</sup>.

Se i quattro bracci sono tutti diversi, come nel caso di punti prossimi alla frontiera, si avrà

$$V(x_i, y_k) = \frac{\frac{V(x_{i-1}, y_k)}{h_-(h_- + h_+)} + \frac{V(x_{i+1}, y_k)}{h_+(h_- + h_+)} + \frac{V(x_i, y_{k-1})}{\ell_-(\ell_- + \ell_+)} + \frac{V(x_i, y_{k+1})}{\ell_+(\ell_- + \ell_+)}}{\frac{1}{h_- h_+} + \frac{1}{\ell_- \ell_+}}$$

Relazioni opportune dovranno essere scritte in presenza di una frontiera interna separante due domini a caratteristica diversa.

Ad esempio, nel caso di un punto che si trovi sulla superficie S della fig.I.11.1 si scriverà

$$V(x_i, y_k) = \frac{\frac{\varepsilon_1 V(x_{i-1}, y_k)}{h_-(\varepsilon_2 h_- + \varepsilon_1 h_+)} + \frac{\varepsilon_2 V(x_{i+1}, y_k)}{h_+(\varepsilon_1 h_- + \varepsilon_2 h_+)} + \frac{V(x_i, y_{k-1})}{\ell_-(\ell_- + \ell_+)} + \frac{V(x_i, y_{k+1})}{\ell_+(\ell_- + \ell_+)}}{\frac{1}{h_- h_+} + \frac{1}{\ell_- \ell_+}}$$

Il metodo FDM si presta soprattutto per problemi di Dirichlet e per domini abbastanza ben descrivibili mediante un reticolo non eccessivamente fitto (ad esempio domini rettangolari). Con alcuni artifici si possono considerare reticoli a passi non costanti.

Il principale vantaggio del FDM consiste nel poter tentare – oltre alla soluzione diretta<sup>26</sup> - una soluzione *per iterazione* su un insieme di nodi percorribile con algoritmi molto semplici: si assegnano i valori del potenziale su tutti i punti intercettati dal reticolo sulla frontiera e si dà un valore iniziale arbitrario ai potenziali dei nodi interni (esempio un valore nullo oppure un valore intermedio tra il minimo ed il massimo) e si ricalcolano in successive “passate” i valori dei potenziali dei nodi interni. Per domini regolari la soluzione rapidamente<sup>27</sup> converge ed il processo iterativo si arresta quando due soluzioni successive sono sufficientemente “vicine”. Per domini irregolari la convergenza non è assicurata.

<sup>25</sup> E' la versione “discreta” del teorema della media valido per le funzioni armoniche.

<sup>26</sup> Consistente nell'inversione di una matrice NxN

<sup>27</sup> Esiste anche la possibilità di accelerare il processo iterativo valutando il potenziale  $V^{(t)}(x_i, y_k)$  in un nodo generico alla t-ma iterazione e ricalcolandolo come  $\tilde{V}^{(t)}(x_i, y_k) = V^{(t)}(x_i, y_k) + f \cdot (V^{(t)}(x_i, y_k) - V^{(t-1)}(x_i, y_k))$  con f *fattore di rilassamento* che a seconda dei casi può essere maggiore o minore di 1.

### §1.14.2 Il metodo degli elementi finiti (FEM)

Consiste nel suddividere il dominio in volumi elementari poliedrici (“elementi”) di sagoma opportuna in modo da “riempire” il dominio di indagine.

La distribuzione del potenziale  $\Phi$  può essere descritta attraverso una caratteristica dell’elemento. Potremo dar luogo a diversi metodi di impiego degli elementi costituenti il dominio.

Il *metodo variazionale* consiste nel considerare un funzionale del potenziale (es. l’energia elettrostatica) e considerare che una soluzione corrisponde ad un valore minimo di detto funzionale nell’elemento di volume  $\Delta\tau$ . Ad esempio, il minimo del funzionale

$$W_{\Delta\tau}(\Phi) = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{\Delta\tau} E^2 d\tau = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{\Delta\tau} \left[ \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \quad (I.12.2.1)$$

viene ricercato attraverso un processo che prevede i seguenti passi:

- scelta degli elementi, di forma e dimensioni eventualmente variabili, eventualmente a lati curvi (reticolo curvilineo); descrizione del potenziale all’interno di un elemento attraverso una funzione interpolante che tenga conto dei valori sui vertici dell’elemento (**nod**i del reticolo).
- Valutazione delle equazioni relative all’elemento (matrici di elemento);
- Valutazione della matrice di sistema (assemblaggio degli elementi in forma di sistema)
- Imposizione delle condizioni al contorno e soluzione del sistema di equazioni lineari

#### a. Scelta degli elementi

Come esempio consideriamo un problema 2D. Si possono scegliere elementi triangolari, in cui il potenziale vari con legge lineare; i coefficienti possono essere ricavati dai valori del potenziale nei vertici i,j,k (fig.I.12.2.1).

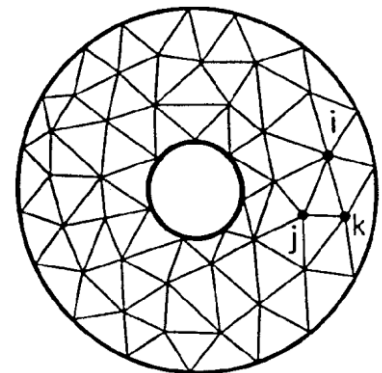
$$\Phi(P)|_{\Delta\tau} = c_1 + c_2x + c_3y \quad \text{funzione approssimante}$$

$$\Phi_i(x_i, y_i) = c_1 + c_2x_i + c_3y_i$$

$$\Phi_j(x_j, y_j) = c_1 + c_2x_j + c_3y_j$$

$$\Phi_k(x_k, y_k) = c_1 + c_2x_k + c_3y_k$$

fig(I.34)



Le  $\Phi$  sui vertici prendono il nome di *coordinate generalizzate*.

Le costanti c si possono ricavare dalla (I.34) se questa invertibile, se cioè

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2 \cdot \Delta_e \neq 0$$

dove  $\Delta$  è l'area dell'elemento, certamente non nulla; i coefficienti  $c$  sono quindi univocamente determinati come funzioni lineari delle coordinate generalizzate.

Applicando la regola di Cramer

$$c_1 = \frac{1}{2\Delta_e} (A_i \Phi_i + A_j \Phi_j + A_k \Phi_k)$$

$$c_2 = \frac{1}{2\Delta_e} (B_i \Phi_i + B_j \Phi_j + B_k \Phi_k)$$

$$c_3 = \frac{1}{2\Delta_e} (C_i \Phi_i + C_j \Phi_j + C_k \Phi_k)$$

dove

$$A_i = x_j y_k - x_k y_j ; A_j = x_k y_i - x_i y_k ; A_k = x_i y_j - x_j y_i$$

$$B_i = y_j - y_k ; B_j = y_k - y_i ; B_k = y_i - y_j ; C_i = x_k - x_j ; C_j = x_i - x_k ; C_k = x_j - x_i$$

$$2\Delta_e = x_j y_k - x_k y_j + x_k y_i - x_i y_k + x_i y_j - x_j y_i = A_i + A_j + A_k$$

Avremo quindi per ogni elemento di area  $\Delta S$  e profondità unitaria, una energia

$$\frac{W_{\Delta\tau}}{\Delta z} = X(\Phi) = X(\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k) = \frac{\varepsilon}{2} \iint_{\Delta S} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS .$$

L'energia complessiva si otterrà come

$$W = \sum_{\Delta S} X_{\Delta S}$$

### b) Valutazioni delle equazioni relative all'elemento

La soluzione del problema si ricava dalla condizione di minimo

$$\frac{\partial X}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \Phi_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \iint_{\Delta S} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS \right] = 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \Phi_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \Phi_j} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \iint_{\Delta S} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS \right] = 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \Phi_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \Phi_k} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \iint_{\Delta S} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS \right] = 0 \end{cases}$$

$$\text{dove } \Phi(P)|_{\Delta\tau} = c_1 + c_2 x + c_3 y \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = c_2 ; \frac{\partial \Phi}{\partial y} = c_3, \text{ per cui}$$

$$\Phi(P)|_{\Delta\tau} = \frac{1}{2\Delta_e} [(A_i + B_i x + C_i y)\Phi_i + (A_j + B_j x + C_j y)\Phi_j + (A_k + B_k x + C_k y)\Phi_k] =$$

$$\Phi(P)|_{\Delta\tau} = N_i(x, y)\Phi_i + N_j(x, y)\Phi_j + N_k(x, y)\Phi_k$$



Le funzioni  $N(x,y)$  sono dette *funzioni di forma* e differiscono elemento da elemento.

