

Lezione 20

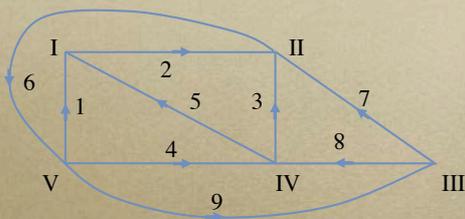
La scrittura delle equazioni risolventi per una rete di bipoli attivi e passivi può essere resa automatica e quindi adatta ad essere implementata in un codice per calcolatore; tra le diverse impostazioni possibili, ci limiteremo a descrivere quella basata sul concetto di matrice delle conduttanze ai nodi. Sia dunque data una qualsiasi rete di n nodi ed l lati.

Metodi sistematici per la risoluzione delle reti

- *Il grafo della rete;*
- *I bipoli nei rami della rete.*

Come abbiamo più volte rilevato, le informazioni contenute in una rete elettrica sono di due tipologie distinte. In primo luogo la rete descrive un particolare modo di connettere bipoli tra di loro; tale descrizione è contenuta in quello che abbiamo detto grafo della rete. In secondo luogo deve essere fornita la particolare natura di ogni bipolo presente nei rami della rete; in altre parole debbono essere note le caratteristiche dei bipoli. Queste informazioni contenute nello schema di una rete possono essere mantenute distinte e trattate separatamente.

Il grafo orientato della rete



Cominciamo dal grafo della rete e poniamoci il problema di fornire le informazioni in esso contenute in una maniera diversa.

Il grafo orientato della rete e la matrice di incidenza A_c

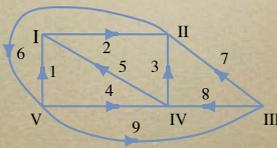
$$a_{ij} = \begin{cases} = +1 & \text{se il ramo } j \text{ esce dal nodo } i; \\ = -1 & \text{se il ramo } j \text{ entra nel nodo } i; \\ = 0 & \text{se il ramo } j \text{ non interessa il nodo } i. \end{cases}$$

Costruiamoci una matrice A_c , di n righe ed l colonne, il cui generico elemento a_{ij} sia così come mostrato dalla tabella.

È chiaro che una tale matrice, che prende il nome di matrice d'incidenza completa della rete, definisce univocamente il grafo orientato della rete stessa.

La matrice d'incidenza

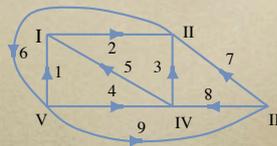
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	-1	+1	0	0	-1	0	0	0	0
II	0	-1	-1	0	0	+1	-1	0	0
III	0	0	0	0	0	0	+1	+1	-1
IV	0	0	+1	-1	+1	0	0	-1	0
V	+1	0	0	+1	0	-1	0	0	+1



Proviamo per esempio a costruire tale matrice per il grafo mostrato.

La matrice d'incidenza

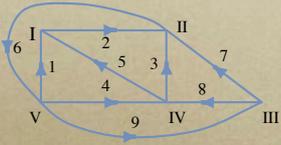
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	-1	+1	0	0	-1	0	0	0	0
II	0	-1	-1	0	0	+1	-1	0	0
III	0	0	0	0	0	0	+1	+1	-1
IV	0	0	+1	-1	+1	0	0	-1	0
V	+1	0	0	+1	0	-1	0	0	+1



A_c

O proviamo a disegnare il grafo in base alle informazioni contenute nella matrice.

Le Equazioni ai nodi

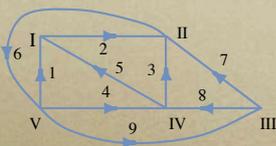


$$\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{pmatrix} = 0$$

Facendo uso della matrice di incidenza si possono esprimere le equazioni di Kirchhoff per la rete in forma matriciale. È facile verificare che il sistema di equazioni simbolicamente espresso dalla relazione mostrata in figura (dove I è naturalmente il vettore colonna delle correnti nei rami), è il sistema di equazioni che esprime l'applicazione della prima legge di Kirchhoff agli n nodi della rete. Infatti in ognuna delle equazioni – per esempio quella relativa al nodo r (riga erresima) – la generica corrente I_k comparirà con il segno positivo, negativo o non comparirà affatto, a seconda che il ramo orientato k rispettivamente esca, entri o non interessi affatto il nodo r .

