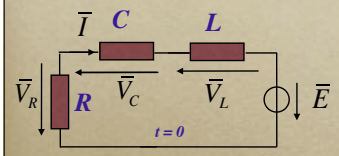
Lezione 16

Il circuito risonante



$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

Al variare dei parametri L, R e C

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

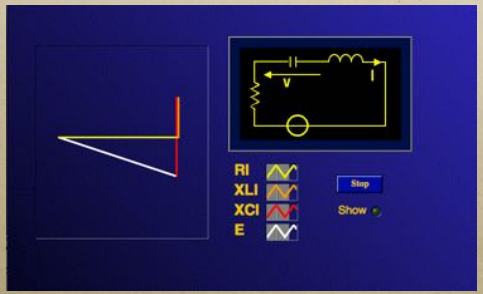
Fasori

Abbiamo visto che in un circuito RLC serie, alimentato da un generatore di forza elettromotrice sinusoidale di frequenza angolare ω, si può verificare la condizione per cui la caduta capacitiva compensa perfettamente la caduta induttiva ed il circuito appare al generatore come puramente ohmico. Per assegnati valori di L e C, ciò accade per una frequenza del generatore pari ad $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, che è proprio la frequenza alla quale il circuito, in assenza di cause dissipative (R = 0), è in grado di oscillare liberamente. Siamo dunque nella già menzionata condizione di risonanza tra la frequenza del forzamento e quella propria del sistema. Un circuito di tal genere è detto anche circuito risonante.

Il circuito risonante

$$\omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

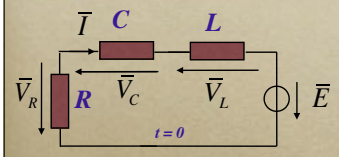


$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

Al variare dei parametri L, R e C → *Fasori*

Per comprendere il fenomeno della risonanza bisogna tener presente che implicitamente si è assunto che la rete sia a regime; il che vuol dire che si suppone vi sia stato un transitorio che ha portato all'attuale situazione di regime. Durante il transitorio il generatore ha fornito una certa quantità di energia; d'altra parte, dato che l'energia immagazzinata nel condensatore è proporzionale al quadrato della tensione e quella nell'induttore è proporzionale al quadrato della corrente, è evidente che se tensione e corrente sono in quadratura, come nel nostro caso, accadrà che quando l'energia associata al campo elettrico (condensatore) è massima, quella associata al campo magnetico (induttore) è nulla e viceversa. Se tali energie massime sono eguali a regime si assisterà ad un periodico scambio di energia tra campo elettrico e campo magnetico.

Il circuito risonante



$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

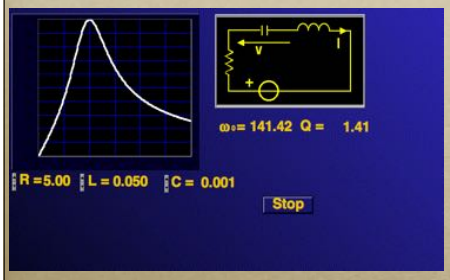
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

Al variare della frequenza del generatore

Curva

Il fenomeno della risonanza, caratteristico di qualsiasi sistema che abbia la capacità di oscillare su frequenze proprie, è molto importante anche dal punto di vista applicativo, specialmente nel campo dei circuiti. Esaminiamolo dunque in maggior dettaglio. Supponiamo che, nel circuito risonante serie, il generatore di tensione sia a frequenza variabile; si possa cioè variare a piacimento tra 0 ed ∞ la frequenza della tensione che esso eroga. Riportiamo in un diagramma la curva del modulo della corrente I in funzione della frequenza; evidentemente tale diagramma è anche il diagramma dell'inverso del modulo della impedenza. Per ω = 0, I = 0 perché il condensatore a tale frequenza presenta una impedenza infinita; analogamente per ω che va all'infinito la corrente è nulla, questa volta per merito dell'induttore.

