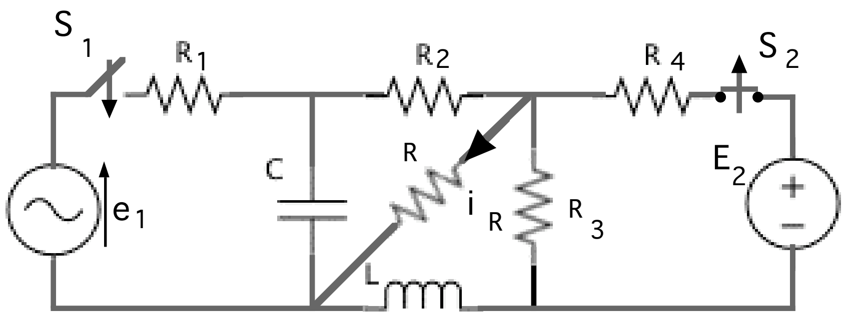
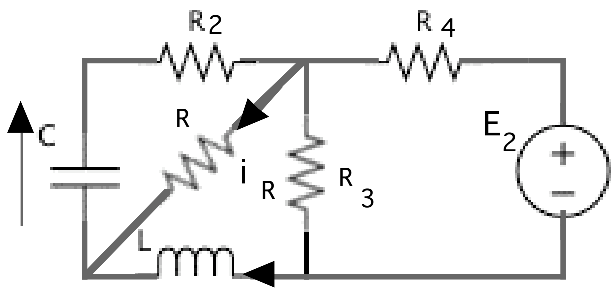
Esame scritto del 6/12/04 – Prova A

L'interruttore S_2 all'istante t=0 è in apertura mentre l'interruttore S_1 è in chiusura. Determinare l'andamento della corrente nel resistore R per t≥0.



$R_1 = 2.25\ \Omega$;
$R_2 = 3\ \Omega$;
$R = 15\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 25/2\ \Omega$;
$C = 10/3$ mF;
$L = 150$ mH;
$e_1 = 100\text{sen}(100t-\pi/4)$V;
$E_2 = 20$V;

Il circuito viene modificato all'istante t=0 dai due interruttori. Per t≤0 il circuito è in cc. e si riduce a quello mostrato in figura.

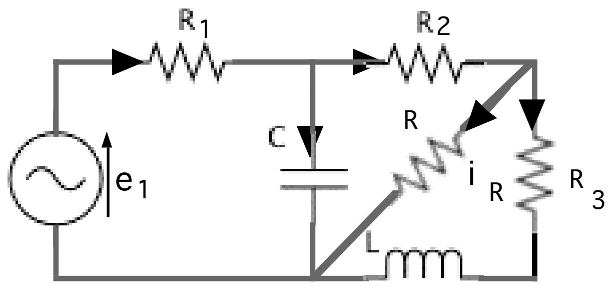


Poiché il condensatore in c.c. equivale ad un circuito aperto, la corrente in L per t≤0 è quella che circola in R e quindi il risultato della ripartizione della corrente erogata dal generatore nei due rami in parallelo R ed R3.
In queste condizioni il generatore E_2 vede la serie di R_4 e della resistenza equivalente $R_e = 15/2\ \Omega$, che è, a sua volta, il parallelo di R_3 con R: $i_L\left(0^-\right) = \dfrac{E_2}{R_4 + R_e}\dfrac{R_3}{R_3 + R} = \dfrac{1}{2}A$.

La tensione sul condensatore per t≤0 si ottiene quindi ripartendo la tensione del generatore sulla serie di R_4 e di R_e:

$$v_c\left(o^-\right) = \frac{E_2}{R_4 + R_e}R_e = \frac{15}{2}V\ (0_-)$$

Per t≥0 il circuito è quello mostrato in figura.



