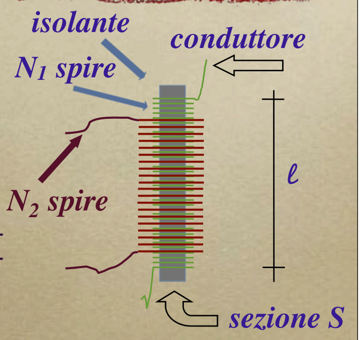
Lezione 17

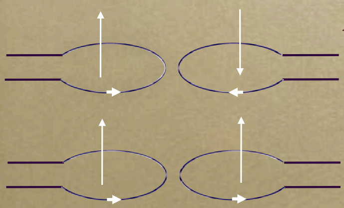
Nei regimi dinamici ha senso introdurre un particolare doppio bipolo, che non ha il suo equivalente in c.c.: l'accoppiamento magnetico mutuo tra due circuiti. Vediamo di cosa si tratta. Abbiamo già visto che un induttore altro non è che un avvolgimento di un certo numero di spire su di un supporto che, in generale, ha anche il compito di amplificare il fenomeno sul quale il sistema fonda le sue proprietà: il campo magnetico prodotto dalla corrente che circola nell'avvolgimento. I due estremi dell'avvolgimento costituiscono i morsetti del bipolo.

Accoppiamento mutuo

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$



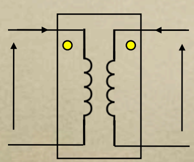


Supponiamo che il campo magnetico prodotto dalla corrente in un avvolgimento si estenda anche in una regione in cui è presente un altro avvolgimento. Avremo, un sistema a quattro morsetti, e quindi un doppio bipolo. Sarebbe facile dimostrare in base alle leggi fondamentali del campo elettromagnetico che le relazioni caratteristiche di un tale doppio bipolo sono, in condizioni abbastanza generali, quelle segnate in figura, dove i coefficienti M_{12} ed M_{21} prendono il nome di coefficienti di mutua induzione, e, per contrasto, quelli L_1 ed L_2, rispettivamente, di coefficienti di auto induzione primaria e secondaria. A differenza dei coefficienti di autoinduzione, i coefficienti di mutua induzione possono essere sia negativi che positivi ed il loro segno dipende anche dalla scelta dei versi di tensioni e correnti alle due porte (vedi figura).

Accoppiamento mutuo

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

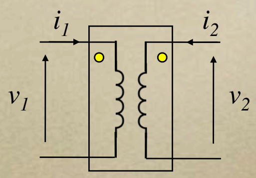
$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$



$$(L_{22}, L_{11}, M_{12}, M_{21})$$

Un sistema di questo genere si presenta dunque intrinsecamente come un doppio bipolo e sarà schematizzato con il simbolo indicato, dove i due puntini gialli stanno ad indicare che, se si sceglie come verso positivo per le correnti quello entrante nel morsetto contrassegnato con il punto, e si adotta una convenzione dell'utilizzatore, allora il segno di M è quello fornito. L'applicazione del teorema di reciprocità – in una forma che però non abbiamo illustrato – indurebbe a richiedere che: $M_{12} = M_{21}$. Infatti $M_{21}\ di_1/dt$ non è nient'altro che la tensione prodotta al secondario per la presenza della di_1/dt al primario, e, viceversa, $M_{12}\ di_2/dt$ la tensione prodotta al primario per la presenza della di_2/dt al secondario. D'altra parte allo stesso risultato si giunge anche in base a considerazioni energetiche, che ci aiuteranno a fare ulteriori passi nella comprensione del comportamento di un tale doppio bipolo.

Potenza assorbita



$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 =$$

$$= L_{11} i_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} + L_{22} i_2 \frac{di_2}{dt}$$

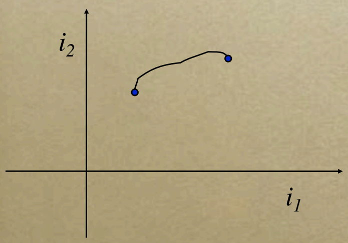
$$dW = pdt = L_{11} i_1 di_1 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + L_{22} i_2 di_2$$

Infatti la potenza istantanea assorbita (convenzioni dell'utilizzatore ad entrambe le porte) dal doppio bipolo è data dalla somma delle potenze assorbite alle due porte. Moltiplicando per dt si ottiene quindi l'energia dW assorbita in un intervallo di tempo infinitesimo.