Ne segue

$$\frac{\partial X}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \Phi_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \iint_{\Delta S} \left[ \frac{1}{2\Delta_e} (B_i \Phi_i + B_j \Phi_j + B_k \Phi_k) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2\Delta_e} (C_i \Phi_i + C_j \Phi_j + C_k \Phi_k) \right]^2 \right] dS = 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \Phi_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \Phi_j} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \iint_{\Delta S} \left[ \frac{1}{2\Delta_e} (B_i \Phi_i + B_j \Phi_j + B_k \Phi_k) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2\Delta_e} (C_i \Phi_i + C_j \Phi_j + C_k \Phi_k) \right]^2 \right] dS = 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \Phi_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \Phi_k} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \iint_{\Delta S} \left[ \frac{1}{2\Delta_e} (B_i \Phi_i + B_j \Phi_j + B_k \Phi_k) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2\Delta_e} (C_i \Phi_i + C_j \Phi_j + C_k \Phi_k) \right]^2 \right] dS = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{4\Delta_e} \left[ (B_i \Phi_i + B_j \Phi_j + B_k \Phi_k)^2 + (C_i \Phi_i + C_j \Phi_j + C_k \Phi_k)^2 \right] \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \Phi_j} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{4\Delta_e} \left[ (B_i \Phi_i + B_j \Phi_j + B_k \Phi_k)^2 + (C_i \Phi_i + C_j \Phi_j + C_k \Phi_k)^2 \right] \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \Phi_k} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{4\Delta_e} \left[ (B_i \Phi_i + B_j \Phi_j + B_k \Phi_k)^2 + (C_i \Phi_i + C_j \Phi_j + C_k \Phi_k)^2 \right] \right] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\Delta_e} \left[ (B_i^2 \Phi_i + B_i B_j \Phi_j + B_i B_k \Phi_k) + (C_i^2 \Phi_i + C_i C_j \Phi_j + C_i C_k \Phi_k) \right] \right] = 0 \\ \left[ \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\Delta_e} \left[ (B_j B_i \Phi_i + B_j^2 \Phi_j + B_j B_k \Phi_k) + (C_i C_j \Phi_i + C_j^2 \Phi_j + C_j C_k \Phi_k) \right] \right] = 0 \\ \left[ \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\Delta_e} \left[ (B_i B_k \Phi_i + B_j B_k \Phi_j + B_k^2 \Phi_k) + (C_i C_k \Phi_i + C_j C_k \Phi_j + C_k^2 \Phi_k) \right] \right] = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{4\Delta_e} \left[ (B_i^2 + C_i^2) \Phi_i + (B_i B_j + C_i C_j) \Phi_j + (B_i B_k + C_i C_k) \Phi_k \right] = 0 \\ \frac{\varepsilon}{4\Delta_e} \left[ (B_j B_i + C_i C_j) \Phi_i + (B_j^2 + C_j^2) \Phi_j + (B_j B_k + C_j C_k) \Phi_k \right] = 0 \\ \frac{\varepsilon}{4\Delta_e} \left[ (B_i B_k + C_i C_k) \Phi_i + (B_j B_k + C_j C_k) \Phi_j + (B_k^2 + C_k^2) \Phi_k \right] = 0 \end{array} \right.$$

Per ogni elemento potremo scrivere

$$\Rightarrow \frac{\partial X}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow [\mathbf{p}] \cdot [\Phi] = 0 \quad (\wedge)$$

dove gli elementi della matrice dei coefficienti  $\mathbf{p}$  dipendono dalle coordinate nodali e dalla permittività dell'elemento. La matrice  $\Phi$  è la matrice dei *potenziali nodali*.

### c) Valutazioni dell' equazione e della matrice del sistema

Si procede ad assemblare le matrici degli elementi in una matrice di sistema. Poiché la somma delle energie associate agli  $m$  elementi deve essere pari all'energia totale associata al campo, si ha

$$X_{totale} = X(\Phi(x, y)) = \sum_{\Delta S} X_{\Delta S}(\Phi_{\Delta S}(x, y)) = f(\Phi_1, \dots, \Phi_m; x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_m; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$$

La minimizzazione globale

$$\frac{\partial X_{totale}}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow [\mathbf{P}] \cdot [\Phi] = 0$$

porta alla definizione della *matrice di sistema*  $\mathbf{P}$ , dove l'elemento generico  $P_{rs}$  è dato dalla somma di tutti i coefficienti che si riferiscono al potenziale nodale  $\Phi_s$ :

$$P_{rs} = \sum_{e=1}^m p_{rse}$$

Ad esempio, consideriamo il nodo 10 della fig. I.35. Per ottenere il coefficiente (10,10) basterà sommare i coefficienti  $p_{10,10}$  delle matrici degli elementi adiacenti il nodo 10 (essendo evidentemente nulli gli altri) cioè degli elementi 1-2-3-4-5-6:

$$P_{10,10} = p_{10,10,1} + p_{10,10,2} + p_{10,10,3} + p_{10,10,4} + p_{10,10,5} + p_{10,10,6}$$

dove i singoli termini si possono ottenere dalle matrici "elementari"

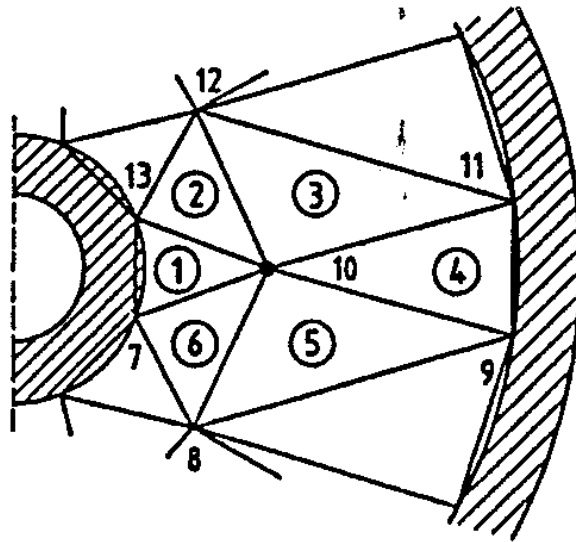


fig.I.35

$$\begin{bmatrix} P_{7,7} & P_{7,10} & P_{7,13} \\ P_{10,7} & P_{10,10} & P_{10,13} \\ P_{13,7} & P_{13,10} & P_{13,13} \end{bmatrix}_1 \cdot \begin{bmatrix} \Phi_7 \\ \Phi_{10} \\ \Phi_{13} \end{bmatrix} = 0 ; \quad \begin{bmatrix} P_{10,10} & P_{10,12} & P_{10,13} \\ P_{12,10} & P_{10,10} & P_{12,13} \\ P_{13,10} & P_{13,12} & P_{13,13} \end{bmatrix}_2 \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{10} \\ \Phi_{12} \\ \Phi_{13} \end{bmatrix} = 0 ; \quad e \quad \text{così}$$

via...

La matrice  $\mathbf{P}$  è simmetrica ha dimensioni  $m \times m$  ma è *sparsa* e *a banda*, in quanto ogni nodo è interconnesso con pochi altri.

### e) Valutazione delle condizioni al contorno

Scorporando i nodi  $nf$  sulla frontiera, si può pervenire alla espressione

$$[\mathbf{P}] \cdot [\Phi] = [\mathbf{P}]_{nf} \cdot [\Phi]_{nf}$$

che fornisce la soluzione (riferentesi ai nodi interni)

$$[\Phi] = [\mathbf{P}]^{-1} [\mathbf{P}]_{nf} \cdot [\Phi]_{nf}$$

L'inversione della matrice si presenta spesso ardua dal punto di vista computazionale, per cui si ricorre spesso a tecniche iterative.