Il circuito risonante



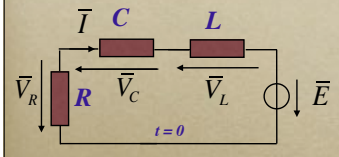
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

Al variare della frequenza del generatore

$$f\left(\omega/\omega_0\right) = \frac{RI(\omega)}{E}$$

Per ω = ω_0 il modulo della corrente ha un massimo pari ad E/R, così come mostrato nel diagramma, dove è riportato l'andamento di I normalizzato al suo valore massimo E/R. Come era prevedibile, per frequenze inferiori a quella di risonanza il circuito si comporta globalmente come un carico prevalentemente capacitivo: l'impedenza offerta dal condensatore prevale. Per frequenze invece superiori a quella di risonanza, il carico è prevalentemente induttivo. Alla frequenza di risonanza, come abbiamo visto, il carico si comporta come se fosse puramente resistivo.

La curva di risonanza



$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

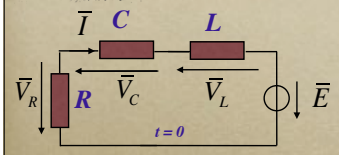
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$I_{max} = \frac{E}{R}$$

Con qualche semplice passaggio, con le posizioni fatte, possiamo trovare l'espressione della funzione f(ω) il cui diagramma prende il nome di curva di risonanza.

Il circuito risonante



$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

$$f(\omega) = \frac{I}{I_{max}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Introduciamo allo scopo il fattore Q definito nel modo mostrato. Introducendolo nella espressione di $f(\omega/\omega_0)$, e ponendo $x=\omega/\omega_0$ troviamo agevolmente la funzione f(x) cercata.

Il circuito risonante

$$f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

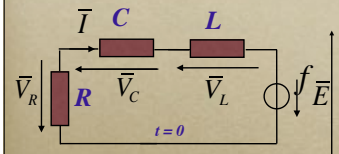
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Curva

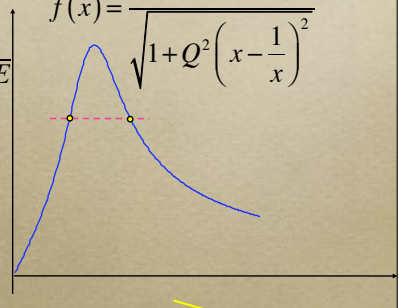
Il parametro Q, prende il nome di fattore di qualità o di merito del circuito. All'aumentare del fattore di qualità del circuito, la curva di risonanza diventa sempre più ripida nell'intorno della frequenza di risonanza ω_0.

Il circuito risonante come filtro



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

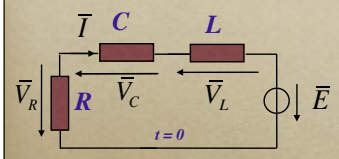
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$



Filtro

Perché fattore di qualità, si comprende facilmente considerando la seguente situazione. Si immagini che la tensione del generatore non sia sinusoidale ma periodica. Una tale tensione può essere scomposta in una somma di infiniti termini sinusoidali di frequenza diversa. Vediamo il circuito come un doppio bipolo che abbia in ingresso il generatore e dal quale si prelevi in uscita la tensione sul resistore R. Evidentemente, per la sovrapponibilità degli effetti, anche la tensione in uscita può essere vista come somma delle risposte alle singole armoniche. D'altra parte ogni armonica della tensione in ingresso vede una diversa impedenza a causa della diversa frequenza. Se ne conclude che le ampiezze delle armoniche con frequenze vicine a quella di risonanza risulteranno amplificate rispetto alle altre.

