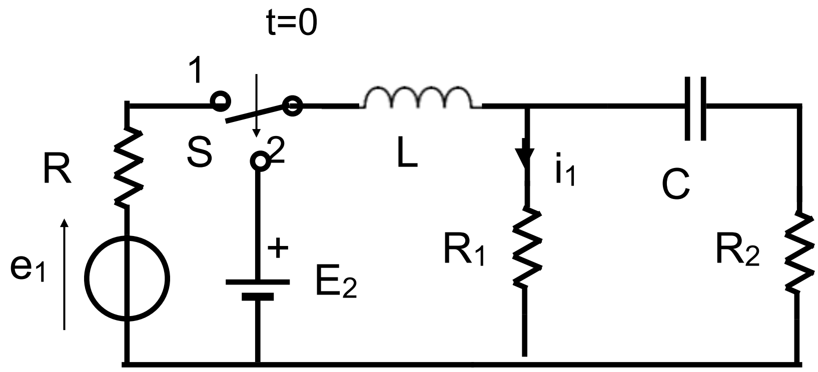
Prova d’esame del 13/01/2014 Introduzione ai Circuiti			
Allievo *Stampatello*	**Cognome**	**Nome**	**Matricola**

Consegnare questo foglio insieme all’elaborato

Prova



R_1 = 7 Ω, R_2 = 3 Ω, R = 5 Ω, C = 10/4 mF, L = 300 mH

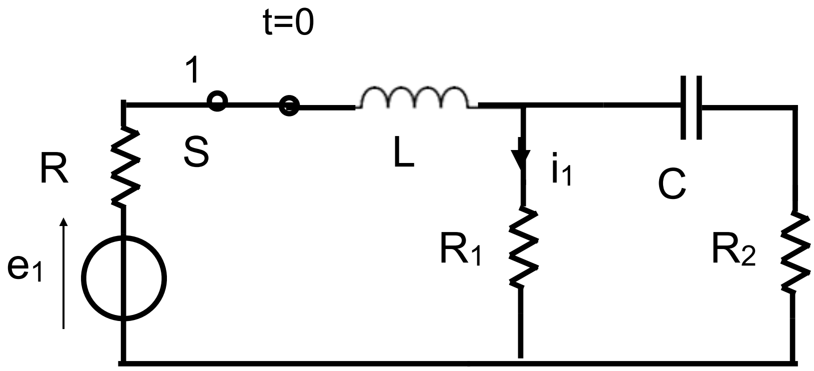
e_1 = 200 sen(40 t + π/4)V, E_2 = 20V.

All’istante t=0 l’interruttore S passa dalla posizione 1 alla posizione 2.
Determinare l’andamento di i_1 per t≥0.

$i_1(t)$ = ………………………………………………………

Riservato alla correzione	

Regime precedente



Siamo in regime sinusoidale e quindi si passa ai fasori

$$\bar{E}_1 = 100\sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}_1}{R + jX_L + \dfrac{R_1\left(R_2 - jX_C\right)}{R_1 + R_2 - jX_C}} = \frac{\bar{E}_1}{9{,}55\left(1+j\right)} = \frac{100\left(1+j\right)}{9{,}55\left(1+j\right)} = 10{,}47$$

$$\bar{V}_C = \bar{I}_L \frac{-jX_C R_1}{R_1 + R_2 - jX_C} = 7{,}40\frac{-j70}{10 - j10} = 36{,}6\left(1-j\right)$$

Che riportati nel dominio del tempo danno:

$$i_L\left(t\right) = 10{,}47\sqrt{2}sen\left(40t\right)$$

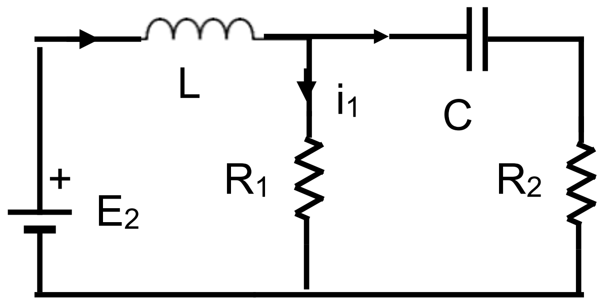
$$v_C\left(t\right) = 2\cdot 36{,}6\sqrt{2}sen\left(40t - \pi/4\right)$$

E quindi per t = 0:

$$i_L\left(0\right) = I_0 = 0A$$
$$v_C\left(0\right) = V_0 = -51{,}76V$$

Si passa ora al regime dinamico per t≥0 e si scrivano le equazioni di Kirchhoff:

$$E_2 = L\frac{di_L}{dt} + R_1 i_1$$
$$R_1 i_1 = v_C + R_2 C\frac{dv_C}{dt}$$
$$i_L = i_1 + C\frac{dv_C}{dt}$$



