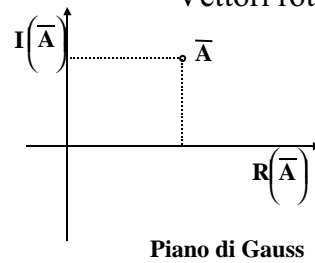


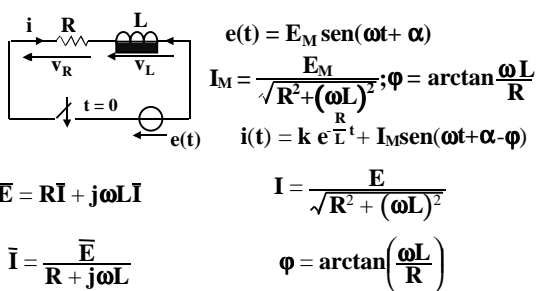
## Lezione 30

## Vettori rotanti

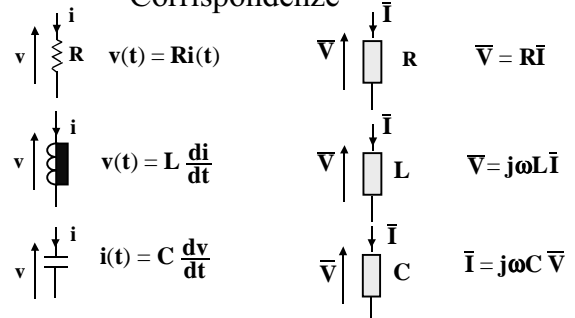


Piano di Gauss

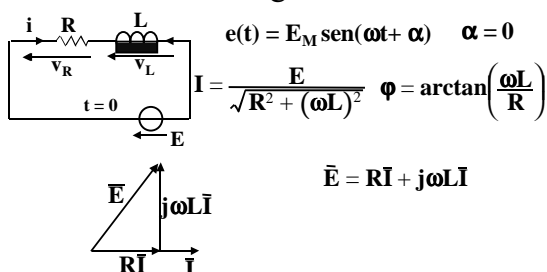
## RL con forzamento sinusoidale



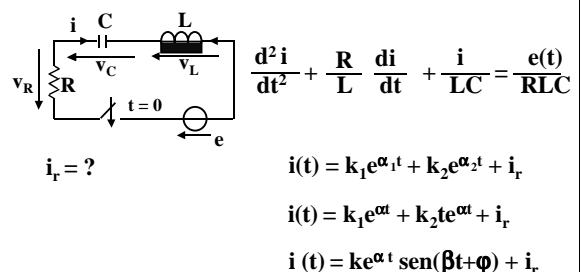
## Corrispondenze



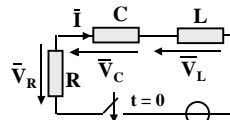
## RL a regime



## Circuito R L C in evoluzione forzata



### Circuito R L C in evoluzione forzata



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{e(t)}{RLC}$$

$$i_r = ?$$

$$e(t) = E_M \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \alpha_0 - \varphi)$$

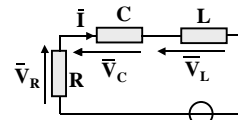
$$\bar{E} = E e^{j(\omega t + \alpha_0)}$$

$$\bar{I} = I e^{j(\omega t + \alpha_0 - \varphi)}$$

$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 7

### Circuito R L C in evoluzione forzata



$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

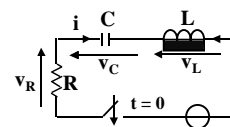
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

$$i_r(t) = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \alpha_0 - \varphi)$$

$$\varphi = \arctg \left[ \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right]$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 8

### Circuito R L C in evoluzione forzata



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{e(t)}{RLC}$$

$$i(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} + i_r$$

$$i(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t} + i_r$$

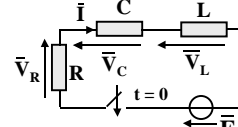
$$i(t) = k e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) + i_r$$

$$i_r(t) = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \alpha_0 - \varphi)$$



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 9

### Impedenza



$$\bar{E} = Z\bar{I}$$

Impedenza Z

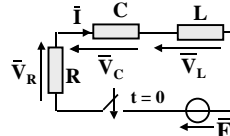
$$Z = R + jX$$

R = resistenza  
X = reattanza

$$X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 10

### Ammettenza



$$\bar{I} = Y\bar{E}$$

Ammettenza Y

$$Y = G + jS$$

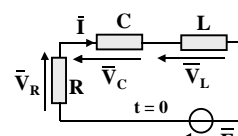
G = conduttanza  
S = suscettanza

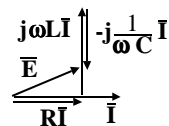
$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$S = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 11

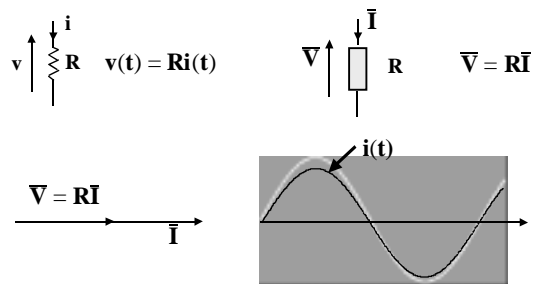
### Circuito R L C a regime



$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$


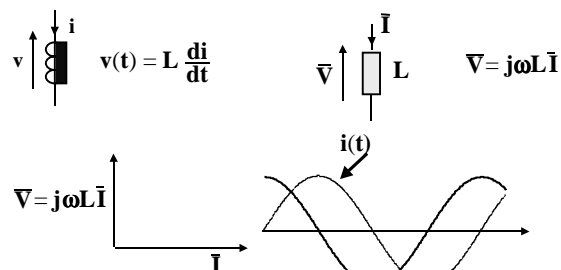
Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 12

