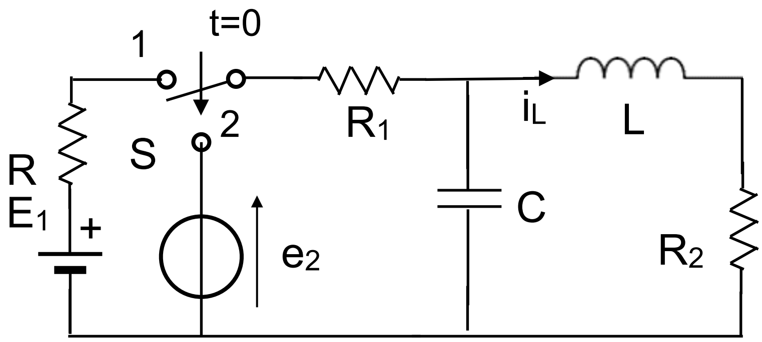
| Prova d'esame del 3/02/2014 Introduzione ai Circuiti | | | |
|---|---|---|---|
| **Allievo** *Stampatello* | **Cognome** | **Nome** | **Matricola** |
| | | | |

Consegnare questo foglio insieme all'elaborato

# Prova




**$R_1$ = 8 Ω, $R_2$ = 2 Ω, R = 5 Ω, C = 10/4 mF, L = 300 mH**

**$e_2$ = 200 sen(40 t - π/4)V, $E_1$ = 30V.**

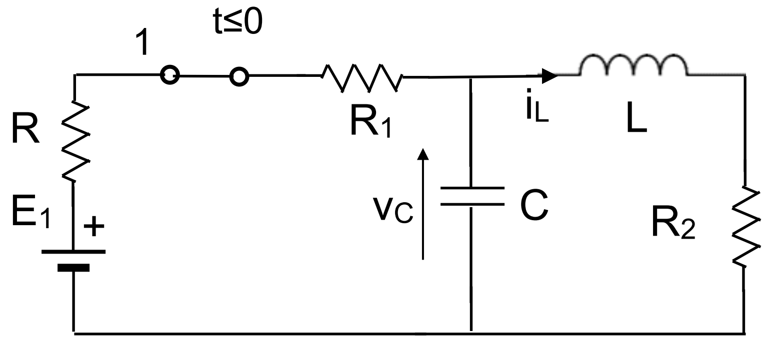
**All'istante t=0 l'interruttore S passa dalla posizione 1 alla posizione 2.**
**Determinare l'andamento di $i_L$ per t≥0.**

$$i_L(t) = 19,63e^{-28,33t} sen(29,39t + 0,75) + 10,4\sqrt{2} sen(40t - 2,33) A$$

| Riservato alla correzione | |
|---|---|
| | |

**Soluzione**

Regime precedente

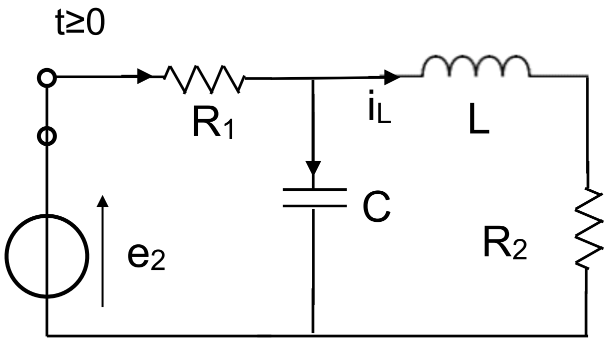



Siamo in regime continuo e quindi il condensatore è un circuito aperto e l'induttore un corto circuito.

$$i_L\left(0^-\right)=I_0=\frac{E_1}{R+R_1+R_2}=\frac{30}{15}=2A$$

$$v_C\left(0^-\right)=V_0=R_2I_L=4V$$

Si passa ora al regime dinamico per t≥0 e si scrivano le equazioni di Kirchhoff:




$$e_2=R_1i_1+L\frac{di_L}{dt}+R_2i_L$$

$$v_C=L\frac{di_L}{dt}+R_2i_L$$

$$i_1=i_L+C\frac{dv_C}{dt}$$

Derivando la seconda e sostituendo nella terza si ottiene:

$$e_2 = R_1 i_1 + L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L$$

$$\frac{dv_C}{dt} = L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2\frac{di_L}{dt}$$

$$i_1 = i_L + C\left(L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2\frac{di_L}{dt}\right)$$

