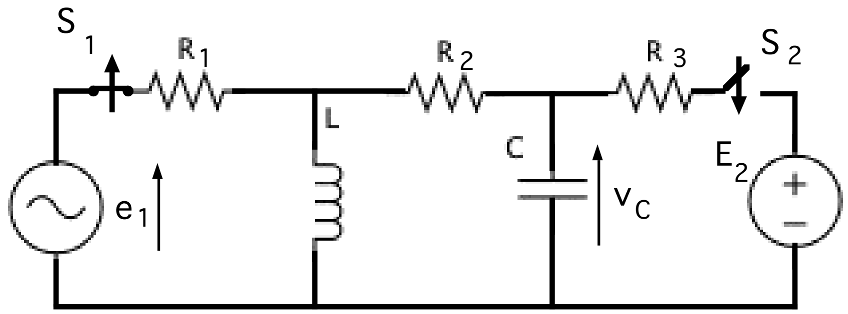
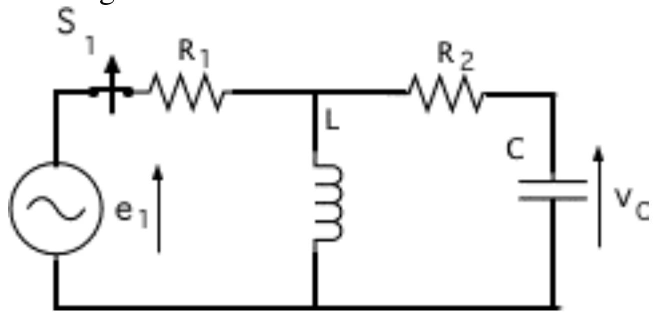
Soluzione Compito d’esame del 23/1/14

L’interruttore S_1 all’istante t=0 è in apertura mentre l’interruttore S_2 è in chiusura. Determinare l’andamento della tensione v_C sul condensatore per t≥0.



$R_1 = 3{,}6\ \Omega$;, $R_2 = 40\ \Omega$;, $R_3 = 40\ \Omega$;, C = 2,5 mF;. L = 40mH;
$e_1 = 10\text{sen}(100t-\pi/4)$V; $E_2 = 20$V;

Il circuito viene modificato all’istante t=0 dai due interruttori. Per t≤0 il circuito è in ca. e si riduce a quello mostrato in figura.



Per calcolare le condizioni iniziali sul condensatore e nell’induttore passiamo ai fasori:

$$\bar{E}_1 = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} V\ ,\ X_L = 4\Omega,\ \ X_C = 4\Omega,$$

Quindi si ottiene facilmente la corrente del generatore:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{R_1 + \dfrac{jX_L(R_2 - jX_C)}{R_2 + j(X_L - X_C)}} = \frac{\dfrac{10}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4}}{3{,}6 + j\dfrac{4(40-j4)}{40}} = \frac{100}{\sqrt{2}} \frac{e^{-j\pi/4}}{36 + j(40-j4)} = \frac{2{,}5}{2} \frac{e^{-j\pi/4}}{e^{j\pi/4}} = -j1{,}25$$

La corrente nell’induttore si ottiene ripartendo la corrente del generatore:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{I}_1(R_2 - jX_C)}{R_2 + j(X_L - X_C)} = \frac{-j1{,}25(40-j4)}{40} = \frac{-j1{,}25(10-j)}{10} = -0{,}12 - j1{,}25 = 1{,}26e^{-j1{,}67}$$

Per differenza si ottiene quella nel condensatore e quindi la tensione sullo stesso:

$$\bar{V}_C = -jX_C(\bar{I}_1 - \bar{I}_L) = -j4(-j1{,}25 + 0{,}12 + j1{,}25) = -j0{,}48$$

Tornando nel dominio del tempo:

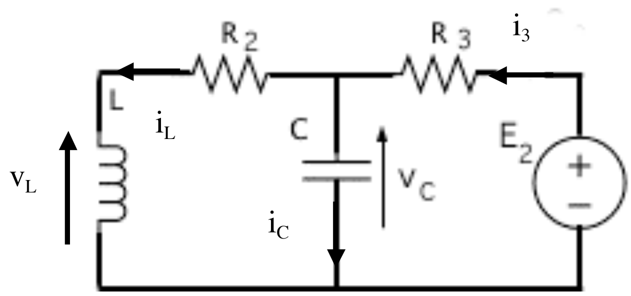
$i_L(t) = 1,26\sqrt{2}sen(100t - 1,67)$

$v_C(t) = 0,48\sqrt{2}sen\left(100t - \pi/2\right)$

Da cui le due condizioni iniziali:

$$v_C(0) = -0,68V$$
$$i_L(0) = -1,77A$$

Per t≥0 il circuito diventa:



E le equazioni:

$$E_2 = R_3 i_3 + v_C \qquad v_L = L\frac{di_L}{dt}$$
$$v_C = R_2 i_L + v_L \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$
$$i_3 = i_L + i_C \qquad (2)$$

Usando le caratteristiche e facendo scomparire i_3 usando l'equazione al nodo, si ottiene:

$$E_2 = R_3\left(i_L + C\frac{dv_C}{dt}\right) + v_C$$
$$v_C = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt}$$

Utilizzando la prima e la sua derivata per ottenere i_L nonché la sua derivata in funzione di v_C:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{R_3}\frac{dv_C}{dt} - C\frac{d^2 v_C}{dt^2}$$
$$i_L = \frac{E_2}{R_3} - \frac{v_C}{R_3} - C\frac{dv_C}{dt}$$
$$v_C = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt}$$

Che sostituendo nella terza danno:

$$v_C = R_2\left(\frac{E_2}{R_3} - \frac{v_C}{R_3} - C\frac{dv_C}{dt}\right) + L\left(-\frac{1}{R_3}\frac{dv_C}{dt} - C\frac{d^2 v_C}{dt^2}\right)$$

E riordinando:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_3 C} + \frac{R_2}{L}\right)\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)v_C = \frac{1}{LC}\frac{R_2}{R_3}E_2$$

Alla stesso risultato si poteva giungere in modo più semplice ricordando che i coefficienti dell'equazione omogenea non possono dipendere dalla scelta della variabile in cui si scrive l'equazione, altrimenti le costanti di tempo e le frequenze naturali del circuito dipenderebbero da tale scelta, il ché è evidentemente assurdo. Di conseguenza, partendo dal sistema (2), si poteva più semplicemente ricavare l'equazione nella i_L e prendere in considerazione la sola omogenea.
In conclusione, inserendo i valori numerici, si ottiene l'equazione omogenea:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_3 C} + \frac{R_2}{L}\right)\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)v_C = \frac{1}{LC}\frac{R_2}{R_3}E_2$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 1010\frac{dv_C}{dt} + 2 \bullet 10^4 v_C = 0$$

Le cui radici sono, rispettivamente –989,79 e –20,20. L'integrale generale dell'omogenea ha, dunque, la forma:

$$v_{C0}(t) = k_1 e^{-989,79t} + k_2 e^{-20,20t}$$

Per determinare le costanti k_1 e k_2 abbiamo bisogno anche della soluzione di regime che è sostenuta da un generatore in cc. In queste condizioni il condensatore è un circuito aperto e l'induttore un cortocircuito per cui la tensione a regime sul condensatore si ottiene dalla partizione della tensione del generatore. Essendo le due resistenze uguali si ha che. V_C = 10V
Quindi l'integrale generale della equazione completa è:

$$v_C(t) = k_1 e^{-989,79t} + k_2 e^{-20,20t} + 10$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova il sistema:

$$k_1 + k_2 + 10 = -0,68$$
$$i_L(0) = \frac{E_2}{R_3} - C\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_0 - \frac{v_C(0)}{R_3}$$

E quindi

$$k_1 + k_2 + 10 = -0,68$$
$$-1,77 = 0,5 - 2,5C\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_0 + \frac{0,68}{40}$$

D’altra parte:

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_0 = -989,79k_1 - 20,20\mathrm{k}_2$$

e quindi il sistema:

$$k_1 + k_2 + 10 = -0,68$$
$$-989,79k_1 - 20,20\mathrm{k}_2 \; = 915$$

Da cui:

$$k_1 = -0,72$$
$$k_2 = \text{-}9,96$$

E la soluzione:

$$v_C(t) = -0.72e^{-989,79t} - 9,96e^{-20,20t} + 10 \text{ V}$$