Le equazioni che reggono il circuito sono:

$$e_1 = R_1 i_1 + v_C \qquad v_L = L\frac{di_L}{dt}$$
$$v_C = Ri_2 + Ri_R \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$
$$Ri_R = R_3 i_L + v_L$$
$$i_1 = i_2 + i_C$$
$$i_2 = i_R + i_L$$

Eliminando i_1 ed i_2 utilizzando le equazioni ai nodi ed i_C utilizzando la caratteristica del condensatore, si ottiene:

$$e_1 = R_1\left(C\frac{dv_C}{dt} + i_L + i_R\right) + \left(R_2 + R\right)i_R + R_2 i_L;$$
$$Ri_R = R_3 i_L + L\frac{di_L}{dt}; \qquad (2)$$
$$v_C = \left(R_2 + R\right)i_R + R_2 i_L.$$

Eliminando ancora v_C dalla terza, si ottiene:

$$e_1 = R_1\left(C(R_2+R)\frac{di_R}{dt} + CR_2\frac{di_L}{dt} + i_L + i_R\right) + (R_2+R)i_R + R_2 i_L;$$
$$Ri_R = R_3 i_L + L\frac{di_L}{dt}. \tag{2}$$

Per ricavare l'equazione in i_R facciamo prima scomparire dalla prima la derivata di i_L dedotta dalla seconda e ricaviamo i_L:

$$e_1 - R_1C(R_2+R)\frac{di_R}{dt} - \frac{CR_1R_2}{L}Ri_R - R_1 i_R - (R_2+R)i_R = (R_1+R_2)i_L\left(1 - \frac{R_1R}{R_1+R_{2\,2}}\frac{CR_3}{L}\right)$$

Da questa relazione i_L ci appare nella forma:

$$i_L = e_1 - \frac{A}{D}\frac{di_R}{dt} - \frac{B}{D}i_R \tag{3}$$

Dove:

$$A = R_1C(R_2+R)$$
$$B = \frac{C}{L}R_1R_2R + R_1 + R_2 + R$$
$$D = (R_1+R_2)\left[1 - \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\frac{CR_3}{L}\right]$$

Dall'espressione di i_L si può, derivando, ricavare anche la derivata di i_L

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{de_1}{dt} - \frac{A}{D}\frac{d^2i_R}{dt^2} - \frac{B}{D}\frac{di_R}{dt}$$

Sostituendo i valori di i_L e della sua derivata nella seconda delle equazioni (2), si ottiene l'equazione nella sola i_R

$$Ri_R = R_3\left(e_1 - \frac{A}{D}\frac{di_R}{dt} - \frac{B}{D}i_R\right) + L\left(\frac{de_1}{dt} - \frac{A}{D}\frac{d^2i_R}{dt^2} - \frac{B}{D}\frac{di_R}{dt}\right).$$

Riordinando si ottiene:

$$\frac{d^2i_R}{dt^2} + \frac{di_R}{dt}\left[\frac{AR_3+LB}{AL}\right] + \frac{BR_3+RD}{AL}i_L = \frac{DR_3}{AL}e_1 + \frac{D}{A}\frac{de_1}{dt};$$

con

$$\frac{AR_3+LB}{AL} = \frac{R_3}{L} + \frac{R_2R}{R_2+R}\frac{1}{L} + \frac{R_1+R_2+R}{R_1(R_2+R)C};$$
$$\frac{BR_3+RD}{AL} = \frac{1}{R_1LC}\left[R_3 + R_e + \frac{R_1(R_3+R)}{(R_2+R)}\right].$$

Con:

$$R_e = \frac{R_2R}{R_2+R}$$

Alla stesso risultato si poteva giungere in modo più semplice ricordando che i coefficienti dell'equazione omogenea non possono dipendere dalla scelta della variabile in cui si scrive l'equazione, altrimenti le costanti di tempo e le frequenze naturali del circuito dipenderebbero da tale scelta, il ché è evidentemente assurdo. Di conseguenza, partendo dal sistema (2), si poteva più semplicemente ricavare l'equazione nella i_L e prendere in considerazione la sola omogenea. Si ha infatti, sostituendo nella prima delle (2) la i_R ricavata dalla seconda e riordinando:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2}+\frac{di_L}{dt}\left[\frac{R_3}{L}+\frac{R_2 R}{R_2+R}\frac{1}{L}+\frac{R_1+R_2+R}{R_1(R_2+R)C}\right]+\frac{1}{R_1 LC}\left[R_3+R_e+\frac{R_1(R_3+R)}{(R_2+R)}\right]i_L=\frac{R}{R_1}\frac{1}{LC}\frac{1}{R_2+R}e_1;$$

