

Prof. Giulio Fabricatore

ELEMENTI DI  
ELETTROMAGNETISMO

PARTE SECONDA

## 2. IL CAMPO MAGNETICO

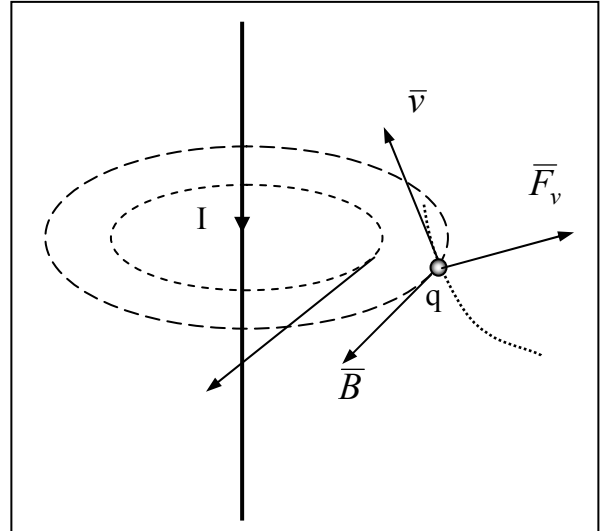
### 2.1. PRIME EVIDENZE SPERIMENTALI

Si abbia un filo (che, per semplicità, supponiamo rettilineo indefinito) nel quale possa circolare una generica corrente stazionaria  $I$ .

Sia  $q$  una carica elettrica che si muova lungo una certa traiettoria con velocità  $v$ .

- In assenza di corrente nel filo, il moto della carica  $q$  è regolato esclusivamente dalle forze “meccaniche” e da quelle del campo elettrico eventualmente presente.
- In presenza di corrente, il moto della carica è deviato per effetto dell’azione di una forza che dipende da un campo che chiameremo (per ragioni storiche che saranno più chiare nel seguito) **campo di induzione magnetica** e che si indica con  $\vec{B}$ . Tale forza, detta anche forza di Lorentz (dal nome del fisico Hendrik Lorentz) è data dalla relazione vettoriale:

$$\vec{F}_v = q\vec{v} \times \vec{B}$$



e risulta, perciò, proporzionale alla carica, alla sua velocità e al vettore campo di induzione magnetica. Si è contraddistinta la forza di Lorentz con il pedice “v” per ricordare come essa sia “avvertita” dalle sole cariche in movimento: la forza di Lorentz si configura, perciò, come un caso di campo elettromotore di natura “elettrodinamica” (v. seg.).

Ci dedicheremo ora a conoscere caratteristiche e proprietà del nuovo campo vettoriale induzione magnetica.

### 2.2. LEGGI FONDAMENTALI DELLA MAGNETOSTATICA

L’esperienza “concettuale” prima descritta mette in evidenza che:

- la corrente elettrica è la “sorgente” del campo induzione magnetica
- il campo di induzione magnetica di una corrente stazionaria è stazionario.

Per ragioni di semplicità si presentano direttamente le leggi fondamentali che descrivono le proprietà del campo  $\vec{B}$ .

- Il campo di induzione magnetica prodotto da una qualunque distribuzione di correnti nel vuoto è solenoidale**, ovvero è nullo il suo flusso uscente da (o entrante in) una qualunque superficie chiusa  $\Sigma$  (come quella di fig. (a)) (*prima legge della magnetostatica*):

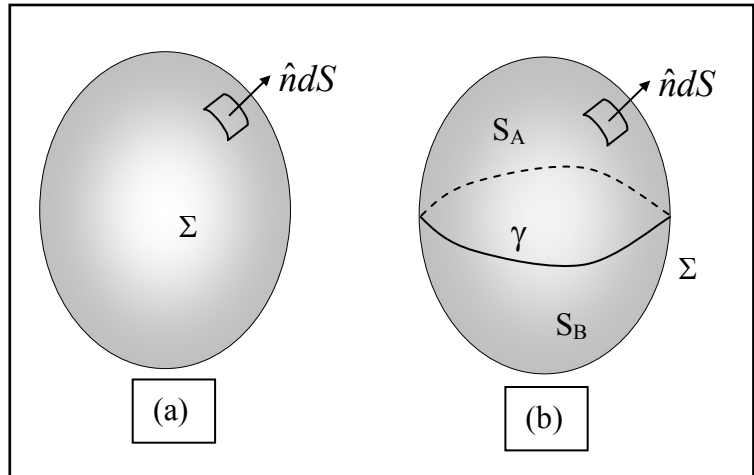
$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (2.1)$$

la proprietà, per il teorema della divergenza e dovendo valere per qualsiasi superficie, può essere espressa in forma “locale”:

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0} \quad (2.2)$$

Diversamente dal caso del campo elettrico (per il quale il teorema di Gauss stabiliva la proporzionalità fra il flusso di  $\mathbf{E}$  attraverso una superficie chiusa  $\Sigma$  e le cariche contenute nel volume racchiuso da  $\Sigma$ ), la proprietà di solenoidalità di  $\mathbf{B}$  esclude la presenza di cariche magnetiche isolate dalle quali possano partire o alle quali possano arrivare linee di campo di  $\mathbf{B}$ .

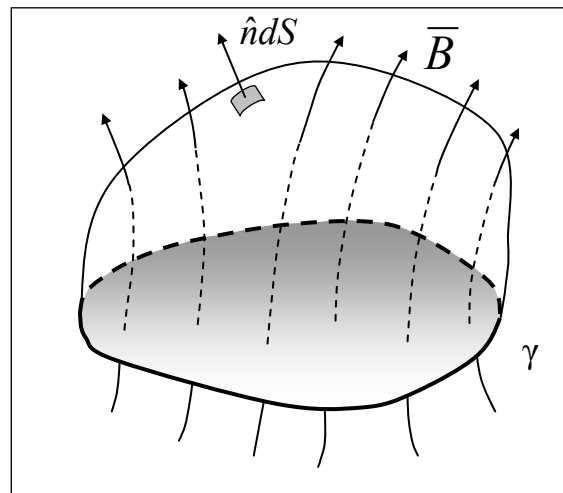
Si consideri ora la figura (b), nella quale la superficie  $\Sigma$  viene divisa da una generica linea  $\gamma$  in due diversi gusci costituiti dalle superfici curve  $S_A$  e  $S_B$  aventi in comune  $\gamma$  ovvero, come si usa dire, “orlate” entrambe da  $\gamma$ .



Avendo lasciato la stessa orientazione della normale alle due superfici parziali (ad esempio quella verso l'esterno) già assunta per  $\Sigma$ , la richiamata proprietà di solenoidalità consente di scrivere:

$$\oiint_{\Sigma} \bar{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_A} \bar{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \iint_{S_B} \bar{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_A} \bar{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_B} \bar{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad \forall (S_A, S_B)$$

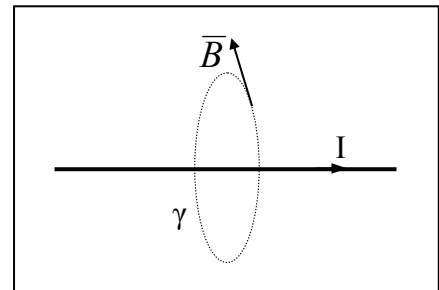
ciò consente di parlare di un flusso di induzione magnetica “concatenato” con la data linea  $\gamma$ , del tutto indipendente dalla specifica superficie attraverso la quale si valuta il flusso, purché orlata da  $\gamma$ .



2. Diversamente dal campo elettrico, **il campo di induzione magnetica è “rotazionale”**: con riferimento a una generica curva chiusa  $\gamma$  nel vuoto:

$$\oint_{\gamma} \bar{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \mu_0 I \quad \text{ovvero} \quad \oint_{\gamma} \bar{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \mu_0 NI \quad (2.3.)$$

(*legge di Ampère* ovvero *seconda legge della magnetostatica*) ove  $\mu_0$  è un coefficiente di proporzionalità (dimensionale) detto **permeabilità magnetica del vuoto**; nei mezzi materiali si parlerà di una permeabilità magnetica  $\mu$  tipica per diverse categorie di materiali.



Nella formulazione di destra si tiene conto del numero di “concatenamenti” con la corrente “sorgente”.

Per il teorema di Stokes:

$$\oint_{\gamma} \bar{B} \cdot \hat{t} dl = \iint_S (\text{rot } \bar{B}) \cdot \hat{n} dS = \iint_S (\nabla \times \bar{B}) \cdot \hat{n} dS \quad (2.4)$$

avendo designato con S una qualunque superficie aperta inclusa nel dominio di definizione del campo induzione magnetica e orlata dal contorno  $\gamma$ .

Ricordando che la corrente “sorgente” I può essere espressa come il flusso attraverso S di un vettore densità di corrente  $\bar{J}$ , si può scrivere:

$$\iint_S (\text{rot } \bar{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \bar{J} \cdot \hat{n} dS. \quad (2.5)$$

Data l'arbitrarietà della linea e della superficie, l'uguaglianza fra gli integrali comporta la relazione

$$\boxed{\text{rot } \bar{B} = \mu_0 \bar{J}} \quad (2.6)$$

che esprime la *seconda legge della magnetostatica in forma “locale”*.

### 2.2.1. CAMPI MAGNETICI PRODOTTI DA SEMPLICI DISTRIBUZIONI DI CORRENTE

#### 2.2.1.A. Filo rettilineo indefinito

Il campo **non può essere ad andamento radiale**, perché in tal caso non sarebbe solenoidale ed inoltre avrebbe circuitazione nulla, come il campo elettrico.

Il campo **non può neanche essere uniforme** e, ad esempio, parallelo al conduttore: in tal caso, infatti, non si annullerebbe all'infinito nelle direzioni ortogonali al filo,

Il campo deve, perciò, avere un andamento tale da essere in ogni punto tangente alla circonferenza che, con centro sul filo, passa per quel punto. Un tale campo è di tipo cilindrico; le sue linee di campo sono, dunque, linee chiuse costituite da circonferenze concentriche che soddisfano sia la condizione di solenoidalità che quella di circuitazione non nulla.

In particolare, la relazione

$$\oint_{\gamma} \bar{B} \cdot \hat{t} dl = \mu_0 I$$

può essere valutata scegliendo come percorso di integrazione una qualunque circonferenza col centro sul filo. In tal caso il versore della tangente alla circonferenza nel punto P coincide con la linea di forza del campo nello stesso punto e, perciò:

$$\bar{B} // \hat{t} \quad \Rightarrow \quad \bar{B} \cdot \hat{t} = B$$

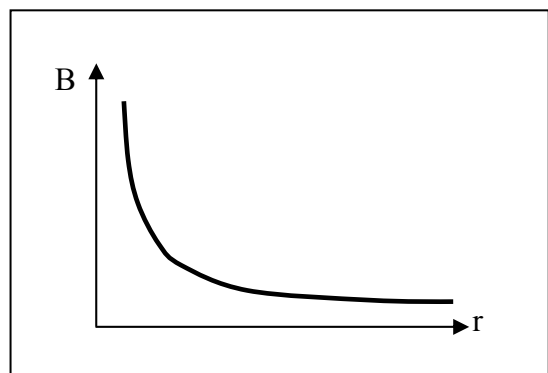
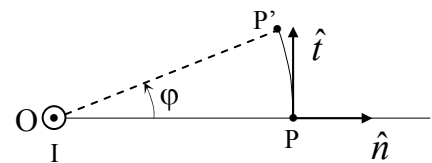
Essendo B indipendente da  $\varphi$ :

$$\oint_{\gamma} \bar{B} \cdot \hat{t} dl = \int_0^{2\pi} B r d\varphi = 2\pi r B,$$

e, quindi, dalla legge di Ampère:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \quad (2.7)$$

Il campo di induzione magnetica varia, così, con legge iperbolica rispetto alla distanza dal filo in cui circola la corrente sorgente I.



### 2.2.1.B. Conduttore rettilineo indefinito a sezione finita

Sia ancora  $I$  la corrente che circola nel conduttore massiccio a sezione circolare di raggio  $R$ ; in esso la conduzione sia caratterizzata da una densità di corrente  $J$  uniforme, costante, cioè, con il raggio  $r$ .