Che eliminando la derivata di v_C nella seconda utilizzando la terza si può anche scrivere:

$$E_2 = L\frac{di_L}{dt} + R_1 i_1$$
$$R_1 i_1 = v_C + R_2\left(i_L - i_1\right)$$
$$i_L = i_1 + C\frac{dv_C}{dt}$$

A questo punto derivando la seconda si può eliminare v_C dal sistema:

$$E_2 = L\frac{di_L}{dt} + R_1 i_1$$
$$i_L = i_1 + C\left(R_1\frac{di_1}{dt} - R_2\left(\frac{di_L}{dt} - \frac{di_1}{dt}\right)\right)$$

Derivando la seconda ed eliminando la derivata prima e seconda ottenute dalla prima e dalla sua derivata:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{E_2 - R_1 i_1}{L}$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} = -\frac{R_1}{L}\frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{di_1}{dt} + C\left(R_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - R_2\left(\frac{d^2 i_L}{dt^2} - \frac{d^2 i_1}{dt^2}\right)\right)$$

E in conclusione:

$$\frac{E_2 - R_1 i_1}{L} = \frac{di_1}{dt} + C\left(R_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - R_2\left(-\frac{R_1}{L}\frac{di_1}{dt} - \frac{d^2 i_1}{dt^2}\right)\right)$$

Riordinando:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} C\left(R_1 + R_2\right) + \frac{di_1}{dt}\left(1 + \frac{CR_2R_1}{L}\right) + \frac{R_1}{L} i_1 = \frac{E_2}{L}$$

In forma canonica:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{di_1}{dt}\left(\frac{1}{C\left(R_1 + R_2\right)} + \frac{R_2 R_1}{\left(R_1 + R_2\right)L}\right) + \frac{R_1}{LC\left(R_1 + R_2\right)} i_1 = \frac{E_2}{LC\left(R_1 + R_2\right)}$$

L’analisi dimensionale conferma la validità dei passaggi, in quanto ogni termine dell’equazione ottenuta ha dimensioni A/sec^2.

L’equazione caratteristica dell’omogenea associata è:

$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0,$

con:

$$a = 1$$

$$b = \frac{1}{C\left(R_1 + R_2\right)} + \frac{R_2 R_1}{\left(R_1 + R_2\right)L} = \frac{1000}{25} + \frac{21}{3} = 47$$

$$c = \frac{R_1}{LC\left(R_1 + R_2\right)} = \frac{28}{3}10^2 = 933,33$$

il discriminante è:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2209 - 3733,32 = 1524,32$$

e le radici:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-47 \pm j39,04}{2}$$

L'integrale generale dell'omogenea è dunque:

$$i_{10} = Ae^{-23,50t} sen(19,52t + \gamma)$$

la soluzione di regime (continuo) è:

$$i_{1r} = \frac{E_2}{R_1} = \frac{20}{7} = 2,86A$$

L'integrale generale della completa è dunque:

$$i_1 = Ae^{-23,50t} sen(19,52t + \gamma) + 2,86A$$

Resta da calcolare le costanti A e γ imponendo le condizioni iniziali.

Eliminando la derivata di v_C dalle due ultime equazioni del sistema risolvente

$$E_2 = L\frac{di_L}{dt} + R_1 i_1$$

$$R_1 i_1 = v_C + R_2 C\frac{dv_C}{dt}$$

$$i_L = i_1 + C\frac{dv_C}{dt}$$

si ricava facilmente

$$i_1 = \frac{v_C}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L \qquad (1)$$

E quindi la i_1 (0)

$$i_1(0) = \frac{v_C(0)}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L(0) = -5{,}17$$

A questo punto dall'ultima equazione del sistema risolvente si ricava il valore della derivata di v_C all'istante 0

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_L(0) - i_1(0)}{C} = +2068$$

Mentre dalla prima si ottiene quello della derivata di i_L:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E_2 - R_1 i_1(0)}{L} = 10\frac{20 + 36{,}19}{3} = 187{,}3$$

A questo punto dalla derivata della (1) si ricava anche la derivata della i_1 all'istante 0

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{R_1 + R_2}\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = +206{,}8 + \frac{3}{10}187{,}3 = 263$$

Notare che mentre la i_1 all'istante zero è nulla, non lo è, naturalmente, la sua derivata.

A questo punto le due relazioni che ci danno A e γ sono

$$i_1(0) = Asen\gamma + 2{,}86A = -5{,}17$$

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = -23{,}50Asen\gamma + 19{,}52A\cos\gamma = 263$$

Da cui si ricava

$$Asen\gamma = -8{,}03$$

$$A\cos\gamma = 3{,}80$$

E quindi

$$\gamma = \arctan(-2{,}11) \simeq -1{,}13 rad$$

e

$$A = \frac{-8{,}03}{sen(-1{,}13)} = 8{,}88$$

E la soluzione del problema è:

$$i_1 = 8{,}88 e^{-23{,}50t} sen(19{,}52t - 1{,}13) + 2{,}86 A$$