Sono necessari corposi approfondimenti per la valutazione dell'errore commesso dalla discretizzazione del dominio nella determinazione del potenziale  $e$ , in maniera più marcata, nella determinazione del campo.

### §I.14.3 Il metodo di simulazione della carica (CSM)

Trattasi in realtà di un metodo di composizione di campo e potenziale generato da cariche fittizie, opportunamente distribuite in modo da rigenerare in un numero significativo di punti le condizioni al contorno di un problema elettrostatico assegnato.

Il grande vantaggio di questo metodo consiste nel mantenere continuo il dominio di indagine: il potenziale ed il campo possono essere valutati analiticamente in tutti i punti del dominio. Gli errori sono correlati solo alla scelta della distribuzione e del numero delle cariche fittizie.

Dato il sistema di N cariche fittizie  $Q_j$  posizionate nel punto  $P_j$ , si avrà infatti, in un punto generico del dominio,

$$\Phi(P_i) = \sum_{j=1}^N \frac{Q_j(P_j)}{4\pi|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j(P_j)$$

dove i termini  $p_{ij}$  vengono detti *coefficienti di potenziale*.

E' possibile simulare campi 2D e 3D attraverso diverse distribuzioni di cariche:

a) cariche puntiformi  $p_{ij} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$  ;

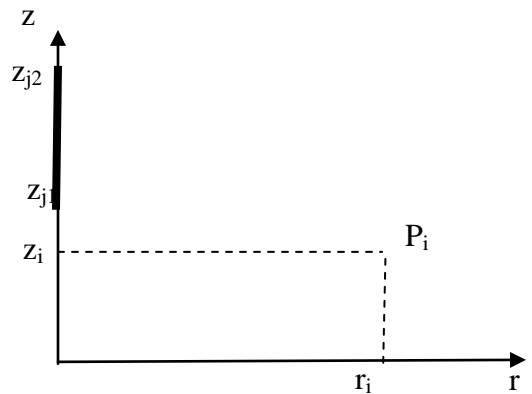
b) distribuzioni lineari indefinite di carica  $p_{ij} = \frac{1}{2\pi|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$  ;

c) distribuzioni lineari finite di carica:

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon(z_{j2} - z_{j1})^2} \ln \frac{(z_{j2} - z_i + \gamma_1)(z_{j2} + z_i + \gamma_2)}{(z_{j1} - z_i + \delta_1)(z_{j2} + z_i + \delta_2)}$$

$$\delta_1 = \sqrt{r_i^2 + (z_{j1} - z_1)^2} \quad ; \quad \delta_2 = \sqrt{r_i^2 + (z_{j2} + z_1)^2}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{r_i^2 + (z_{j2} - z_1)^2} \quad ; \quad \gamma_2 = \sqrt{r_i^2 + (z_{j1} - z_1)^2}$$



d) distribuzioni anulari di carica

fig.I.36

Assegnato un numero N di punti a potenziale noto  $\Phi^*$ , potremo assegnare N cariche fittizie (la posizione sarà assegnata con criterio di ragionevolezza legato alla geometria del sistema), il cui valore sarà dato dalla risoluzione dell'equazione

$$[P][Q] = [\Phi^*] \Rightarrow [Q] = [P]^{-1} [\Phi^*]$$

Con questa prima distribuzione di cariche fittizie si valuta la bontà della soluzione andando a confrontare il valore del potenziale calcolato con quello noto in altri punti del contorno (“check-points”).

Se la soluzione non è ritenuta soddisfacente, si ripete il procedimento cambiando posizione e/o numero di cariche fittizie.

La matrice dei coefficienti di potenziale è piena e di ordine inferiore a quella ricavata in FDM e FEM.

Il metodo si presta egregiamente a domini illimitati.

#### §I.14.4 Metodo di Monte-Carlo

Il metodo di Monte-Carlo è basato sul teorema della media per le funzioni armoniche: considerando la superficie sferica di raggio  $r$  suddivisa in  $n$  porzioni  $\Delta S$  uguali tra loro, si avrà, nel centro  $P$ ,

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi r^2} \int \Phi(P_s) dS \cong \frac{1}{n\Delta S} \sum_{k=1}^n \Phi(P_{Sk}) \Delta S_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(P_{Sk})$$

Quindi il potenziale in un nodo del reticolo si ottiene approssimativamente facendo una media di  $n$  valori in nodi.

Partendo da un punto qualsiasi all’interno del reticolo, si immagina lanciare a caso una pallina per raggiungere un nodo adiacente, quindi proseguire, sempre a caso, fino a raggiungere uno degli elettrodi.

Si immagina di ripetere  $N$  (ad es.  $N=100$ ) volte questa procedura; ci saranno  $N_1$  casi in cui la pallina avrà raggiunto l’elettrodo a potenziale  $V_1$  e  $N_2$  casi in cui avrà raggiunto l’elettrodo a potenziale  $V_2$ . Per valori elevati di  $N (=N_1+N_2)$  potenziale del punto  $P$  di partenza potrà essere calcolato come

$$\Phi(P) \cong \frac{1}{N} (N_1 V_1 + N_2 V_2)$$

L’algoritmo è particolarmente semplice, ma per ogni nodo occorrono numerosi tentativi.

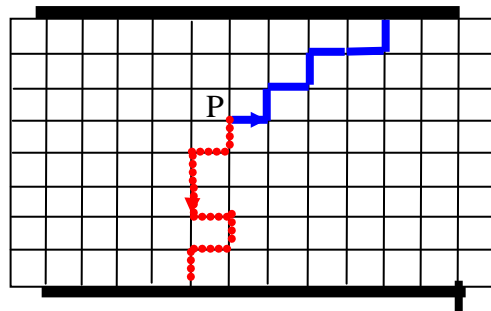


Fig.I.37

Una variante di questo metodo consente di utilizzare maglie di larghezza variabile (*floating random-walk*). A dispetto della sua semplicità, questo metodo non è molto usato.

### §I.14.5 Metodo degli elementi di frontiera (BEM)

Tale metodo consiste nella determinazione della densità superficiale di carica (ad esempio) mediante la discretizzazione di equazioni integrali alla frontiera.

La complicazione formale è compensata dalla possibilità di determinare direttamente il campo elettrico, di ottenere notevole semplificazione nel caso di domini sottili e di trattare problemi contenenti singolarità.

Si considera una suddivisione del dominio in volumetti  $\tau_i$  delimitati dalla frontiera  $S_i$ .

Indicato con  $\Phi(P)$  il potenziale del generico punto interno al dominio e con  $Q$  il punto campo per la funzione di Green con punto sorgente  $P$ , si considera la funzione di Green del singolo volumetto

$$\nabla_p^2 G(P, Q) = -\delta(P - Q)$$

e per ogni volumetto e si applica l'identità di Green

$$\iiint_{\tau_i} \nabla^2 \Phi \cdot G(P, Q) d\tau_i - \iiint_{\tau_i} \nabla^2 G \cdot \Phi_i(Q) d\tau_i = \iiint_{\tau_i} \Phi_i(P) \delta(P - Q) d\tau_i$$

$$\iint_{S_i} G(P, Q) \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} dS_i - \iint_{S_i} \Phi_i(Q) \frac{\partial G}{\partial n_i} dS_i = \begin{cases} \Phi_i(P) & P \in \tau_i \\ 0 & P \notin \tau_i \end{cases} \quad \forall \tau_i$$

Per ogni volumetto si separano i contributi degli elementi superficiali sul contorno (con evidenza di elementi A,B a condizioni note, quali gli elettrodi) dagli elementi di frontiera interna (affacciati); si esegue quindi la somma dei contributi al potenziale relativi agli elementi contigui

$$\sum_i^{A,B} \iint_{S_i} G(P, Q) \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} dS_i - \sum_i^j \iint_{S_{ij}} G(P, Q) \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial n_j} \right] dS_{ij} = \Phi_i(P)$$

si avrà

$$\Phi_i(P) = \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \sum_i^{A,B} \iint_{S_i} G(P, Q) \sigma_i(Q) dS_i + \sum_i^j \iint_{S_{ij}} G(P, Q) \sigma_{ij}(Q) dS_{ij} \right\}$$

La distribuzione superficiale di carica sul contorno può essere nota (condizione di Neumann) o va ricavata imponendo opportune condizioni di raccordo del tipo

$$\frac{\epsilon_i + \epsilon_j}{2} \sigma(P) = (\epsilon_j - \epsilon_i) \sum_i^j \iint_{S_{ij}} \sigma(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_j} dS_{ij}$$

Dalla conoscenza della distribuzione della densità di carica sulle superfici si perviene ai valori del potenziale

$$[\Phi] = [L][\sigma]$$

## §I.15 Metodi sperimentali

### §I.15.1 Figure di polvere (Georg Christoph Lichtenberg, 1742-1799, Darmstadt, fig.I.38)



fig.I.38

In esperimenti all'università di Gottinga (1777), usando polvere di licopodio (*lycopodium clavatum*, pianta crittogama sporangifera) su una lastra isolante tra elettrodi carichi, Lichtenberg la formazione di figure diverse in diverse condizioni di carica. Anche Alessandro Volta volle osservare i suoi esperimenti, tra l'altro contemporanei a quelli di Franklin sui fulmini.