Il circuito risonante

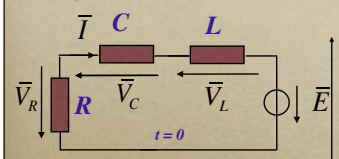


$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

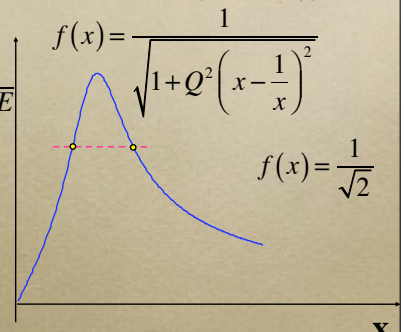
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

Per questo motivo si dice che il circuito si è comportato come un filtro, lasciando "passare" di preferenza un determinato intervallo di frequenze (banda), e attenuando le altre. Così, per esempio, se in ingresso abbiamo una onda quadra, in uscita avremo un andamento temporale che sarà tanto più vicino ad una sinusoide quanto più alto è il fattore di qualità. Se la frequenza di risonanza del circuito è pari a quella della fondamentale dell'onda quadra in uscita si avrà una sinusoide a quella frequenza; essa sarà leggermente deformata per la presenza delle armoniche di ordine superiore che, seppur attenuate, sono sempre presenti. Ma se la frequenza di risonanza del circuito è uguale a quella della succesiva armonica (di frequenza tripla di quella fondamentale, nel nostro caso) ecco che in uscita comparirà la terza armonica.

Il circuito risonante



$$\frac{1}{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}$$



Coerentemente con tutto ciò, se il circuito è sintonizzato sulla seconda armonica – se cioè la sua frequenza di risonanza è pari al doppio di quella della fondamentale dell'ingresso – in uscita si avrà un segnale nullo. Lo sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra, infatti, non prevede armoniche pari! Le applicazioni che sfruttano il fenomeno della risonanza nelle reti elettriche sono numerosissime e tutte di importanza eccezionale; a titolo d'esempio citiamo quello del circuito di sintonia di un apparecchio radiofonico o televisivo: quando ruotiamo la manopola della sintonia di un ricevitore possiamo immaginare di non fare altro che modificare la capacità di un circuito risonante, variando quindi la sua frequenza di risonanza, in modo tale da selezionare l'opportuna banda che desideriamo filtrare.

Il circuito risonante

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 RC}$$

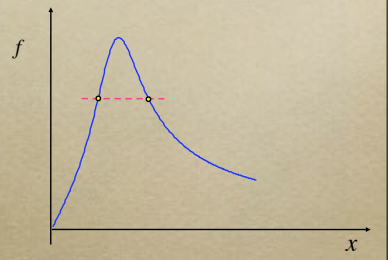
$$Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1 \qquad \left(x-\frac{1}{x}\right)=\pm\frac{1}{Q} \qquad x^2\pm\frac{1}{Q}x-1=0$$

$$x=\pm\frac{1}{2Q}\pm\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1} \qquad x_2-x_1=\frac{1}{Q}$$

È interessante notare che l'introduzione del concetto di potenza media ci consente di dare una interpretazione del fattore di qualità di un circuito risonante in termini di energie in gioco.

Il circuito risonante

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

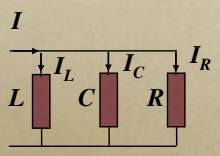


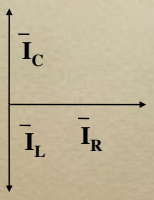
$$W(t) = \frac{1}{2}\left[Li^2(t) + Cv^2(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[LI_M^2 sen^2(\omega t) + C\frac{I_M^2}{\omega_0^2 C^2}\cos^2(\omega t)\right] = \frac{1}{2}LI_M^2$$

Alla risonanza infatti l'energia totale immagazzinata nel condensatore e nell'induttore è costante ed uguale all'energia massima immagazzinata nell'induttore (o nel condensatore). D'altra parte l'energia dissipata nel resistore in un periodo è pari a R I T. Se ne deduce dunque che Q è 2π volte il rapporto tra l'energia immagazzinata e l'energia dissipata in un periodo.