E' facile verificare che in entrambe le equazioni tutti i termini hanno le stesse dimensioni e che ponendo:

$$R_0=\frac{R_1(R_2+R)}{R_1+R_2+R}$$

Si ottiene:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2}+\frac{di_L}{dt}\left[\frac{R_3+R_e}{L}+\frac{1}{R_0 C}\right]+\frac{1}{R_1 LC}\left[R_3+R_e+\frac{R_1(R_3+R)}{(R_2+R)}\right]i_L=\frac{R}{R_1}\frac{1}{LC}\frac{1}{R_2+R}e_1;$$

In conclusione, inserendo i valori numerici, si ottiene l'equazione omogenea:

$$\frac{d^2 i_R}{dt^2}+370{,}91\frac{di_R}{dt}+18{,}89\cdot 10^3 i_R=0$$

Le cui radici sono, rispettivamente, –309,97 e –121,87. L'integrale generale dell'omogenea ha, dunque, la forma:

$$i_{R0}(t)=k_1 e^{-309{,}91t}+k_2 e^{-121{,}87t}$$

Per determinare le costanti k_1 e k_2 abbiamo bisogno anche della soluzione di regime.
Passando al dominio dei fasori si ottiene facilmente l'impedenza vista dal generatore:

$$Z=R_1+\frac{-jX_C\left(R_2+\dfrac{R(R_3+jX_L)}{R+R_3+jX_L}\right)}{R_2+\dfrac{R(R_3+jX_L)}{R+R_3+jX_L}-jX_C}$$

La corrente nel resistore R si ottiene ripartendo due volte:

$$\bar{I}_R=\frac{\bar{E}_1}{Z_1}\frac{-jX_C}{R_2+\dfrac{R(R_3+jX_L)}{R+R_3+jX_L}-jX_C}\left(\frac{(R_3+jX_L)}{R+R_3+jX_L}\right)$$

Inserendo i valori numerici si ottiene (convenzione del valor massimo);

$$\bar{I}_R=\frac{50}{6}e^{-j\pi/4}=5{,}89-j5{,}89$$

e quindi:

$$i_{RP}(t)=8{,}33 sen(\omega t-\pi/4)$$

L'integrale generale della equazione completa è dunque:

$$i_R(t) = k_1 e^{-309,91t} + k_2 e^{-121,87t} + 8,33 sen(\omega t - \pi/4)$$

Bisogna ora determinare le condizioni iniziali per la corrente i_R partendo dalle condizioni iniziali che ci sono note, e cioè il valore della corrente nell'induttore e della tensione sul condensatore all'istante zero. Come è noto ciò si ottiene facilmente prendendo in considerazione il sistema delle equazioni di Kirchhoff del circuito, valutandolo all'istante zero e tenendo conto che i valori di i_L e v_C sono noti.
In pratica, si vede facilmente che l'ultima equazione delle (1), valutata all'istante zero, ci fornisce immediatamente il valore di i_R all'istante iniziale:

$$i_R(0) = \frac{v_C(0)}{(R_2 + R)} - \frac{R_2}{(R_2 + R)} i_L(0) = \frac{15}{36} - \frac{1}{12} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Dalla (3) invece si ricava:

$$\frac{di_R}{dt} = \frac{D}{A} i_L - \frac{D}{A} e_1 + \frac{B}{A} i_R = 23,08\left(\frac{1}{2} + 50\sqrt{2}\right) + \frac{173,07}{3} = 1701,23$$

Imponendo queste condizioni iniziali si trova il sistema:

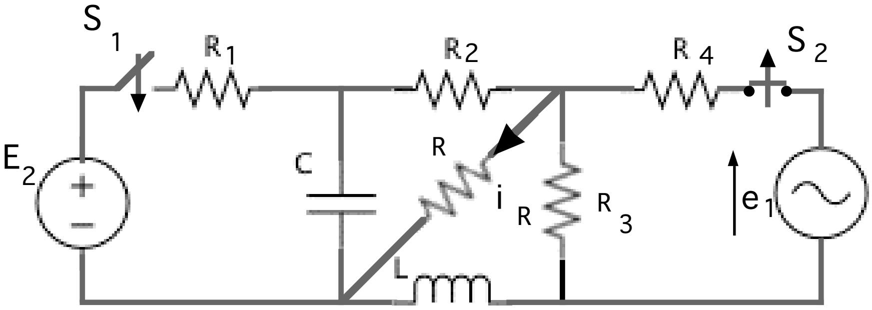
$$k_1 + k_2 - 8.33\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}$$
$$-309,91k_1 - 121,87k_2 + 833\frac{\sqrt{2}}{2} = 1701,23$$

E quindi i valori delle costanti:

$$i_R(t) = -9,94 e^{-309,91t} + 16,16 e^{-121,87t} + 8,33 sen(\omega t - \pi/4)$$

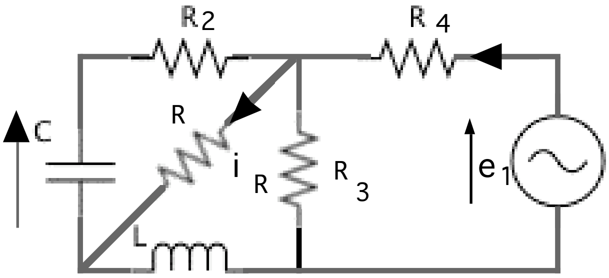
Esame scritto del 6/12/04 – Prova B

L'interruttore S_2 all'istante t=0 è in apertura mentre l'interruttore S_1 è in chiusura. Determinare l'andamento della corrente nel resistore R per t≥0.



$R_1 = R_2 = 30\ \Omega$;
$R = 60\ \Omega$;
$R_3 = 30\ \Omega$;
$R_4 = 5\ \Omega$;
$C = 1/6$ mF;
$L = 150$ mH;
$e_1 = 100sen(200t-\pi/4)$V;
$E_2 = 80$V;

Il circuito viene modificato all'istante t=0 dai due interruttori. Per t≤0 il circuito è a regime in ca. e si riduce a quello mostrato in figura.



Passando al dominio dei fasori si calcola agevolmente l'impedenza vista dal generatore:

$$Z = R_4 + \left[\left(R_L - jX_C\right)//R + jX_L\right]//R_3 = 20 + j5$$

La corrente erogata dal generatore è quindi pari a:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{Z} = \frac{100e^{-j\pi/4}}{20 + j5} = 2.5 - j4.16$$

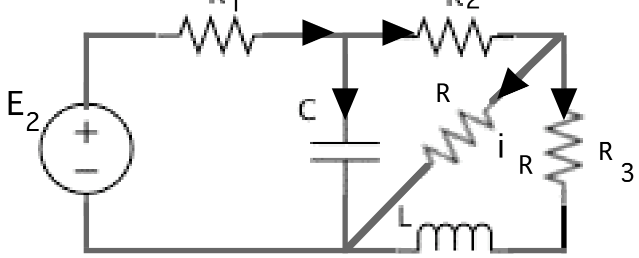
La corrente nell'induttore e la tensione sul condensatore si ottengono di conseguenza:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}}{Z}\frac{R_3}{R_3 + jX_L + \dfrac{R\left(R_2 - jX_C\right)}{R + R_2 - jX_C}} = 2.56e^{-j1.35}$$

$$\bar{V}_C = \bar{I}_L\frac{-jX_C R}{R + R_2 - jX_C} = 48,57e^{-j2,6}$$

Che corrispondono a:

$$i_L(t) = 2,56sen(200t - 1,35)A$$
$$v_C(t) = 48,57sen(200t - 2,6)V$$



Che valutate in zero forniscono le condizioni iniziali:
$i_L(0) = -2,48A \qquad v_C(0) = -24,77V$
Per t≥0 il circuito è quello mostrato in figura.