Tali figure si possono facilmente ottenere usando talco in polvere su lastre isolanti con diverse configurazioni elettrodiche.

Le figure risultano ramificate e diversificate. Esse possono essere studiate come *oggetti frattali*. La forma e l'estensione delle figure può rivelare la presenza di un campo elettrico, la sua intensità, la posizione e la polarità di elettrodi a punta. Studi sistematici sono stati condotti successivamente utilizzando lastre fotografiche<sup>28</sup>. Toepler (1907) studiò approfonditamente l'estensione, la forma ed il livello di ramificazione delle figure all'intensità del campo, alla sua polarità ed alla sua dinamica.

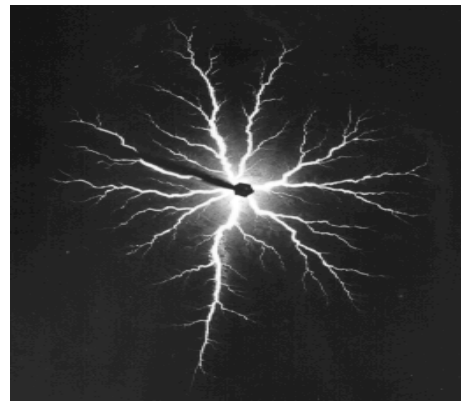
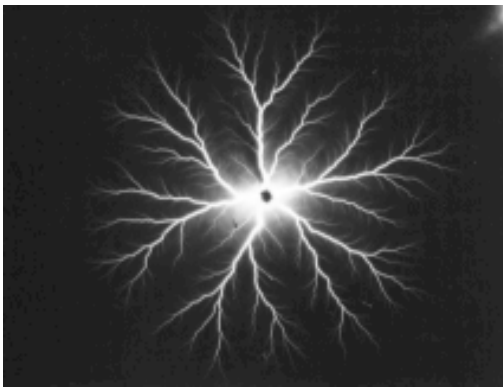


fig.I.39 – Scarica superficiale reale (a destra) e simulata (a sinistra)

<sup>28</sup> Nella captazione di fulmini è stato ampiamente impiegato uno strumento a lastra detto clidonografo.

Ancora oggi si adoperano figure di polvere quale diagnostica non distruttiva per localizzare e avere prime indicazioni su sovratensioni in macchine elettriche.

Nella fig.I.40 si mostrano figure di polvere associate a esperimenti in configurazione asta-piano in Sala Alta Tensione del DIEL.



fig.I.40 – Figure di polvere in configurazione asta-piano.

### § I.15.2 Elettroarborescenza (treeing)

Iniettando cariche attraverso materiali trasparenti ordinariamente classificati come isolanti, si ottengono tracce luminescenti rivelanti il percorso delle cariche stesse. L'iniezione di cariche può essere ottenuta applicando con elettrodo a punto una tensione elevatissima (centinaia o migliaia di kilovolt) per un tempo talmente breve (qualche nanosecondo) da evitare la formazione di scariche superficiali o in aria (fig.I.41). Per l'aspetto delle figure, a tale fenomeno viene dato il nome di **arborescenza** (*treeing*).

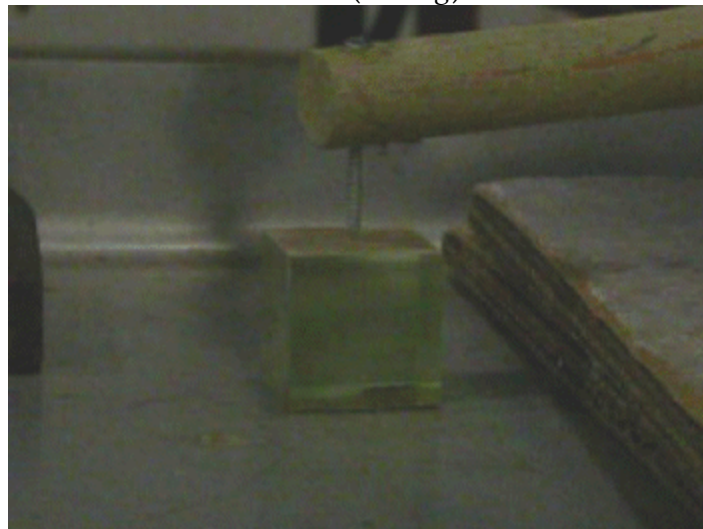


fig. I.41



Nella fig.I.42 è riportata una figura arborescente ottenuta in PMMA (poli-metil-metacrilato) iniettando carica con acceleratore lineare.

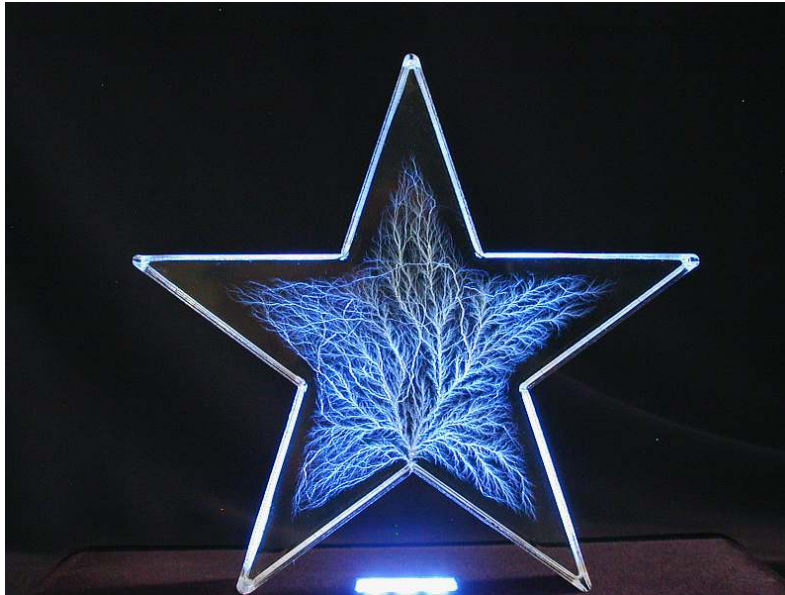


fig.I.42

Nelle successive figg.I.43, I.44, I.45, I.46 sono riportate altre caratteristiche figure arborescenti, che fanno risaltare l'aspetto frattale dei fenomeni di iniezione di carica.



fig.I.43



fig..I.44



fig.I.45

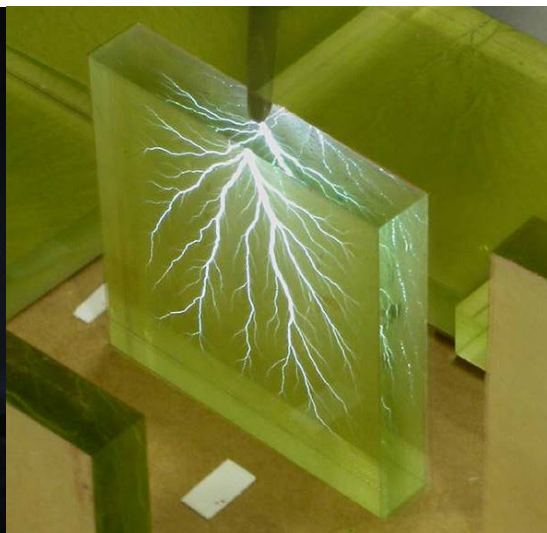


fig.I.46

### §I.15.3 Mappatura del campo con sonde (metodi diretti e metodi di zero)

E' possibile risalire al valore del campo elettrico o magnetico utilizzando l'effetto di tali campi; è necessario ovviamente che l'effetto non perturbi il campo stesso.

