

Lezione 27

Radici complesse coniugate

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \quad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$\Delta = a_1^2 - 4 a_0 \leq 0$$

$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha \pm j \beta$$

$$y(x) = (A + jB) e^{(\alpha + j\beta)x} + (A - jB) e^{(\alpha - j\beta)x}$$

Oscillazioni

$$y(x) = (A + jB) e^{(\alpha + j\beta)x} + (A - jB) e^{(\alpha - j\beta)x} \quad R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = e^{\alpha x} [(A + jB) e^{+j\beta x} + (A - jB) e^{-j\beta x}]$$

$$y(x) = e^{\alpha x} [A (e^{+j\beta x} + e^{-j\beta x}) + jB (e^{+j\beta x} - e^{-j\beta x})]$$

Oscillazioni

$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = e^{\alpha x} [A (e^{+j\beta x} + e^{-j\beta x}) + jB (e^{+j\beta x} - e^{-j\beta x})]$$

$$y(x) = e^{\alpha x} \left[2A \frac{(e^{+j\beta x} + e^{-j\beta x})}{2} - 2B \frac{(e^{+j\beta x} - e^{-j\beta x})}{2j} \right]$$

Oscillazioni

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \quad R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = e^{\alpha x} \left[2A \frac{(e^{+j\beta x} + e^{-j\beta x})}{2} - 2B \frac{(e^{+j\beta x} - e^{-j\beta x})}{2j} \right]$$

$$y(x) = e^{\alpha x} [2A \sin(\beta x) - 2B \cos(\beta x)]$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Oscillazioni

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \quad R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$v_C(t) = k e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{T}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{T}\right)^2}$$

Caso oscillante
o sottocritico

Radici coincidenti

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \quad R^2 = \frac{4L}{C}$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{T}$$

$e^{\alpha t}$

$$e^{\alpha t} \quad e^{(\alpha+\Delta\alpha)t}$$

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{(\alpha+\Delta\alpha)t} - e^{\alpha t}}{\Delta\alpha} = \frac{d e^{\alpha t}}{d\alpha} = t e^{\alpha t}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 7

Radici coincidenti

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \quad R^2 = \frac{4L}{C}$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{T}$$

Caso critico

$$e^{\alpha t} \quad t e^{\alpha t}$$

$$v_C(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 8

Posizioni

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\alpha^2 + \frac{R}{L} \alpha + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 9

Posizioni

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$T = \frac{2L}{R}$$

ed

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Delta = \frac{4}{T^2} (1 - \omega_0^2 T^2)$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 10

Posizioni

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Delta = \frac{4}{T^2} (1 - \omega_0^2 T^2) \quad T = \frac{2L}{R} \quad \text{ed} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega_0 T < 1$ Caso aperiodico o smorzato o sopracritico

$\omega_0 T = 1$ Caso critico

$\omega_0 T > 1$ Caso periodico o oscillante o subcritico

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 11

Condizioni iniziali

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \quad R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$v_C(t) = k e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{T}$$

$$v_C(0) = V_0$$

$$i(0) = I_0$$

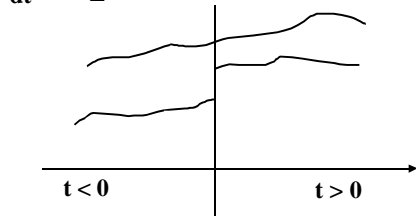
$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{T}\right)^2}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 12

Condizioni iniziali

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} = 0 \quad v_C(0) = V_0$$

$$i(0) = I_0$$



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 13

Condizioni iniziali

$$v_C(t) = k e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \quad R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$v_C(0) = V_0$$

$$i(0) = I_0$$

$$v_C(0) = k \sin(\varphi) = V_0$$

$$i(t) = C \frac{dv_C}{dt} = \alpha k C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) + \beta k C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$$

$$i(0) = \alpha k C \sin(\varphi) + \beta k C \cos(\varphi) = I_0$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 14

Condizioni iniziali

$$v_C(t) = k e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \quad R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$i(t) = \alpha k C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) + \beta k C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$$

$$v_C(0) = k \sin(\varphi) = V_0$$

$$i(0) = \alpha k C \sin(\varphi) + \beta k C \cos(\varphi) = I_0$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 15

Potenza dissipata ed Energia immagazzinata

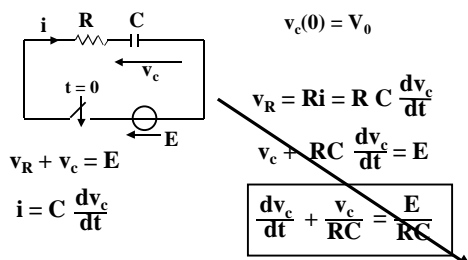
$$v_C(t) = k e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \quad R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$i(t) = \alpha k C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) + \beta k C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$$

$$W_1 = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t R i^2 dt \quad W_2 = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C v^2$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 16

