

Lezione 15

Anche in regime sinusoidale, naturalmente, il prodotto $v(t)i(t)$ della tensione ai morsetti di un bipolo e della corrente che lo attraversa rappresenta, istante per istante, la potenza assorbita dal bipolo – convenzione dell'utilizzatore. Si noti che solo per il resistore tale potenza è sempre positiva; per l'induttore e per il condensatore, invece, la potenza è positiva in un semiperiodo – pari ad un quarto del periodo di tensione e corrente – e negativa nel successivo.

Teorema di Tellegen

$$\sum_k v_k(t) i_k(t) = 0$$

In virtù del teorema di Tellegenn la somma di tali prodotti estesa a tutti i rami di una rete è identicamente nulla.

Il che ci dice che in ogni istante la potenza assorbita è uguale a quella generata o fornita – si ricordi che ora nella rete ci sono bipoli passivi che sono in grado di fornire energia per un intervallo di tempo, a patto che l'abbiano assorbita in un intervallo precedente.

Potenza in regime sinusoidale

$$p(t) = v(t)i(t) = V_M \sin(\omega t) I_M \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$VI [\cos \varphi + \sin(2\omega t - \varphi - \pi/2)]$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt = VI \cos \varphi \quad \text{Potenza attiva}$$

$$P = \bar{V} \cdot \bar{I}$$

Nel caso particolare di un regime sinusoidale si ottiene facilmente che la potenza è la somma di un termine costante, pari al prodotto del valore efficace di tensione e corrente per il coseno dell'angolo φ tra i due fasori, più un termine oscillante di frequenza 2ω . Dato che il termine oscillante ha valor medio nullo, il valore medio della potenza istantanea è pari a $VI \cos \varphi$. Ciò giustifica la nostra scelta di utilizzare il valore efficace quale modulo del fasore rappresentativo di tensioni e correnti. Con questa scelta, se si dà all'operatore prodotto scalare tra due fasori l'usuale significato di prodotto dei moduli dei vettori per il coseno dell'angolo che essi formano, si può affermare che in regime sinusoidale la potenza media è pari al prodotto scalare del fasore della tensione per quello della corrente. La potenza media viene anche detta potenza attiva.

Teorema di Tellegen

$$\sum_k \bar{V}_k \tilde{I}_k = \sum_k V_k e^{j(\omega t + \alpha_k)} I_k e^{-j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)} = 0$$

Potenza complessa

$$\bar{V}_k \tilde{I}_k = V_k I_k (\cos \varphi_k + j \sin \varphi_k)$$

Poiché però il sistema dei fasori rappresentativi delle tensioni sui lati e delle correnti nei rami soddisfano anche essi alle leggi di Kirchhoff, si può affermare che anche la somma di tutti i prodotti tra i fasori di tensione e corrente, estesa all'intera rete, deve essere identicamente nulla. Con facili passaggi si può sviluppare il generico termine, ma il risultato non è particolarmente significativo. Più interessante è invece il caso in cui al posto dei fasori rappresentativi delle correnti si utilizzano i rispettivi coniugati. È evidente infatti che anche tali coniugati – in cui, si ricorderà, cambia solo il segno della parte immaginaria – debbono sottostare alla prima legge di Kirchhoff. Si definisce in questo modo una “potenza complessa” la cui somma è globalmente nulla.

Potenza reattiva

$$\bar{V}_k \tilde{I}_k = V_k I_k (\cos \varphi_k + j \sin \varphi_k)$$

$$Q_k = V_k I_k \sin \varphi_k$$

$$\sum_k V_k I_k \cos \varphi_k = 0$$

$$\sum_k V_k I_k \sin \varphi_k = 0$$

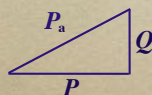
Si noti che la parte reale di tale potenza complessa è pari alla potenza media o attiva, che per questo viene detta anche potenza reale. Il coefficiente dell'immaginario è invece un nuovo tipo di potenza che incontriamo per la prima volta. La chiameremo potenza reattiva. Poiché l'annullamento di una somma di numeri complessi richiede che separatamente la somma delle parti reali e dei coefficienti delle parti immaginarie si annullino, si ottiene che non solo la potenza media deve conservarsi, cosa che già sapevamo, ma anche la potenza reattiva Q .