Tra gli altri, l'effetto Pockels consiste nella rotazione (non lineare) del piano di polarizzazione della luce per mezzo di un campo elettrico. Avendo quindi a disposizione una fibra ottica illuminata con luce polarizzata, la variazione del piano di polarizzazione della luce sarà indicativo del campo elettrico medio nella regione interessata dalla fibra.

Analogamente, l'effetto Faraday riguarda la rotazione (non lineare) del piano di polarizzazione di una luce polarizzata in fibra con il campo magnetico.

Altri metodi diretti per la misura del campo elettrico impiegano sonde capacitive opportunamente disposte e collegate con cura a voltmetri elettrostatici.

Si possono ancora impiegare piccoli bulbi contenenti gas a bassa pressione; la formazione di una scarica luminosa indica che il campo elettrico ha superato un valore critico.

I metodi di zero consistono nel confrontare la grandezza da misurare con una grandezza nota, in modo che la misura venga determinata dall'annullarsi della differenza. Ad esempio, conoscendo la tensione a vuoto di un generatore reale di tensione (es. 50V), si possono determinare, in un campo di corrente creato da un dispersore interessato dalla massima intensità di corrente di guasto, la effettiva linea equipotenziale al suolo a 50 V rispetto al dispersore stesso, verificando l'annullarsi dell'intensità di corrente erogata dal generatore reale. Ovviamente si possono tracciare altre linee equipotenziali, cambiando la tensione a vuoto del generatore, in modo da "vedere" anche le linee gradienti. In tal modo si può anche delimitare una fascia di sicurezza intorno al dispersore, se vi fossero tensioni superiori a 50V su distanze inferiori al metro.

## § I.16 Metodi analogici

Tali metodi utilizzano modelli tipici di altri campi applicativi, formalmente retti da leggi “analoghe”, una volta opportunamente correlate le condizioni al contorno o di regolarità all’infinito. Ad esempio il campo di deformazione di una membrana elastica o di una molla può essere descritto da una equazione di Laplace, mentre la trasmissione del calore è descritta da una equazione di diffusione (di Fourier) che diventa di Laplace in condizioni stazionarie ed escludendo la zona delle sorgenti. Analogamente per la descrizione di cinetiche chimiche.

Abbiamo comunque notato che, in certe condizioni, esiste stretta analogia tra campo elettrostatico, campo magnetostatico e campo di corrente stazionario dando luogo a interpretazioni circuitali non solo per i fenomeni di conduzione (*reti elettriche*) anche per i fenomeni di magnetizzazione (*reti magnetiche*) ed i fenomeni di polarizzazione (*reti dielettriche*). Si ha l’estensione automatica di molte proprietà viste per i tradizionali circuiti (principi di Kirchhoff, unicità della soluzione, teorema del generatore equivalente,...).

Ovviamente, oltre ai modelli non-elettrici analoghi ed utili per la risoluzione di problemi elettromagnetici, esistono modelli analoghi elettrici per casi non-elettrici, come in Fluidodinamica, in Meccanica con e senza attrito, ....

Nel seguito sarà fatto un breve cenno a due metodi “storici”, ormai di fatto superato dall’intervento di potenti mezzi di calcolo, con cui si vanno vanificando in realtà gli enormi vantaggi dei tradizionali metodi analogici. Varrebbe tuttavia la pena mantenere uno spiraglio su un certo tipo di “linguaggio universale” (o universitario) che accomuna vari campi delle discipline applicative dell’Ingegneria, delle Scienze e dell’Architettura.

Va però osservato che i metodi analogici, messi un po’ da parte o cacciati dalla finestra per via dell’avvento dei Calcolatori, sono stati fatti rientrare elegantemente per la porta proprio nell’ultimo trentennio dall’avvento di mezzi di calcolo e supercalcolo moderni e veloci. Sono stati infatti ripresi e studiati con precisione oltremodo spinti modelli matematici imperniati sulla *proprietà di scala* o di *autosomiglianza* (a qualsiasi scala) che interessano non solo l’Ingegneria (si è vista ad esempio la *descrizione frattale* delle scariche superficiali), ma anche le Scienze naturali ( la Botanica –casi esemplari la felce ed il cavolfiore-, il fiocco di neve, ...; l’Anatomia, con l’apparato nervoso e dei vasi sanguigni e la diagnostica sul cuore, la Geografia<sup>29</sup>, la Meteorologia, l’Astronomia, ...) e financo l’Economia, le Scienze Umane e tutte le discipline legate ad una legge di crescita (*growth rate*) che definiscono comportamenti non analiticamente prevedibili a lungo termine e fortemente sensibili alle condizioni iniziali<sup>30</sup>, caratterizzati traiettorie complesse in regioni descrittive significative (*bacini d’attrazione: caos deterministico*).<sup>31</sup>

---

<sup>29</sup> Una per tutte, la famosa domanda: quanto è lunga la costa dell’Inghilterra?

<sup>30</sup> È ormai noto a tutti il paradosso del *Butterfly effect*, per cui uno sbatter d’ali di farfalla a Tokio può produrre una tempesta a New York.

<sup>31</sup> La teoria del *caos deterministico* e dell’attrattore strano fu avanzata da *Jules-Henry Poincarè* sin dalla fine del 1800; a lui si anche devono notevoli lavori di Fisica Matematica e alcune profonde riflessioni sulla relatività. Poincarè approfondì lo studio delle funzioni olomorfe che sul piano complesso presentano aspetti caotici ripresi

### § I.16.1 Metodo della vasca elettrolitica

La vasca elettrolitica consente un'ampia analogia fra campo di corrente e campi elettrostatici e magnetici. E' infatti possibile definire un campo laplaciano con diverse proprietà del mezzo (variando la conducibilità dell'elettrolita), inserendo condizioni al contorno definite dalla forma e posizione di elettrodi principali e secondari, inserendo condizioni di raccordo con setti separatori o modifiche del fondale della vasca. Una sonda di tensione permette, con metodo di zero, il tracciamento diretto delle superfici equipotenziali.

Una grande vasca elettrolitica, con ulteriori implementazioni, è ancora operante presso il Dipartimento di Ingegneria Elettrica e dell'Informazione dell'Università di Palermo.

### §I.16.2 Metodo della carta semiconduttiva

E' ancora un metodo per l'analisi di campi piani con metodo di zero. Esso è basato sul campo di corrente determinato su un foglio semiconduttivo (es. carta carbone copiativa o equivalente) da elettrodi opportunamente sagomati per riprodurre le richieste condizioni al contorno. Anche in questo caso con un metodo di zero possono essere disegnate le linee equipotenziali.

