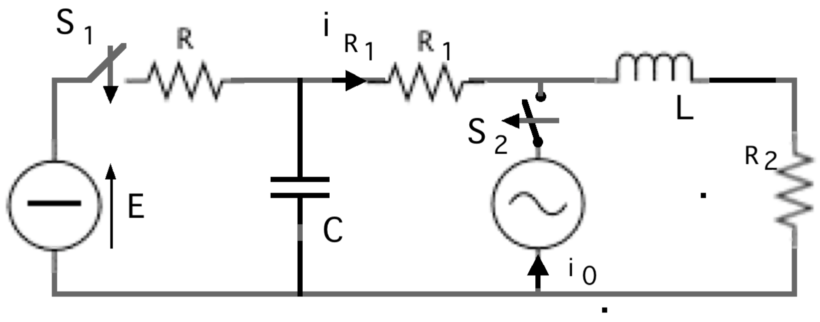
Prova del 26/1/06 - Soluzione della prova A



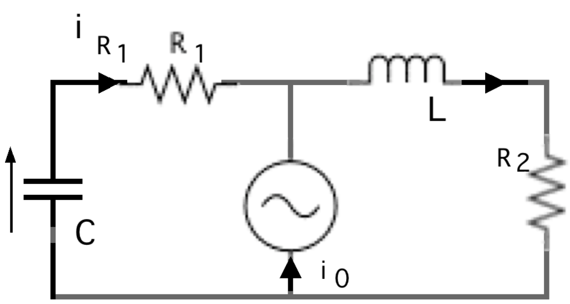
R = 100 Ω; R_1 = 30 Ω; R_2 = 20 Ω; C = 1 μF; L = 4 mH;

$i_0(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\omega t - \pi/4)$A; E = 150 V; ω= 20000 rad/sec

L'interruttore S_2 all'istante t=0 è in apertura mentre l'interruttore S_1 è in chiusura.
Determinare l'andamento della corrente nel resistore R_1 per t≥0.

Soluzione

Per t<0 il circuito è il seguente:



Passando ai fasori si ottiene facilmente:

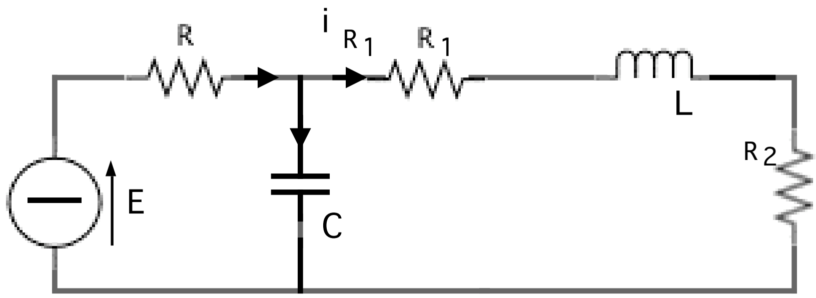
$$\bar{I}_L = \bar{I}_0 \frac{R_1 - jX_C}{R_1 + R_2 + j\left(X_L - X_C\right)} = \frac{\left(1-j\right)}{\sqrt{2}} \frac{30 - j50}{50 + j30} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + j\right) = -e^{j\pi/4}$$

$$\bar{V}_C = \bar{I}_0 \frac{-jX_C\left(R_2 + jX_L\right)}{R_1 + R_2 + j\left(X_L - X_C\right)} = \frac{\left(1-j\right)}{\sqrt{2}} \frac{\left(-j50\right)\left(20 + j80\right)}{50 + j30} = -j50\frac{\left(1-j\right)\left(1+j\right)}{\sqrt{2}} = -j50\sqrt{2} = 50\sqrt{2}e^{-j\pi/2}$$

e quindi

$$i_L\left(0^-\right) = -\sqrt{2}sen\left(\pi/4\right) = -1A = i_L\left(0^+\right);$$
$$v_C\left(0^-\right) = 100sen\left(-\pi/2\right) = -100V = v_C\left(0^+\right).$$

Per t≥0 il circuito diventa:



Le equazioni sono:

$$
\begin{aligned}
&E = Ri_R + v_C;\\
&v_C = (R_1 + R_2)i_{R1} + v_L;\\
&i_R = i_C + i_{R1}.
\end{aligned}
$$

E le caratteristiche dei bipoli a memoria:

$$
\begin{aligned}
&v_L = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{di_{R1}}{dt};\\
&i_C = C\frac{dv_C}{dt}.
\end{aligned}
$$

Usando le caratteristiche si eliminano i_C e v_L e si ottiene

$$
\begin{aligned}
&E = Ri_R + v_C;\\
&v_C = (R_1 + R_2)i_{R1} + L\frac{di_{R1}}{dt};\\
&i_R = C\frac{dv_C}{dt} + i_{R1}.
\end{aligned}
$$