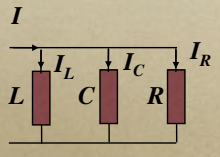
Risonanza parallelo





Del tutto equivalente è il caso del circuito RLC parallelo, a volte detto anche antirisonante. In esso la corrente erogata dal generatore, che è somma delle tre correnti rispettivamente nell'induttore, nel resistore e nel condensatore, è uguale alla sola corrente nel resistore perché le altre due si compensano, essendo eguali ed opposte. Mentre nel circuito serie, in assenza della resistenza R, l'impedenza risultante è nulla, nel circuito parallelo, in assenza di resistenza (questa volta R = ∞), l'impedenza è infinita. Si noti che nel circuito antirisonante senza perdite, pur essendo la corrente totale fornita dal generatore identicamente nulla, non sono nulle le correnti nell'induttore e nel condensatore, che si calcolano agevolmente come rapporto tra tensione applicata e relativa impedenza.

Risonanza parallelo

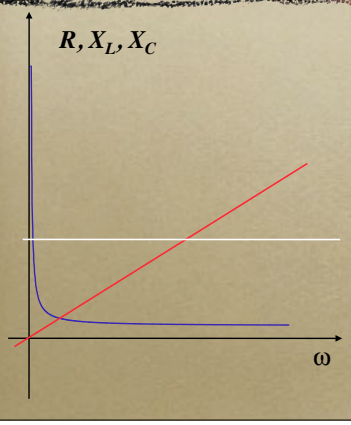


$$Y = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C$$

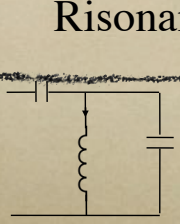
$$f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{I_R}{I}$$

La curva di "antirisonanza" sarà in questo caso quella della funzione $f(x)=I_R/I$.