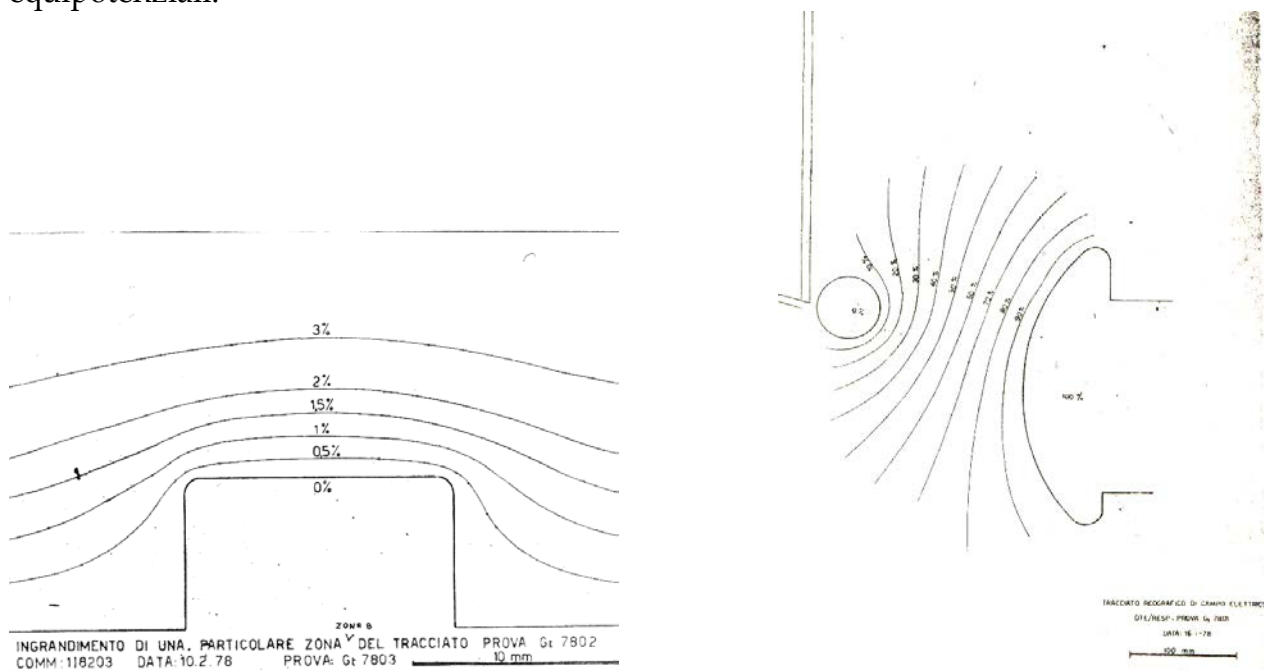


Fig. Esempi di tracciati di campo ottenuti con carta semiconduttiva

ed approfonditi da Gaston Maurice Julia (matematico algerino, 1893-1978). Gli *insiemi di Julia* hanno fatto parte di approfondimento numerico sui *frattali* da parte del matematico Benoit Mandelbrot (nato nel 1924 in Polonia e poi trasferitosi in Francia), anche nell'ambito di un progetto IBM sulle più recenti macchine di calcolo, e nel 1975 resi famosi dal suo libro *Les Objects Fractals: Forme, Hazard et Dimension*.

## § I.17 Metodi grafici

### §I.17.1 Metodo di Lehmann (reticolo isometrico)

Metodo “manuale” per campi piani, in buona parte superato per l’avvento di veloci strumenti di calcolo. Consiste nel tracciare a mano un reticolo quadrangolare a lati curvilinei *monometrico*, tali cioè che, per elemento, siano uguali le dimensioni medie  $d$  e  $s$ . Ovviamente tutti gli angoli sono retti.

Considerata una profondità unitaria e maglie sufficientemente piccole da poter considerare i campi all’interno della maglia ragionevolmente uniformi, ad ogni maglia in un campo elettrostatico potrà essere associata una capacità

$$C_{\text{maglia}} = \frac{Q_{\text{maglia}}}{V_{\text{maglia}}} = \frac{\epsilon E s \cdot 1}{Ed} = \epsilon$$

Se il rapporto  $s/d$  si mantiene costante, tutti gli elementi hanno la stessa capacità; la capacità complessiva per unità di profondità può essere calcolata considerando il numero  $m$  di elementi in parallelo, ossia di linee di flusso, ed il numero  $n$  di linee equipotenziali intermedie fra gli elettrodi, che individuano, per ciascun tubo di flusso,  $(n+1)$  elementi in serie

$$C = \frac{m}{n+1} \epsilon$$

A partire dalle linee equipotenziali costituenti gli elettrodi, si costruirà “a sentimento” una linea equipotenziale intermedia e procederà a successive modifiche nel tentativo di disegnare un reticolo monometrico prendendo linee di flusso a passo costante. Una volta assestata la prima linea equipotenziale a potenziale 50%, si proverà a tracciare le linee a potenziale 25% e 75%, procedendo a successivi ritocchi.

Consideriamo ad esempio il caso di un cavo coassiale (fig.17.1.1a,b,c) con dielettrico liquido (permittività 2.5) . Supponiamo per assurdo che la superficie equipotenziale al 50% sia a raggio corrispondente alla metà dello spazio interretrodotico: si vede subito che un reticolo isometrico non “regge” (fig.17.1.1a); proviamo allora a spostare la superficie verso l’esterno, vediamo che le maglie isometriche sono sempre meno compatibili (fig.17.1.1b); converrà quindi spostare l’equipotenziale verso l’elettrodo esterno e si vede che il reticolo isometrico può essere tracciato (fig.17.1.1c) in prima battuta “a sentimento”, più precisamente risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} a + b &= r_2 - r_1 \\ \left( r_1 + \frac{a}{2} \right) \alpha &= a \\ \left( r_2 - \frac{b}{2} \right) \alpha &= b \end{aligned}$$

nelle incognite  $a, b, \alpha$ .

Replicando più volte il settore, non verrà ricoperto l'intero spazio interelettrodico, in quanto  $\alpha$  non risulterà, in generale, una porzione intera dell'angolo giro<sup>32</sup>. Occorrerà ripartire dalle equipotenziali ed equiflusso del disegno ottenuto per un tracciato più, in modo che vada via via disegnandosi la mappa per il tratto residuale. Ovvamente il disegno può riguardare anche solo una porzione notevole (1/2,1/3,1/4...) dell'intera corona circolare. Nel caso di figura il rapporto dei raggi è 7/3 e l'angolo  $\alpha$  è ( a prima vista, disegno comunque non definitivo) prossimo a  $\pi/10$ , per cui si valuta la serie di due paralleli di 20 condensatori.

La prima valutazione della capacità per unità di lunghezza è quindi

$$C = \frac{m}{n+1} \varepsilon = \frac{20}{2} 2.5 \varepsilon_0 \cong 210 \text{ pF}$$

La valutazione analitica della capacità è la seguente

$$C_{12} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 2.5\varepsilon_0}{\ln \frac{7}{3}} \cong 170 \text{ pF}$$

---

<sup>32</sup> Tuttavia, se la ricopertura è quasi totale, si potrà avere una rozza stima del valore della capacità.

con  
circa.