Potenza apparente

$$P_a = VI$$

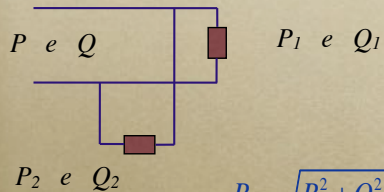
$$P_a = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Triangolo delle potenze



Chiameremo invece potenza apparente il semplice prodotto dei valori efficaci di tensione e corrente. Tre segmenti – non vettori, si badi bene – proporzionali a potenza attiva, potenza reattiva e potenza apparente rispettivamente, formano il così detto triangolo delle potenze.

Potenza apparente



$$P_a = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2}$$

$$P_{1a} + P_{2a} = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{P_2^2 + Q_2^2}$$

La potenza apparente non si conserva, come risulta evidente da questo semplice esempio.

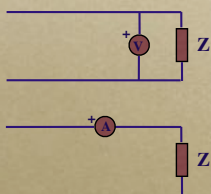
Strumenti di misura in regime sinusoidale

Oscillografo o Oscilloscopio

- A valor massimo;
- A valor medio;
- A valor efficace.

Abbiamo già visto come in regime dinamico si renda necessario un nuovo strumento di misura: l'oscillografo o oscilloscopio. Ma possiamo avere anche strumenti che misurano un aspetto particolare della forma d'onda della grandezza in esame: il valor massimo, il valor medio o il valore efficace.

Strumenti di misura in regime sinusoidale

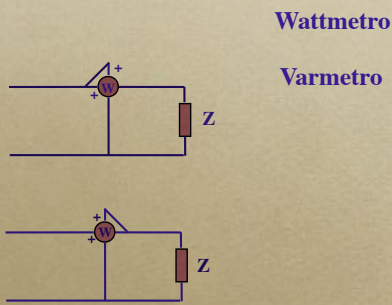


Voltmetro

Amperometro

Anche in regime sinusoidale i voltmetri vanno messi in parallelo e gli amperometri in serie.

Strumenti di misura in regime sinusoidale



Esistono però anche altri strumenti che misurano la potenza attiva (più raramente quella reattiva).

Circuiti di ordine superiore

- Equazioni di Kirchhoff;
- Scrittura del sistema;

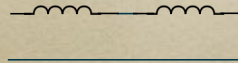
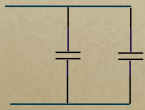
Abbiamo già esaminato gli aspetti salienti della soluzione di una rete elettrica in regime dinamico qualsiasi; proviamo qui a riepilogarli. Sia data una rete con l lati ed n nodi, alimentata da generatori di tensione e corrente con evoluzione temporale qualsiasi, composta da bipoli resistivi, induttivi e capacitivi le cui caratteristiche non variano nel tempo – la rete è tempo-invariante. Per determinare l'evoluzione temporale di tensioni e correnti dei singoli bipoli, a partire da un determinato istante iniziale t_0 – istante in cui sono note le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori – si scrivono $n-1$ equazioni ai nodi ed $l-(n-1)$ equazioni alle maglie imposte dalle leggi di Kirchhoff. Poiché le caratteristiche dei bipoli, in generale, esprimono legami differenziali tra tensioni e correnti, il sistema che ne deriva sarà di l equazioni differenziali lineari, se i bipoli presenti sono appunto lineari.

Circuiti di ordine superiore

- Riduzione ad un'unica equazione;
- Ordine dell'equazione risultante;
- Numero delle condizioni iniziali;
- Numero dei componenti a memoria.