I bipoli fondamentali in funzione di ω

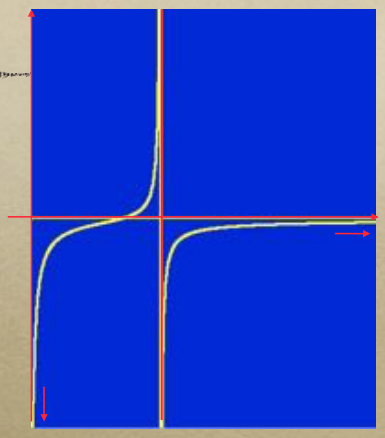


Risonanza



$$\frac{dX}{d\omega} \geq 0.$$

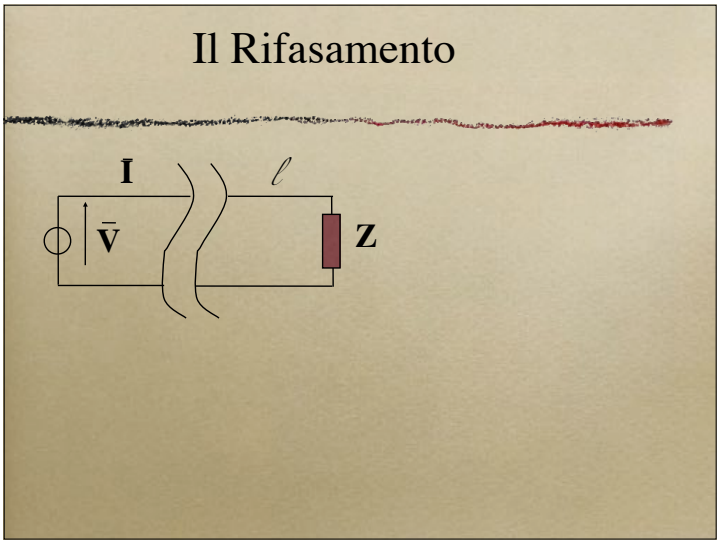
Teorema di Foster



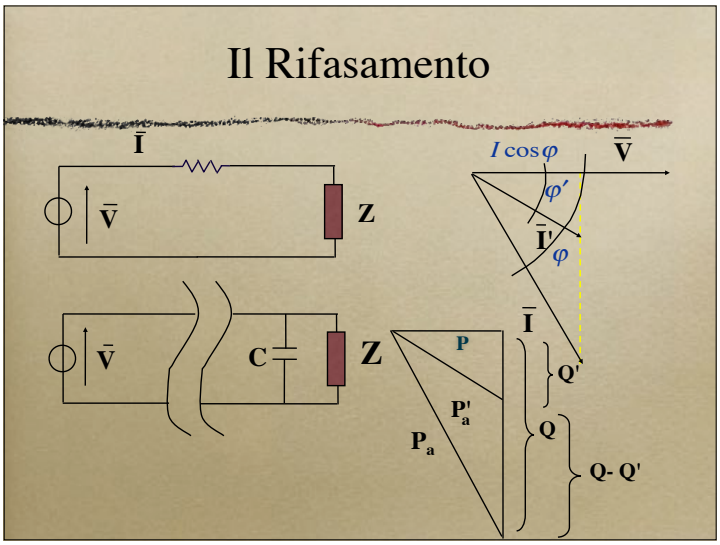
I componenti reali in A.C.

I conduttori

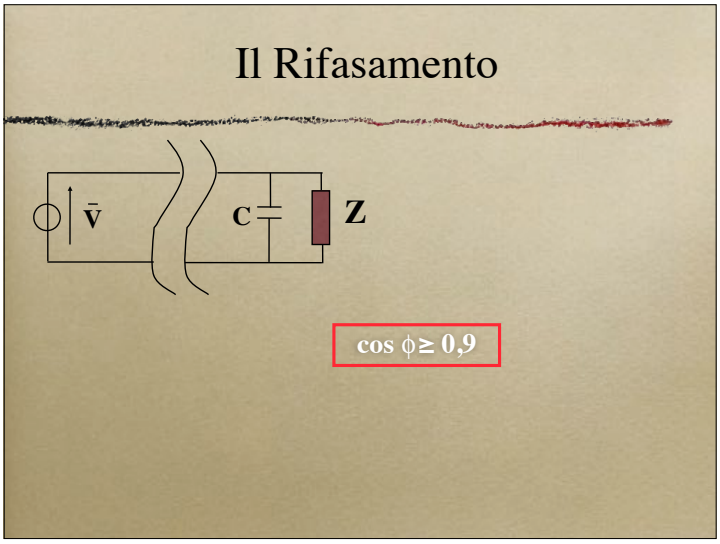
La necessità di lunghe linee di trasmissione dell'energia elettrica che collegano i luoghi della generazione con quelli della utilizzazione e la presenza di una inevitabile dissipazione in linea dovuta alla resistenza dei conduttori, ha anche altre interessanti conseguenze che cercheremo ora di illustrare in maniera molto elementare.



Consideriamo un carico che sotto una determinata tensione V, assorbe una potenza attiva P ed una potenza reattiva Q. Supponiamo ancora che la fase della impedenza equivalente del carico, φ=arctg(Q/P), sia positiva (carico induttivo), come in realtà si verifica nella maggioranza dei carichi industriali. Il diagramma fasoriale corrispondente alla situazione descritta è rappresentato a lato.

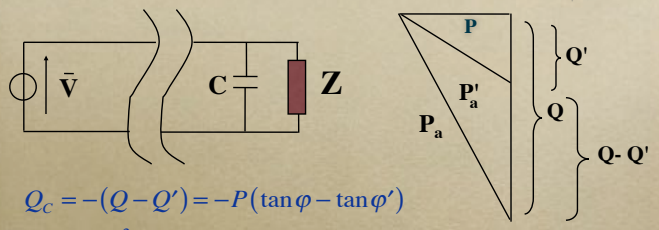


Nella figura è rappresentata anche una diversa condizione di funzionamento in cui la stessa potenza attiva P è assorbita con una differente potenza reattiva Q'. La potenza attiva è la stessa nei due casi perché la componente Icosφ del fasore rappresentativo della corrente, non è variata. Il fatto è ancora più chiaro se si considera il triangolo delle potenze nei due casi considerati, così come mostrato in figura. È evidente però che, nei due casi, è diverso il modulo della corrente I, e quindi diverse sono le potenze dissipate lungo la linea che che collega il carico ai generatori che lo alimentano. Tali potenze, infatti, sono proporzionali al quadrato del modulo della corrente secondo un fattore R che rappresenta, appunto, la resistenza equivalente della linea.