Le Equazioni ai nodi



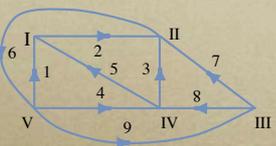
$$-I_1 + I_2 - I_5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{pmatrix} = 0$$

Una semplice applicazione al caso descritto dal grafo che stiamo usando come esempio potrà meglio chiarire quanto affermato.

La matrice d'incidenza completa



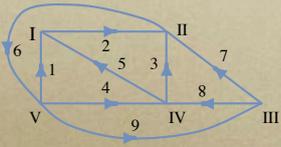
$$-I_1 + I_2 - I_5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{pmatrix} = A_c I = 0$$

Per esempio il prodotto della prima riga della matrice A_c con la colonna del vettore corrente fornisce l'equazione mostrata che è appunto l'equazione al nodo I.

La matrice d'incidenza ridotta



$$-I_1 + I_2 - I_5 = 0$$

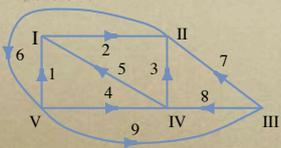
$$\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{A}_c \mathbf{I} = 0$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{pmatrix}$$

Come sappiamo le equazioni di un tale sistema non sono tutte linearmente indipendenti; basta però eliminare una delle equazioni per ottenere $n-1$ equazioni indipendenti ai nodi. Ciò equivale ad eliminare una riga della matrice di incidenza completa, per esempio quella relativa al nodo IV negli schemi mostrati, e considerare la matrice \mathbf{A} di dimensioni $(n-1) \times l$. Tale matrice prende il nome di matrice di incidenza ridotta o semplicemente matrice di incidenza.

Le N-1 Equazioni ai nodi



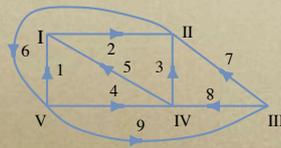
$$\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{A} \mathbf{I} = 0$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{pmatrix}$$

Con questo formalismo le equazioni indipendenti agli $n-1$ nodi saranno espresse dalla relazione indicata.

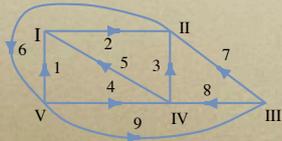
I potenziali ai nodi.



$$\begin{pmatrix} E_I \\ E_{II} \\ E_{III} \\ E_{IV} \\ E_V \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda le LKT, abbiamo più volte osservato che esse risultano automaticamente soddisfatte se si esprimono le tensioni sui lati come differenza di potenziale nei nodi. Se il lato k , per esempio, insiste tra il nodo r ed il nodo s , si avrà $V_k = E_r - E_s$, dove E_r ed E_s sono i potenziali dei nodi r ed s rispetto ad un riferimento preso ad arbitrio. In particolare possiamo scegliere, come riferimento, il potenziale del nodo per il quale si è scelto di non scrivere la corrispondente equazione. In tal modo le l tensioni di lato V_k saranno esprimibili attraverso gli $n-1$ potenziali ai nodi E_r . Definiamo, a questo punto, il vettore colonna \mathbf{E} dei potenziali degli $n-1$ nodi, per i quali abbiamo scritto le LKC, rispetto al restante nodo preso come riferimento.

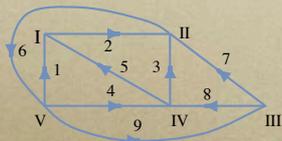
Le equazioni alle maglie



$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{T} \\ \begin{bmatrix} E_I \\ E_{II} \\ E_{III} \\ E_{IV} \\ E_V \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix}$$

È facile convincersi che, in queste condizioni, le relazioni, che esprimono le tensioni di lato in funzione dei potenziali ai nodi, hanno l'espressione matriciale indicata, dove A è la matrice, di dimensioni $l \times (n-1)$, trasposta di A . Infatti nella espressione della generica V_k , fornita dalla (III.13), compariranno i potenziali dei due nodi a cui il lato k afferisce, con il segno positivo o negativo a seconda dell'orientazione del lato k stesso; se, in particolare il lato k è connesso al nodo di riferimento, nella sua espressione comparirà soltanto il potenziale dell'altro nodo, essendo il nodo di riferimento a potenziale 0 per costruzione.

Le equazioni alle maglie

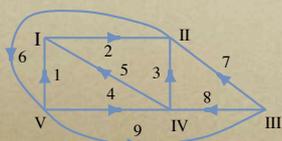


$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{T} \\ \begin{bmatrix} E_I \\ E_{II} \\ E_{III} \\ E_{IV} \\ E_V \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$-E_I + E_V = V_1$$

Anche in questo caso la semplice verifica delle affermazioni fatte per il caso della rete descritta dal grafo in esame, potrà essere chiarificatoria. Si ricordi che la matrice trasposta di AC ha l righe (nel nostro caso 9) e N colonne (nel nostro caso 5).