Mediante successive operazioni di sostituzione, ed eventuale differenziazione, si ricava dal sistema di partenza una unica equazione differenziale in una delle incognite in precedenza scelta; il grado dell'equazione sarà pari al numero di bipoli "a memoria" – induttori e condensatori – presenti nella rete. Quest'ultima affermazione andrebbe dimostrata; noi la consideriamo tale sulla base di una semplice considerazione di carattere fisico: se ciò non fosse vero il numero di condizioni iniziali assegnate non sarebbe adeguato alla soluzione del problema.

Circuiti di ordine superiore



Naturalmente due condensatori in parallelo, o due induttori in serie, vanno contati come un unico componente; del resto, nei due casi, la condizione iniziale è unica! La soluzione dell'equazione così determinata si ottiene aggiungendo all'integrale generale della equazione omogenea associata, una soluzione particolare della equazione completa.

Circuiti di ordine superiore

Equazione omogenea.

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^n A_r e^{\alpha_r t}$$

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^p A_r e^{\alpha_r t} + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^{g_k} B_{kr} t^{r-1} e^{\beta_k t}$$

L'integrale generale dell'omogenea associata, se le radici sono tutte distinte, sarà del tipo mostrato. In presenza di radici coincidenti, la soluzione dell'omogenea ha una espressione diversa. Nella formula riportata, per esempio, la radice k-esima ha molteplicità g_k . Naturalmente alcune di queste radici possono essere complesse coniugate, dando luogo ad oscillazioni.

Circuiti di ordine superiore

Soluzione particolare o di regime;

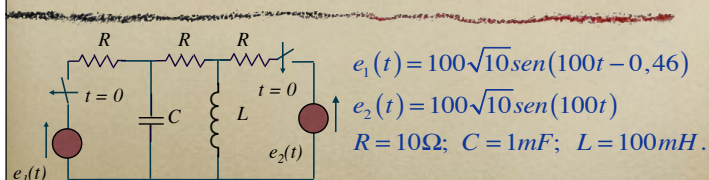
Integrale generale completa.

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

Dipende da n costanti, quindi n condizioni iniziali.

Per quanto riguarda la soluzione particolare della completa, abbiamo già visto come sia possibile determinarla quale soluzione a regime nei due casi in cui i generatori sono tutti costanti – regime continuo – o di tipo sinusoidale, tutti con la stessa frequenza – regime sinusoidale. Naturalmente il procedimento può essere esteso a regimi periodici di altro tipo. La soluzione generale così ottenuta, somma di quella dell'omogenea e della soluzione particolare, dipende dalle costanti A_r presenti nella soluzione della omogenea. A questo punto entrano in gioco le condizioni iniziali sulle grandezze di stato che, essendo proprio in numero pari al grado dell'equazione differenziale risultante, forniscono un adeguato numero di equazioni per determinare le costanti A_r .

Un esempio

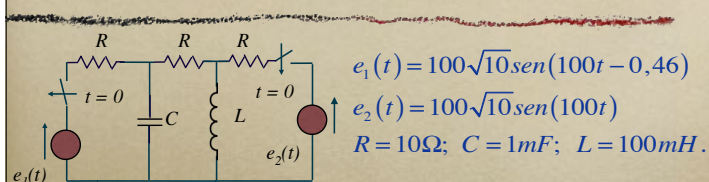


$$\bar{E}_1 = 100\sqrt{5}e^{-j0,46} = 100(2 - j)$$

$$\bar{E}_2 = 100\sqrt{5}$$

Come primo esempio consideriamo la rete mostrata in figura; essa, prima dell'apertura dell'interruttore in serie al generatore e_1 e della chiusura di quello in serie ad e_2 , funziona in regime stazionario. All'istante $t=0$ cambia la topologia e quindi il funzionamento della rete.

