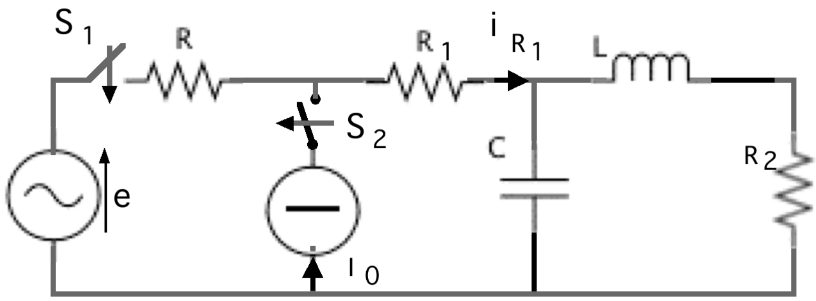
Prova del 12/1/06 - Soluzione della prova A



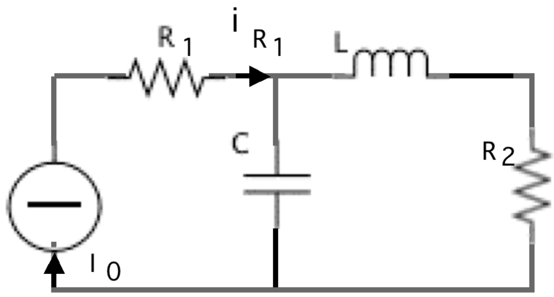
R = 10 Ω; R_1 = 10 Ω; R_2 = 10 Ω; C = 1 μF; L = 1 mH;

e = 10√2 sen(ωt-π/4)V; I_0 = 0,5 A; ω= 20000 rad/sec

L'interruttore S_2 all'istante t=0 è in apertura mentre l'interruttore S_1 è in chiusura. Determinare l'andamento della corrente nel resistore R_1 per t≥0.

Soluzione

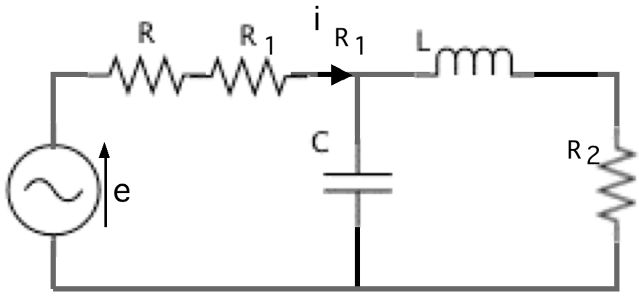
Per t<0 il circuito è il seguente:



Considerando che in continua il condensatore è un circuito aperto e l'induttore un corto circuito si ottengono le seguenti condizioni iniziali:

$$i_L(0^-) = I_0 = 0{,}5A = i_L(0^+);$$
$$v_C(0^-) = R_2 I_0 = 5V = v_C(0^+).$$

Per t≥0 il circuito diventa:



Le equazioni sono:

$$e(t) = (R_1 + R)i_{R1} + v_C;$$
$$v_C = R_2 i_L + v_L;$$
$$i_{R1} = i_C + i_L.$$

E le caratteristiche dei bipoli a memoria:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt};$$
$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}.$$

Usando le caratteristiche si eliminano i_C e v_L e si ottiene

$$e(t) = (R_1 + R)i_{R1} + v_C;$$
$$v_C = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt};$$
$$i_{R1} = C\frac{dv_C}{dt} + i_L.$$

Eliminando i_L ricavata dalla terza equazione si ottiene:

$$e(t) = (R_1 + R)i_{R1} + v_C;$$
$$v_C = R_2 i_{R1} - R_2 C\frac{dv_C}{dt} + L\frac{di_{R1}}{dt} - LC\frac{d^2 v_C}{dt^2}.$$

Eliminando infine nella seconda v_C ricavato dalla prima si ottiene l'equazione:

$$\frac{d^2 i_{R1}}{dt^2} + \left[\frac{1}{C(R+R_1)} + \frac{R_2}{L}\right]\frac{di_{R1}}{dt} + \left[\frac{R+R_1+R_2}{(R+R_1)LC}\right]i_{R1} = \frac{1}{(R+R_1)LC}\left[e(t) + R_2 C\frac{de}{dt} + LC\frac{d^2 e}{dt^2}\right].$$