Differenziale esatto

$$dW = pdt = L_{11} i_1 di_1 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + L_{22} i_2 di_2$$

$$dW = \left(L_{11} i_1 + M_{21} i_2\right) di_1 + \left(M_{12} i_1 + L_{22} i_2\right) di_2$$



$$\boxed{M_{12} = M_{21}}$$

D'altra parte la variazione infinitesima di energia deve essere un differenziale esatto: solo in tal caso infatti la variazione finita di energia che si ottiene integrando quella infinitesima tra due "punti" (i_1, i_2) ed (i_1, i_2) del piano delle correnti $[i_1, i_2]$, sarà indipendente dal "percorso", cioè dal modo in cui si è andati dalla condizione in cui le correnti erano (i_1, i_2) a quella in cui esse erano (i_1, i_2).

Energia immagazzinata

$$dW = \left(L_{11} i_1 + M_{21} i_2\right) di_1 + \left(M_{12} i_1 + L_{22} i_2\right) di_2$$

$$\boxed{M_{12} = M_{21}}$$

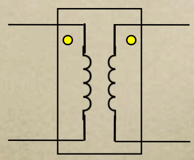
$$W = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

Perché ciò sia vero occorre che $M_{12}=M_{21}=M$ e, in tal caso, dW è il differenziale esatto della funzione W indicata.

Energia immagazzinata

$$W = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

$$\frac{W}{i_1^2} = \frac{1}{2} L_{11} + M \frac{i_2}{i_1} + \frac{1}{2} L_{22} \frac{i_2^2}{i_1^2}$$



L'aver trovato l'espressione della energia magnetica immagazzinata in ogni istante ci consente ulteriori deduzioni; infatti, tale energia deve, evidentemente, essere definita positiva. Tale sarà dunque anche il rapporto tra l'energia immagazzinata ed il quadrato della corrente alla porta primaria.

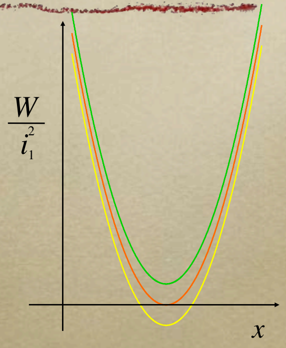
Accoppiamento perfetto

$$\frac{W}{i_1^2} = \frac{1}{2} L_{11} + M \frac{i_2}{i_1} + \frac{1}{2} L_{22} \frac{i_2^2}{i_1^2}$$

$$x = \frac{i_2}{i_1}$$

$$M \le \sqrt{L_1 L_2}$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$



Che può scriversi anche nella maniera mostrata, dove x il rapporto tra le due correnti, l'espressione trovatala, nel piano [x,W], rappresenta una parabola. È evidente che, solo nel caso in cui la parabola non interseca l'asse delle x, non esisterà alcuna coppia di valori delle correnti per cui l'energia immagazzinata risulti negativa – il che corrisponde al fatto che l'equazione, che si ottiene annullando l'espressione di W/i_1^2 , ha radici complesse. Questa condizione si verifica quando $L_1L_2=M^2$

Coefficiente k

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$ Coefficiente di accoppiamento

$$k = \pm 1$$ Accoppiamento perfetto

Tale condizione si dice di accoppiamento perfetto; infatti se tale condizione è verificata, esiste una coppia di valori di i_1 ed i_2 per i quali risulta W = 0. Ma dato che per annullare l'energia magnetica associata ad un campo magnetico bisogna necessariamente annullare lo stesso campo magnetico in ogni punto dello spazio, l'affermazione precedente equivale alla seguente: se l'accoppiamento è perfetto, è possibile annullare completamente il campo prodotto dalla corrente in uno dei due circuiti, facendo circolare nell'altro una opportuna corrente. E ciò giustifica evidentemente il fatto che tale condizione si dica di accoppiamento perfetto. Al coefficiente k, viene dato il nome di coefficiente di accoppiamento; esso varia tra –1 ed 1.

L’accoppiamento mutuo in A.C.

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$

$$\bar{V}_1 = Z_{11}\bar{I}_1 + Z_{12}\bar{I}_2$$
$$\bar{V}_2 = Z_{21}\bar{I}_1 + Z_{22}\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1\bar{I}_1 + j\omega M\bar{I}_2$$
$$\bar{V}_2 = j\omega M\bar{I}_1 + j\omega L_2\bar{I}_2$$

$$M^2 = L_1 L_2$$

In particolare, se il doppio bipolo accoppiamento mutuo è in regime sinusoidale, si potrà fare uso del simbolismo vettoriale e parlare di impedenza propria o autoimpedenza ed impedenza mutua. Le equazioni saranno quelle mostrate. Il doppio bipolo accoppiamento magnetico in regime sinusoidale è dunque caratterizzato globalmente dai valori delle tre impedenze, corrispondenti ai tre parametri indipendenti che lo individuano L1, L2 ed M. È possibile, però, costruire un circuito equivalente del doppio bipolo in esame, nel quale la dipendenza da tre parametri indipendenti è messa in particolare evidenza. Cominciamo dal caso dell'accoppiamento perfetto; sarà allora $M^2 = L_1 L_2$ e quindi $L_1/M = M/L_2$.