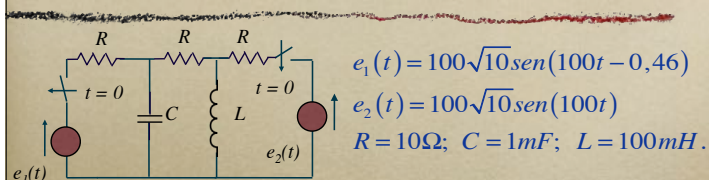
Un esempio



$$\bar{V}_C = \bar{E}_1 \left[1 - \frac{R}{R + \frac{-jX_C(R + jX_L)}{R + j(X_L - X_C)}} \right]$$

Per determinare le condizioni iniziali dalle quali il circuito parte all'istante $t = 0$ occorre conoscere i valori di $v_C(0)$ e di $i_L(0)$ e quindi risolvere la rete per $t < 0$. Utilizzando il metodo fasoriale si ha immediatamente il fasore della tensione sul condensatore.

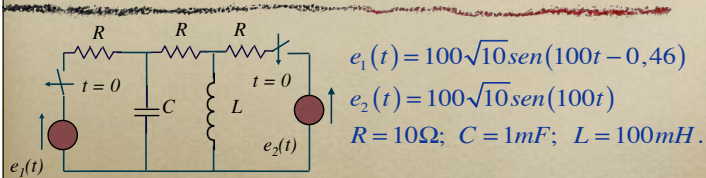
Un esempio



$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}_1}{R + \frac{-jX_C(R + jX_L)}{R + j(X_L - X_C)}} \frac{-jX_C}{R + j(X_L - X_C)}$$

E della corrente nell'induttore.

Esempio

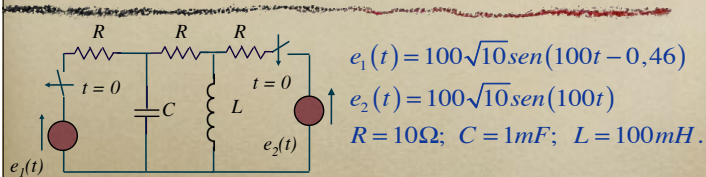


$$\bar{V}_C = \bar{E}_1 \frac{1-j}{2-j} = 100(1-j)$$

$$\bar{I}_L = \frac{-j\bar{E}_1}{10} \frac{1}{2-j} = -j10$$

Introducendo i valori dei parametri si ottengono le seguenti espressioni.

Un esempio

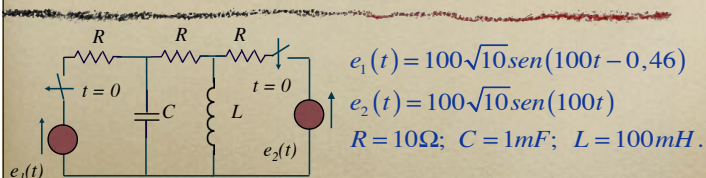


$$v_C(t) = 200\text{sen}(100t - \pi/4)$$

$$i_L(t) = 10\sqrt{2}\text{sen}(100t - \pi/2)$$

E quindi le relative funzioni del tempo.

Un esempio

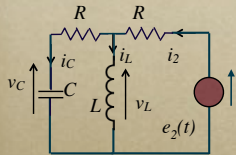


$$v_C(0) = 200\text{sen}(-\pi/4) = -100\sqrt{2} = -141.42$$

$$i_L(0) = 10\sqrt{2}\text{sen}(-\pi/2) = -10\sqrt{2} = -14.14$$

Che vanno valutate in $t=0$.

Un esempio



$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$e_2(t) = Ri_2 + L \frac{di_L}{dt}$$

$$L \frac{di_L}{dt} = Ri_C + v_C$$

$$i_2 = i_L + i_C$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

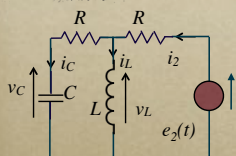
$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

$$v(t) = Ri$$

Per determinare l'evoluzione per $t > 0$ applichiamo la LCK e la LTK al circuito nella sua configurazione finale: due equazioni alle maglie e una equazione ai nodi. Inoltre, le caratteristiche dei bipoli della rete.

In primo luogo eliminiamo i_2 utilizzando la terza equazione.

