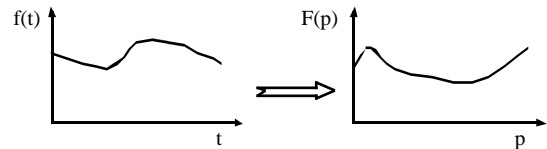


Lezione 43

La trasformata di Laplace



$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) g(p, t) dt$$

$$L\{f(t)\} = F(p); \quad L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = h(p)F(p);$$

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} g(p, t) dt = \\ &= [f(t) g(p, t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \frac{dg(p, t)}{dt} dt \quad \text{Laplace} \\ \frac{dg(p, t)}{dt} &= h(p) g(p, t) \longrightarrow \int_0^{\infty} f(t) h(p) g(p, t) dt \end{aligned}$$

La trasformata di Laplace

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = h(p)F(p); \quad h(p) = p;$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{pt} dt \quad p \text{ variabile complessa}$$

$$p = \alpha + j\beta \quad e^{pt} = e^{\alpha t} e^{j\beta t} \quad \alpha < 0$$

La trasformata di Laplace

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$F(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^T f(t) e^{-pt} dt$$

La trasformata di Laplace

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$p = \sigma + j\omega$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

La trasformata di Laplace

$$f(t) = e^{\alpha t} \quad f(t) e^{-pt} = e^{(\alpha - p)t} e^{-j\omega t}$$

$\sigma > \alpha$ L'integrale esiste ed è finito

$\sigma = \alpha$ L'integrale non esiste

$\sigma < \alpha$ L'integrale è illimitato

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.7



La trasformata di Laplace

$$f(t) = e^{t^2} \quad f(t) e^{-pt} = e^{(t-\alpha)t} e^{-j\omega t}$$

Per nessun valore finito di σ
l'integrale è finito

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.8



La trasformata di Laplace

Se per un valore finito di σ
l'integrale esiste ed è finito,
allora si dice che la $f(t)$ è
trasformabile secondo
Laplace.

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.9



La trasformata di Laplace

Se $|f(t)| \leq M e^{\alpha_0 t}$
con $M > 0$ e $\alpha_0 > 0$

Allora $f(t)$ è trasformabile

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.10



Antitrasformata di Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.11



Alcune trasformate

funzione	trasformata
$\delta(t)$	1
$\delta^n(t)$	p^n
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.12



Alcune trasformate

funzione **trasformata**

$$e^{-\alpha t}$$

$$\frac{1}{p+\alpha}$$

$$\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t}$$

$$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.13



Alcune trasformate

funzione **trasformata**

$$\cos \beta t$$

$$\frac{p}{p^2+\beta^2}$$

$$\sin \beta t$$

$$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.14



Alcune trasformate

funzione **trasformata**

$$e^{-\alpha t} \cos \beta t$$

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

$$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.15



Alcune trasformate

funzione **trasformata**

$$Ae^{-\alpha t} \cos \beta t +$$

$$+ \frac{(B-A\alpha)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

$$\frac{Ap+B}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.16



Proprietà delle L-trasformate

$$\mathbf{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$$

$$\mathbf{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = pF(p) - f(0.)$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.17



Proprietà delle L-trasformate

$$\sum_r (\pm) i_r(t) = 0 \quad \text{per ogni nodo}$$

$$\sum_r (\pm) v_r(t) = 0 \quad \text{per ogni maglia.}$$

$$\sum_r (\pm) I_r(p) = 0 \quad \text{per ogni nodo}$$

$$\sum_r (\pm) V_r(p) = 0 \quad \text{per ogni maglia}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.18



Proprietà delle L-trasformate

$$v(t) = R i(t) \quad \Longleftrightarrow \quad V(p) = R I(p)$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad V(p) = p L I(p) - L i(0_-)$$

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad I(p) = p C V(p) - C v(0_-)$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.19

La trasformata di Laplace

$$\frac{V(p)}{I(p)} = R$$

$$\frac{V(p)}{I(p)} = p L$$

$$\frac{V(p)}{I(p)} = \frac{1}{p C}$$

$$\frac{V(p)}{I(p)} = Z(p)$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.20

La funzione di trasferimento

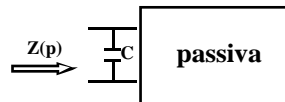
$$u(t) = \int_{0^-}^{t^+} e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$U(p) = E(p) H(p)$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.21



Un metodo ibrido

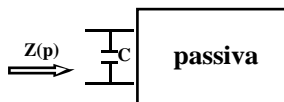


$$Z(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad D(p) = 0$$

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^n A_r e^{\alpha_r t}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.22

Un metodo ibrido



$$Z(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad D(p) = 0$$

Le radici del denominatore sono le radici dell'equazione caratteristica e quindi forniscono le costanti di tempo del circuito.

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.23



Un metodo ibrido



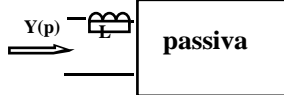
$$y_0(t) = \sum_{r=1}^n A_r e^{\alpha_r t} + y_p(t)$$

Dalle condizioni iniziali si ricavano le costanti A_r

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.24



Un metodo ibrido



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.25



Riepilogo della Lezione 42

- La trasformata di Laplace;
- Esercizi.

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.26



Fine della Lezione 43

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n.27