Le equazioni alle maglie

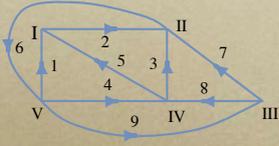


$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{T} \\ \begin{bmatrix} E_I \\ E_{II} \\ E_{III} \\ E_{IV} \\ E_V \end{bmatrix} \end{matrix} = A_c^T E = V$$

$$-E_I + E_V = V_1$$

In simboli, dunque, la seconda legge di K. ci fornisce le equazioni espresse da $A_c^T E = V$.

Le equazioni alle maglie



$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_I \\ E_{II} \\ E_{III} \\ E_V \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{E} = \mathbf{V}$$

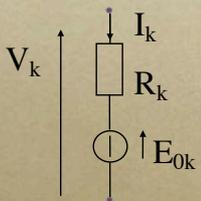
Che può anche essere scritte in funzione della matrice \mathbf{A} ridotta se si tiene conto che il potenziale di uno dei nodi (nel nostro caso il nodo IV) è stato posto uguale a zero.

Le leggi di Kirchhoff in forma matriciale

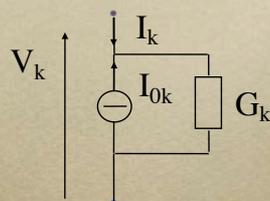
- $\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{0}$;
- $\mathbf{A}^T \mathbf{E} = \mathbf{V}$.

In conclusione, ecco le equazioni di Kirchhoff in forma matriciale.

Le caratteristiche dei bipoli



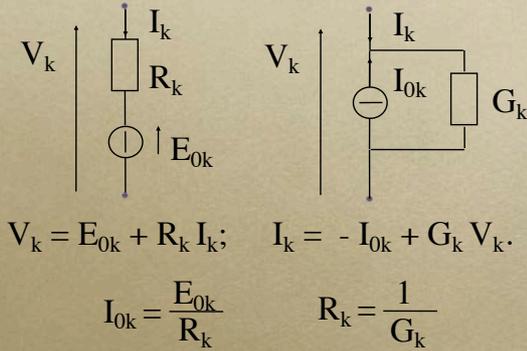
$$V_k = E_{0k} + R_k I_k$$



$$I_k = -I_{0k} + G_k V_k$$

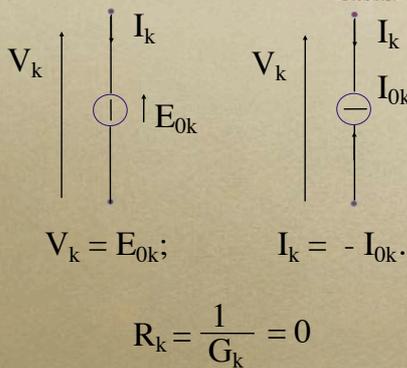
Affrontiamo ora il problema della descrizione della generica caratteristica di lato. I teoremi del generatore equivalente di f.e.m. e di corrente ci consentono di assumere che ogni lato della rete sia riconducibile, indifferentemente, o ad un generatore ideale di f.e.m. con una resistenza in serie, o ad un generatore ideale di corrente con una conduttanza in parallelo, così come mostrato. È facile infatti passare dall'una all'altra espressione applicando il teorema di Thevenin o quello di Norton.

Le caratteristiche dei bipoli



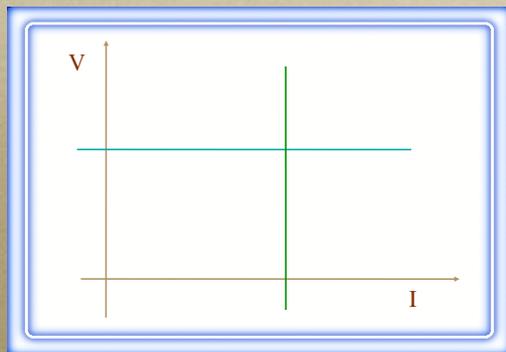
In altri termini per passare da una rappresentazione all'altra basta porre $I_{0k} = E_{0k}/R_k$ ed $G_k = 1/R_k$. Quest'ultima osservazione evidenzia, in realtà, un problema: esistono due casi limiti in cui la trasformazione non è possibile ed i teoremi di equivalenza non consentono di passare da un ramo con generatore ideale di f.e.m. ad un ramo con generatore ideale di corrente. Sono evidentemente i due casi del generatore ideale di f.e.m. senza resistenza in serie e quello del generatore ideale di corrente senza conduttanza in parallelo. Nel primo caso, infatti, l'applicazione del teorema di Norton ci porterebbe alla necessità di porre il generatore ideale di f.e.m. in corto circuito, per calcolare la corrente di corto circuito ai morsetti AB, il che, come sappiamo, è contraddittorio. Del resto la stessa relazione $G_k = 1/R_k$ perde di significato se il denominatore è nullo.