L’accoppiamento perfetto in A.C.

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1\bar{I}_1 + j\omega M\bar{I}_2$$
$$\bar{V}_2 = j\omega M\bar{I}_1 + j\omega L_2\bar{I}_2$$

$$L_1 L_2 = M^2$$

$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = a$$

$$\frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} = \bar{I}_1 + \frac{M}{L_1}\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$
$$\frac{\bar{V}_2}{j\omega M} = \bar{I}_1 + \frac{L_2}{M}\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$

A tale quantità daremo il nome di rapporto di trasformazione e lo indicheremo con il simbolo a. Riscriviamo ora le equazioni dell’accoppiamento mutuo mettendo in evidenza nella prima equazione il fattore $j\omega L_1$ e nella seconda $j\omega M$.

L’accoppiamento mutuo in A.C.

$$\frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} = \bar{I}_1 + \frac{M}{L_1}\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$
$$\frac{\bar{V}_2}{j\omega M} = \bar{I}_1 + \frac{L_2}{M}\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$

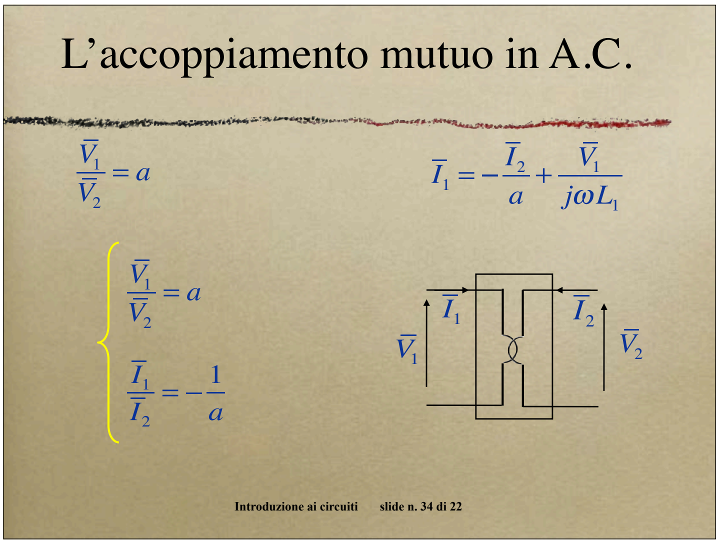
$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a$$

$$\bar{I}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{a} + \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1}$$

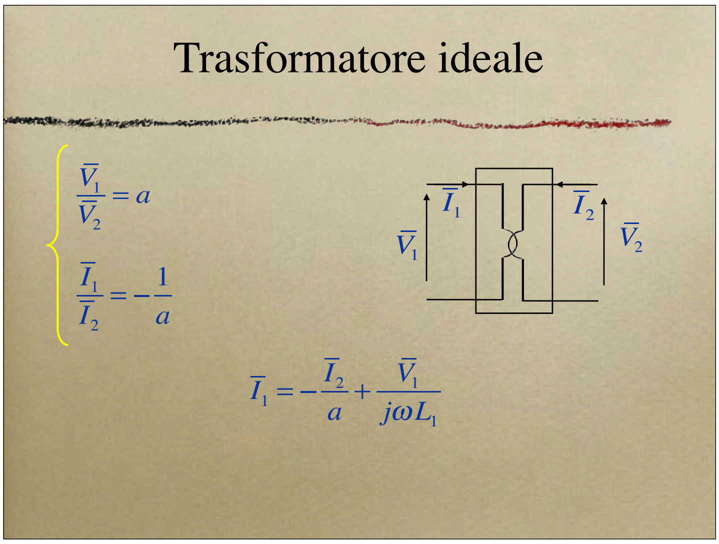
$$\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\frac{1}{a}$$

Per descrivere il funzionamento dell’accoppiamento perfetto potremmo usare, invece delle due equazioni trovate, la prima, lasciata immutata, e quella che si ottiene dividendo membro a membro le due equazioni. Si ottiene così una nuova forma delle equazioni dell’accoppiamento perfetto che ci consente di sviluppare alcune considerazioni.

