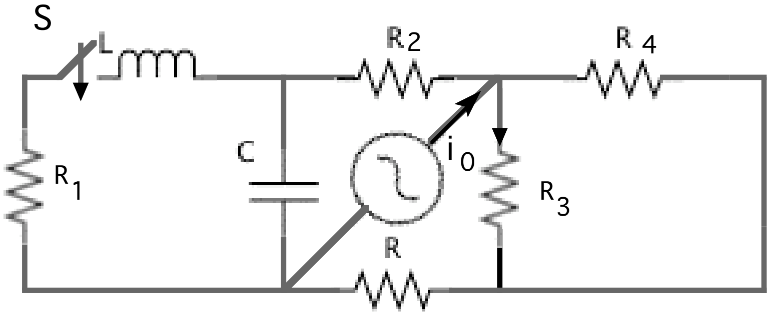
Prova scritta del 10/1/10 (Prova A)

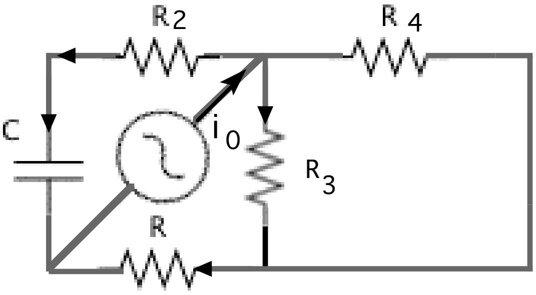
L'interruttore S all'istante t=0 è in chiusura. Determinare l'andamento della corrente nel resistore R_3 per t≥0.



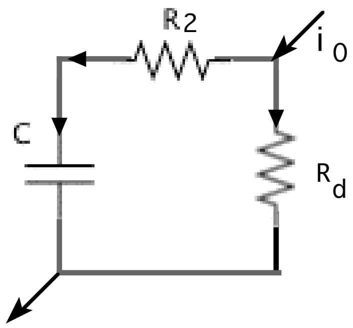
R = 5 Ω;
R_1 = 20 Ω;
R_2 = R_3 = R_4 = 10 Ω;
C = 0,5 mF;
L = 200 mH; $i_0(t)$ = 2sen(100t-π/4)A;

Soluzione

Il circuito viene modificato all'istante t=0 dall'interruttore S. Per t≤0 il circuito è in ca. e si riduce a quello mostrato in figura.



Tenendo conto che i resistori R_3 ed R_4 sono in parallelo ed il loro parallelo è in serie a R, il circuito si riduce a quello mostrato nella successiva figura, dove R_d è la resistenza equivalente di cui prima ed il generatore di corrente è stato indicato con le frecce nei nodi d'ingresso e di uscita.
$R_d = R + R_3 // R_4 = 10\Omega$.
Si tenga presente che poiche R_3 ed R_4 sono eguali, la corrente in R_3 sarà giusto la metà di quella in R_d.



in queste condizioni si calcolano agevolmente le variabili di stato (in forma fasoriale!) per il nostro transitorio, e cioè la tensione sul condensatore e la corrente nell'induttore: Quest'ultima è evidentemente nulla mentre la prima è pari a (convenzione del valor massimo):

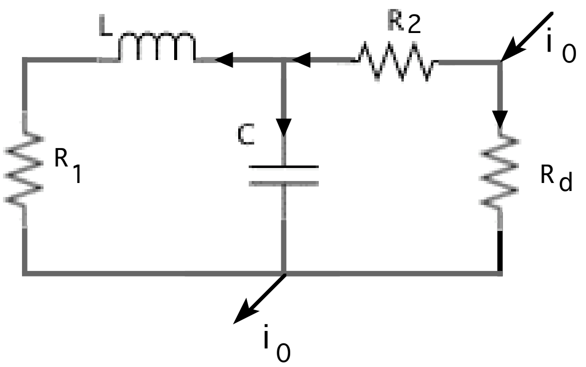
$$\bar{V}_C = -jX_C\bar{I}_C = -jX_C\bar{I}_0\frac{R_d}{R_d + R_2 - jX_C} = \frac{\bar{I}_0}{2}\frac{-j20}{1-j} = \frac{-j20}{\sqrt{2}}.$$

Si ha dunque:

$$i_L(0_-) = 0$$

$$v_C(0_-) = \frac{20}{\sqrt{2}}sen\left(100t - \pi/2\right) = -14{,}14V$$

Alla chiusura dell'interruttore il circuito diventa quello mostrato in figura, con due maglie e tre nodi.