un

errore

del

20%

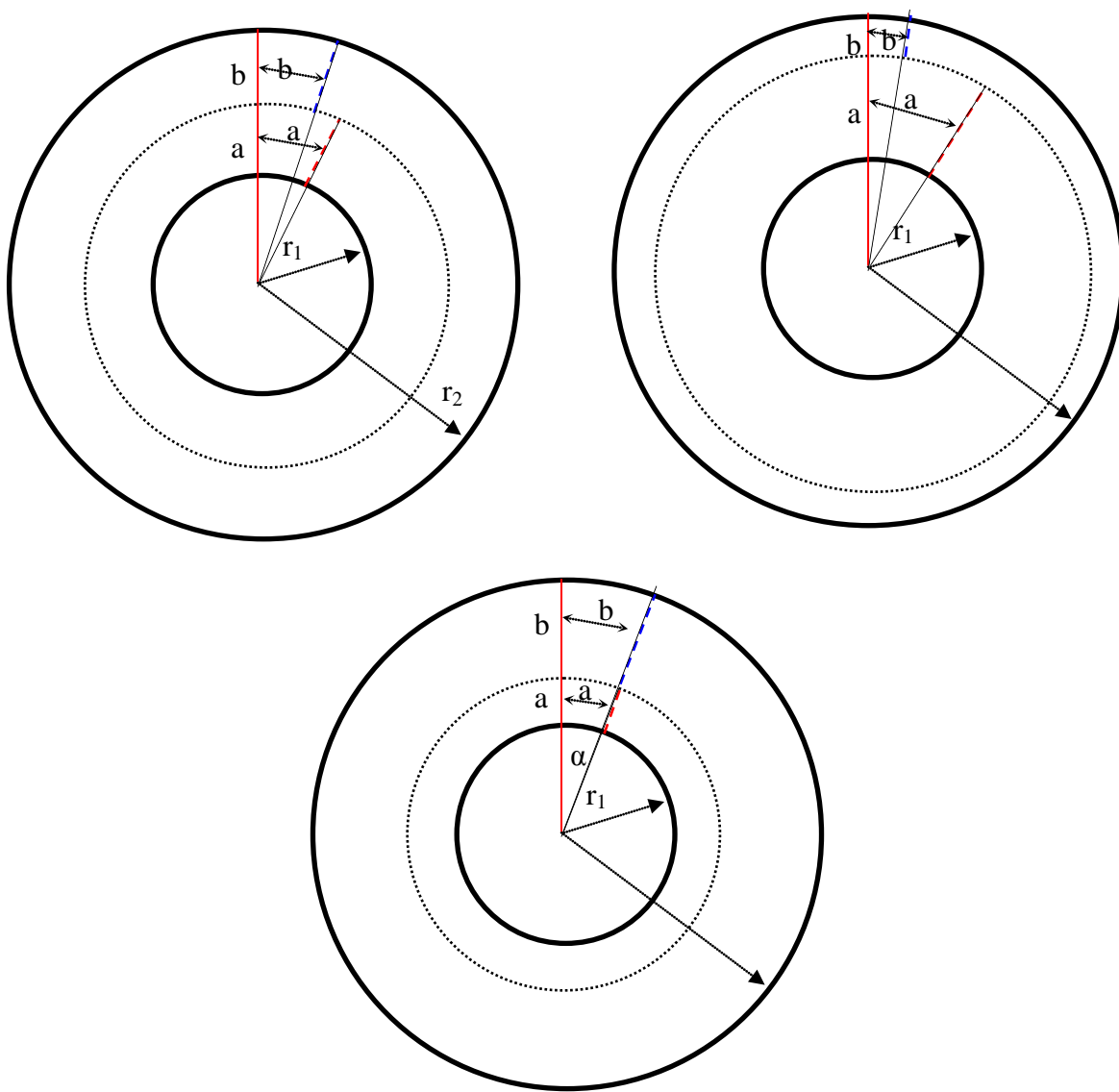


fig.I.7.1.1a,b,c

### §I.17.2 Metodo di Maxwell

Anche questo metodo si riferisce a casi piani per composizione da sorgenti note; si traccino le linee di flusso in modo da poter attribuire al tubo di flusso determinato da due linee adiacenti lo stesso valore del flusso. Si numerino le linee con numeri progressivi a partire da una linea arbitrarie ed in senso concorde per cariche omonime. Si considerino e si uniscano i punti di intersezione di linee a somma costante. Si ottengono così curve equiflusso. Analogamente si fa per le linee equipotenziali.

## §I.18 Cenni sulle macchine “elettrostatiche” ed altre applicazioni

### §I.18.1 Triboelettricità – Piroelettricità – Piezoelettricità

L'elettrificazione da strofinio o da contatto (*triboelettricità*) era già nota nell'antichità (Grecia, 600 a.C.).

Molti minerali ed i materiali polimerici per semplice contatto con metalli acquistano carica positiva o negativa (<sup>33</sup>) in relazione alla potenziale di estrazione degli elettroni dal metallo (*funzione di lavoro*, vedi Cap. VI), con relazione quasi lineare. Questa semplice considerazione ha portato alla stesura di “serie triboelettriche” di interesse industriale che vedono la classificazione di materiali – soprattutto organici – attraverso la loro funzione di lavoro, quindi la loro attitudine a perdere elettroni (caricandosi positivamente) o ad acquisire elettroni (caricandosi negativamente). Queste serie, pubblicate da diversi ricercatori (anche per materiali sottoposti a strofinio), non sempre concordano, a causa della scarsa riproducibilità degli esperimenti e per la presenza di inevitabili impurità superficiali. Comunque, a titolo di esempio, il PVC mostra una funzione di lavoro di circa 5.0 eV, il PET circa 4.2 eV, il Nylon 66 circa 4.0 eV: il PVC tende quindi a caricarsi negativamente rispetto al Nylon 66 (<sup>34</sup>). Ulteriori dati industriali portano ai primi posti tra gli elettroni-donatori la mica, la lana, l'ossido di polietilene (Union Carbide), il metil-metacrilato (Du Pont), ai primi posti tra gli elettroni-accettori il teflon o PTFE, il polietilene (Du Pont), il fluoruro di polivinilidene PVDF o Kynar (Penwalt), il PVC.

La separazione triboelettrica di diversi materiali può essere ottenuta ad esempio in *letti fluidi* in cui due materiali diversi dispersi e diversamente caricati per contatto reciproco vengono “trattati” tramite un campo elettrico esterno e separatamente rimossi. Altri dispositivi per separare polveri di materiali diversi sono i tamburi rotanti, gli scivoli vibranti, le macchine a vortice forzato (*air cyclone*).

La *piroelettricità* si manifesta nei materiali come modifica della polarizzazione con la temperatura. In tal modo possono essere costruiti rivelatori di infrarosso, sensori di temperatura e dispositivi per immagini termiche. Alcuni cristalli (es. tantalato di litio) e materiali ceramici (es. titanato-zirconato di piombo) manifestano spiccate proprietà piroelettriche.

La *piezoelettricità* si manifesta in cristalli “deformabili” per cui una sollecitazione meccanica produce in esso spostamento di carica e loro separazione e presenza sulle superfici. Si può creare quindi un campo elettrico proporzionale alla pressione meccanica. Tipici cristalli piezoelettrici sono il quarzo, il solfuro di cadmio, il solfuro di zinco, l'ossido di zinco. Notevoli proprietà piezoelettriche ad alta temperatura sono esibite da ceramiche, dal titanato di bario e titanato di zinco. Alcune forme cristalline del PVDF mostrano spiccate proprietà

---

<sup>33</sup> Ad esempio il nylon 66 acquista cariche negative da Cd,Zn, Ni, Ag, Al e cariche positive da Sb, Mo, Cu, W, Pt, Au.

<sup>34</sup> Per il teflon si è tuttora incerti tra 4.2 e 5.7 eV.



piezoelettriche e piroelettriche. Numerose le applicazioni nel campo dei sensori e trasduttori elettromeccanici, nonché nella generazione di alte tensioni per inneschi ed accensioni.

### §I.18.2 Le macchine elettrostatiche

La più nota macchina elettrostatica è il *generatore di Van de Graaff* <sup>(35)</sup> (fig.I.55) in cui una cinghia viene caricata tramite da una punta (positiva) per effetto corona (vedi cap. IV). Le cariche positive vengono depositate sull'elettrodo superiore destando per induzione una carica negativa sulla sfera piccola

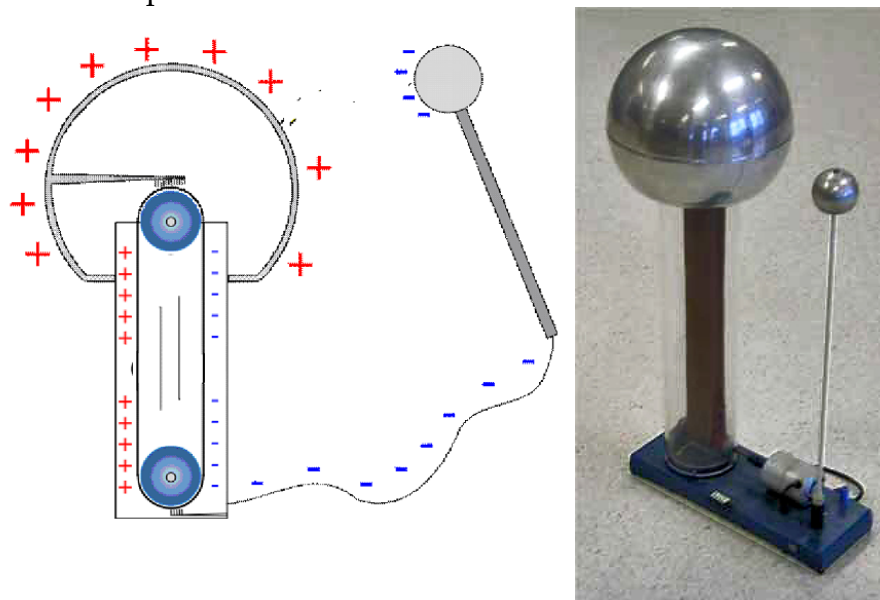


fig.I.55 Generatore di Van de Graaff

### §I.18.3 Elettrostrizione e Magnetostrizione (in preparazione)

### §I.18.4 Precipitatori elettrostatici (in preparazione)

### §I.18.5 Xerografia

Sulle piccole particelle neutre, con diametri compresi tra un millesimo di millimetro e due millimetri, le forze di tipo elettrostatico possono prevalere su quelle gravitazionali ed aerodinamiche. Questo risultato può essere utilizzato per verniciature di ottima rifinitura ed anche nella stampa a getto d'inchiostro a colori (*multi-jet printer*) in cui goccioline appunto delle dimensioni suddette possono essere deflesse da campi elettrostatici modulati appunto in funzione del carattere o del disegno da stampare.