Eliminando i_R ricavata dalla terza equazione si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&E = RC\frac{dv_C}{dt} + Ri_{R1} + v_C;\\
&v_C = (R_1 + R_2)i_{R1} + L\frac{di_{R1}}{dt}.
\end{aligned}
$$

Eliminando infine nella prima v_C ricavato dalla seconda si ottiene l'equazione:

$$\frac{d^2 i_{R1}}{dt^2} + \left[\frac{1}{RC} + \frac{(R_1 + R_2)}{L}\right]\frac{di_{R1}}{dt} + \left[\frac{R + R_1 + R_2}{RLC}\right]i_{R1} = \frac{E}{RLC}.$$

La cui omogenea è:

$$\frac{d^2 i_{R1}}{dt^2} + \frac{9}{4}\cdot 10^4 \frac{di_{R1}}{dt} + \frac{15}{4}\cdot 10^8 i_{R1} = 0.$$

Con radici:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{9}{8} \cdot 10^4 \pm j \frac{\sqrt{9{,}94}}{2} \cdot 10^4$$

Considerando che in continua il condensatore è un circuito aperto e l'induttore un corto circuito, per la soluzione di regime si ha:

$$I_{R1} = \frac{E}{R + R_1 + R_2} = 1A$$

L'integrale generale è:

$$i_{R1}(t) = Ae^{-\frac{9}{8} \cdot 10^4 t} sen\left(\frac{\sqrt{9{,}94}}{2} \cdot 10^4 t + \gamma \right) + 1$$

Poiché i_{R1} per t>0 coincide con i_L si avrà:

$$i_{R1}(0^+) = i_L(0^+) = i_L(0^-) = -1A;$$

Per determinare il valore della derivata all'istante zero basta utilizzare le condizioni iniziali note nelle equazioni del circuito valutate all'istante 0^+:

$$\left. \frac{di_{R1}}{dt} \right|_{0^+} = \frac{1}{L} \left[v_C(0^+) - (R_1 + R_2) i_{R1}(0^+) \right] = -\frac{50}{4} 10^3$$

D'altra parte dall'espressione dell'integrale generale si ottiene facilmente:

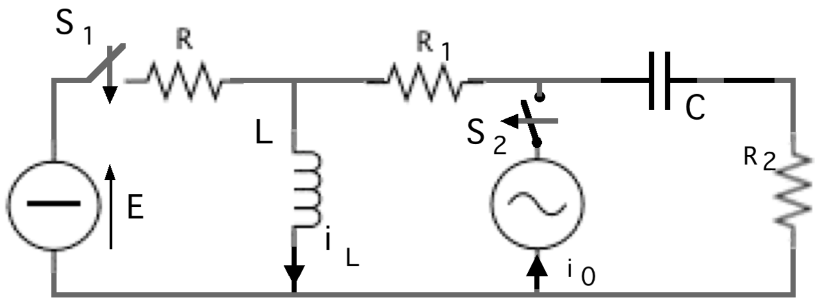
$$i_{R1}(0^+) = Asen\gamma + 1$$

$$\left. \frac{di_{R1}}{dt} \right|_{0^+} = -\frac{9}{8} \cdot 10^4 Asen\gamma + \frac{\sqrt{9{,}94}}{2} 10^4 A\cos\gamma$$

Da cui si ottiene:

$$i_{R1}(t) = -2{,}99 e^{-\frac{9}{8} \cdot 10^4 t} sen\left(\frac{\sqrt{9{,}94}}{2} \cdot 10^4 t + 0{,}73 \right) + 1$$

Prova del 26/1/06 - Soluzione della prova B



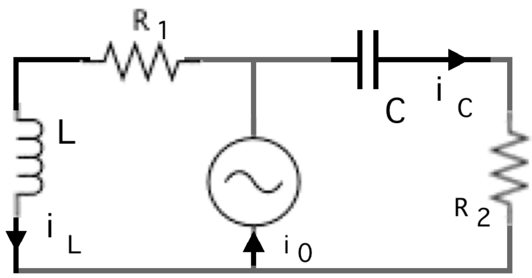
R = 100 Ω; R_1 = 20 Ω; R_2 = 30 Ω; C = 1 μF; L = 4 mH;

$i_0(t) = \sqrt{2}\ sen(\omega t-\pi/4)$A; E = 150 V; ω= 20000 rad/sec

L'interruttore S_2 all'istante t=0 è in apertura mentre l'interruttore S_1 è in chiusura.
Determinare l'andamento della corrente nell'induttore L per t≥0.