Generatori isolati

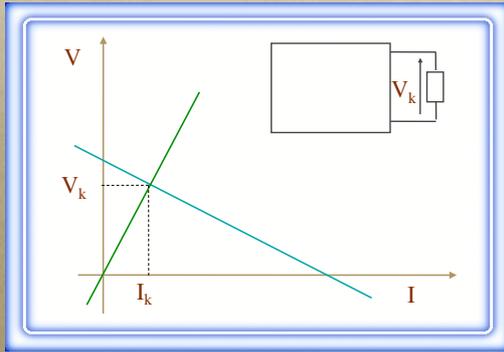


Se ne conclude che non è possibile trasformare un generatore ideale di f.e.m. in uno di corrente e viceversa, quando essi siano da soli nel ramo in esame. Poiché nel seguito ci sarà utile poter assumere per il generico lato k indifferentemente una delle due caratteristiche, facciamo vedere come tali situazioni limiti siano in realtà non essenziali ed eliminabili. Ci sarà utile allo scopo fare uso del così detto teorema di sostituzione. Tale teorema afferma che se in una rete di bipoli lineare si sostituisce, ad un ramo interessato dalla tensione V , un generatore ideale di f.e.m. $E_0 = V$, nulla cambia nella restante parte della rete.

Generatori isolati

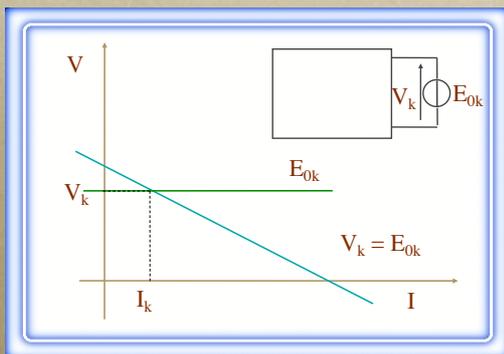


Differenza di potenziale



È facile convincersi della veridicità di tale affermazione se si considera che la "restante parte della rete" è in realtà anche essa rappresentabile come un bipolo lineare – ossia con un legame caratteristico tensione–corrente di tipo lineare e, quindi, anche ad un sol valore: ad ogni valore della corrente corrisponde un valore, ed uno solo, della tensione e viceversa.

Generatore di f.e.m.



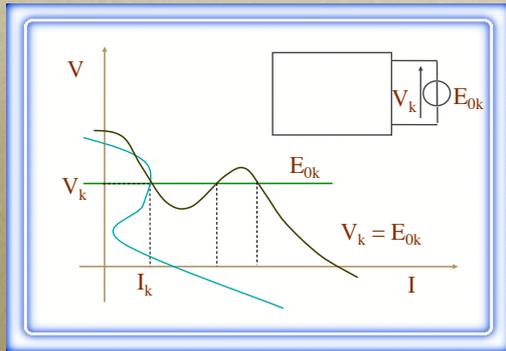
Se quindi la tensione imposta ai morsetti dal generatore è identica a quella V esistente agli stessi morsetti nella rete originaria, la corrente erogata dal bipolo equivalente alla restante parte della rete non può che essere identica a quella presente nel ramo in esame nella rete di partenza.

Teoremi di sostituzione per le tensioni

- *Se tra due nodi di una rete lineare è nota la differenza di potenziale, è possibile inserire tra tali nodi un generatore di f.e.m. che eroghi la stessa differenza di potenziale senza che nulla cambi nella rete.*

Da qui il teorema.