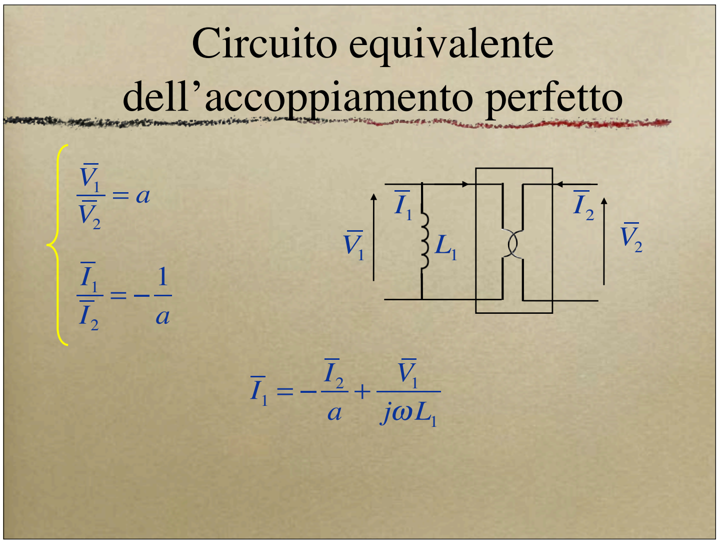
Nella ipotesi che L_1 sia molto grande, al limite per L_1 che tende all’infinito, la seconda equazione si semplifica considerevolmente e diventa simile alla prima.



Possiamo immaginare che le equazioni così trovate definiscano un nuovo doppio bipolo ideale, che chiameremo trasformatore ideale, e che rappresenteremo con il simbolo mostrato. Esso è ideale in quanto descrive un doppio bipolo accoppiamento magnetico perfetto solo nel limite in cui l'induttanza primaria di tale accoppiamento vada all'infinito. Il trasformatore ideale è caratterizzato da un solo parametro: il suo rapporto di trasformazione a.



Se ora ritorniamo alle equazioni originarie, che descrivono il doppio bipolo accoppiamento perfetto, vediamo che mentre la prima di esse afferma che le tensioni sono nello stesso rapporto che avrebbero in un trasformatore ideale, la seconda ci dice che la corrente al primario può essere vista come somma di una corrente, che è la stessa che si avrebbe in un trasformatore ideale, più la corrente che circola nell'induttanza L_1 quando essa è sottoposta alla tensione primaria.



In altri termini le stesse equazioni caratterizzano anche un circuito del tipo mostrato in figura, e quindi tale circuito è equivalente all'accoppiamento magnetico perfetto.

L'accoppiamento imperfetto

$$M^2 \le L_1 L_2$$

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2$$
$$\bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2$$

$$L_1^{'} + L_1^{''} = L_1$$
$$L_2^{'} + L_2^{''} = L_2$$

$$M^2 = L''_1 L''_2$$

Il caso dell'accoppiamento non perfetto si risolve ora con grande semplicità. Supponiamo, infatti, di scomporre le due induttanze L_1 ed L_2 in due parti L_1' ed L_2', e L_1" ed L_2" tali che L_1" L_2" = M . Si noti che le tre equazioni definiscono i quattro parametri L con un grado di libertà in quanto le equazioni che li determinano sono solo tre. Esistono dunque infinite scelte possibili per la scomposizione descritta; per ottenerne una basterà fissare ad arbitrio uno dei parametri ed ottenere gli altri dalle relazioni.

L'accoppiamento mutuo in A.C.

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2$$
$$\bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2$$

$$L_1^{'} + L_1^{''} = L_1$$
$$L_2^{'} + L_2^{''} = L_2$$

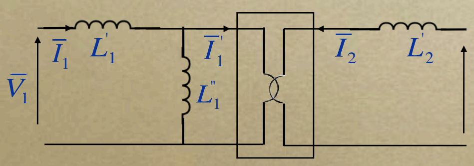
$$M^2 = L''_1 L''_2$$

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1^{'} \bar{I}_1 + \left(j\omega L_1^{''} \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \right)$$
$$\bar{V}_2 = j\omega L_2^{'} \bar{I}_2 + \left(j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2^{''} \bar{I}_2 \right)$$