Per evidenti ragioni di simmetria, in un punto fuori dal conduttore ( $r > R$ ) il campo induzione magnetica avrà lo stesso andamento (iperbolico) del conduttore filiforme del caso prima studiato.

Per la determinazione del campo all'interno si può osservare che la corrente che attraversa il cerchio di raggio  $r$  è una aliquota  $i$  della corrente totale  $I$ :

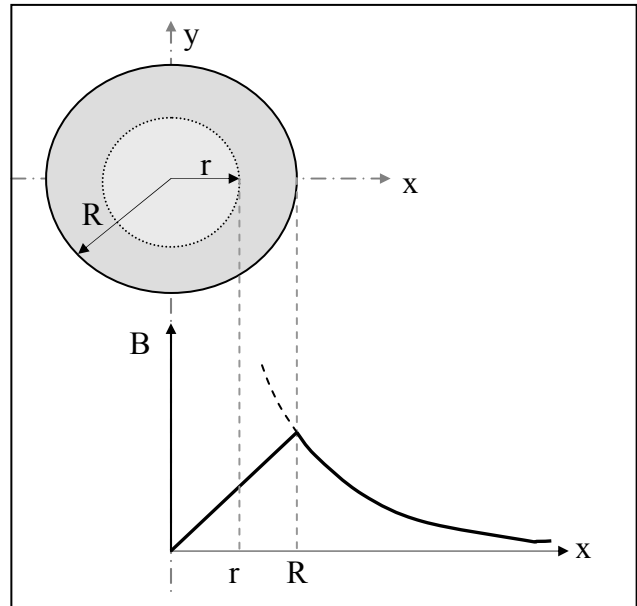
$$i = \frac{r^2}{R^2} I;$$

considerando che, in un sistema di assi cartesiani, la dipendenza dalla variabile  $x$  è del tutto analoga a quella dalla  $y$ , il campo  $B_i$  nei punti interni compresi nella corona circolare fra  $r$  ed  $R$  vale

$$B_i = \mu_0 \frac{|i|}{2\pi x} = \mu_0 \frac{|I|}{2\pi R^2} x \quad (x \leq R) \quad (2.8.)$$

Nei punti entro il conduttore il campo si presenta, dunque, ad andamento lineare, per proseguire, poi, di nuovo ad andamento iperbolico dalla superficie esterna in poi.

Nella formulazione si è assunto il valore assoluto delle correnti per poter prescindere dal senso del campo, dipendente dal valore effettivo (con segno) della corrente.



### 2.2.1.C. Solenoide toroidale

Un solenoide toroidale è costituito da  $N$  spire avvolte in maniera fittamente serrata su un supporto di forma toroidale.

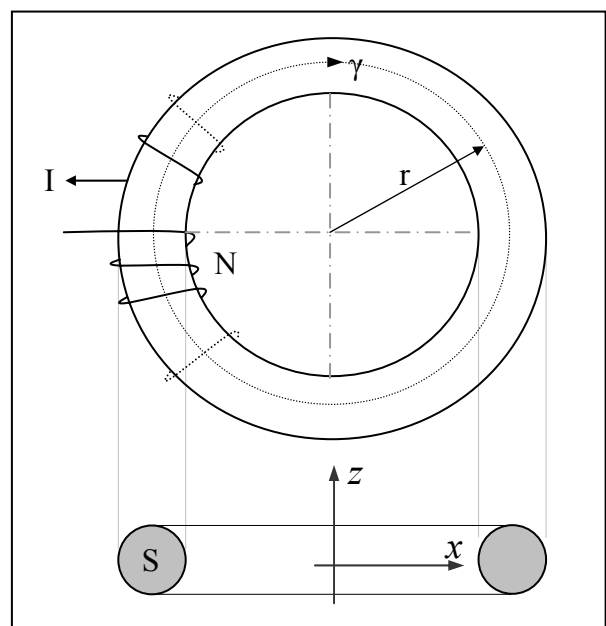
Semplici considerazioni di simmetria portano a concludere che:

- le linee del campo di induzione magnetica sono costituite da circonferenze concentriche contenute in piani ortogonali all'asse  $z$
- il campo è nullo all'esterno del solenoide: una eventuale linea di campo esterna al solenoide non concatenerebbe, infatti, alcuna corrente.

Il campo entro la cavità del solenoide può essere valutato a partire dalla legge di Ampère:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot \hat{t} dl = B 2\pi r = \mu_0 N I$$

avendo indicato con  $r$  il raggio della circonferenza



$\gamma$  lungo la quale si è valutata la circuitazione di  $\mathbf{B}$ ,  $N$  il numero di spire e  $I$  la corrente circolante nel solenoide e, perciò, in ciascuna delle  $N$  spire, disposte tutte in serie.

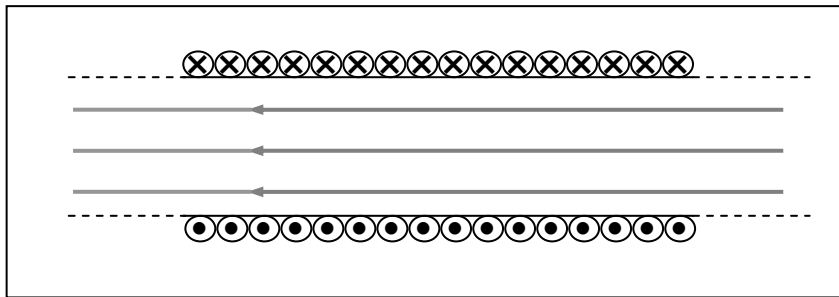
Si ottiene, pertanto:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}. \quad (2.9.)$$

All'interno dell'avvolgimento toroidale il campo non dipende dalla forma della sezione del toroide ma solo dalla corrente totale  $NI$  e dalla distanza dall'asse (coincidente con l'asse  $z$ ): il campo coincide, dunque, con quello prodotto da una corrente circolante in un conduttore filiforme posto sull'asse  $z$  e di intensità pari proprio a  $NI$ .

### 2.2.1.d. Solenoide rettilineo indefinito

Costituito da numerosissime spire fittamente avvolte su un supporto cilindrico (di sezione qualsiasi), può essere considerato derivante dal solenoide toroidale al tendere all'infinito del suo diametro.



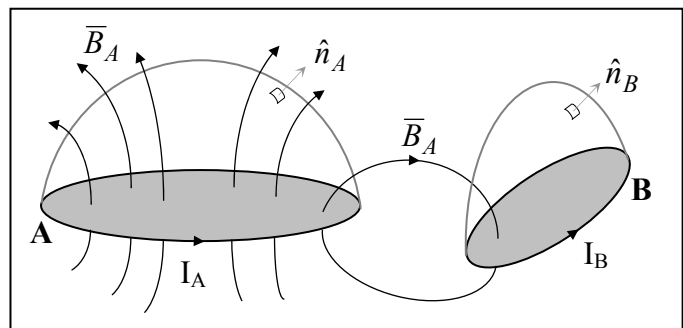
Sulla base dei risultati ottenuti prima si può dire che il campo di induzione magnetica

- è confinato entro il solenoide, essendo nullo fuori
- risulta uniforme diretto lungo l'asse del solenoide, con verso coerente con la solita regola del cavatappi
- presenta il valore

$$B = \mu_0 n I \quad \left[ n = \frac{N}{l} \text{ (spire per unità di lunghezza)} \right] \quad (2.10.)$$

## 2.3. COEFFICIENTI DI AUTO E MUTUA INDUZIONE

La corrente  $I_A$  che percorre il circuito orientato  $A$  è sorgente di un campo di induzione magnetica; definiamo autoconcatenato il flusso di induzione relativo al vettore induzione magnetica generato da  $I_A$  e concatenato con lo stesso circuito nel quale circola la corrente sorgente: come sappiamo, il flusso autoconcatenato dipende solo dalla "geometria" del circuito ed è indipendente dalla superficie (qualsiasi, purché orlata dal circuito considerato) attraverso la quale si valuta il flusso di induzione.



Se i riferimenti per la corrente e quello per il versore della normale alla superficie sono coerenti (ad esempio, secondo la solita regola del cavatappi), ad una corrente positiva corrisponde un flusso autoconcatenato positivo.

Si definisce *coefficiente di autoinduzione* (ovvero *autoinduttanza* o, ancora più brevemente, *induttanza*) del circuito  $A$ , e si indica con " $L_A$ ", il rapporto

$$L_A = \frac{\Phi_A}{I_A} \quad (2.11.)$$

Per come è stata definita, l'induttanza è intrinsecamente positiva.

### 2.3.1. ACCOPPIAMENTO MUTUO

Si consideri ora la presenza di un secondo circuito orientato (che indicheremo con "B"): si dirà che i due circuiti A e B sono *mutamente accoppiati* se, avendo alimentato il primo circuito con la solita corrente  $I_A$ , è diverso da zero il flusso di induzione concatenato con il secondo circuito, valutato, come al solito, attraverso una qualunque superficie orlata dal circuito.

In perfetta analogia con la definizione di coefficiente di autoinduzione, si definisce *coefficiente di mutua induzione* (o *mutua induttanza*) su B da parte di A, e si indica con  $M_{BA}$ , il rapporto fra il flusso del vettore induzione generato da  $I_A$  e concatenato con B:

$$M_{BA} = \frac{\Phi_{BA}}{I_A} \quad (2.12.)$$

In maniera del tutto reciproca si definisce la mutua induttanza  $M_{AB}$  su A da parte di B:

$$M_{AB} = \frac{\Phi_{AB}}{I_B} \quad (2.13.)$$

Per ragioni di simmetria i due coefficienti così definiti coincidono, sicché si può far riferimento ad un unico valore di mutua induttanza per due circuiti mutuamente accoppiati:

$$M_{AB} = M_{BA} = M. \quad (2.14.)$$

Data l'assoluta indipendenza delle orientazioni dei due circuiti, la mutua induttanza, a differenza della autoinduttanza, può avere segno sia positivo che negativo: per i due circuiti riportati in figura, ad esempio, è facile verificare che la loro mutua induttanza, a prescindere dal valore, presenta segno negativo.

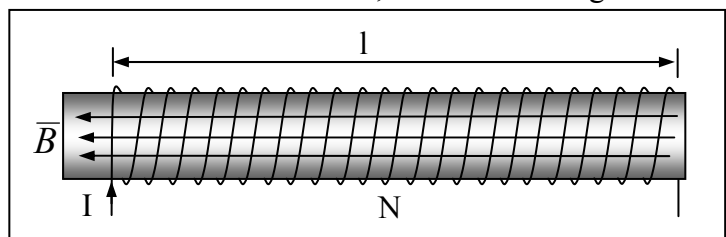
### 2.3.2. Autoinduttanza del solenoide "lungo"

Attesa l'impossibilità di ottenere un solenoide rettilineo indefinito, si definirà "lungo" un solenoide che presenti lunghezza molto maggiore della dimensione trasversale tipica.

Se si prescinde da quanto accade alle estremità del solenoide e lo si immagina costituito da  $N$  spire fittamente serrate e uniformemente distribuite, si può ritenere che il campo al suo interno, con buona approssimazione e in zone non troppo prossime alle estremità, abbia il valore già trovato per il solenoide rettilineo indefinito:

$$B = \mu_0 n I \quad \left[ n = \frac{N}{l} \text{ (spire per unità di lunghezza)} \right] \quad (2.15.)$$

L'induttanza andrebbe determinata valutando il flusso del vettore di induzione prodotto da una corrente circolante nelle  $N$  spire del solenoide attraverso una superficie che abbia il solenoide come bordo: un'operazione che si intuisce subito decisamente complessa.