RC in evoluzione forzata



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 17

RC in evoluzione forzata

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

- Differenziali;
- Lineari;
- A coefficienti costanti;
- Non omogenee

$$y' + a_0 y(x) = f(x)$$

$$y' + a_0 y(x) = 0$$

$$y_r(x)$$

$$y_0(x)$$

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x)$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 18

RC in evoluzione forzata

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{E}{RC}$$

- Differenziali;
- Lineari;
- A coefficienti costanti;
- Non omogene

$$y' + a_0 y(x) = f(x) = k$$

$$y_r(x) = \frac{k}{a_0}$$

$$v_c = E$$

$$v_c(t) = k e^{\alpha t} + E$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 19

Riepilogo della Lezione 27

- Ancora sulla serie di R, L e C ;
- Radici complesse e coniugate;
- Radici coincidenti;
- Le condizioni iniziali;
- Bilanci energetici;
- Carica di un condensatore.

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 20

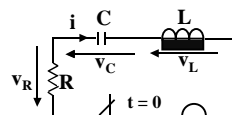
Fine della Lezione 27

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 21

Lezione 28

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 22

Circuito R L C in evoluzione forzata



$$v_R + v_C + v_L = E$$

$$v_C = L \frac{di}{dt}$$

$$i = C \frac{dv_C}{dt}$$

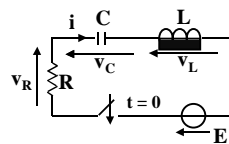
$$v_R = Ri$$

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} = E$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 23

Circuito R L C in evoluzione forzata



$$v_r = E$$

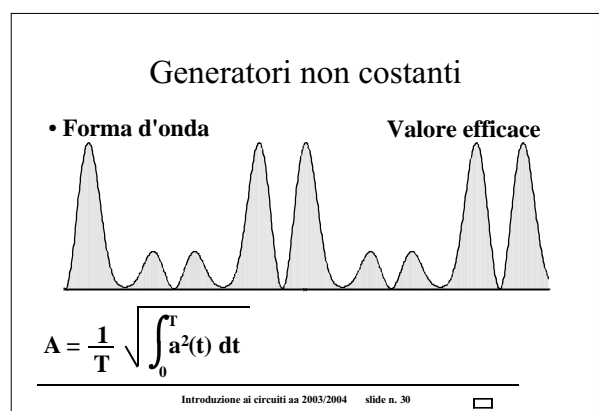
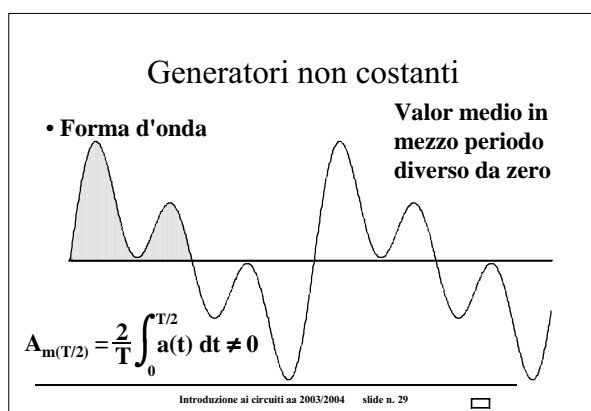
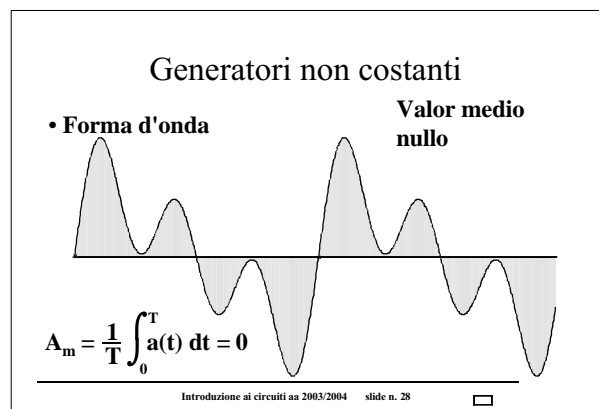
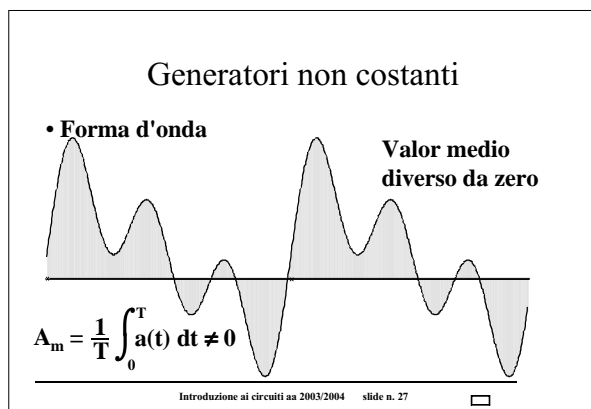
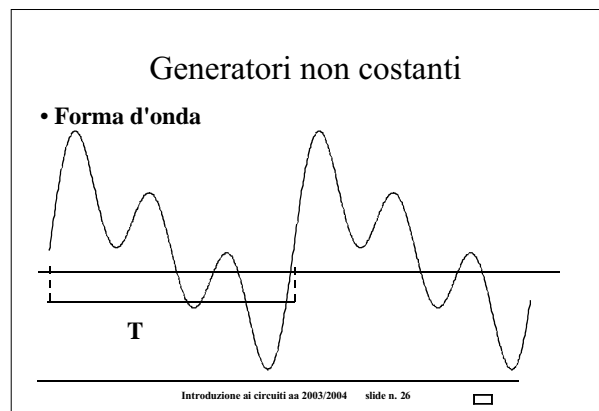
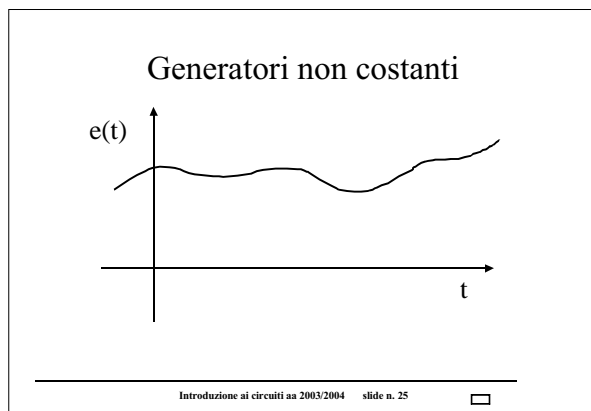
$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