Anche non lineare



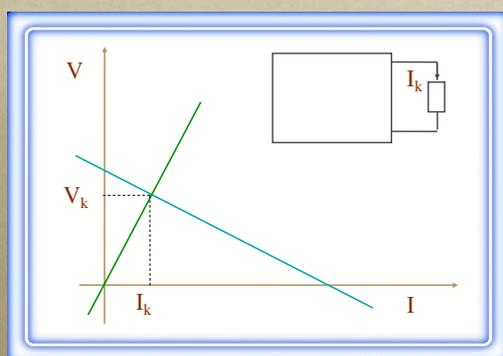
In effetti è possibile allentare il vincolo sulla linearità della rete e richiedere soltanto che la rete sia pilotabile in tensione, come è chiaramente illustrato nella figura.

Teoremi di sostituzione per le correnti

- *Se in un ramo di una rete lineare è nota la corrente che vi circola, è possibile sostituire tale ramo con un generatore di corrente che eroghi la stessa corrente senza che nulla cambi nella rete.*

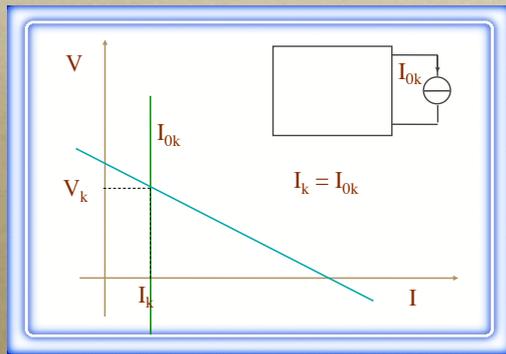
In maniera del tutto simile si può dimostrare la forma duale del teorema di sostituzione.

Generatore di corrente



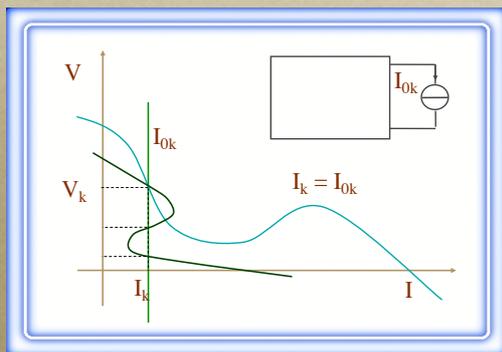
Come chiaramente illustrano la figura mostrata e...

Generatore di corrente



la seguente.

Anche non lineare



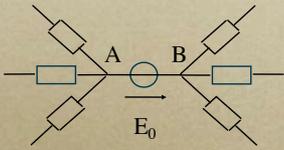
E naturalmente anche qui si può allentare il vincolo sulla linearità, e richiedere soltanto che la rete sia pilotabile in corrente.

Corollari

- *Se due nodi di una rete lineare sono allo stesso potenziale, è possibile collegarli con un corto circuito senza che nulla cambi nella rete.*
- *Se in un ramo di una rete lineare non circola alcuna corrente, tale ramo può essere aperto senza che nulla cambi nella rete.*

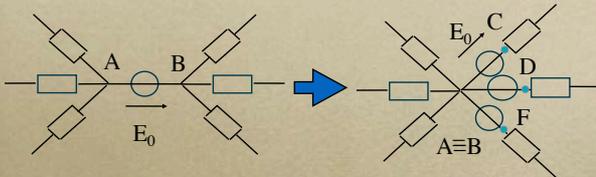
Dalle due forme enunciate del teorema di sostituzione discendono immediatamente le conseguenze evidenziate nella slide. Le due conseguenze appaiono subito evidenti se si considera che un generatore di f.e.m. ideale di tensione nulla equivale ad un bipolo corto circuito e che un generatore ideale di corrente che eroghi una corrente nulla equivale ad un bipolo circuito aperto.

Generatore isolato di f.e.m.



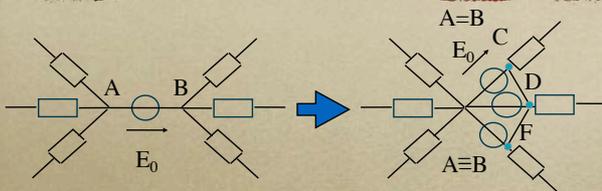
Facendo uso di questi risultati si vede facilmente che un ramo di una rete in cui sia presente un solo generatore ideale di f.e.m. può essere facilmente eliminato modificando la rete, come è mostrato nella slide successiva.

Generatore isolato di f.e.m.