A patto che il solenoide sia davvero “lungo”, non si commette, però, un errore apprezzabile se si considera il flusso  $\Phi_N$  totale pari a  $N$  volte il flusso unitario  $\Phi_u$ , concatenato, cioè, con ciascuna delle  $N$  spire:

$$\Phi_N = N\Phi_u$$

Essendo il campo di induzione uniforme in qualunque punto della sezione retta  $S$  del solenoide e diretto secondo l'asse del solenoide, i flussi possono essere valutati semplicemente:

$$\Phi_u = BS = \mu_0 nIS = \mu_0 \frac{N}{l} IS \quad \Rightarrow \quad \Phi_N = N\Phi_u = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS$$

Si ricava, pertanto:

$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \quad (2.16.)$$

## 2.4. INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Un qualsiasi percorso orientato tridimensionale  $C$  concatenato con un flusso di induzione variabile nel tempo  $\varphi_C(t)$  diventa sede di una f.e.m. distribuita sull'intera lunghezza di  $C$  e dipendente dalla derivata del flusso (*legge di Faraday*):

$$e_i(t) = \oint_C \bar{E}_i \cdot \hat{t} dl = - \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \bar{B} \cdot \hat{n} dS \right] = - \frac{d\varphi_C}{dt} \quad (2.17.)$$

Come al solito,  $S$  è una qualsiasi superficie che ha il percorso  $C$  come contorno,.

La legge appena esposta afferma che una variazione temporale del campo di induzione magnetica determina/induce un campo elettrico  $\bar{E}_i$  (in realtà si tratta di un *campo elettromotore*) presente in tutto lo spazio, indipendentemente dal fatto che in questo spazio esista o meno un circuito materiale, costituito, cioè, da un filo conduttore. Nel caso in cui sia presente un circuito “materiale” chiuso, la *f.e.m. indotta* determina la circolazione di una *corrente indotta*.

In presenza di un circuito elettrico chiuso, concatenato con un flusso di induzione variabile nel tempo, la legge appena enunciata comporta che esso diventi sede di una f.e.m. distribuita di segno tale che la corrente indotta che essa fa circolare tende a neutralizzare la causa che l'ha generata (cioè la variazione di flusso) (*legge di Lenz*), che può essere scritta in una forma che, come al solito, dipende dalla convenzione fatta sul circuito:

$$e_i = - \frac{d\varphi_C}{dt} \quad (\text{convenzione del generatore}) \quad (2.18.)$$

$$v_i = \frac{d\varphi_C}{dt} \quad (\text{convenzione dell'utilizzatore}) \quad (2.19.)$$

Alla grandezza “ $e_i$ ” si dà il nome di *forza elettromotrice indotta* mentre “ $v_i$ ” viene indicata come *tensione indotta*.

**È fondamentale sottolineare che il fenomeno dell'induzione è del tutto indipendente dalle molteplici, ed, eventualmente, concomitanti, cause che sono all'origine della variazione temporale del flusso.**

**Si può, ad esempio, ottenere un flusso variabile:**

- **facendo circolare in un circuito “sorgente” del campo una corrente variabile nel tempo oppure**
- **facendo circolare nel circuito sorgente una corrente stazionaria e muovendo l'intero circuito nello spazio**
- **modificando la geometria del circuito.**

**In ogni caso nel circuito considerato si registrerà il fenomeno dell'induzione, senza, peraltro, poter discriminare a quale origine sia precisamente riferibile.**

Si consideri un circuito orientato  $C$ ,

- magneticamente isolato (sottratto, cioè, all'influenza di campi di induzione estranei),



- percorso da una corrente variabile nel tempo  $i(t)$  e
- caratterizzato da una induttanza  $L$ .

Il flusso di induzione  $\varphi_C$  autoconcatenato con  $C$ , anch'esso variabile nel tempo, sarà ancora legato alla corrente attraverso l'induttanza  $L$ :  $\varphi_C = Li(t)$ .

La variabilità del flusso autoconcatenato determina la comparsa di una f.e.m. autoindotta, che, nel caso di  $L$  costante (in relazione ad una costanza della geometria del circuito) può essere espressa come:

$$e_i = -\frac{d\varphi_C}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (\text{convenzione del generatore}) \quad (2.20.)$$

$$v_i = \frac{d\varphi_C}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (\text{convenzione dell'utilizzatore}) \quad (2.21.)$$

## 2.5. UNITÀ DI MISURA

Sulla base di quanto detto finora si ricava:

$$[\Phi] = [V_s] = [Weber] = [Wb]$$

$$[B] = [\Phi \cdot m^{-2}] = [Wb \cdot m^{-2}] = [Tesla] = [T]$$

$$[L] = [\Phi \cdot I^{-1}] = [V_s \cdot A^{-1}] = [\Omega s] = [Henry] = [H]$$

$$[\mu] = [B \cdot m \cdot I^{-1}] = [V_s \cdot m^{-1} \cdot A^{-1}] = [\Omega \cdot s \cdot m^{-1}] = [H \cdot m^{-1}]$$

Nel Sistema Internazionale la permeabilità del vuoto vale

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

## 2.6. F.E.M. DOVUTA A MOVIMENTO

Si consideri il circuito piano di figura, nel quale viene evidenziato il tratto elementare orientato  $\hat{t}dl$  libero di scorrere su due "guide" con una traslazione ortogonale a velocità  $\mathbf{v}$ , in modo da percorrere nel tempuscolo  $dt$  il tratto  $ds = vdt$  ortogonalmente.

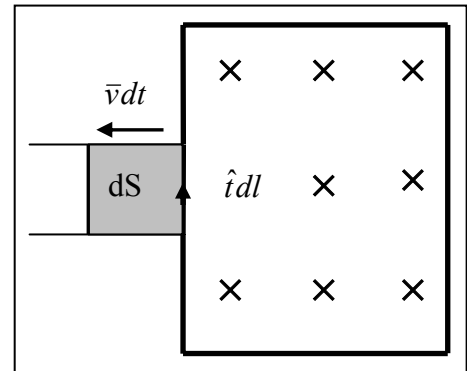
Il circuito sia immerso in un campo di induzione magnetica diretto verso il piano del foglio e supposto, per semplicità, uniforme.

A seguito dello spostamento del lato mobile si avrà una variazione della geometria del circuito e, perciò, del flusso di induzione con esso concatenato:

$$d\Phi = \bar{B} \cdot \hat{n}dS,$$

ove il vettore relativo alla superficie elementare orientata  $dS$  è dato dal prodotto vettoriale:

$$\hat{n}dS = \bar{v}dt \times \hat{t}dl.$$



La variazione di flusso concatenato con l'intero circuito diventa:

$$d\Phi = \bar{B} \cdot \bar{v} dt \times \hat{t} dl.$$

Dividendo per dt e applicando le regole del *prodotto misto di tre vettori*, si ottiene l'espressione della f.e.m. indotta sul circuito per effetto della variazione di flusso concatenato:

$$de = -\frac{d\Phi}{dt} = -\bar{B} \cdot \bar{v} \times \hat{t} dl = -\bar{B} \times \bar{v} \cdot \hat{t} dl = \bar{v} \times \bar{B} \cdot \hat{t} dl \quad (2.22.)$$

La scrittura ottenuta tiene conto dell'angolo formato dalle linee di B con il piano contenente il circuito; nel caso di ortogonalità, il modulo della f.e.m. assume l'espressione semplice

$$|de| = vBdl.$$

Coerentemente con la cosiddetta "rappresentazione di Faraday" del campo di induzione, il risultato ottenuto può essere enunciato in maniera espressiva dicendo che la f.e.m. indotta corrisponde al numero di linee di flusso di induzione "tagliate" nell'unità di tempo. Questo giustifica l'espressione piuttosto comune secondo la quale si dice che la f.e.m. è legata al "flusso tagliato".

## 2.7. CAMPO ELETTROMOTORE DOVUTO A CARICA IN MOVIMENTO

Come si è già visto, una carica q in movimento con velocità v in un campo di induzione magnetica B è soggetta alla cosiddetta forza di Lorentz

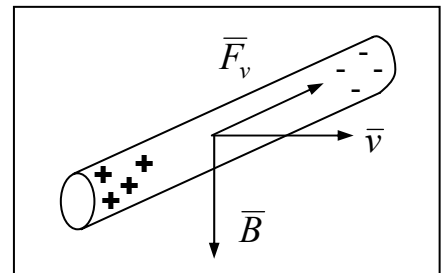
$$\bar{F}_v = q\bar{v} \times \bar{B} \quad (2.23.)$$

Il campo elettrico di Lorentz si ottiene dividendo, come al solito, la forza per la carica:

$$E_v = \bar{v} \times \bar{B}. \quad (2.24.)$$

Se a muoversi nel campo di induzione è un conduttore, la forza di Lorentz agirà sulle cariche libere (di conduzione) in esso contenute determinandone la separazione: le due cariche dei due segni si allontaneranno addensandosi ciascun tipo ad una delle due estremità.

In seguito a ciò si stabilirà un campo elettrico il cui valore è tale da fare equilibrio al campo elettromotore dovuto alla forza di Lorentz.



## 2.8. EFFETTI MECCANICI DEL CAMPO MAGNETICO

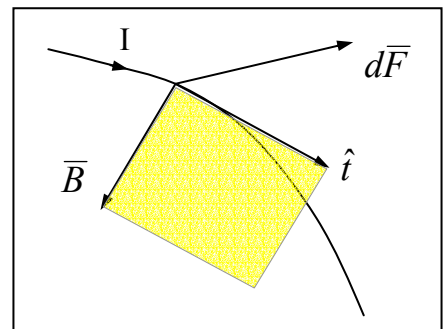
### 2.8.1. FORZA ELEMENTARE

Una importante proprietà del campo di induzione magnetica è la sua capacità di interagire meccanicamente con una corrente elettrica.

Un campo di induzione magnetica esercita, infatti, su un elemento di corrente Idl la forza elementare

$$d\bar{F} = Idl\hat{t} \times \bar{B} \quad (2.25.)$$

Gli effetti meccanici del campo sono indipendenti dalla natura specifica della corrente e dall'origine del campo stesso. La corrente può essere costituita, per esempio, da un semplice fascio di elettroni destinati a colpire i fosfori di uno schermo televisivo; il campo, a sua volta, può essere stato generato da una "macrocorrente" in un conduttore, da microcorrenti in un materiale magnetizzato o da un flusso di elettroni in un tubo termoio-



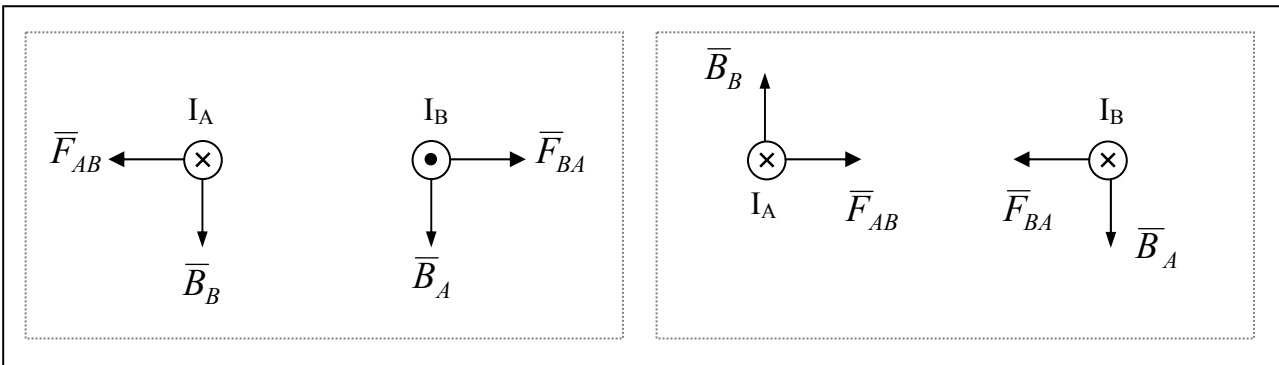
nico a vuoto. L'interazione campo – corrente si manifesta, inoltre, per campo sia stazionario sia tempo variante.

Limitando la nostra attenzione al caso più comune, costituito dalla corrente in un conduttore, è intuitivo dedurre che l'azione sui portatori di carica finisce per trasmettersi al conduttore stesso, in quanto sede – supporto materiale delle cariche. L'interazione descritta comporta, quindi, un effetto *ponderomotore* sui conduttori: le forze in cui questo effetto si concretizza vengono dette forze elettrodinamiche.