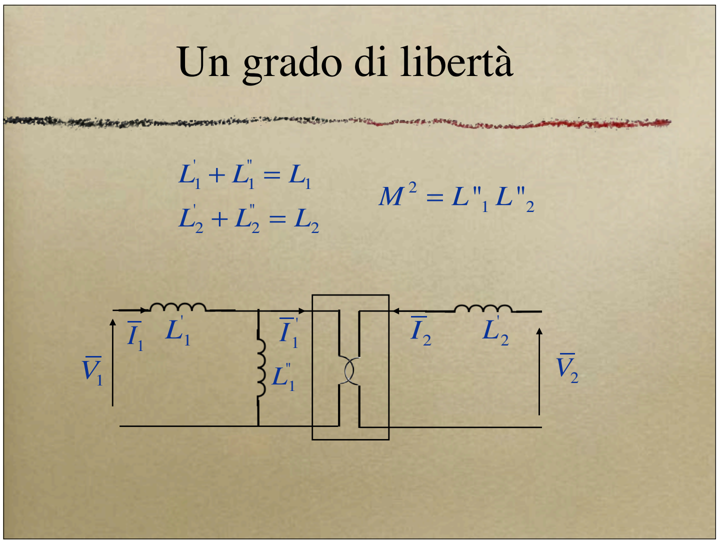
Introduciamo ora le posizioni fatte nelle equazioni. È evidente che i termini in parentesi, per come li abbiamo costruiti, descrivono un accoppiamento perfetto. Per ottenere il circuito equivalente di un accoppiamento non perfetto, basterà aggiungere, a quello di un accoppiamento perfetto, le due cadute di tensione sulle induttanze L_1' e L_2' rispettivamente al primario ed al secondario.

Circuito equivalente

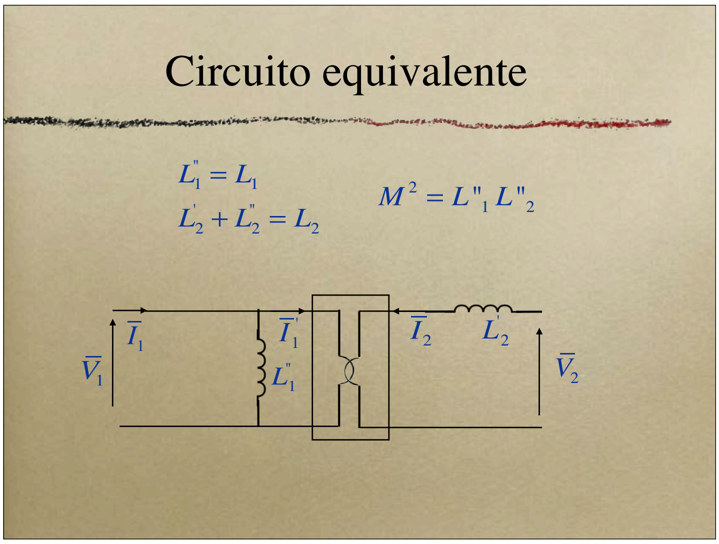
$$\bar{V}_1 = j\omega L_1^{'} \bar{I}_1 + \left(j\omega L_1^{''} \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \right)$$
$$\bar{V}_2 = j\omega L_2^{'} \bar{I}_2 + \left(j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2^{''} \bar{I}_2 \right)$$



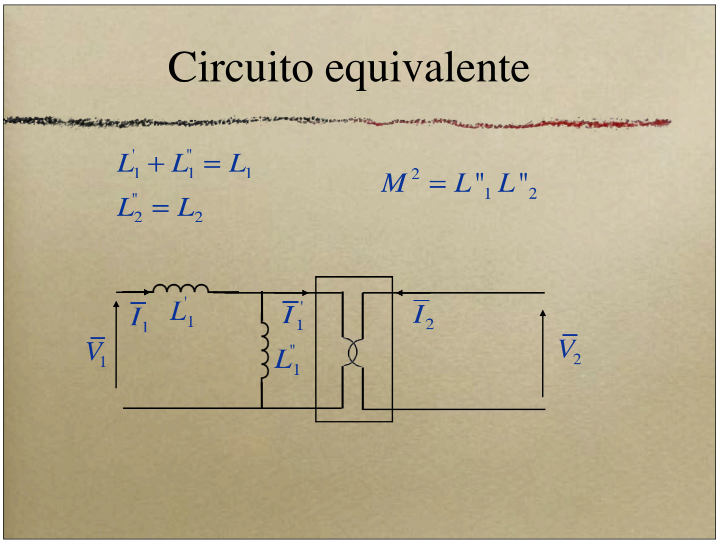
Così come mostrato in figura.