Le equazioni che reggono il circuito sono:

$$E_2 = R_1 i_1 + v_C \qquad v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$v_C = Ri_2 + Ri_R \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$Ri_R = R_3 i_L + v_L$$

$$i_1 = i_2 + i_C$$

$$i_2 = i_R + i_L$$

Eliminando i_1 ed i_2 utilizzando le equazioni ai nodi ed i_C utilizzando la caratteristica del condensatore, si ottiene:

$$\begin{aligned}
&E_2 = R_1(C\frac{dv_C}{dt} + i_L + i_R) + (R_2 + R)i_R + R_2 i_L; \\
&Ri_R = R_3 i_L + L\frac{di_L}{dt}; \qquad (2) \\
&v_C = (R_2 + R)i_R + R_2 i_L.
\end{aligned}$$

Eliminando ancora v_C dalla terza, si ottiene:

$$\begin{aligned}
&E_2 = R_1\left(C(R_2 + R)\frac{di_R}{dt} + CR_2\frac{di_L}{dt} + i_L + i_R\right) + (R_2 + R)i_R + R_2 i_L; \\
&Ri_R = R_3 i_L + L\frac{di_L}{dt}.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Per ricavare l'equazione in i_R facciamo prima scomparire dalla prima la derivata di i_L dedotta dalla seconda e ricaviamo i_L:

$$e_1 - R_1 C(R_2 + R)\frac{di_R}{dt} - \frac{CR_1R_2}{L}Ri_R - R_1 i_R - (R_2 + R)i_R = (R_1 + R_2)i_L\left(1 - \frac{R_1R}{R_1 + R_{2\,2}}\frac{CR_3}{L}\right)$$

Da questa relazione i_L ci appare nella forma:

$$i_L = E_2 - \frac{A}{D}\frac{di_R}{dt} - \frac{B}{D}i_R \qquad (3)$$

Dove:

$$A = R_1 C(R_2 + R)$$

$$B = \frac{C}{L}R_1R_2R + R_1 + R_2 + R$$

$$D = (R_1 + R_2)\left[1 - \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\frac{CR_3}{L}\right]$$

Dall'espressione di i_L si può, derivando, ricavare anche la derivata di i_L

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{de_1}{dt} - \frac{A}{D}\frac{d^2 i_R}{dt^2} - \frac{B}{D}\frac{di_R}{dt}$$

Sostituendo i valori di i_L e della sua derivata nella seconda delle equazioni (2), si ottiene l'equazione nella sola i_R

$$Ri_R = R_3\left(e_1 - \frac{A}{D}\frac{di_R}{dt} - \frac{B}{D}i_R\right) + L\left(\frac{de_1}{dt} - \frac{A}{D}\frac{d^2i_R}{dt^2} - \frac{B}{D}\frac{di_R}{dt}\right).$$

Riordinando si ottiene:

$$\frac{d^2i_R}{dt^2} + \frac{di_R}{dt}\left[\frac{AR_3 + LB}{AL}\right] + \frac{BR_3 + RD}{AL}i_L = \frac{DR_3}{AL}E_2 + \frac{D}{A}\frac{dE_2}{dt};$$

con

$$\frac{AR_3 + LB}{AL} = \frac{R_3}{L} + \frac{R_2R}{R_2 + R}\frac{1}{L} + \frac{R_1 + R_2 + R}{R_1(R_2 + R)C};$$

$$\frac{BR_3 + RD}{AL} = \frac{1}{R_1LC}\left[R_3 + R_e + \frac{R_1(R_3 + R)}{(R_2 + R)}\right].$$

Con:

$$R_e = \frac{R_2R}{R_2 + R}$$

Si noti che nel nostro caso particolare la derivata di E_2 è nulla!