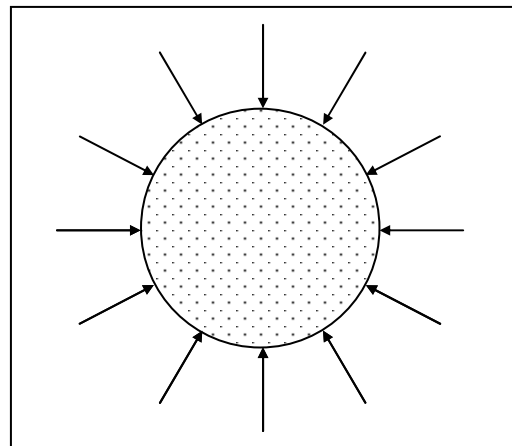
Nel caso, piuttosto generalizzato, in cui i conduttori sede di corrente siano bloccati nella loro posizione o resi comunque rigidi da opportuni vincoli, tali forze sono destinate ad essere bilanciate, almeno nella maggior parte dei casi, da una adeguata reazione vincolare: l'interazione campo – corrente si limita, allora, ad un cosiddetto *sforzo elettrodinamico* che, per correnti e campi di elevato valore, può comportare il cedimento almeno parziale dei vincoli, con i conseguenti prevedibili gravi danni sulla funzionalità impiantistica generale.

### 2.8.2. INTERAZIONI FRA FILI PARALLELI PERCORSI DA CORRENTI

È agevole riconoscere che due conduttori interessati da correnti controverse (nella figura di sinistra) sono soggetti a forze repulsive mentre due correnti equiverse (a destra nella figura) determinano forze attrattive.



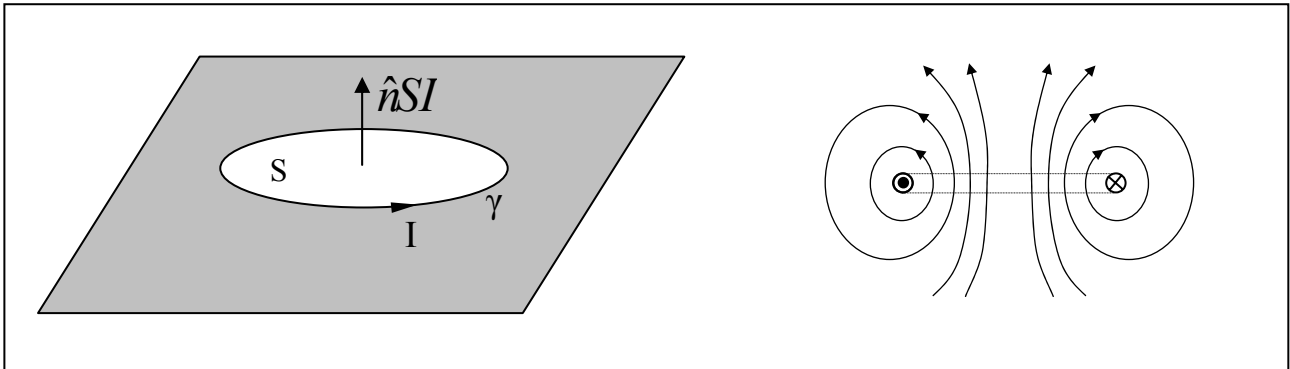
Un conduttore massiccio, sede di un campo di corrente, indipendentemente dalla forma della sezione, può essere immaginato come l'insieme di correnti elementari equiverse: l'interazione fra queste correnti produce una forza di attrazione che si trasforma in uno sforzo di “strizione” del conduttore, sottoposto, perciò, ad una sorta di “pressione elettrodinamica”. Tale pressione è del tutto priva di effetti pratici nei conduttori ordinari ma può avere conseguenze di rilievo nel caso di conduttori “particolari” (come il mercurio, liquido alla ordinaria temperatura ambientale) caratterizzati da forze di coesione strutturale relativamente labili.



### 2.8.3. AZIONE SU UNA SPIRA LIBERA DI RUOTARE INTORNO A UN ASSE

Si consideri una spira piana

- costituita da un conduttore filiforme percorso dalla corrente  $I$ :
- tale da individuare sul piano di appoggio la superficie  $S$  delimitata dal contorno orientato  $\gamma$



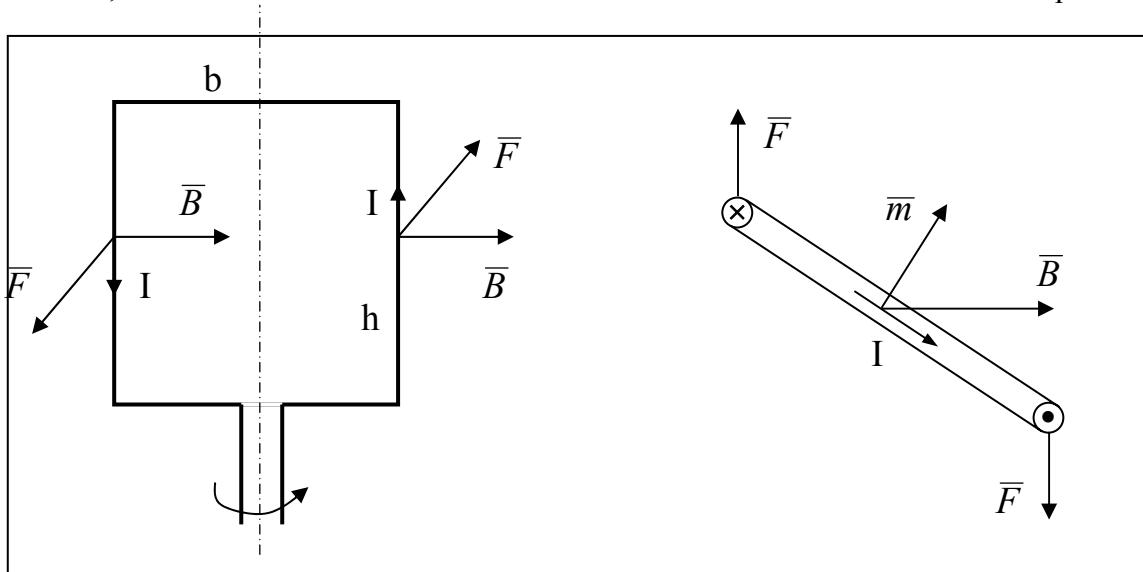
Definiamo momento magnetico della spira il vettore avente

- **modulo**  $m$  pari al prodotto della superficie  $S$  per la corrente ( $m = SI$ ).
- **direzione** ortogonale al piano della spira
- **verso** coerente con la cosiddetta regola del cavatappi (o della vite destrorsa) rispetto alla orientazione della spira, come, d'altronde, evidenziato dalla figura di sinistra.

La figura di destra riporta una sezione della spira ortogonale al piano di appoggio; si noti che, per ovvie ragioni di "disegnabilità" il conduttore della spira è stato supposto a sezione finita e, nel caso specifico, circolare, in modo da poter indicare l'orientazione della spira con la solita convenzione, evidenziata da una "x" per la "coda" e da un punto pieno "•" per la punta della freccia.

Si sono disegnate alcune plausibili linee del campo di induzione coerentemente con la regola della vite destrorsa.

Si supponga ora di aver posto in un campo di induzione magnetica (per semplicità, uniforme) una spira piana rettangolare, di lati  $b$  ed  $h$ , percorsa dalla corrente  $I$ ; se la spira è vincolata ad un asse di rotazione, le forze elettrodinamiche derivanti dalla interazione fra corrente e campo di indu-



zione magnetica produrranno una coppia motrice  $C$  che fa ruotare la spira; tale coppia è data dal prodotto vettoriale:

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (2.26.)$$

La coppia raggiunge il valore massimo quando la direzione del momento magnetico della spira è ortogonale a quella del campo di induzione:

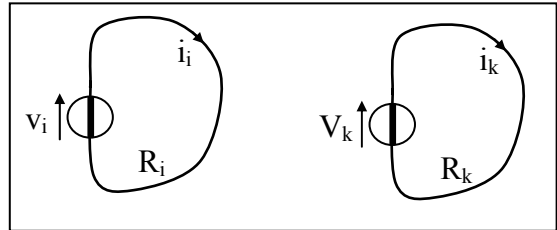
$$C_M = BIbh = BIS.$$

L'azione meccanica illustrata è alla base del funzionamento di un gran numero di dispositivi, fra i quali un tipico esempio sono gli strumenti magnetoelettrici o il cosiddetto "motore a corrente continua".

## 2.9. ENERGIA DI MAGNETIZZAZIONE

Siano N circuiti fissi nello spazio

- alimentati da N generatori  $v_i$
- percorsi da correnti  $i_i$
- dotati di resistenza  $R_i$
- concatenati ciascuno con un flusso di induzione  $\Phi_i$



Se i flussi sono variabili nel tempo, ogni circuito sarà sede di una f.e.m. " $e_i$ " il cui valore è fornito dalla legge di Lenz; la Legge di Kirchhoff delle tensioni applicata a ciascun circuito assume la forma:

$$v_i + e_i = v_i - \frac{d\Phi_i}{dt} = R_i i_i \quad (2.27.)$$

Moltiplicando per  $i_i dt$  otteniamo il bilancio di energie nell'intervallo di tempo elementare  $dt$ :

$$v_i i_i dt = i_i d\Phi_i + R_i i_i^2 dt \quad \Rightarrow \quad dW_g = dW_m + dW_j \quad (2.28.)$$

ovvero: l'energia erogata dal generatore  $dW_g$  consta della somma di una energia  $dW_j$  dissipata per effetto joule nella resistenza di ciascun circuito e di una energia  $dW_m$  assorbita sotto altra forma dal sistema; per l'insieme degli N circuiti si ottiene il valore di questa energia effettuando semplicemente la sommatoria:

$$dW_{mTOT} = \sum_1^N i_i d\Phi_i \quad (2.29.)$$

Supponendo che i l generico flusso in ciascuno degli N circuiti vari da 0 al valore finale  $\Phi_i$ , il sistema assorbe l'energia:

$$W_m = \sum_1^N \int_0^{\Phi_i} i_i d\Phi_i \quad (2.30.)$$

che viene indicata come *energia di magnetizzazione*.

Nel caso di un solo circuito, per il quale può porsi  $\Phi = Li$ , nell'ipotesi di coefficiente di autoinduzione costante, l'energia di magnetizzazione può esprimersi in funzione del livello di corrente:

$$W_m = \int_0^{\Phi} i d\Phi = \int_0^I i d(Li) = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} LI^2. \quad (2.31.)$$

## 2.10. CAMPO MAGNETICO E MEZZI MATERIALI

### 2.10.1. IL CAMPO MAGNETICO H

Le proprietà magnetiche della materia possono essere riferite al momento magnetico elementare delle orbite elettroniche, del genere postulato nel semplice modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, costituito da un nucleo intorno al quale "ruota", in una propria orbita, un elettrone. Immaginando, per semplicità, l'orbita piana e sempre identica, caratterizzata da un periodo T, la rotazione dell'elettrone, di carica e, può essere assimilata ad una corrente elementare  $i = e/T$ .

Ad ogni atomo e alla corrente elementare può, perciò, essere associato un momento magnetico elementare  $m$  del tutto analogo a quello sopra definito.

In condizioni normali i vari momenti magnetici presenti in un volume finito di un dato materiale si trovano orientati secondo direzioni del tutto casuali, senza alcuna conseguenza sulle proprietà magnetiche in senso macroscopico.

In alcuni materiali (quelli che si diranno, poi, "ferromagnetici") è possibile "orientare", in diverso grado, i momenti magnetici elementari che, colla somma dei loro contributi resi più coerenti, possono alterare in misura anche notevole le proprietà complessive del materiale: un comportamento che viene indicato come polarizzazione magnetica, o *magnetizzazione*, e che ricorda, per più versi, la polarizzazione elettrica dei dielettrici alla quale si è fatto cenno a proposito del campo elettrico.

Si può ricondurre il fenomeno globale della magnetizzazione a un grandezza vettoriale specifica introducendo la cosiddetta intensità di magnetizzazione nel generico punto P (momento magnetico per unità di volume)

$$\bar{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{m}}{\Delta\tau} \quad (2.32.)$$

come limite del rapporto fra il momento magnetico elementare e il volumetto considerato del materiale, al tendere a zero di tale volumetto.