Naturalmente, data l'arbitrarietà della scelta nella scomposizione di L_1 ed L_2, si possono costruire infiniti circuiti equivalenti dell'accoppiamento dato.



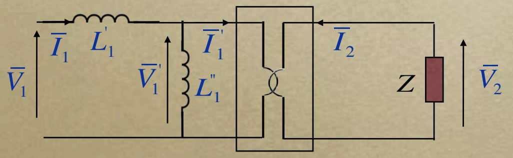
in particolare sono possibili le due scelte $L'_1 = 0$



oppure $L'_2 = 0$. In questo secondo caso il circuito equivalente che ne risulta è quello mostrato.

Circuito equivalente

$$\frac{\overline{V}_1'}{\overline{V}_2} = a \qquad \frac{\overline{I}_1'}{\overline{I}_2} = -\frac{1}{a} \qquad \overline{V}_1' = a\overline{V}_2 \qquad \overline{I}_1' = -\frac{\overline{I}_2}{a}$$

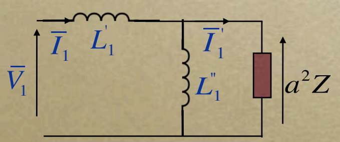


$$\frac{\overline{V}_1'}{\overline{I}_1'} = -a^2\frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2} = a^2 Z$$

Si noti che se i morsetti secondari di un doppio bipolo trasformatore ideale sono chiusi su di una impedenza Z, il rapporto tra tensione e corrente al primario è dato da a^2 Z. Cioè il primario vede una impedenza a^2 volte più grande di quella su cui è chiuso il secondario.

Circuito equivalente

$$\frac{\overline{V}_1'}{\overline{V}_2} = a \qquad \frac{\overline{I}_1'}{\overline{I}_2} = -\frac{1}{a} \qquad \frac{\overline{V}_1'}{\overline{I}_1'} = -a^2\frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2} = a^2 Z$$



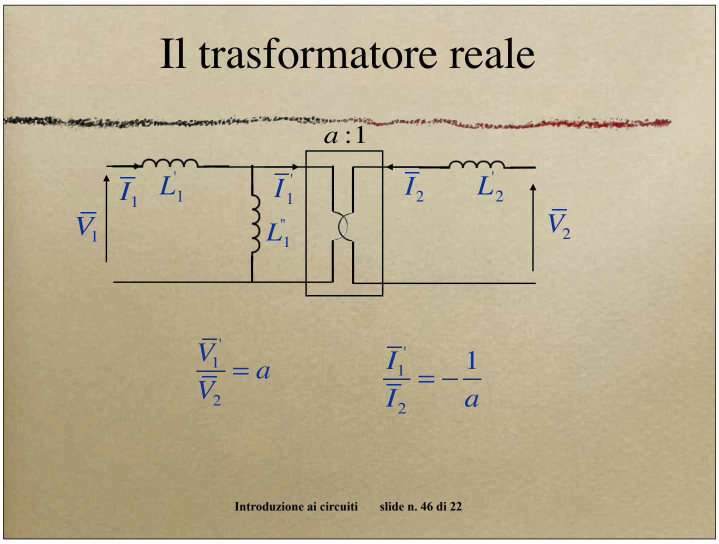
Questa osservazione fornisce un metodo generale per eliminare gli accoppiamenti mutui presenti in un circuito e ricondurre la rete ad una equivalente così come mostrato.

Osservazioni

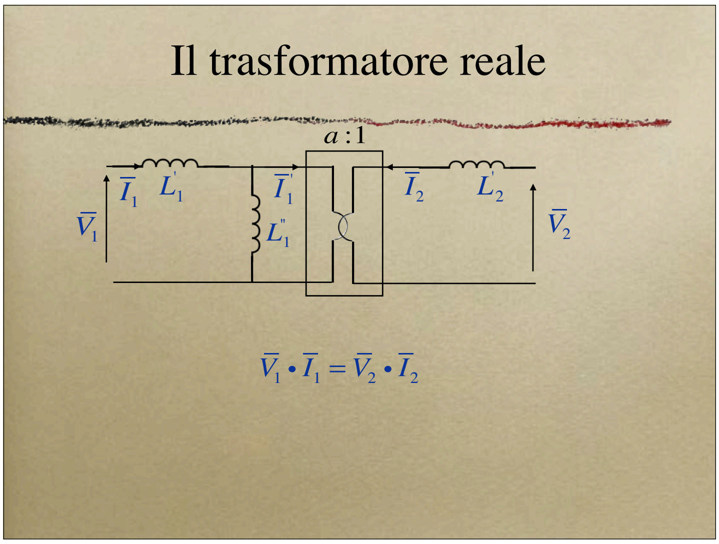
L'accoppiamento mutuo è trasparente per la potenza attiva.