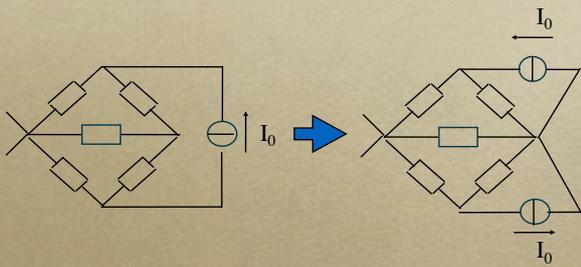
Infatti, in tale rete modificata, i punti C,D ed F sono allo stesso potenziale per costruzione; ne consegue che essi possono essere cortocircuitati, così come è mostrato nella successiva immagine.

Generatore isolato di f.e.m.



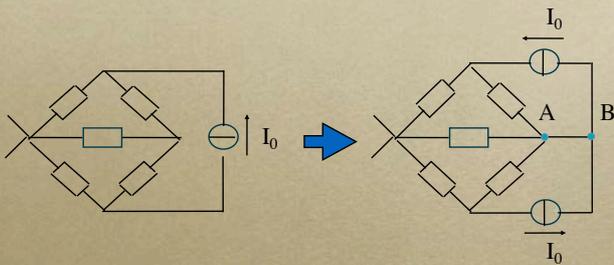
È evidente, a questo punto, che la rete così ottenuta è equivalente a quella di partenza, perché i tre generatori ideali di egual f.e.m. in parallelo possono essere sostituiti con un solo generatore.

Generatore isolato di corrente



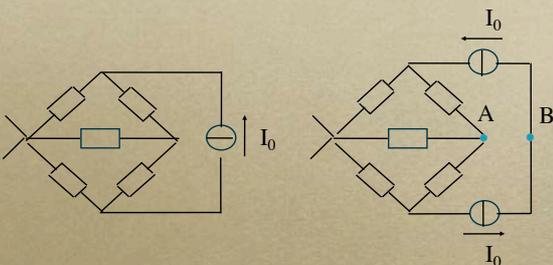
Analogo è il caso del generatore ideale di corrente senza una conduttanza in parallelo. Dalla rete mostrata si passa facilmente a quella modificata, considerando che esse sono identiche salvo per il fatto che...

Generatore isolato di corrente



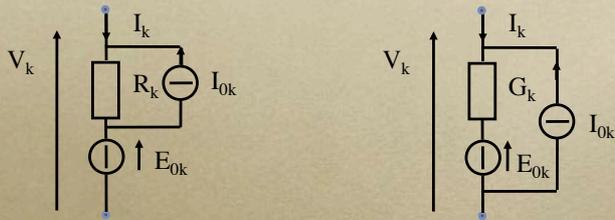
si è usato l'artificio di scomporre un nodo in due nodi, A e B.

Generatore isolato di corrente



Non circolando nel tratto AB alcuna corrente - per convincersene basta applicare la prima legge di Kirchhoff - tale tratto può essere eliminato ritornando alla rete di partenza.

Le caratteristiche dei bipoli



$$V_k = E_{0k} + R_k I_k + R_k I_{0k};$$

$$I_k = -I_{0k} + G_k V_k - G_k E_{0k}.$$

Avendo eliminato in questo modo tutti i lati singolari di una rete possiamo a questo punto supporre che nel generico lato siano presenti o un generatore ideale di f.e.m. con una resistenza in serie o un generatore di corrente con una conduttanza in parallelo; per mantenere aperte tutte le possibilità possiamo addirittura supporre che in ogni ramo siano presenti entrambi i generatori, così come è mostrato nella slide, nelle due configurazioni equivalenti. In conclusione, senza perdere alcuna generalità, si può assumere che la generica caratteristica di lato sia in una delle due forme equivalenti:

Le caratteristiche dei bipoli

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & G_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & G_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ E_{03} \\ \dots \end{pmatrix}; \mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

$$I_k = -I_{0k} + G_k V_k - G_k E_{0k}.$$

$$\mathbf{I} = -\mathbf{I}_0 + \mathbf{G} \mathbf{V} - \mathbf{G} \mathbf{E}_0.$$

Possiamo descrivere le caratteristiche di lato in una forma molto sintetica utilizzando il formalismo matriciale. Sia infatti \mathbf{G} la matrice delle conduttanze di lato, definita come la matrice quadrata e diagonale, di dimensioni $n \times n$, il cui generico elemento G_{rk} è nullo se $r \neq k$ ed è pari a G_k se $r=k$, e siano \mathbf{I}_0 , \mathbf{E}_0 , \mathbf{I} e \mathbf{V} i vettori colonne (o righe) rispettivamente dei generatori di corrente di lato, dei generatori di tensione di lato, delle correnti di lato e delle relative tensioni, allora si ottiene la formula generale mostrata, che descrive la generica caratteristica di lato.