Sostituendo la terza nella prima:

$$e_2 = R_1\left(i_L + C\left(L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2\frac{di_L}{dt}\right)\right) + L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L$$

E riordinando:

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}\left(R_2 C + \frac{L}{R_1}\right) + i_L\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) = \frac{e_2}{R_1}$$

In forma canonica:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{CR_1}\right) + \frac{i_L}{LC}\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) = \frac{e_2}{R_1 LC}$$

L'analisi dimensionale conferma la validità dei passaggi, in quanto ogni termine dell'equazione ottenuta ha dimensioni A/sec$^2$.

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0,$$

con:

$$a = 1$$

$$b = \frac{R_2}{L} + \frac{1}{CR_1} = \frac{20}{3} + 50 = 56,67$$

$$c = \frac{(R_1 + R_2)}{LCR_1} = \frac{10}{8 \cdot 750}10^6 = \frac{1}{6}10^4 = 1666,67$$

il discriminante è:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3211,49 - 6666,68 = -3455.19$$

e le radici:

$$\alpha_{1,2} = -28,33 \pm j29,39$$

L'integrale generale dell'omogenea è dunque:

$$i_{L0} = Ae^{-28,33t} sen(29,39t + \gamma)$$

la soluzione di regime è sinusoidale e quindi conviene passare ai fasori:

$$\bar{E}_2 = 100\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$$

$$X_C = 10\Omega \text{ e } X_L = 12\Omega$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}_2}{R_1 + \frac{-jX_C\left(R_2 + jX_L\right)}{R_2 + j\left(X_L - X_C\right)}} \frac{-jX_C}{R_2 + j\left(X_L - X_C\right)} =$$

$$= \frac{-jX_C\bar{E}_2}{R_1\left(R_2 + j\left(X_L - X_C\right)\right) - jX_C\left(R_2 + jX_L\right)} =$$

$$= \frac{-10^3\left(1 + j\right)}{136 - j4} = -7,1 - j7,6 = -10,4e^{j0.81} = 10,4e^{-j2,33}$$

Che riportati nel dominio del tempo da:

$$i_{LR}\left(t\right) = 10,4\sqrt{2}sen\left(40t - 2,33\right)$$

L'integrale generale della completa è dunque:

$$i_{Lg}\left(t\right) = Ae^{-28,33t} sen(29,39t + \gamma) + 10,4\sqrt{2}sen\left(40t - 2,33\right)A$$

Resta da calcolare le costanti A e $\gamma$ imponendo le condizioni iniziali.

Dalla continuità di $i_L$ si ottiene:

$$i_L\left(0\right) = Asen(\gamma) + 10,4\sqrt{2}sen\left(-2,45\right) = 4A$$

Mentre dalla seconda equazione di K. si ottiene

$$v_C\left(0\right) = L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} + R_2 i_L\left(0\right)$$

Da cui:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = \frac{v_C(0) - R_2 i_L(0)}{L} = 0$$

E quindi:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = -28,33Asen\gamma + 29,39A\cos\gamma + 40 \cdot 10,4\sqrt{2}\cos(2,33) = 0$$

A questo punto le due relazioni che ci danno A e γ sono

$$Asen(\gamma) - 10,4\sqrt{2}sen(2,45) = 4A$$

$$-28,33Asen\gamma + 29,39A\cos\gamma + 416\sqrt{2}\cos(2,33) = 0$$

Da cui si ricava

$$Asen(\gamma) = 4 + 10,4\sqrt{2}sen(2,45) = 13,38$$

$$A\cos\gamma = 14,23$$

E quindi

$$\gamma = \arctan(0,94) \simeq 0,75rad$$

e

$$A = \frac{13,38}{sen(0,75)} = 19,63$$

E la soluzione del problema è dunque:

$$i_L(t) = 19,63e^{-28,33t}sen(29,39t + 0,75) + 10,4\sqrt{2}sen(40t - 2,33)A$$