Indicando con

$\bar{m}$  il valore medio del momento magnetico elementare

N il numero di atomi per unità di volume

si ha

$$\bar{M} = N\bar{m} \quad (2.33.)$$

Si consideri ora la generica area elementare  $\Delta S$  entro il materiale considerato; come si è già fatto per la ordinaria corrente di conduzione, indichiamo stavolta con  $I_m$  (corrente "molecolare") la corrente microscopica netta attraverso  $\Delta S$ , ovvero la somma algebrica di tutte le correnti microscopiche che attraversano la superficie  $\Delta S$ . Si può, allora, definire una densità di corrente molecolare (di modulo  $J_m$ ) nel mezzo materiale:

$$[\bar{J}_m]_n = \bar{J}_m \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{I_m}{\Delta S} \quad (2.34.)$$

avendo indicato, come al solito, con  $\hat{n}$  il versore della normale alla superficie  $\Delta S$ .

La seconda legge della magnetostatica dovrà quindi essere modificata per includere il contributo della corrente molecolare; indicando con  $I_c$  la corrente di conduzione si scriverà:

$$\oint_{\gamma} \bar{B} \cdot \hat{t} dl = \mu_0 (I_c + I_m); \quad (2.35.)$$

indicando con  $J_c$  la densità di corrente di conduzione, si avrà l'espressione in forma locale

$$\text{rot } \bar{B} = \mu_0 (\bar{J}_c + \bar{J}_m); \quad (2.36.)$$

$$\frac{\text{rot } \bar{B}}{\mu_0} = \bar{J}_c + \bar{J}_m \quad \Rightarrow \quad \bar{J}_c = \frac{\text{rot } \bar{B}}{\mu_0} - \bar{J}_m. \quad (2.37.)$$

Associando il rotore del vettore magnetizzazione alla densità di corrente molecolare  $[\text{rot } \bar{M} = \bar{J}_m]$  si ha:

$$\text{rot} \left( \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \right) = \bar{J}_c. \quad (2.38.)$$

Introducendo il vettore **intensità di campo magnetico**

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \quad (2.39.)$$

si potrà scrivere la seconda legge della magnetostatica

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J}_c \quad \text{in forma locale} \quad (2.40.)$$

$$\oint_{\gamma} \bar{H} \cdot \hat{t} dl = I_c \quad \text{in forma integrale} \quad (2.41.)$$

Le dimensioni del nuovo campo saranno:

$$[H] = [A/m].$$

Il vantaggio del nuovo vettore è che esso consente una descrizione dei fenomeni di tipo magnetico legata esclusivamente alle correnti totale “esterne”, diverse, cioè, da quelle “interne” che abbiamo anche definito “molecolari”.

Pur confermandosi il carattere fondamentale del campo induzione magnetica, il campo magnetico H finisce per essere usato come riferimento per la magnetostatica, legato com'è alle correnti, sulle quali possiamo esercitare un controllo semplice ed immediato.

Dalla prima legge della magnetostatica

$$\text{div } \bar{B} = 0 \quad \text{div} [\mu_0 (\bar{H} + \bar{M})] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div } \bar{H} = -\text{div } \bar{M}. \quad (2.42.)$$

In presenza di mezzi materiali, dunque,

- il campo B rimane solenoidale
- i campi M ed H in genere non lo sono.

## 2.10.2. ENERGIA DI MAGNETIZZAZIONE SPECIFICA

Si vuole ora mostrare come dell'energia magnetica evidenziata in §2.9. si possa dare un'espressione riferita alle cosiddette grandezze specifiche B ed H.

Si indichi con  $d\mathbf{B}$  la variazione elementare dell'induzione magnetica che si verifica in tutti i punti dello spazio quando i flussi concatenati varino di  $d\Phi_i$ ; se si considera l'elemento  $d\tau$  di volume elementare del generico tubo i flusso del vettore induzione magnetica, la quantità

$$\bar{H} \cdot d\bar{B} d\tau \quad (2.43.)$$

appare omogenea con una variazione elementare di energia nel volume elementare  $d\tau$ .

Integrata prima sull'intero tubo di flusso e sommando, poi, i contributi di tutti i tubi su tutto lo spazio, si ottiene, in base al teorema di circuitazione applicata agli N circuiti di §2.9.:

$$\iiint_{\tau} (\bar{H} \cdot d\bar{B}) d\tau = \sum_1^N i_i d\Phi_i \quad (2.44.)$$

Si può concludere, dunque, che per produrre punto per punto una variazione  $dB$  dell'induzione magnetica in un campo di intensità H si deve impegnare l'energia specifica:

$$dW_m = (\bar{H} \cdot d\bar{B}) d\tau \quad (2.45.)$$

per l'unità di volume la variazione di energia specifica:

$$dw_m = \bar{H} \cdot d\bar{B} \quad (2.46.)$$

e, per un processo di magnetizzazione che porta il campo di induzione da 0 a B:

$$w_m = \int_0^B \bar{H} \cdot d\bar{B} \quad (2.47.)$$

si ottiene, così la energia di magnetizzazione specifica totale per unità di volume.

### 2.10.3. CARATTERIZZAZIONE MAGNETICA DEI DIVERSI MEZZI

Relativamente al loro comportamento quando siano investiti da un campo di induzione magnetica, i diversi materiali possono essere classificati in tre grandi gruppi

- diamagnetici** sono quelli che reagiscono con una magnetizzazione piuttosto debole di segno opposto a quella del campo esterno (ad es.: Cu, Ag, Bi, Au, C, Cd, Hg, Pb, Si)
- paramagnetici** sono quelli che presentano una magnetizzazione debole concorde con quella del campo esterno (ad es.: Pt, Mg, Al, Cr, Mn, Sn, V, W)
- ferromagnetici** (Fe, Ni, Co) sono quelli che subiscono una magnetizzazione intensa (o, anche, molto intensa) concorde col campo esterno e che, inoltre, presentano i fenomeni peculiari del magnetismo residuo e dell'isteresi, dei quali si parlerà nel seguito.

Allo scopo di pervenire ad una relazione "costitutiva" fra B ed H, si osservi che, per la maggior parte dei materiali non ferromagnetici la magnetizzazione è proporzionale e parallela al campo magnetico H:

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H} \quad (2.48.)$$

ove la costante dimensionale  $\chi_m$ , chiamata *suscettività magnetica* del materiale, è una misura della di come il dato materiale sia suscettibile ad essere magneticamente polarizzato da un campo esterno:

$$\begin{aligned} \chi_m < 0 & \text{ per i materiali diamagnetici} \\ \chi_m > 0 & \text{ per i materiali paramagnetici} \end{aligned}$$

Una relazione analoga alla (2.48) può essere scritta anche per un materiale ferromagnetico, tenendo presente, però, che per questi  $\chi_m$  è funzione di H e della sua precedente "vicenda" magnetica, come si chiarirà tra breve.

Se sostituiamo la (2.48) nella (2.39), otteniamo:

$$\bar{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \bar{H} = \mu \bar{H} \quad (2.49.)$$

Il coefficiente

$$\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (2.50.)$$

viene definito **permeabilità magnetica** del materiale considerato; di norma esso viene determinato per via sperimentale.

Per materiali diamagnetici e paramagnetici la permeabilità magnetica  $\mu$  differisce da quella del vuoto  $\mu_0$  di un ammontare che, per le applicazioni pratiche, risulta assolutamente trascurabile: il bismuto, ad esempio, per il quale la proprietà diamagnetica si presenta più intensa, presenta un valore  $\mu=0,99983\mu_0$  mentre per l'alluminio si ha  $\mu=1,00002\mu_0$ .

Facendo riferimento alla permeabilità magnetica del vuoto, si definisce la **permeabilità magnetica relativa**:

$$\mu_r = \mu/\mu_0.$$



Per i materiali ferromagnetici  $\mu$  è molto più grande di  $\mu_0$  ( $\mu_r \gg 1$ ), anche di oltre  $10^5$  volte. Una caratteristica assolutamente peculiare di questi materiali è la mancanza di un valore univoco della permeabilità magnetica a causa della loro spiccata non linearità.

La scelta di un dato materiale ferromagnetico, in vista di fini specifici, può essere ragionevolmente effettuata solo attraverso la conoscenza della sua cosiddetta *caratteristica magnetica*, ovvero il grafico che si ottiene misurando B e riportando il risultato dei rilievi in un diagramma sul piano (H, B).

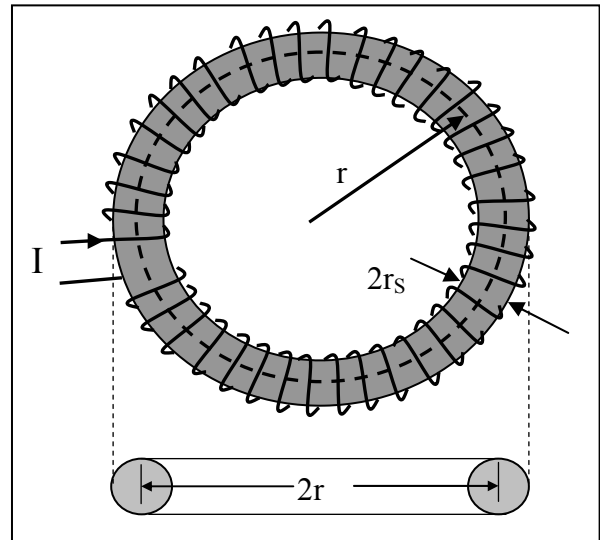
#### 2.10.4. LA CURVA (H-B)

Si immagini di sottoporre un campione (di forma anulare) del materiale all'azione del campo magnetico prodotto dalle N spire di un solenoide toroidale strettamente e fittamente avvolte intorno.

La sezione retta del toroide abbia forma circolare di raggio  $r_s$  e sia r il raggio medio del toroide, supposto molto maggiore di  $r_s$  in modo che la lunghezza di qualunque circonferenza entro il toroide possa essere assunta pari a  $2\pi r$ .

Come si è già visto in 2.2.1.C, le linee del vettore H, per ragioni di simmetria sono circolari e coassiali; l'intensità di H, a distanza r dal centro del toroide vale:

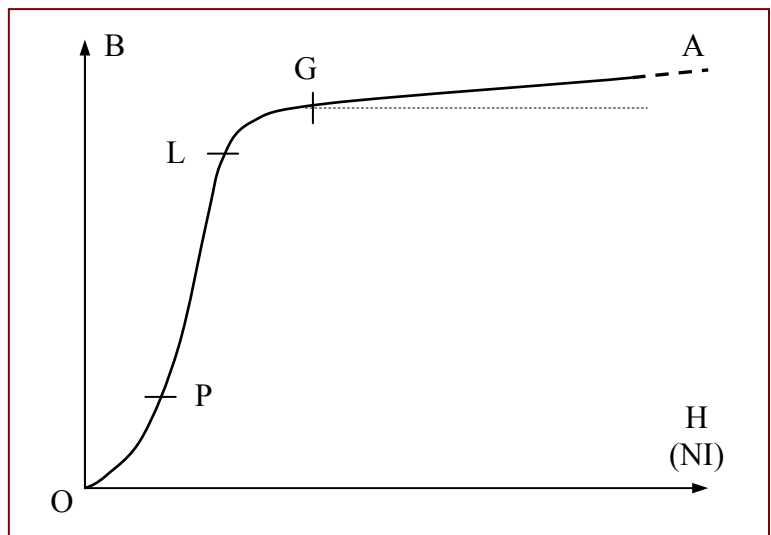
$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$



Se, all'inizio dell'analisi che si sta per descrivere il campione si trovava in uno stato non magnetizzato, la caratteristica magnetica (detta anche "*caratteristica di prima magnetizzazione*") parte dal punto O, origine degli assi, per proseguire nella forma tipica riportata in figura.