Anche le copie elettrostatiche (*fotocopie* o *copie fotostatiche*) utilizzano campi elettrici. Nelle *macchine xerografiche* il foglio da copiare è proiettato su un tamburo rivestiti da materiale fotosensibile (selenio).

<sup>35</sup> Opera del fisico statunitense Robert Jemison Van De Graaff (1901-1967) [ 1929].

§I.18.6 Elettromagneti - Magneti permanenti

Consideriamo la struttura di fig.4.1. Il nucleo ferromagnetico, di profondità pari a 2 cm, è costituito da lamierini aventi la caratteristica di fig.2. Il fattore di riempimento del pacco di lamierini è del 90%.

Si voglia *proporzionare l'avvolgimento in modo da avere al traferro un'induzione  $B = 1$  T.*

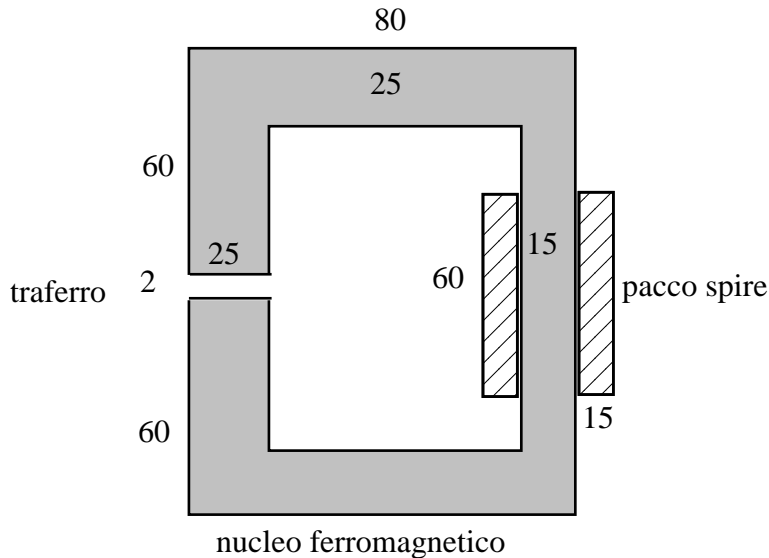


fig.1 -Struttura considerata (quote in mm)

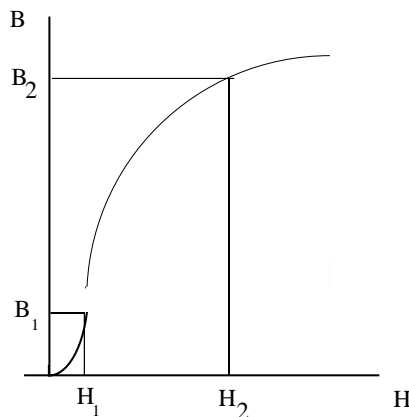


fig.2 - Caratteristica magnetica

Il flusso al traferro vale  $\Phi \cong B_o S = 500 \mu Wb$ , il campo H nel traferro vale  $H_o = B_o / \mu_o = 10^7 / 4\pi$  A/m =  $0.796 \cdot 10^6$  A/m.

La tensione magnetica al traferro vale  $T_o = H_o \delta = 1592$  A

L'induzione B nel ferro della colonna di sinistra sarà leggermente superiore al valore al traferro, in considerazione della continuità del flusso e del fattore di riempimento del pacco di lamierini. Esso vale  $B_1 = B_o / 0.9 = 1.11$  T, cui corrisponde il valore  $H_1 = 400$  A/m. La tensione magnetica corrispondente alla colonna di sinistra e ai due tronchi orizzontali vale

$$T_o = [(2 \cdot 60) - 25 + 2 \cdot (80 - 20)] \cdot 10^{-3} \cdot H_1 = 213 \cdot 10^{-3} \cdot 400 = 86 \text{ A}$$

Nella colonna su cui va montato il pacco spire l'induzione vale

$$B_2 = B_1 \cdot 25/15 = 1.85 \text{ T}$$

cui corrisponde un valore  $H_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ , sul ginocchio della caratteristica<sup>36</sup>. La tensione magnetica relativa vale  $T_2 = (120 + 2 \cdot 25) \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^4 = 1940 \text{ A}$ .

La f.m.m. totale vale quindi

$$NI = \sum_k T_k = T_o + T_1 + T_2 = 1592 + 86 + 1940 = 3618 \text{ A}$$

La scelta separata del numero di spire e dell'intensità della corrente viene determinata dalla scelta della tensione di alimentazione V della bobina (assumiamo V=100 V). Infatti, detta R la resistenza dell'avvolgimento

$$R = \frac{V}{I} = NR_1 = N\eta \frac{l_m}{A_1}$$

dove  $A_1$  è la sezione della singola spira di resistenza  $R_1$  ed  $l_m$  è la lunghezza media della spira, pari nel nostro caso a  $[(70+90+100)/2] = 130 \text{ mm}$ . La sezione della singola spira è pari alla sezione disponibile A (15mm \* 60 mm), corretta da un fattore di riempimento k che possiamo assumere pari a 0.6, divisa per il numero di spire. Avremo quindi

$$\frac{V}{I} = N\eta \frac{l_m}{kA} = N^2 \eta \frac{l_m}{kA}$$

da cui

$$\frac{V}{(NI)\eta \frac{l_m}{kA}} = N = 6578$$

La resistenza complessiva dell'avvolgimento vale quindi 182 Ω.

La corrente I vale 0,54 A.

Occorre a questo punto procedere ad una *verifica termica*.

La potenza dissipata nell'avvolgimento è  $P = 182 \cdot 0,54 \cdot 0,54 = 53 \text{ W}$ . Se questa potenza fosse smaltita dalla superficie esposta (ferro+avvolgimento), assumendo un coefficiente di trasmissione  $h = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$ , avremo una sovratemperatura media pari a

$$\Delta\theta = \frac{P}{hS} = \frac{53}{15 \cdot 0.0370} = 95 \text{ K}$$

In realtà tale condizione, peraltro abbastanza severa, potrebbe essere ancora peggiore nelle parti interne dell'avvolgimento. Sarebbe quindi prudente utilizzare materiali isolanti resistenti a temperature elevate o migliorare gli scambi termici con l'uso di idonei fluidi refrigeranti (oli minerali).

<sup>36</sup>Questa condizione implica una limitazione al modello di circuito magnetico, in quanto, risultando il ferro alquanto saturo, la struttura ferromagnetica non risulta assimilabile ad un tubo di flusso. A parziale compensazione si può osservare che l'avvolgimento è abbastanza "distribuito" sulla colonna di destra.

§I.18.7 Materiali ferroelettrici – Elettreti

Analogamente ai materiali magnetici, anche i dielettrici possono presentare polarizzazione permanente e fenomeni di isteresi a ciclo campo/spostamento quasi rettangolare (*materiali ferroelettrici*). Trattasi in genere di materiali ceramici quali zirconato di piombo e titanato di piombo, che vengono utilizzate come elementi di memoria.

Si chiamano invece *elettreti* quei materiali in cui la polarizzazione permanente viene forzata in maniera artificiale. I primi elettreti furono formati a partire da una miscela in parti uguali di paraffina (cera d'api) e resina colofonia, fusa e poi solidificata sotto l'azione di un intenso campo elettrico. In questo caso, la polarizzazione si presenta, a regime in qualche ora, omopolare, ossia la carica attestata su una superficie è positivo se l'elettrodo formatore era positivo. Può essere mantenuta una carica di  $20 \text{ mC/m}^2$  per diversi anni. Il comportamento omopolare è attribuito alle cariche intrappolate sulla superficie durante il processo di formazione (quindi un meccanismo ben diverso dai ferroelettrici).

Buoni e robusti elettreti possono essere formati in film di PTFE, PVDF e FEP (fluocopolimero etilen-propilene).

Gli elettreti sono usati nei moderni microfoni, come memorie, come sensori di pressione e vibrazione.