Un esempio



$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$e_2(t) = R(i_L + i_C) + L \frac{di_L}{dt}$$

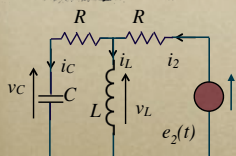
$$L \frac{di_L}{dt} = Ri_C + v_C$$

$$\frac{de_2}{dt} = R \left(\frac{di_L}{dt} + \frac{di_C}{dt} \right) + L \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$L \frac{di_L}{dt} = Ri_C + v_C$$

Deriviamo la prima equazione.

Un esempio



$$\frac{de_2}{dt} = R \left(\frac{di_L}{dt} + \frac{di_C}{dt} \right) + L \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

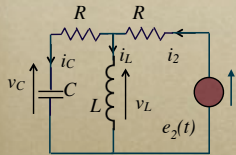
$$L \frac{di_L}{dt} = Ri_C + v_C$$

$$\frac{de_2}{dt} = R \left(\frac{Ri_C + v_C}{L} + \frac{di_C}{dt} \right) + L \frac{d}{dt} \left[\frac{Ri_C + v_C}{L} \right]$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$$

E facciamo scomparire la derivata di i_L nella prima.

Un esempio



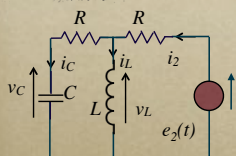
$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$\frac{dv_C^2}{dt^2} + \left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right) \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{2} \frac{v_C}{LC} = \frac{1}{2RC} \frac{de_2}{dt}$$

Riordinando si ricava l'equazione risolvente nella tensione sul condensatore.

Come ci aspettavamo è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea (si noti che l'ordine dell'equazione è uguale al numero di bipoli a memoria presenti nella rete).

Un esempio

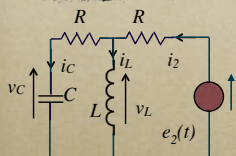


$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 100\alpha + 5 \cdot 10^3 &= 0 \\ \alpha_r + j\beta &= -50 \pm j50 \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico associato ha radici complesse coniugate.

Un esempio

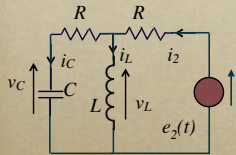


$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$v_{C0}(t) = Ae^{-50t} \sin(50t + \gamma)$$

E quindi l'integrale generale dell'omogenea associata e del tipo oscillatorio smorzato.

Un esempio

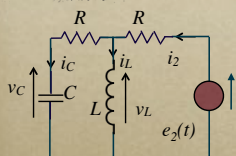


$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{Cp} = \frac{\bar{E}_2}{R + \frac{jX_L(R - jX_C)}{R + j(X_L - X_C)}} \frac{jX_L(-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)}$$

Resta da calcolare la soluzione di regime che si trova facilmente con il metodo fasoriale.

Un esempio



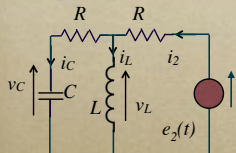
$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{Cp} = \frac{\bar{E}_2}{2 + j} = \frac{100}{\sqrt{5}}(2 - j)$$

$$v_{Cp}(t) = 100\sqrt{2}\sin(100t - 0,46)$$

Inserendo i valori e ritornando nel dominio del tempo si ottiene la soluzione di regime.

Un esempio

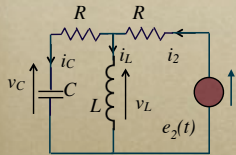


$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$v_C(t) = Ae^{-50t}\sin(50t + \gamma) + 100\sqrt{2}\sin(100t - 0,46)$$

Abbiamo così ottenuto l'integrale generale della completa. Per determinare le costanti A e γ occorre sfruttare le condizioni iniziali.