Sono da evidenziare i tratti fondamentali:

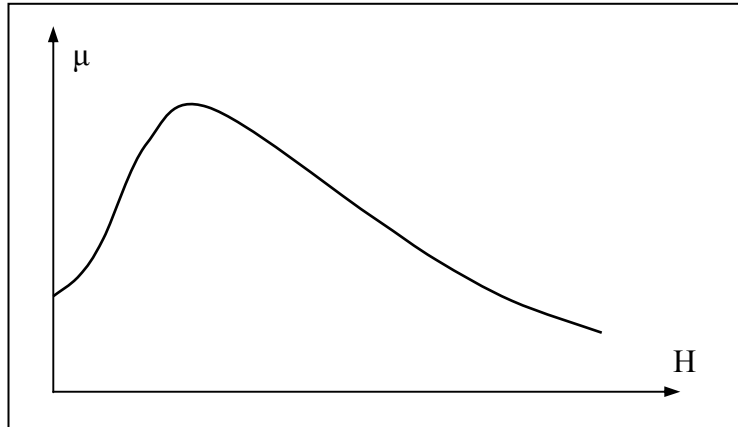
- OP** detto piede della curva
- PL** tratto approssimativamente lineare
- LC** detto "ginocchio"
- GA** tratto asintotico o di "saturazione"



Come si vede, la perdita di linearità diventa particolarmente marcata verso i valori elevati dell'induzione; la spiegazione semplice è che oltre certi valori dell'induzione si esaurisce il contributo dei cosiddetti domini magnetici interni del materiale: una volta che si sono orientati tutti secondo la direzione del campo esterno, un ulteriore incremento delle amperspire NI magnetizzanti comporta un aumento di B non diverso da quello che si avrebbe nel vuoto. Il tratto di saturazione della curva tende, infatti, asintoticamente verso una retta dotta di una pendenza pari proprio alla permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$ .

Si fa notare esplicitamente che, per ragioni di evidenza grafica, nel diagramma illustrativo riportato si è vistosamente esagerata la pendenza dell'asintoto di saturazione.

Per i materiali ferromagnetici non è possibile fornire un valore univoco della permeabilità magnetica, intesa come rapporto fra induzione e campo magnetico. Si definisce solitamente quale permeabilità magnetica di questi materiali quella che corrisponde ai punti della curva luogo dei vertici dei cicli di isteresi simmetrici; tale permeabilità varia con il campo magnetico, secondo l'andamento tipico tratteggiato nella figura a lato.



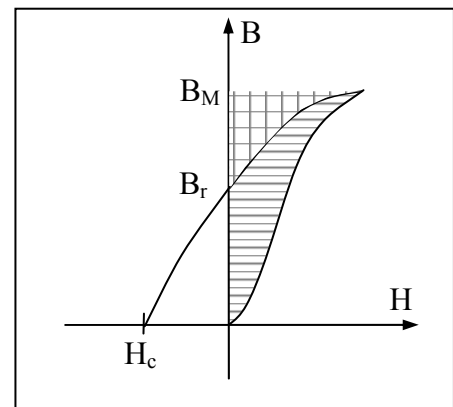
Di particolare importanza applicativa sono alcune speciali leghe dotate di elevata o elevatissima permeabilità magnetica massima, descritte nella tabella seguente.

LEGA	$\mu_{r \max}$	As/cm corrispondenti
PERMALLOY (78,5% Ni + 21,5% Fe)	~ 90.000	~ 0,05
PERMALLOY B (48% Ni + 52% Fe)	~ 20.000	~ 0,20
PERMALLOY C (78,5% Ni + 18% Fe + 3% Mo + 0,5% Mo)	~ 50.000	~ 0,07
HIPERNICK (50% Ni + 50% Fe)	~ 60.000	~ 0,04
MUMETAL (78% Ni + 17% Fe + 5% Cu + 2% Cr)	~ 45.000	~ 0,07
MEGAPERM 4510 (45% Ni + 45% Fe + 10% Mn)	~ 55.000	~ 0,08
MEGAPERM 6510 (65% Ni + 25% Fe + 10% Mn)	~ 25.000	~ 0,08

### 2.10.5. ISTERESI. PERDITE PER ISTERESI

Si supponga di aver magnetizzato il toroide ferromagnetico, prima considerato per la caratteristica magnetica, fino al valore di induzione  $B_M$ ; se ora si fa decrescere la corrente di eccitazione circolante nell'avvolgimento fino a ridurla a 0, la caratteristica magnetica non ripercorre la caratteristica di prima magnetizzazione ma si sviluppa secondo un diverso percorso, che si conclude nel punto  $(0, B_r)$ : il materiale presenta, così un valore di "induzione residua" che lo rende un "magnete permanente".

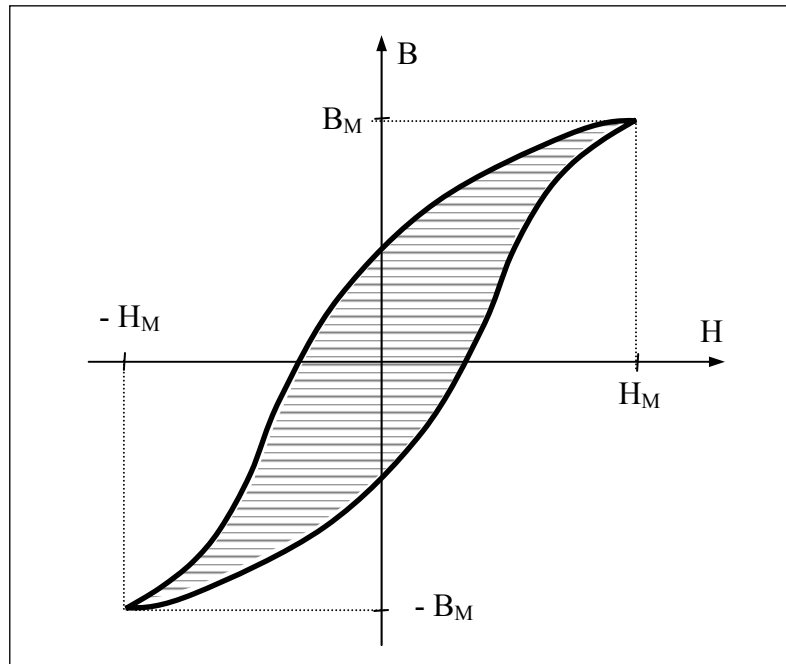
Esaminiamo ora il fenomeno da un punto di vista energetico, tenendo presente che le aree nel piano  $(H, B)$  rappresentano energie per unità di volume. Nel passare da 0 a  $B_M$  viene impiegata una energia di magnetizzazione rappresentata dall'area compresa fra la curva di prima magnetizzazione e l'asse delle ordinate (somma delle due aree evidenziate, con tratteggio orizzontale e quadrettato, rispettivamente); quando l'induzione diminuisce fino a  $B_r$  viene "restituita" dal sistema l'energia corrispondente alla sola area con tratteggio quadrettato: l'area più scura corrisponde, perciò, all'energia "immagazzinata" nel volume unitario del materiale sottoposto alla prova.



L'esperienza mostra che, se si vuole annullare il magnetismo residuo, occorre proseguire nella curva invertendo il senso della corrente fino ad ottenere un valore di campo pari ad  $H = -H_c$  (detto "forza coercitiva").

Il comportamento illustrato viene indicato con il nome di “isteresi magnetica” (dal greco υστέρησις = ritardo), in relazione al fatto che il campo di induzione non si annulla insieme a quello magnetico ma “con ritardo” rispetto a questo.

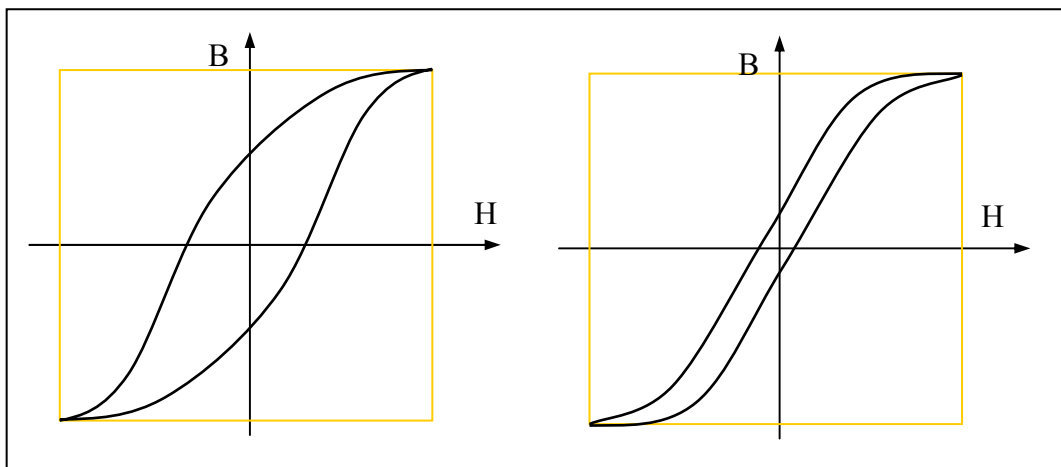
Se dal punto  $(H_M, B_M)$  si sposta il cosiddetto “punto di lavoro” fino al simmetrico  $(-H_M, -B_M)$  per poi tornare di nuovo al punto  $(H_M, B_M)$ , si descrive un percorso chiuso che viene chiamato “*ciclo di isteresi*”. L’area racchiusa dal ciclo di isteresi, evidenziata con tratteggio, rappresenta l’energia perduta in calore nel volume unitario del materiale per isteresi magnetica.



Se varia fra estremi di uguale valore assoluto il ciclo di isteresi sarà *simmetrico*, diversamente sarà *asimmetrico*. Al variare dei valori estremi si hanno *differenti cicli di isteresi*: tutti avranno, però, gli *estremi sulla curva di prima magnetizzazione*.

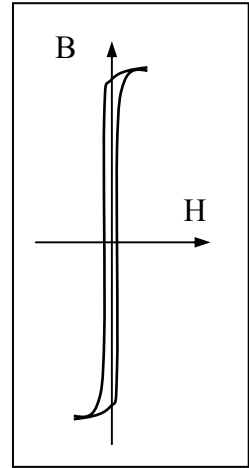
L’aspetto e l’ampiezza del ciclo di isteresi sono largamente variabili e sono strettamente legati alla temperatura (un aumento di temperatura fa diminuire i valori di B) e dal tipo di materiale. Una classificazione molto comune dei materiali ferromagnetici fa riferimento proprio a questa peculiarità, indicando come

- **magneticamente duri** i materiali che presentano valori relativamente elevati di magnetismo residuo e di forza coercitiva insieme ad un’area piuttosto ampia del ciclo di isteresi. Si tratta, evidentemente, di materiali particolarmente adatti alla formazione di magneti permanenti. Caratteristiche simili sono quelle richieste tipicamente dalle polveri di ossidi di ferro impiegate nella costruzione di nastri o supporti magnetici per la registrazione (analogica o digitale di dati e/o musica): un valore elevato della forza coercitiva garantisce scarsa sensibilità ai campi esterni meno intensi e (perciò) buona stabilità nel tempo dell’informazione registrata;
- **magneticamente morbidi** i materiali che, al contrario, presentano bassa forza coercitiva, modesto magnetismo residuo e piccola area del ciclo di isteresi.



Una categoria meritevole di speciale menzione per la sua assoluta peculiarità è quella delle cosiddette ferriti, prodotte in varie forme (barrette, gusci, toroidi, ecc.) e dimensioni mediante sinterizzazione<sup>1</sup> di un ossido doppio di ferro e di un metallo bivalente. Nelle ferriti le caratteristiche tipiche di un materiale “ceramico” si accompagnano a un ciclo di isteresi piuttosto “squadrato” e di area estremamente modesta: le ferriti, perciò, si magnetizzano e smagnetizzano molto facilmente; la loro magnetizzazione periodica comporta dissipazioni energetiche, e riscaldamenti, molto limitati.

Nelle *costruzioni elettromeccaniche* è di primario interesse la conoscenza della caratteristica di prima magnetizzazione del materiale da impiegare: in mancanza di relazioni precise in forma “chiusa”, infatti, solo così si può determinare la f.m.m. (le amperspire) necessaria a mantenere un richiesto flusso di induzione magnetica in un tronco di tubo di flusso nel dato materiale.