$$v_C(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} + E$$

$$v_C(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t} + E$$

$$v_C(t) = k e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi) + E$$

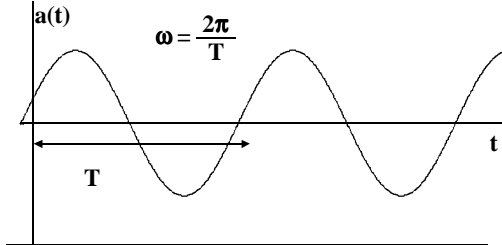
Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 24



Generatori non costanti

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi)$$

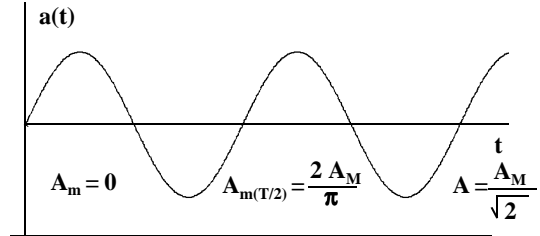
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 31

Generatori non costanti

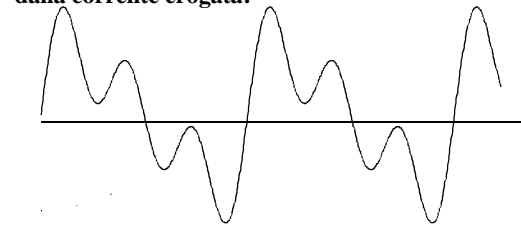
$$a(t) = A_M \sin(\omega t)$$



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 32

Generatori ideali di tensione

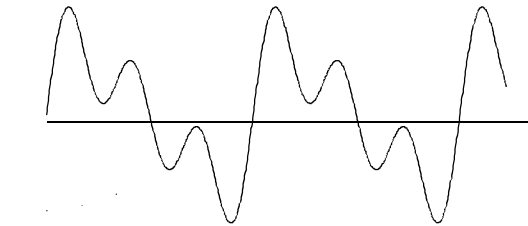
- La forma d'onda della tensione non dipende dalla corrente erogata!



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 33

Generatori ideali di corrente

- La forma d'onda della corrente non dipende dalla tensione ai morsetti!



Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 34

Perchè generatori sinusoidali?

Serie di Fourier

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \omega t) +$$

J. B. Fourier
(1768 - 1830)

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n \omega t)$$

$$\omega = 2\pi/T$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 35

Perchè generatori sinusoidali?

Serie di Fourier

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \omega t) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n \omega t)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \sin(n \omega t) dt$$

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 36

Perchè generatori sinusoidali?

Serie di Fourier

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \cos(n\omega t) dt$$

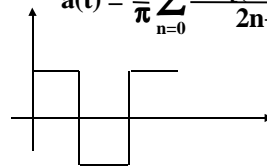
Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 37



Un esempio

Serie di Fourier

$$a(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\omega t]}{2n+1}$$



Onda quadra

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 38



Riepilogo della Lezione 28

- Circuito RC con gen. costante ;
- Circuito RLC con gen. costante ;
- Generatori variabili;
- Forme d'onda periodiche;
- Perché il regime sinusoidale.

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 39



Fine della Lezione 28

Introduzione ai circuiti aa 2003/2004 slide n. 40