Il trasformatore ideale è trasparente per la potenza attiva e reattiva.

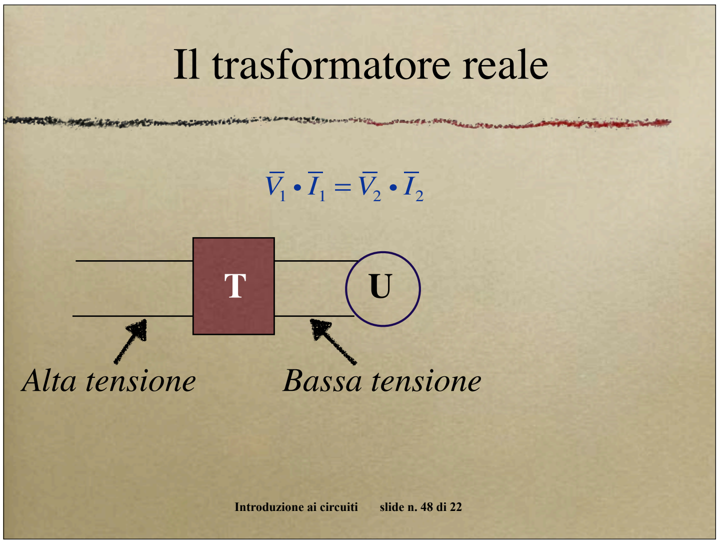
L'accoppiamento mutuo, e a maggior ragione il trasformatore ideale, sono, evidentemente, trasparenti per le potenze attive; infatti in tali doppi bipoli non sono presenti elementi dissipativi e quindi la potenza attiva alla porta primaria è eguale ed opposta a quella alla porta secondaria – si ricordi che si è assunta una convenzione dell'utilizzatore ad entrambe le porte – di modo che la potenza attiva totale assorbita dal doppio bipolo è identicamente nulla.
Mentre però il trasformatore ideale è trasparente anche per le potenze reattive – ed in generale per qualsiasi tipo di potenza – l'accoppiamento mutuo invece assorbe una certa potenza reattiva.



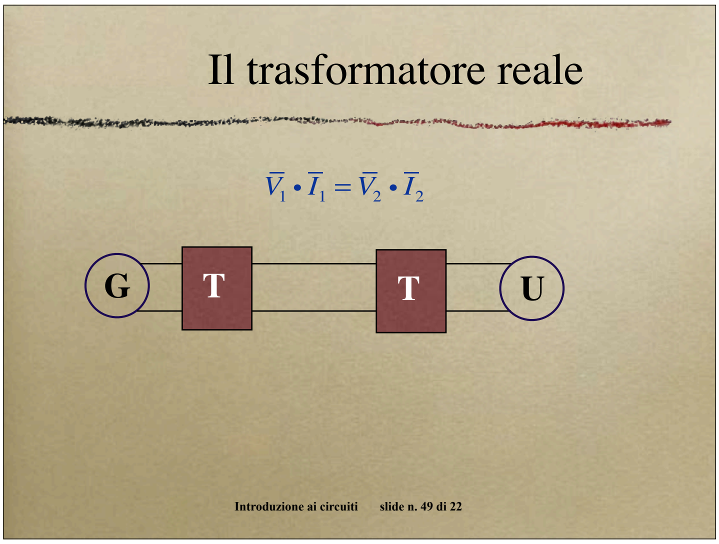
Il nome "trasformatore ideale" dato al doppio bipolo introdotto per costruire il circuito equivalente di un accoppiamento mutuo, deriva dal fatto che "trasformatore" viene detto un dispositivo, di larghissimo uso nelle pratiche applicazioni, del quale il trasformatore ideale è, appunto, una idealizzazione. Si tratta di un accoppiamento mutuo realizzato con due avvolgimenti, che, con accorgimenti tecnici sui quali non è possibile ora soffermarsi, vengono fatti interagire in maniera molto stretta (coefficiente di accoppiamento in modulo prossimo ad 1!). Come sappiamo, in tali condizioni le tensioni primarie e secondarie sono nel rapporto a, mentre, trascurando la corrente derivata dalla induttanza L_1 del circuito equivalente, le correnti primarie e secondarie sono nel rapporto – 1/a.