Le caratteristiche dei bipoli

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & G_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & G_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ E_{03} \\ \dots \end{pmatrix}; \mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{I} = -\mathbf{I}_0 + \mathbf{G} \mathbf{V} - \mathbf{G} \mathbf{E}_0.$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{E} = \mathbf{V}.$$

$$\mathbf{I} = -\mathbf{I}_0 + \mathbf{G} \mathbf{A}^T \mathbf{E} - \mathbf{G} \mathbf{E}_0.$$

Sostituendo poi in questa espressione del vettore \mathbf{I} le \mathbf{V} in funzione delle \mathbf{E} ...

Le caratteristiche dei bipoli

e ponendola nella equazione ai nodi in forma matriciale...

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & G_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & G_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}; \mathbf{E}_0 = \begin{vmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ E_{03} \\ \dots \end{vmatrix}; \mathbf{I}_0 = \begin{vmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \dots \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{AI} = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{I} = -\mathbf{I}_0 + \mathbf{GA}^T \mathbf{E} - \mathbf{GE}_0.$$

Le caratteristiche dei bipoli

Si ottiene...

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & G_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & G_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}; \mathbf{E}_0 = \begin{vmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ E_{03} \\ \dots \end{vmatrix}; \mathbf{I}_0 = \begin{vmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \dots \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{AI} = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{I} = -\mathbf{I}_0 + \mathbf{GA}^T \mathbf{E} - \mathbf{GE}_0.$$

$$\mathbf{AI} = -\mathbf{AI}_0 + \mathbf{AGA}^T \mathbf{E} - \mathbf{AGE}_0 = \mathbf{0}.$$

Le caratteristiche dei bipoli

O anche, ponendo $\mathbf{Y} = \mathbf{AGA} \dots$

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & G_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & G_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}; \mathbf{E}_0 = \begin{vmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ E_{03} \\ \dots \end{vmatrix}; \mathbf{I}_0 = \begin{vmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \dots \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{AI} = -\mathbf{AI}_0 + \mathbf{AGA}^T \mathbf{E} - \mathbf{AGE}_0 = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AGA}^T.$$

$$\mathbf{YE} = \mathbf{AI}_0 + \mathbf{AGE}_0 = \mathbf{J}_0.$$



Codici numerici

$$\mathbf{Y}\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{I}_0 - \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{E}_0 = \mathbf{J}_0.$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{J}_0$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^T.$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{J}_0$$

La matrice \mathbf{Y} , di dimensioni $(n-1) \times (n-1)$, prende il nome di matrice delle conduttanze ai nodi. Il sistema di equazioni rappresentato, nelle incognite potenziali ai nodi, è il sistema risolvente della rete.

Condensatore ed induttore



$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = v(t - \Delta t) + \frac{i(t)}{C} \Delta t$$

$$v(t) = k_0 + R_C i(t)$$



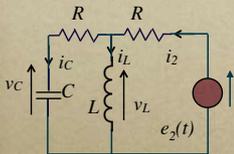
$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = i(t - \Delta t) + \frac{v(t)}{L} \Delta t$$

$$i(t) = k_0 + G_L v(t)$$

Eliminiamo ora il vincolo del regime stazionario. Dovremo introdurre i bipoli a memoria. Consideriamo la caratteristica di tali bipoli in forma discreta: il condensatore ci appare avere una caratteristica che potremmo assimilare a quella di un generatore di tensione di valore $k_0 = v(t - \Delta t)$ con una resistenza in serie pari a $\Delta t / C$ - si ricordi che abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore. Analogamente l'induttore ci appare come un generatore di corrente $i(t - \Delta t)$ con una conduttanza in parallelo pari $\Delta t / L$.

Un esempio



$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

$$e_1(t) = 100\sqrt{10} \text{sen}(100t - 0,46)$$

$$e_2(t) = 100\sqrt{10} \text{sen}(100t)$$

$$R = 10\Omega; C = 1\text{mF}; L = 100\text{mH}.$$

$$e_2|_{t=0} = Ri_2|_{t=0} + L \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0}$$

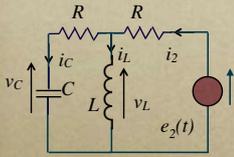
$$L \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0} = Ri_C|_{t=0} + v_C|_{t=0}$$

$$i_2|_{t=0} = i_L|_{t=0} + i_C|_{t=0}$$

In altri termini in ogni istante la caratteristica di questi bipoli ci appare trattabile con le nozioni che abbiamo introdotto, a condizione di conoscere le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori nell'istante precedente. Del resto se per esempio in uno degli esempi che abbiamo trattato inseriamo le caratteristiche in forma discretizzata...