Queste perdite potrebbero, dunque, essere ridotte se si disponesse in parallelo al carico un secondo carico, puramente reattivo – nelle nostre ipotesi, capacitivo – in grado di assorbire una potenza reattiva pari a – (Q – Q'); ciò senza variare in alcun modo la potenza attiva assorbita dal carico stesso. In tali condizioni il carico si dirà rifasato da cosφ a cosφ'. In pratica con il rifasamento si evita che l'energia immagazzinata nel carico, che, come è noto, oscilla tra un punto di massimo ed uno di nullo, venga continuamente trasferita lungo la linea, avanti ed indietro, con le conseguenti perdite; l'aver disposto un "serbatoio di energia" in controfase in prossimità del carico, consente che tale scambio di energia avvenga tra il "serbatoio" ed il carico e non tra i generatori ed il carico stesso.

Il Rifasamento



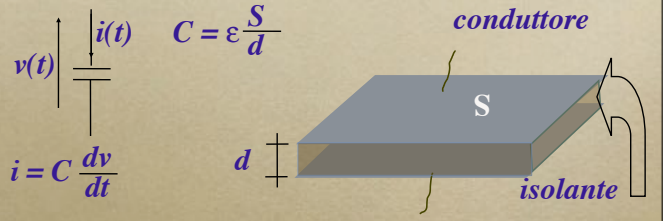
$$Q_C = -(Q - Q') = -P(\tan\varphi - \tan\varphi')$$

$$Q_C = -\frac{V^2}{X_C} = -\omega C V^2$$

$$C = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega V^2}$$

Gli Enti produttori di energia elettrica, interessati a questo risparmio di energia, cercano di favorire l'uso di tale tecnica adottando opportune politiche contrattuali e tariffarie. In pratica l'energia utilizzata viene fatturata a prezzi diversi a seconda del cosj, quando esso scende al di sotto di un certo valore. In Italia tale valore è cosφ = 0,9.
In conclusione il problema del rifasamento si riduce al calcolo della capacità del banco di condensatori da disporre in parallelo al carico per ottenere il voluto rifasamento, come mostrato in figura.

Condensatore



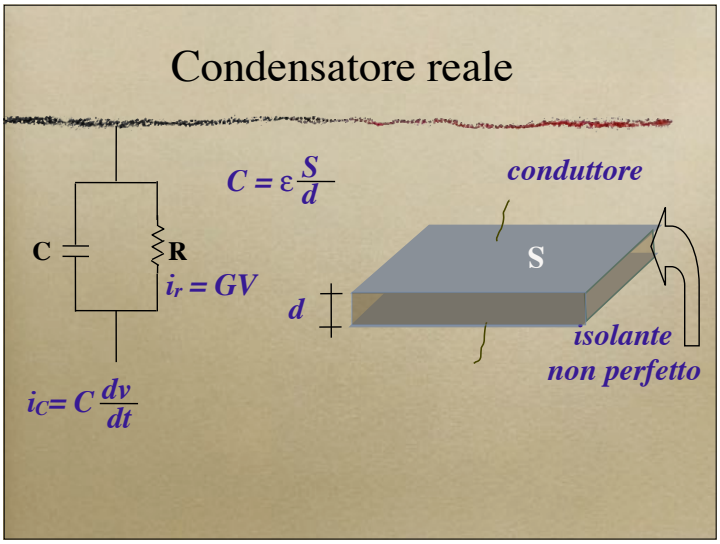
$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

Abbamo già visto come si può realizzare un condensatore.