Le equazioni sono:

$$L\frac{di_L}{dt} + R_1 i_L = v_C$$

$$-R_2 i_2 + R_d i_d = v_C$$

$$i_0 = i_d + i_2$$

$$i_2 = i_L + i_C$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

Si elimina facilmente v_C usando le due prime equazioni e inserendo nell'ultima il valore di v_C fornito dalla seconda. Si ottiene:

$$L\frac{di_L}{dt}+R_1 i_L=-R_2 i_2+R_d i_d$$

$$i_0=i_d+i_2$$

$$i_2=i_L+C\frac{d}{dt}\left(-R_2 i_2+R_d i_d\right)$$

Usando la seconda si può eliminare i_2:

$$L\frac{di_L}{dt}+R_1 i_L=-R_2\left(i_0-i_d\right)+R_d i_d$$

$$i_0-i_d=i_L+C\frac{d}{dt}\left(-R_2\left(i_0-i_d\right)+R_d i_d\right)$$

Infine ricavando i_L dalla seconda e sostituendo l'espressione così trovata e la sua derivata nella prima si giunge all'equazione per i_d e qindi anche quella per i_{R3} che è la sua metà:

$$\frac{d^2 i_d}{dt^2}+\frac{di_d}{dt}\left(\frac{R_1}{L}+\frac{1}{R_0 C}\right)+\frac{R_0+R_1}{R_0 LC}i_d=f\left(i_0,\frac{di_0}{dt}\right)$$

L'esatta espressione del termine noto non è interessante in questa fase.

Le radici dell'equazione caratteristica sono: $x = \alpha \pm j\beta = -100+j100$, e quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è:

$$i_{R3}(t)=Ae^{-j100t}sen(100t+\varphi).$$

Per la soluzione di regime basta considerare lo stesso circuito ma in regime sinusoidale; si ottiene facilmente:

$$\bar{I}_{R3}=\frac{1}{2}\bar{I}_d=\frac{1}{2}\bar{I}_0\frac{R_2+\dfrac{-jX_C\left(R_1+jX_L\right)}{R_1+j\left(X_L-X_C\right)}}{R_d+R_2+\dfrac{-jX_C\left(R_1+jX_L\right)}{R_1+j\left(X_L-X_C\right)}}=\frac{\bar{I}_0}{4}\frac{3-j2}{2-j}=0{,}71e^{-j0.91}.$$

E quindi:

$$i_{R3P}(t)=0{,}71sen(100t-0{,}91)$$

e in definitiva:

$$i_{R3}(t)=Ae^{-100t}sen(100t+\varphi)+0{,}71sen(100t-0{,}91)$$

All'istante 0^+ la soluzione trovta e la sua derivata valgono, rispettivamente:

$$i_{R3}\left(0^+\right)=Asen\varphi-0{,}56$$

$$\left.\frac{di_{R3}}{dt}\right|_{0^+}=100A\cos\varphi-100Asen\varphi+49{,}47$$

I valori che debbono avere all'istante 0^+ per assicurare la continuità delle variabili di stato si calcolano scrivendo le equazioni del circuito all'istante "zero più" e tenendo conto dei valori noti delle variabili di stato ($v_C(0^+)$ e $i_L(0^+)$). Si ottiene:

$$i_{R3}\left(0^+\right)=\frac{i_d\left(0^+\right)}{2}=\frac{1}{2}\frac{R_2 i_0\left(0^+\right)+v_C\left(0^+\right)}{R_d+R_2}=-0{,}85$$

$$\left.\frac{di_{R3}}{dt}\right|_{0^+}=\frac{1}{2}\left.\frac{di_d}{dt}\right|_{0^+}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left.\frac{di_0}{dt}\right|_{0^+}+\frac{\left(i_0\left(0^+\right)-i_d\left(0^+\right)\right)}{C\left(R_d+R_2\right)}\right]=50$$

Da cui si ottiene $\varphi = \pi/4$ e A=- 0,41.

Il risultato finale è dunque:

$$i_{R3}(t)=-0{,}41e^{-100t}sen\left(100t+\pi/4\right)+0{,}71sen(100t-0{,}91)$$