Soluzione

Per t<0 il circuito è il seguente:



Passando ai fasori si ottiene facilmente:

$$\bar{I}_L = \bar{I}_0 \frac{R_2 - jX_C}{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)} = \frac{(1-j)}{\sqrt{2}}\frac{30 - j50}{50 + j30} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) = -e^{j\pi/4}$$

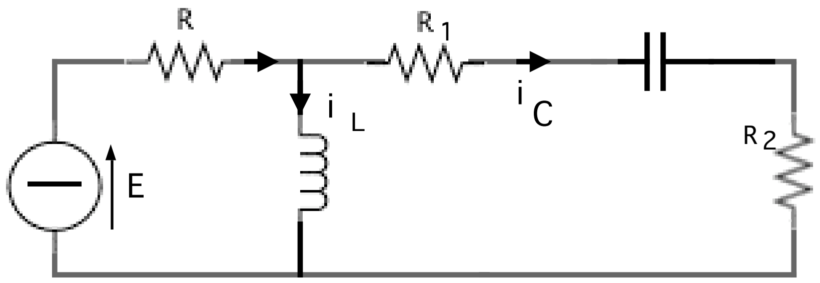
$$\bar{V}_C = \bar{I}_0 \frac{-jX_C(R_1 + jX_L)}{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)} = \frac{(1-j)}{\sqrt{2}}\frac{(-j50)(20 + j80)}{50 + j30} = -j50\frac{(1-j)(1+j)}{\sqrt{2}} = -j50\sqrt{2} = 50\sqrt{2}e^{-j\pi/2}$$

e quindi

$$i_L(0^-) = -\sqrt{2}sen(\pi/4) = -1A = i_L(0^+);$$

$$v_C(0^-) = 100sen(-\pi/2) = -100V = v_C(0^+).$$

Per t≥0 il circuito diventa:



Le equazioni sono:

$$E = Ri_R + v_L;$$
$$v_L = (R_1 + R_2)i_C + v_C;$$
$$i_R = i_C + i_L.$$

E le caratteristiche dei bipoli a memoria:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt};$$
$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}.$$

Usando le caratteristiche si eliminano i_C e v_L e si ottiene

$$E = Ri_R + L\frac{di_L}{dt};$$
$$L\frac{di_L}{dt} = (R_1 + R_2)C\frac{dv_C}{dt} + v_C;$$
$$i_R = C\frac{dv_C}{dt} + i_L.$$

Eliminando i_R ricavata dalla terza equazione si ottiene:

$$E = RC\frac{dv_C}{dt} + Ri_L + L\frac{di_L}{dt};$$
$$L\frac{di_L}{dt} = (R_1 + R_2)C\frac{dv_C}{dt} + v_C.$$

Sostituendo infine dv_C/dt ricavato dalla seconda nella prima derivata si ottiene:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left[\frac{1}{C(R + R_1 + R_2)} + \frac{R(R_1 + R_2)}{L(R + R_1 + R_2)}\right]\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R}{(R + R_1 + R_2)LC}\right]i_L = \frac{E}{(R + R_1 + R_2)LC}.$$

La cui omogenea è:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 15 \cdot 10^4 \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{6} \cdot 10^9 i_L = 0.$$

Con radici:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{15}{2} \cdot 10^3 \pm j\frac{21}{2} \cdot 10^3$$

Considerando che in continua il condensatore è un circuito aperto e l'induttore un corto circuito, per la soluzione di regime si ha:

$$I_L = \frac{E}{R} = 1{,}5A$$

L'integrale generale è:

$$i_{R1}(t) = Ae^{-\frac{15}{2}\cdot 10^3 t} sen\left(\frac{21}{2} \cdot 10^3 t + \gamma\right) + 1{,}5$$

La condizione iniziale su $i_L(0^+)$ è già nota:

$$i_L(0^+) = Asen\gamma + 1{,}5 = i_L(0^-) = -1A;$$

Per determinare il valore della derivata all'istante zero basta utilizzare le condizioni iniziali note nelle equazioni del circuito valutate all'istante 0^+:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = \frac{R}{L(R + R_1 + R_2)}\left[v_C(0^+) - (R_1 + R_2)i_L(0^+) + E\frac{R_1 + R_2}{R}\right] = \frac{25}{6}10^3$$

e quindi:

$$i_L(0^+) = Asen\gamma + 1{,}5 = -1A;$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{15}{2} \cdot 10^3 Asen\gamma + \frac{21}{2}10^3 A\cos\gamma = \frac{25}{6}10^3$$

Da cui si ottiene:

$$i_{R1}(t) = -2{,}87e^{-\frac{15}{2}\cdot 10^3 t} sen\left(\frac{21}{3} \cdot 10^3 t + 1{,}06\right) + 1{,}5A$$