Un materiale ferromagnetico sottoposto a magnetizzazione periodica alternativa si riscalda per effetto dell’energia perduta per isteresi in ogni ciclo: le perdite per isteresi dipendono, dunque, dalla frequenza della corrente di eccitazione e, in maniera meno evidente ed immediata, dal valore massimo dell’induzione.

Le perdite per isteresi, intese come energia  $W_i$  perduta nel volume unitario del materiale in questione per ogni ciclo completo, possono essere valutate secondo una delle due formule empiriche approssimate che si ripropongono di seguito:

Formula di Steinmetz

$$W_i = \eta B_M^n \quad (2.51.)$$

Formula di Richter

$$W_i = \alpha B_M + \beta B_M^2 \quad (2.52.)$$

Tutti coefficienti delle due formule sono di natura empirica. Per i materiali più diffusi l’esponente “n” della formula di Steinmetz può essere assunto pari a circa 2.

Le perdite per isteresi assumono una importanza particolare:

- a. quando la frequenza di magnetizzazione è molto elevata, come nelle applicazioni delle telecomunicazioni (radiofonia, televisione, ecc.), ove si raggiungono valori di centinaia di MHz;
- b. quando, pur essendo relativamente bassa la frequenza (limitata, ad esempio, a quella cosiddetta industriale o di rete, a 50 Hz) le perdite per isteresi si presentano molto elevate per le notevoli dimensioni dei nuclei magnetici impiegati

Nel caso delle alte frequenze di lavoro si utilizzano le ferriti in maniera praticamente esclusiva: un esempio tipico è costituito dall’antenna ricevente per la sezione AM<sup>2</sup> di un apparecchio radio, realizzata avvolgendo un certo numero di spire intorno ad una barretta di ferrite.

Per le grosse masse delle macchine elettriche più importanti (come i grandi trasformatori) la riduzione delle perdite per isteresi si consegue mediante l’impiego di speciali leghe o particolari lavorazioni meccaniche.

<sup>1</sup> Trattamento termico o meccanico al quale vengono sottoposti agglomerati di polveri o granuli metallici allo scopo di provocare la saldatura e migliorarne la resistenza meccanica. Si ricordi che: i prodotti di sinterizzazione sono generalmente molto duri ma piuttosto fragili.

<sup>2</sup> AM sta per Amplitude Modulation (Modulazione di Ampiezza), una tecnica di modulazione della portante (v. seguito) tipica della banda radiofonica cosiddetta ad onde medie (da circa 500 kHz e circa 1600 kHz)

## 2.11. RILUTTANZA

Si consideri un tubo di flusso di induzione concatenato con  $NI$  amperspire e si supponga il campo di induzione costante su qualunque sezione  $S$  del tubo. Indicando con  $dl$  il tratto elementare della linea mediana del tubo di flusso, l'applicazione della seconda legge della magnetostatica in forma integrale consente di scrivere:

$$\oint \frac{1}{\mu} \frac{\Phi}{S} dl = NI$$

ovvero, tenendo conto che il flusso è, per definizione, costante in ogni sezione del tubo di flusso:

$$\Phi \oint \frac{1}{\mu S} dl = NI .$$

La relazione appena scritta consente di definire la riluttanza magnetica come rapporto fra amperspire e flusso di induzione:

$$\mathfrak{R} = \oint \frac{1}{\mu S} dl . \quad (2. 53.)$$

Si tratta di una definizione del tutto analoga a quella in precedenza introdotta per la resistenza di un conduttore (tubo di flusso per il campo densità di corrente).

Si può, quindi, definire la riluttanza di un tratto di tubo di flusso di estremità A e B:

$$\mathfrak{R}_{AB} = \int_A^B \frac{1}{\mu S} dl \quad (2. 54.)$$

Nel caso di un tratto lungo  $L$  e di sezione costante  $S$  la riluttanza assume la semplice espressione:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu} \frac{L}{S} \quad (2. 55.)$$

La riluttanza magnetica ha le dimensioni:  $[\mathfrak{R}] = [\text{amperspire/flusso}] = [A/Vs] = [H]^{-1}$ .

Il concetto di riluttanza appena introdotto consente di scrivere la relazione flusso – amperspire relativamente a un tratto di tubo di flusso:

$$\boxed{NI = \mathfrak{R}\Phi} \quad (2. 56.)$$

perfettamente analoga alla legge di Ohm per i conduttori, quando si faccia riferimento alla corrispondenza

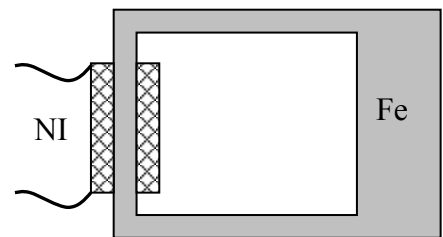
f.m.m.	$\Leftrightarrow$	f.e.m.
corrente	$\Leftrightarrow$	flusso di induzione
resistenza	$\Leftrightarrow$	riluttanza

## 2.12. CIRCUITI E RETI MAGNETICI. LEGGI DI HOPKINSON

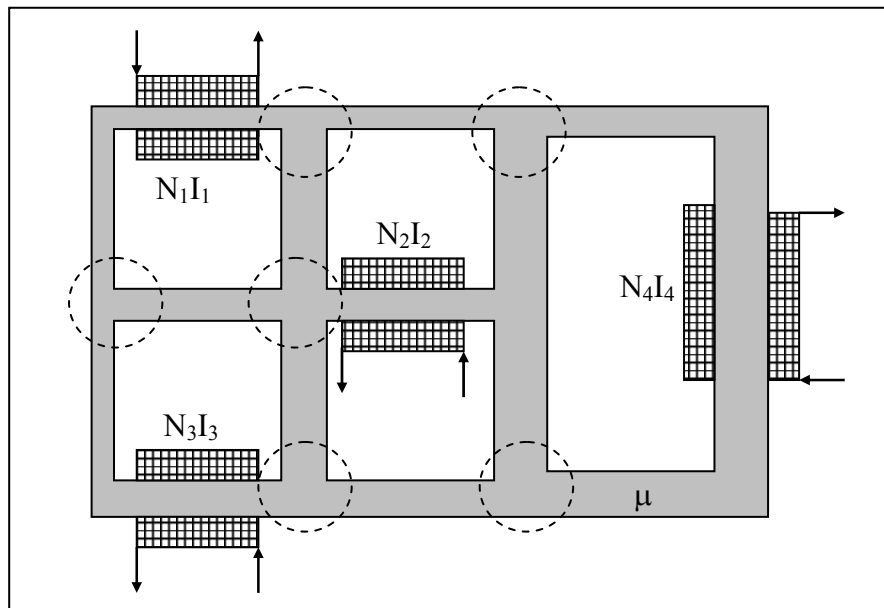
Le applicazioni tecniche annoverano un gran numero di dispositivi elettromeccanici (i più importanti dei quali sono, senz'altro, le macchine elettriche), sostanzialmente costituiti da un nucleo di materiale ferromagnetico, variamente configurato, sul quale si "sistemano" uno o più avvolgimenti destinati ad essere percorsi da correnti elettriche.

Come si evince con facilità dalla (2.56.), l'utilizzo di un nucleo ferromagnetico (pesante, costoso e, oltre tutto, ... non lineare) si giustifica con l'elevato valore della sua permeabilità magnetica, che consente di ottenere valori elevati di flusso (ovvero di induzione) con correnti notevolmente più piccole di quelle che sarebbero necessarie per un identico avvolgimento "in aria" o su un qualunque altro supporto non ferromagnetico: va considerato, infatti, che la quantità di calore associata ad elevati valori di corrente comporterebbe condizioni termiche assolutamente inaccettabili per la sopravvivenza degli isolanti, generalmente di tipo "organico" (polimeri).

La struttura più semplice di nucleo ferromagnetica è del tipo al quale si è già fatto riferimento a proposito del rilievo della caratteristica magnetica, il cosiddetto circuito magnetico semplice, che si riporta di nuovo in forma stilizzata. All'avvolgimento di  $N$  spire, percorse dalla corrente  $I$ , si dà anche il nome di amperspire di "eccitazione magnetica".



Configurazioni più articolate danno luogo a vere e proprie **reti magnetiche**, caratterizzate (come quelle elettriche) da lati, nodi (evidenziati da circoletti tratteggiati) e maglie.



Le leggi fondamentali della magnetostatica consentono di stabilire per le reti magnetiche relazioni del tutto analoghe alle leggi di Kirchhoff per le reti elettriche.

In particolare, il carattere solenoidale del campo di induzione impone che per ogni nodo di una rete magnetica si conservi il flusso (**prima legge di Hopkinson**):

$$\sum_i (\pm 1) \Phi_i = 0 \quad (2.57.)$$

Il teorema di circuitazione, applicato ad un qualunque percorso chiuso relativo ad una generica maglia della rete magnetica conduce alla relazione (seconda legge di Hopkinson):

$$\sum_i (\pm 1) N_i I_i = \sum_i \mathcal{R}_i \Phi_i$$

Si fa esplicitamente notare che, non diversamente dalle leggi di Kirchhoff, le leggi di Hopkinson forniscono solo il complesso dei vincoli ai quali le grandezze interessate devono sottostare: la non linearità delle reti magnetiche con nucleo ferromagnetico rende, però, impossibile una soluzione diretta del sistema di equazioni offerte dal modello matematico che ne deriva; l'analisi delle reti magnetiche "su ferro" viene, perciò, effettuata (in generale) con (tediosi) metodi di tipo grafico.

### 2.12.1. UN TIPICO CIRCUITO MAGNETICO: L'ELETTROMAGNETE

Il circuito magnetico dell'esempio riportato poco sopra presenta un fondamentale inconveniente: il campo di induzione prodotto dall'avvolgimento di eccitazione rimane "confinato" all'interno e, perciò, non utilizzabile al suo esterno.

Quando, per gli scopi più diversi (ai quali si accennerà tra breve), si voglia utilizzare il campo di induzione prodotto, occorre creare una discontinuità nel nucleo ferromagnetico, chiamato "traferro" (o interferro): al circuito magnetico costituito da un nucleo ferromagnetico con traferro, magnetizzato dalla forza magnetomotrice fornita da un apposito avvolgimento, si dà il nome di *elettromagnete*.

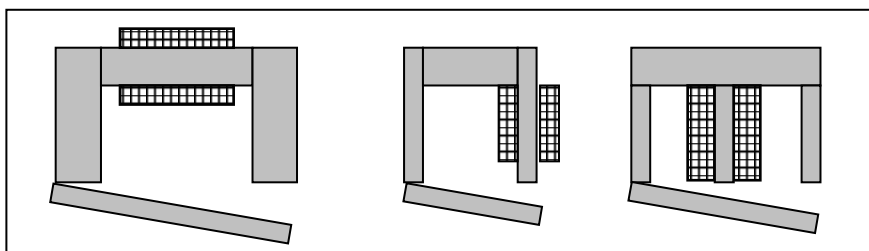
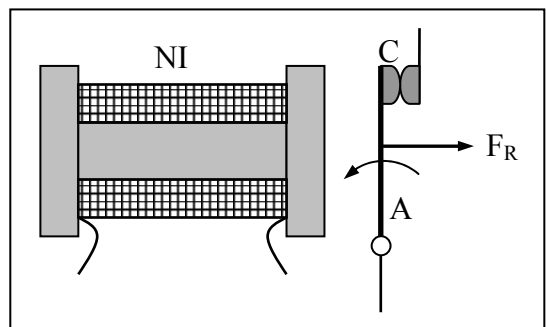
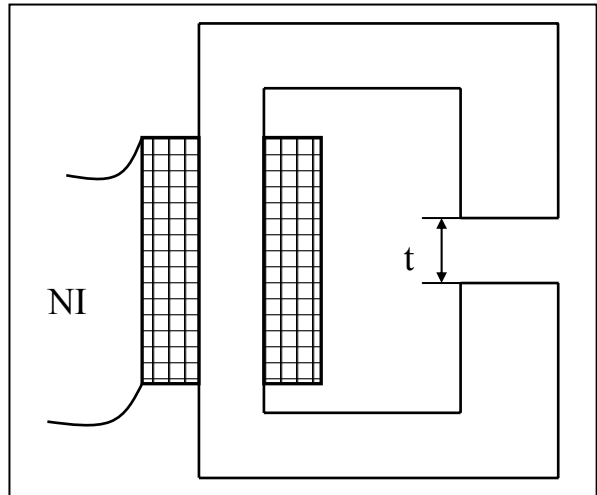
Lo studio dell'elettromagnete può svilupparsi secondo uno dei due possibili approcci:

- determinare le amperspire  $NI$  che vengono richieste per ottenere un richiesto valore del campo di induzione al traferro  $B_0$  (problema diretto): il problema viene affrontato e risolto "direttamente" per via grafica dalla conoscenza della caratteristica di prima magnetizzazione del materiale e delle dimensioni geometriche del nucleo dell'elettromagnete;
- determinare il valore del campo al traferro  $B_0$  a partire dalla conoscenza delle  $NI$  amperspire di eccitazione (problema inverso): a causa della non linearità del mezzo, il problema non ammette una soluzione diretta ma viene risolto "a rovescio" risolvendo un certo numero di volte il problema diretto e costruendo, così, per punti, un diagramma ( $NI - B_0$ ) dal quale si ricava la richiesta riposta.