La cui omogenea è:

$$\frac{d^2 i_{R1}}{dt^2} + 6\cdot 10^4\frac{di_{R1}}{dt} + 1.5\cdot 10^9 i_{R1} = 0.$$

Con radici:
$\alpha_{1,2} = -3 \cdot 10^4 \pm j\sqrt{6} \cdot 10^4$

Per la soluzione di regime si ha:

$$\bar{I}_{R1} = \frac{\overline{E}}{Z} = \frac{10}{\sqrt{2}} \frac{1-j}{20 + \frac{(10+j20)(-j50)}{10-j30}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \frac{1-j}{45+j25} = 0{,}27e^{-j1{,}29}$$

L'integrale generale è:

$$i_{R1}(t) = Ae^{-3\cdot 10^4 t} sen\left(\sqrt{6} \cdot 10^4 t + \gamma\right) + 0{,}28 sen(\omega t - 1{,}29)$$

Per determinare le costanti basta utilizzare le condizioni iniziali note nelle equazioni del circuito valutate all'istante 0^+:

$$i_{R1}(0^+) = \frac{e(0^+)}{R+R_1} - \frac{v_C(0^+)}{R+R_1} = -\frac{3}{4};$$

$$\left.\frac{di_{R1}}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{R+R_1}\left[\left.\frac{de}{dt}\right|_{0^+} - \frac{i_{R1}(0^+)}{C} + \frac{i_L(0^+)}{C}\right] = 7{,}25 \cdot 10^4$$

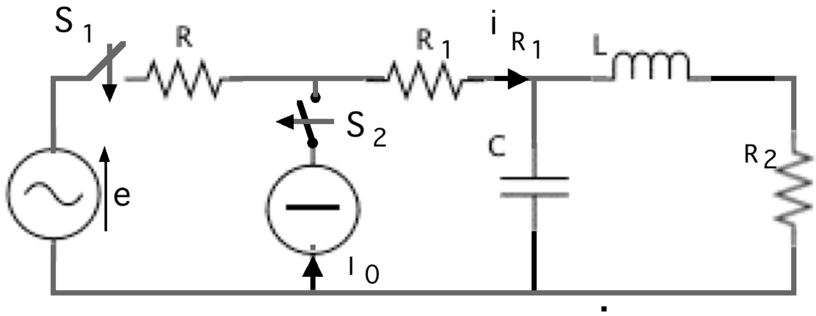
D'altra parte dall'espressione dell'integrale generale si ottiene facilmente:

$$i_{R1}(0^+) = A sen\gamma + 0{,}28 sen(-1{,}29)$$

$$\left.\frac{di_{R1}}{dt}\right|_{0^+} = -3 \cdot 10^4 A sen\gamma + \sqrt{6} 10^4 A \cos\gamma + 0{,}28\omega \cos(-1{,}29)$$

Da cui si ottiene:
$$i_{R1}(t) = 2{,}36e^{-3\cdot 10^4 t} sen\left(\sqrt{6} \cdot 10^4 t - 0{,}21\right) + 0{,}28 sen(\omega t - 1{,}29)$$

Prova del 12/1/06 - Soluzione della prova B



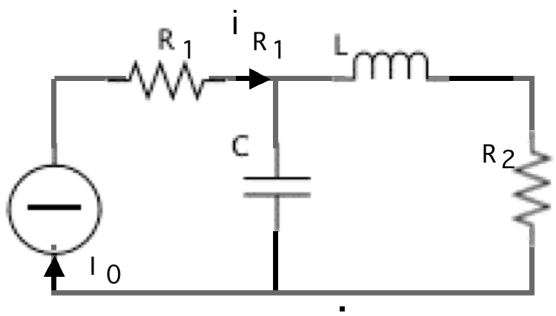
R = 20 Ω; R_1 = 10 Ω; R_2 = 10 Ω; C = 1 μF; L = 1 mH;

e = 10√2 sen(ωt+π/4)V; I_0 = 1 A; ω= 20000 rad/sec

L'interruttore S_2 all'istante t=0 è in apertura mentre l'interruttore S_1 è in chiusura. Determinare l'andamento della corrente nel resistore R_1 per t≥0.