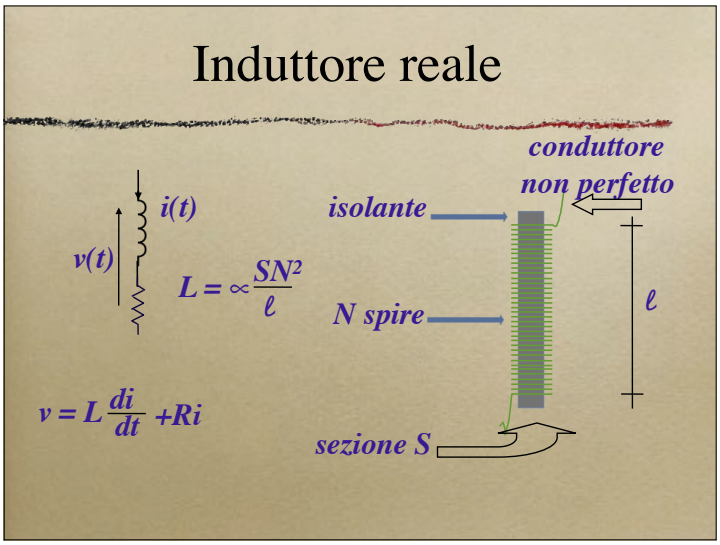
Condensatore reale

- Bande colorate;
- Dimensioni e costi diversi;
- Precisione;
- Tensione di lavoro;
- Dissipazione;

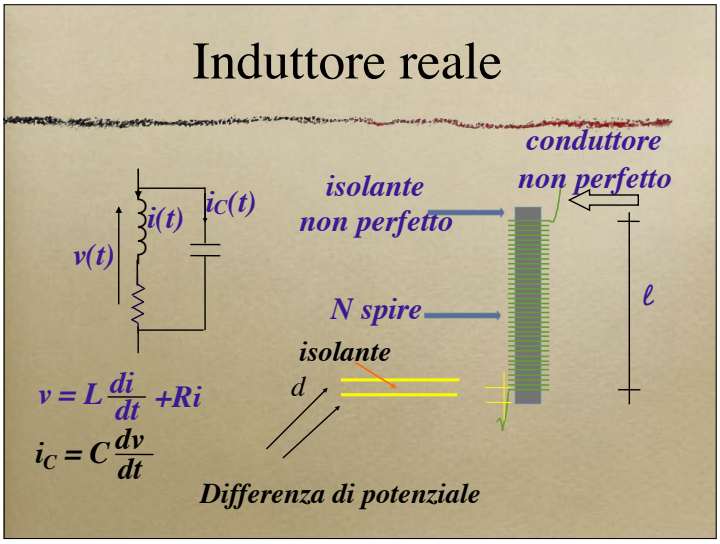
Anche in questo caso avremo problemi simili a quelli del resistore: useremo bande colorate er indicarne il valore, avremo dimensioni e costi diversi per le diverse precisioni richieste. C'è però una ulteriore considerazione da fare. Il dielettrico interposto tra le armature del condensatore non potrà certo essere perfetto. Ne consegue che dovremo tener conto di una corrente che lo attraversa e quindi di una certa dissipazione.



Converrà allora prendere in considerazione un circuito equivalente del condensatore del tipo mostrato in figura.



Analogamente per l'induttore dovremo tenere in conto una resistenza in serie perché il conduttore di cui è fatto l'avvolgimento non potrà essere perfetto.

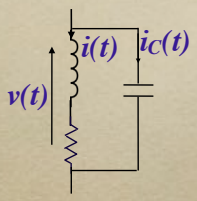


Inoltre le spire che compongono l'avvolgimento, dovendo essere isolate le une dalle altre, altrimenti la corrente consegue il percorso dell'avvolgimento, daranno luogo ad una capacità tra sputa e spira, come mostrato in figura, dove sono rappresentate due spire ed il relativo isolante interposto. E quindi il circuito equivalente dell'induttore mostrato. Naturalmente, di regola R e C saranno di valore molto ridotto.

Induttore reale

Circuito equivalente

Fattore Q di un induttore



$$v = L\frac{di}{dt} + Ri$$

$$i_C = C\frac{dv}{dt}$$

Per questo motivo è lecito parlare del fattore Q di un induttore.

Riepilogo della Lezione

- **Il circuito RLC al variare dei parametri;**
- **Il circuito RLC al variare di ω;**
- **La risonanza.**
- **Il circuito RLC come filtro;**
- **RLC parallelo;**
- **La risonanza in generale;**
- **Il rifasamento;**
- **Condensatori ed induttori nella realtà.**