otteniamo le equazioni mostrate dove

Un esempio



$$e_1(t) = 100\sqrt{10}\text{sen}(100t - 0,46)$$

$$e_2(t) = 100\sqrt{10}\text{sen}(100t)$$

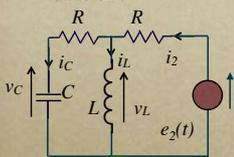
$$R = 10\Omega; C = 1\text{mF}; L = 100\text{mH}.$$

$$e_2(t) = Ri_2(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} - L \frac{di_L(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$L \frac{di_L(t)}{\Delta t} - L \frac{di_L(t-\Delta t)}{\Delta t} = R \left[C \frac{dv_C(t)}{\Delta t} - C \frac{dv_C(t-\Delta t)}{\Delta t} \right] + v_C(t)$$

$$i_2(t) = i_L(t) + \left[C \frac{dv_C(t)}{\Delta t} - C \frac{dv_C(t-\Delta t)}{\Delta t} \right]$$

Un esempio



$$e_1(t) = 100\sqrt{10}\text{sen}(100t - 0,46)$$

$$e_2(t) = 100\sqrt{10}\text{sen}(100t)$$

$$R = 10\Omega; C = 1\text{mF}; L = 100\text{mH}.$$

$$e_2(t) = Ri_2(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} - L \frac{di_L(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$L \frac{di_L(t)}{\Delta t} - L \frac{di_L(t-\Delta t)}{\Delta t} = R \left[C \frac{dv_C(t)}{\Delta t} - C \frac{dv_C(t-\Delta t)}{\Delta t} \right] + v_C(t)$$

$$i_2(t) = i_L(t) + \left[C \frac{dv_C(t)}{\Delta t} - C \frac{dv_C(t-\Delta t)}{\Delta t} \right]$$

termini riquadrati in rosso sono noti, mentre quelli cerchiati sono incogniti: è facile verificare che tali incognite sono solo 3, cioè quante sono le equazioni.

Codici numerici

- Codici numerici per l'analisi dei circuiti;
- Reti lineari di grandi dimensioni;
- Componenti non lineari;
- Grafi complessi con componenti non lineari.

Esistono numerosi codici numerici che affrontano egregiamente il problema della soluzione delle reti elettriche. In effetti l'uso di codici numerici si giustifica per due ordini di motivi diversi. Da una parte, per reti lineari ma molto estese, cioè con un gran numero di nodi e di lati, la soluzione analitica, anche se semplice in linea di principio, può richiedere tempi di elaborazione proibitivi. Dall'altra parte, la presenza di bipoli non lineari può rendere difficile, se non impossibile, una soluzione analitica. Naturalmente la presenza di entrambi questi elementi, come accade nei circuiti integrati di grandi dimensioni, rende la soluzione numerica l'unica via praticabile.

Codici numerici

- SPICE ;
- Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis;
- Università della California, Berkeley (1975);
- Versioni anche per PC (1984).

Uno dei codici più diffuso, sia in ambiente di ricerca che in quello di produzione, è SPICE, acronimo che sta per "Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis". Spice fu sviluppato al "Electronic Research Laboratory" dell'Università della California, e reso disponibile al pubblico, nel 1975.

Codici numerici

- Pspice, Hspice, Spectre, Eldo....
- Microsim Corporation;
- Orcad, Cadence.....;
- La fortuna di SPICE;

I motivi della grande diffusione di tale codice vanno ricercati, naturalmente, nella sua qualità e funzionalità, ma anche nella intelligente politica seguita dalla Università della California che ha consentito la diffusione gratuita del prodotto, in una versione ridotta, per scopi educativi. La differenza tra la versione completa e quella ridotta è nella consistenza della biblioteca di componenti prevista: mentre nella versione completa sono contemplate le caratteristiche di circa 5000 componenti diversi, la versione distribuita gratuitamente ne prevede solo 300.

Riepilogo della Lezione

- *Metodi sistematici per la risoluzione delle reti;*
- *Matrice di incidenza;*
- *Forma matriciale delle equazioni di Kirchhoff;*
- *Teoremi di sostituzione;*
- *Matrice delle conduttanze di lato;*
- *Forma generale della caratteristica di un ramo;*
- *Equazioni risolventi in termini matriciali;*
- *Matrice delle conduttanze ai nodi;*