Soluzione

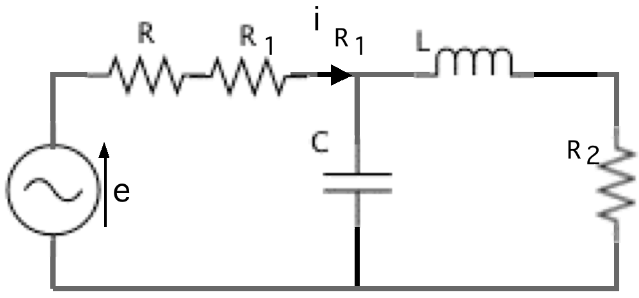
Per t<0 il circuito è il seguente:



Considerando che in continua il condensatore è un circuito aperto e l'induttore un corto circuito si ottengono le seguenti condizioni iniziali:

$$i_L\left(0^-\right) = I_0 = 1A = i_L\left(0^+\right);$$
$$v_C\left(0^-\right) = R_2 I_0 = 10V = v_C\left(0^+\right).$$

Per t≥0 il circuito diventa:



Le equazioni sono:

$$e(t) = (R_1 + R)i_{R1} + v_C;$$
$$v_C = R_2 i_L + v_L;$$
$$i_{R1} = i_C + i_L.$$

E le caratteristiche dei bipoli a memoria:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt};$$
$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}.$$

Usando le caratteristiche si eliminano i_C e v_L e si ottiene

$$e(t) = (R_1 + R)i_{R1} + v_C;$$
$$v_C = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt};$$
$$i_{R1} = C\frac{dv_C}{dt} + i_L.$$

Eliminando i_L ricavata dalla terza equazione si ottiene:

$$e(t) = (R_1 + R)i_{R1} + v_C;$$
$$v_C = R_2 i_{R1} - R_2 C\frac{dv_C}{dt} + L\frac{di_{R1}}{dt} - LC\frac{d^2 v_C}{dt^2}.$$

Eliminando infine nella seconda v_C ricavato dalla prima si ottiene l'equazione:

$$\frac{d^2 i_{R1}}{dt^2} + \left[\frac{1}{C(R+R_1)} + \frac{R_2}{L}\right]\frac{di_{R1}}{dt} + \left[\frac{R+R_1+R_2}{(R+R_1)LC}\right]i_{R1} = \frac{1}{(R+R_1)LC}\left[e(t) + R_2 C\frac{de}{dt} + LC\frac{d^2 e}{dt^2}\right].$$

La cui omogenea è:

$$\frac{d^2 i_{R1}}{dt^2} + \frac{13}{3}\cdot 10^4\frac{di_{R1}}{dt} + \frac{4}{3}\cdot 10^9 i_{R1} = 0.$$

Con radici:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{13}{6}\cdot 10^4 \pm j\frac{\sqrt{311}}{6}\cdot 10^4$$

Per la soluzione di regime si ha (convenzione del valore efficace:

$$\bar{I}_{R1} = \frac{\overline{E}}{Z} = 10\frac{1+j}{30+\frac{(10+j20)(-j50)}{10-j30}} = \frac{10}{\sqrt{2}}\frac{1+j}{55+j25} = 0{,}23e^{-j0{,}36}$$

L'integrale generale è:

$$i_{R1}(t) = Ae^{-3\cdot 10^4 t}sen\left(\sqrt{6}\cdot 10^4 t + \gamma\right) + 0{,}23sen(\omega t - 0{,}36)$$

Per determinare le costanti basta utilizzare le condizioni iniziali note nelle equazioni del circuito valutate all'istante 0^+:

$$i_{R1}(0^+) = \frac{e(0^+)}{R+R_1} - \frac{v_C(0^+)}{R+R_1} = 0$$

$$\left.\frac{di_{R1}}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{R+R_1}\left[\left.\frac{de}{dt}\right|_{0^+} - \frac{i_{R1}(0^+)}{C} + \frac{i_L(0^+)}{C}\right] = 4\cdot 10^4$$

Da cui si ottiene:

$$i_{R1}(t) = 1{,}82e^{-3\cdot 10^4 t}sen\left(\sqrt{6}\cdot 10^4 t + 5{,}49\cdot 10^{-2}\right) + 0{,}23sen(\omega t - 0{,}36)$$