### Bipolo resistore



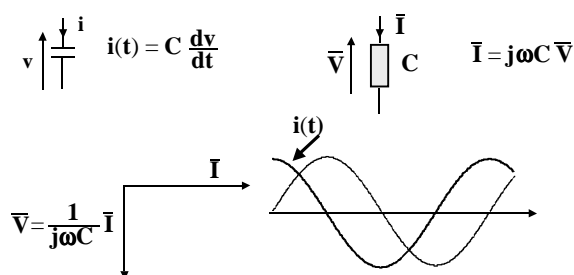
Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 13

### Bipolo induttore



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 14

### Bipolo condensatore



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 15

### Proprietà delle reti in regime sinusoidale

- Le proprietà delle reti dimostrate in regime continuo restano valide purché si usino i concetti di impedenza ed ammettenza al posto di quelli di resistenza e conduttanza.
- Fanno eccezione i teoremi di non amplificazione.
- Bisogna ricordare che impedenze ed ammettenze sono numeri complessi.

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 16

### Operazioni sui numeri complessi

#### In forma cartesiana

$$(a + jb) + (c + jd) = a + c + j(b + d),$$

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad),$$

$$\frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2};$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 17

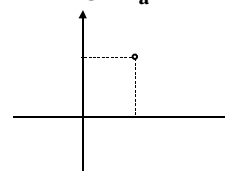
### Operazioni sui numeri complessi

#### In forma polare

$$(a + jb) = A e^{j\varphi}, \text{ con } A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \tan \varphi = \frac{b}{a},$$

$$A e^{j\varphi} B e^{j\gamma} = A B e^{j(\varphi + \gamma)},$$

$$\frac{A e^{j\varphi}}{B e^{j\gamma}} = \frac{A}{B} e^{j(\varphi - \gamma)}.$$



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 18

## Serie e parallelo di impedenze

### Serie

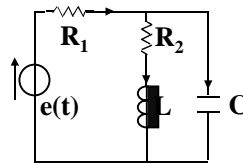
$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2, \quad \dot{Y} = \frac{\dot{Y}_1 \dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2}.$$

### Parallelo

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}, \quad \dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2.$$

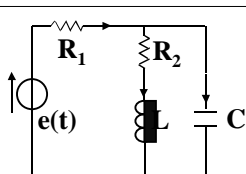
Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 19

## Un esempio



$$\begin{aligned} C &= 1\text{mF}; \\ L &= 50\text{ mH}; \\ R_1 &= 10\ \Omega; \\ R_2 &= 5\ \Omega; \\ e(t) &= 20\sqrt{2} \sin(100t). \end{aligned}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 20



## Un esempio

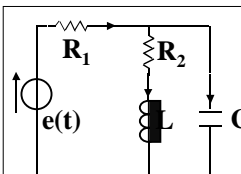
$$E = 20$$

$$X_L = \omega L = 5\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 10\ \Omega$$

- Due equazioni alle maglie;
- Una equazione ai nodi.

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 21



## Un esempio

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3;$$

$$\bar{E} = R_1 \bar{I}_1 + (R_2 + jX_L) \bar{I}_2$$

$$(R_2 + jX_L) \bar{I}_2 = -jX_C \bar{I}_3$$

$$\bar{E} = R_1 (\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + (R_2 + jX_L) \bar{I}_2$$

$$\bar{I}_3 = \frac{R_2 + jX_L}{-jX_C} \bar{I}_2$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 22

## Un esempio

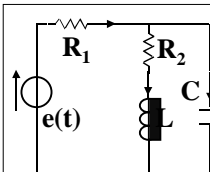
$$\bar{E} = \left( R_1 + R_2 - \frac{R_1 X_L}{X_C} + j \left( X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C} \right) \right) \bar{I}_2$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{R_1 + R_2 - \frac{R_1 X_L}{X_C} + j \left( X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C} \right)}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{10 + j10} = \frac{\bar{E}}{10\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$i_2(t) = 2 \sin\left(100t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 23



## Un diverso modo

$$Z = R_1 + \frac{-jX_C(R_2 + jX_L)}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{Z}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{Z} \frac{-jX_C}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{R_1 + R_2 - \frac{R_1 X_L}{X_C} + j \left( X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C} \right)}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 24

Un'altro esempio

$C = 0.5 \text{ mF};$   
 $L = 1 \text{ mH};$   
 $R_1 = 1 \, \Omega;$   
 $R = 2 \, \Omega;$

$e(t) = \sqrt{2} \sin(1000 t).$   
 $i(t) = 2 \sin(1000 t + \pi/4).$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 25

Riepilogo della Lezione 30

- Ancora sul metodo simbolico;
- Impedenza ed ammettenza;
- Vettori rotanti;
- Un esempio;
- Esercizi.

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 26

Fine della  
Lezione 30

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 27