Gli elettromagneti vengono impiegati in una grandissima varietà di applicazioni, in relazione alle quali si presentano con caratteristiche e dimensioni estremamente differenziate.

Un esempio tipico è costituito dai cosiddetti *relè*: un elettromagnete, eccitato da una opportuna corrente, esercita un'azione attrattiva su un piccolo elemento ferromagnetico mobile (detto "ancoretta"  $A$ ) tenuto in posizione da una molla; se la forza di attrazione supera la forza di richiamo  $F_R$  offerta dalla molla, l'ancoretta può spostarsi azionando, ad esempio, un interruttore identificato in un contatto  $C$ .

Nelle figure di seguito riportate sono illustrate alcune forme tipiche dei relè.



Per molti degli elettromagneti le dimensioni sono piuttosto modeste, in qualche caso limitate a pochi centimetri cubici.

Sono, però, di grande importanza applicativa anche i giganteschi elettromagneti di sollevamento: sostenuti dal braccio di una gru, sono destinati a sollevare materiali ferromagnetici di varia natura, dai rottami ferrosi fino alle grandi lamiere, che ben difficilmente si potrebbe prelevare in maniera diversa.

È evidente che, ad evitare il rischio di rilascio intempestivo del carico per mancanza di alimentazione, gli apparecchi di sollevamento elettromagnetico devono sempre essere dotati di un affidabile un sistema di sicurezza che garantisca sempre e comunque la continuità dell'alimentazione.



## 2.13. LE EQUAZIONI DI MAXWELL

Come si è già anticipato quando si è presentata la legge della induzione magnetica (legge di Faraday), si suppone ora di rimuovere definitivamente l'ipotesi di stazionarietà (= costanza nel tempo) dei fenomeni.

La fenomenologia evidenzia che le leggi fin qui trovate, sia per il campo elettrico che per quello magnetico, vanno integrate con alcuni termini espressi da derivate rispetto al tempo, nulle nell'ipotesi di stazionarietà.

### 2.13.1 LEGGE DI FARADAY

In particolare, ricordando esplicitamente la (2.17.)

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot \hat{t} dl = - \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS \right]$$

e applicando il teorema di Stokes al secondo membro si ottiene la **legge di Faraday in forma locale**:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (2.58.)$$

Sostituendo l'espressione esplicita del rotore la relazione diventa:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \\ = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \hat{x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \hat{y} - \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{z} \end{aligned} \quad (2.59.)$$

Eguagliando le componenti si ricavano le tre equazioni:

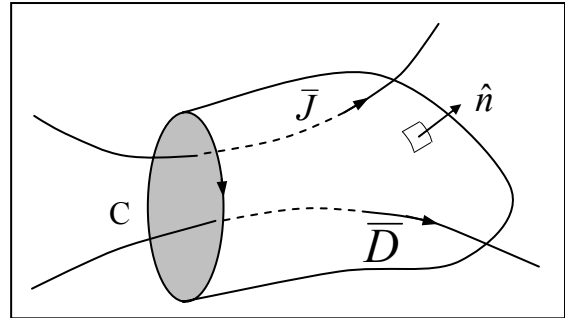
$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= - \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= - \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= - \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.60.)$$

La forma locale (o “puntuale”) indica che a un campo magnetico variabile nel tempo è associato il rotore del campo elettrico.

### 2.13.2 LEGGE DI AMPÈRE

La legge di Faraday mostra che un campo magnetico variabile nel tempo può generare (indurre) un campo elettrico. La legge di Ampère mostra che tale proprietà è del tutto “simmetrica”, ovvero: un campo elettrico variabile nel tempo può generare (indurre) un campo magnetico.

La legge di Ampère, espressa in forma integrale “completa” è:



$$\oint_C \vec{H} \cdot \hat{t} dl = \iint_S \vec{J}_c \cdot \hat{n} dS + \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS \right] \quad (2.61.)$$

ove:

- il primo termine del secondo membro rappresenta la corrente di conduzione che attraversa la superficie S orlata dal percorso C

$$I_c = \iint_S \vec{J}_c \cdot \hat{n} dS \quad [\text{A}] \quad (2.62.)$$

- il secondo termine a destra, derivata del flusso del vettore induzione elettrico D (avente dimensioni di C/m<sup>2</sup>), viene detto anche corrente di spostamento

$$I_d = \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS \right] \quad [\text{A}] \quad (2.63.)$$

Continuando a indicare come forza magnetomotrice (f.m.m.) l'integrale circuitale del campo magnetico H, la legge di Ampère può assumere la forma integrale:

$$f.m.m. = I_c + I_d \quad [\text{A}]$$

La legge di Ampère indica che, si può generare produrre un campo magnetico H

- con un flusso netto di cariche libere
- con un flusso di induzione elettrica D(t) variabile nel tempo

Applicando il teorema di Stokes alla (2.61.) si ottiene l'espressione “completa” della legge di Ampère in forma locale:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.64.)$$

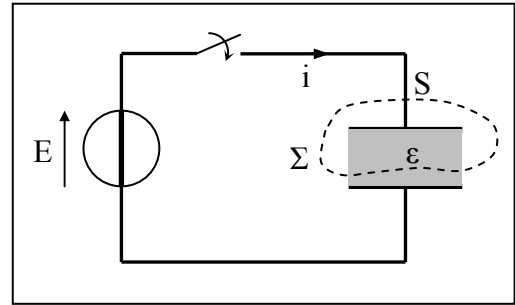
Come abbiamo già fatto per la legge di Faraday, sostituiamo l'espressione esplicita del rotore ed eguagliamo le componenti per ottenere le tre equazioni alle componenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.65.)$$

### 2.13.2.1. Un'esperienza illustrativa

Si consideri un condensatore piano del quale si sono evidenziate le due armature, separate da un dielettrico di costante dielettrica  $\epsilon$ .

Si colleghi il condensatore ad un generatore di f.e.m.  $E$  attraverso un conduttore dotato di resistività finita; chiudendo un interruttore ad un certo istante, la carica del condensatore non avverrà istantaneamente, ma si svilupperà secondo un transitorio temporale, con legge esponenziale, fino a che, dopo un tempo teoricamente infinito, la d.d.p. sulle armature del condensatore eguaglierà quella ai morsetti del generatore.



Se si escludono fenomeni di scarica nel dielettrico, la corrente di conduzione può essere presente solo all'interno del conduttore per annullarsi nella zone ove è presente il dielettrico. È perciò evidente che la sola corrente di conduzione non può bastare a spiegare la presenza della corrente nel circuito. Considerando la superficie chiusa  $\Sigma$ , disegnata, come in figura, in modo da “tagliare” sia il conduttore che il dielettrico, semplici valutazioni di bilancio portano a considerare

- la superficie  $S$  (aliquota di  $\Sigma$  corrispondente alla sezione del conduttore) è interessata alla corrente di conduzione
- la superficie rimanente di area  $(\Sigma - S)$  non può essere “attraversata” da linee del vettore densità di corrente di conduzione  $J_c$ , ma è interessata esclusivamente alla corrente di spostamento.

Il fenomeno può essere sinteticamente descritto affermando che, in regime variabile, la corrente di spostamento “chiude il circuito” lì dove cessa di esistere la corrente di conduzione.

In condizioni non stazionarie la carica di un condensatore (supposto di capacità  $C$  tempo - invariante) varia nel tempo:

$$q = q(t) = Cv(t)$$

facendo così variare anche la tensione fra le sue armature; alla carica variabile si può associare, perciò, la corrente di conduzione:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \quad (2.66.)$$

La (2.66) rappresenta la relazione costitutiva per un condensatore in termini di relazione tensione – corrente, avendo assunto la convenzione dell'utilizzatore.

Si ricorda che, analogamente alla (2.66), si era già definita con la (2.21) la relazione costitutiva tensione – corrente per un induttore di induttanza  $L$ .

### 2.13.3. LEGGE DI GAUSS

La legge di Gauss per il campo elettrico è data, in forma integrale, da:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\tau} \rho_v d\tau \quad (2.67.)$$

ove  $\rho_v$  è la densità volumetrica di carica entro il volume di integrazione  $\tau$  delimitato dalla superficie  $\Sigma$ . Applicando il teorema della divergenza alla (2.67.) si ottiene la forma puntuale della legge di Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (2.68.)$$

La legge di Gauss applicata al campo di induzione magnetica assume l'espressione (2.2.) già considerata:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

### 2.13.4. CONSERVAZIONE DELLA CARICA

Il fatto che le cariche elettriche non possano essere né create né distrutte comporta la relazione già considerata nel Capitolo I e che qui si ripropone:

$$\oiint_{\Sigma} \bar{J} \cdot \hat{n} dS = - \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{\tau} \rho_v d\tau \right]$$

e che può essere espressa con l'ovvia considerazione che se un corrente "lascia" una superficie chiusa  $\Sigma$  dovrà verificarsi una contestuale rarefazione della quantità di carica nel volume  $\tau$  da essa racchiusa, a spese, cioè, della densità di carica volumetrica  $\rho_v$ .

Applicando il teorema della divergenza, si ha l'espressione puntuale della proprietà di conservazione della carica

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{J} = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t}} \quad (2.69.)$$

### 2.13.5. EQUAZIONI DI MAXWELL

L'insieme della legge di Faraday, (2.58.), della legge di Ampère, (2.64.), della legge di Gauss, (2.67.) e (2.2), e della conservazione della carica, (2.68.) costituiscono le cosiddette EQUAZIONI DI MAXWELL, che, per comodità di sintesi si riportano qui di seguito:

$$\boxed{\nabla \times \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}} \quad (2.70.)$$

$$\boxed{\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}} \quad (2.71.)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v} \quad (2.72.)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{B} = 0} \quad (2.73.)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{J} = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t}} \quad (2.74.)$$

Tra le cinque grandezze alle quali fanno riferimento le equazioni di Maxwell sussistono le seguenti *relazioni costitutive*, peraltro già progressivamente presentate nel corso della trattazione fin qui svolta:

$$\boxed{\bar{D} = \epsilon \bar{E}} \quad (2.75.)$$

$$\boxed{\bar{B} = \mu \bar{H}} \quad (2.76.)$$

$$\boxed{\bar{J}_c = \sigma \bar{E}} \quad (2.77.)$$

Nel caso di mezzo lineare, omogeneo ed isotropo le leggi di Faraday e di Ampère, tenendo conto delle relazioni costitutive, assumono la forma, rispettivamente:

$$\boxed{\nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}} \quad (2.78.)$$

$$\boxed{\nabla \times \bar{H} = \sigma \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{J}_s} \quad (2.79.)$$

Nella (2.78.) si è aggiunto anche il contributo  $J_s$  di eventuali sorgenti di correnti impresse.

In un riferimento cartesiano ortogonale, le (2.77.) e (2.78.) si traducono in sei equazioni nelle sei componenti di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$ . Una volta ricavate tali componenti, le relazioni costitutive consentono di ricavare  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{J}$ .