Alla stesso risultato si poteva giungere in modo più semplice ricordando che i coefficienti dell'equazione omogenea non possono dipendere dalla scelta della variabile in cui si scrive l'equazione, altrimenti le costanti di tempo e le frequenze naturali del circuito dipenderebbero da tale scelta, il ché è evidentemente assurdo. Di conseguenza, partendo dal sistema (2), si poteva più semplicemente ricavare l'equazione nella i_L e prendere in considerazione la sola omogenea. Si ha infatti, sostituendo nella prima delle (2) la i_R ricavata dalla seconda e riordinando:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}\left[\frac{R_3}{L} + \frac{R_2R}{R_2 + R}\frac{1}{L} + \frac{R_1 + R_2 + R}{R_1(R_2 + R)C}\right] + \frac{1}{R_1LC}\left[R_3 + R_e + \frac{R_1(R_3 + R)}{(R_2 + R)}\right].i_L = \frac{R}{R_1}\frac{1}{LC}\frac{1}{R_2 + R}E_2;$$

E' facile verificare che in entrambe le equazioni tutti i termini hanno le stesse dimensioni e che ponendo:

$$R_0 = \frac{R_1(R_2 + R)}{R_1 + R_2 + R}$$

Si ottiene:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}\left[\frac{R_3 + R_e}{L} + \frac{1}{R_0C}\right] + \frac{1}{R_1LC}\left[R_3 + R_e + \frac{R_1(R_3 + R)}{(R_2 + R)}\right].i_L = \frac{R}{R_1}\frac{1}{LC}\frac{1}{R_2 + R}E_2;$$

In conclusione, inserendo i valori numerici, si ottiene l'equazione omogenea:

$$\frac{d^2i_R}{dt^2} + 370{,}91\frac{di_R}{dt} + 18{,}89 \cdot 10^3 i_R = 0$$

Le cui radici sono $(-3 + j2{,}6)\ 10^2$ e $(-3 - j2{,}6)\ 10^2$. L'integrale generale dell'omogenea ha, dunque, la forma:

$$i_{R0}(t) = Ae^{-300t}sen(260t + \varphi)$$

Per determinare le costanti A e φ abbiamo bisogno anche della soluzione di regime.

Poiché il condensatore in c.c. equivale ad un circuito aperto e l'induttore un corto circuito, la corrente erogata dal generatore è pari a:

$$I_1 = \frac{E_2}{R_1 + R_2 + R_e} = 1A$$

Quella che circola in R è quindi il risultato della ripartizione della corrente erogata dal generatore nei due rami in parallelo R ed R3.

$$i_{RP} = I_R = I_1 \frac{R_3}{R + R_3} = \frac{1}{3} A$$

L'integrale generale della equazione completa è dunque:

$$i_R(t) = Ae^{-300t} sen(260t + \varphi) + 0{,}33$$

Bisogna ora determinare le condizioni iniziali per la corrente i_R partendo dalle condizioni iniziali che ci sono note, e cioè il valore della corrente nell'induttore e della tensione sul condensatore all'istante zero. Come è noto ciò si ottiene facilmente prendendo in considerazione il sistema delle equazioni di Kirchhoff del circuito, valutandolo all'istante zero e tenendo conto che i valori di i_L e v_C sono noti.

In pratica, si vede facilmente che l'ultima equazione delle (1), valutata all'istante zero, ci fornisce immediatamente il valore di i_R all'istante iniziale:

$$i_R(0) = \frac{v_C(0)}{(R_2 + R)} - \frac{R_2}{(R_2 + R)} i_L(0) = -\frac{24{,}77}{90} + \frac{2{,}48}{3} = 0{,}55.$$

Dalla (3) invece si ricava:

$$\frac{di_R}{dt} = \frac{D}{A} i_L - \frac{D}{A} E_2 + \frac{B}{A} i_R = -\frac{30}{0{,}45}(2{,}48 + 80) + \frac{180}{0{,}45} 0{,}55 = -5278{,}66$$

Imponendo queste condizioni iniziali si trova il sistema:

$$\begin{aligned} &A sen\varphi + 0{,}33 = 0{,}55 \\ &-300 A sen\varphi + 260 A \cos\varphi = -5278{,}66 \end{aligned}$$

E quindi i valori delle costanti:

$$i_R(t) = 19{,}15 e^{-300t} sen(260t + 3{,}13) + 0{,}33$$