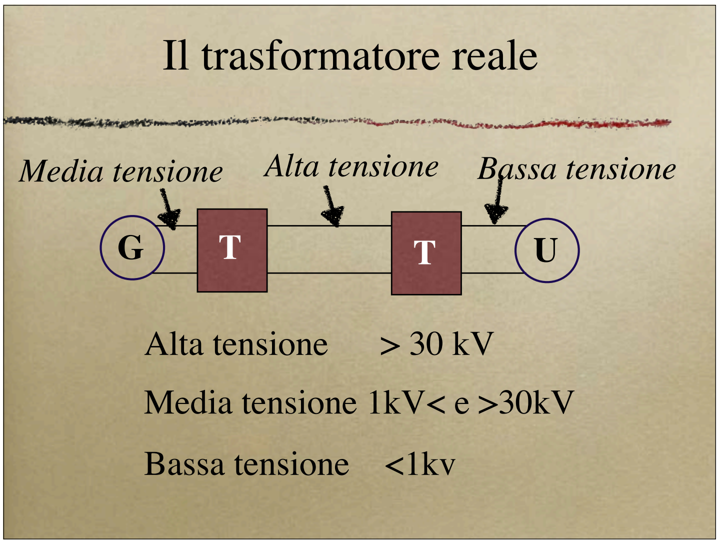
Sarebbe facile dimostrare che tale rapporto di trasformazione altro non è che, con buona approssimazione, il rapporto tra il numero delle spire dell'avvolgimento primario e quello dell'avvolgimento secondario. Un tale dispositivo, dunque, consente con grande semplicità di ridurre o elevare una tensione, aumentando o riducendo nel contempo la corrente; da ciò il suo nome. Si noti che tutto ciò accade, almeno nel caso teorico che stiamo qui esaminando, senza nessuna dissipazione di potenza attiva. Il trasformatore dunque consente di adattare la tensione alla particolare applicazione. Ma c'è di più e, per comprenderlo, bisogna sviluppare qualche considerazione elementare sul problema della produzione e della distribuzione dell'energia elettrica.



Motivi di sicurezza degli operatori, e ragioni di ordine economico, consigliano l'uso di tensioni relativamente basse per la distribuzione capillare dell'energia elettrica. È abbastanza intuitivo infatti comprendere che il danno prodotto sugli organismi viventi, a parità di condizioni, è tanto maggiore quanto maggiore è la tensione. Inoltre gli "isolamenti", sempre necessari in un dispositivo elettrico, diventano sempre più costosi e delicati quando la tensione cresce. Nell'Europa continentale, come è noto, il valore efficace della tensione alla distribuzione è di 220 V. D'altra parte il trasporto dell'energia elettrica, dal punto di produzione a quello di utilizzo, avviene mediante conduttori che, naturalmente, non essendo perfetti, presentano una certa resistenza e producono, quindi, una certa dissipazione di potenza che dipende soltanto dal quadrato del valore efficace della corrente richiesta dal carico!



È evidente che se a monte dell'utilizzatore disponessimo un trasformatore riduttore di tensione in modo da mantenere bassa la tensione sul carico ma da elevare quella sulla linea di trasporto, potremmo nel contempo ridurre la corrente di linea e quindi le perdite su di essa. Se si pensa ai chilometri e chilometri di linee di trasmissione elettrica che caratterizzano il panorama di un qualsiasi paese sviluppato, si comprende la convenienza del trasportare l'energia elettrica, sulle grandi tratte, ad alta tensione e relativamente bassa corrente.
Si potrebbe pensare di produrre l'energia elettrica direttamente a tale tensione elevata. Ma anche questo non è conveniente economicamente perché, come si è detto, la complicazione ed il costo di un qualsiasi dispositivo elettrico – e quindi anche di un generatore – cresce notevolmente al crescere della tensione.



Ciò porta al classico schema mostrato che prevede un trasformatore elevatore di tensione a valle dei generatori ed a monte della linea, ed un trasformatore riduttore a monte del carico. Naturalmente le cose sono in realtà molto più complesse ed articolate di quanto queste semplici considerazioni possano far credere; si pensi, per esempio, al semplice fatto che supporre un trasformatore privo di perdite è chiaramente una idealizzazione, non foss'altro perché gli avvolgimenti di cui esso è costituito presentano necessariamente una certa resistenza e quindi introducono una dissipazione aggiuntiva. Queste ed altre problematiche sono oggetto di studio di altre discipline che si occupano in modo specifico delle macchine elettriche e degli impianti elettrici; a noi basta qui aver evidenziato, in linea di principio, il fondamentale ruolo svolto nella tecnica dal dispositivo "trasformatore".