Un esempio



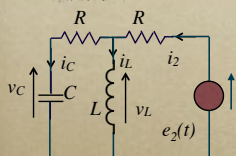
$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$v_C(0) = A\sin\gamma - 100\sqrt{2}\sin(0,46) = -100\sqrt{2}$$

$$A\sin\gamma = 100\sqrt{2}\sin(0,46) - 100\sqrt{2} = -0,55 \cdot 100\sqrt{2}$$

La prima è data direttamente sulla tensione del condensatore.

Un esempio



$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$e_2|_{t=0} = Ri_2|_{t=0} + L \frac{di_L}{dt}|_{t=0}$$

$$L \frac{di_L}{dt}|_{t=0} = Ri_C|_{t=0} + v_C|_{t=0}$$

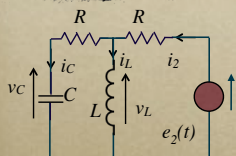
$$i_2|_{t=0} = i_L|_{t=0} + i_C|_{t=0}$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

Per la seconda basta scrivere la LKC e la LKT all'istante iniziale.

Un esempio



$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$e_2|_{t=0} = Ri_2|_{t=0} + L \frac{di_L}{dt}|_{t=0}$$

$$L \frac{di_L}{dt}|_{t=0} = Ri_C|_{t=0} + v_C|_{t=0}$$

$$i_2|_{t=0} = i_L|_{t=0} + i_C|_{t=0}$$

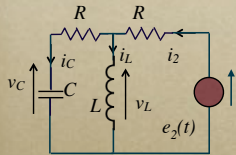
$$e_2|_{t=0} = Ri_2|_{t=0} + Ri_C|_{t=0} + v_C|_{t=0}$$

$$e_2|_{t=0} = Ri_L|_{t=0} + 2Ri_C|_{t=0} + v_C|_{t=0}$$

$$i_C|_{t=0} = \frac{e_2|_{t=0} - Ri_L|_{t=0} - v_C|_{t=0}}{2R}$$

Sottraendo infatti la seconda equazione, valutata all'istante zero, dalla prima, si ottiene una relazione da cui è facile ricavare il valore della corrente nel condensatore all'istante iniziale in funzione di tutte grandezze note.

Un esempio



$$e_1(t) = 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46)$$

$$e_2(t) = 100\sqrt{10}\sin(100t)$$

$$R = 10\Omega; C = 1\text{mF}; L = 100\text{mH}.$$

$$v_C(0) = A\sin\gamma - 100\sqrt{2}\sin(0,46) = -100\sqrt{2}$$

$$i_C|_{t=0} = C \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{e_2|_{t=0} - Ri_L|_{t=0} - v_C|_{t=0}}{2R} = -10\sqrt{2}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{e_2|_{t=0} - Ri_L|_{t=0} - v_C|_{t=0}}{2RC} = 10^4\sqrt{2} \quad \leftarrow$$

E quindi quello della derivata della tensione: cioè la condizione iniziale sulla derivata della tensione.

Le Condizioni Iniziali

$$v_C(t) = Ae^{-50t}\sin(50t + \gamma) + 100\sqrt{2}\sin(100t - 0,46)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -50Ae^{-50t}\sin(50t + \gamma) + 50Ae^{-50t}\cos(50t + \gamma) + 10^4\sqrt{2}\cos(100t - 0,46)$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = -50A\sin\gamma + 50A\cos\gamma + 10^4\sqrt{2}\cos(0,46)$$

A questo punto basta determinare l'espressione della derivata della nostra soluzione in $t=0$ ed eguagliarla alla condizione iniziale trovata.

Le Condizioni Iniziali

$$A\sin\gamma = -0,55 \cdot 100\sqrt{2}$$

$$-50A\sin\gamma + 50A\cos\gamma + 10^4\sqrt{2}\cos(0,46) = 10^4\sqrt{2} \quad \leftarrow$$

$$A\sin\gamma - A\cos\gamma = 2 \cdot 10^2\sqrt{2}(\cos(0,46) - 1) = -0,2 \cdot 10^2\sqrt{2}$$

$$A\cos\gamma = -0,35 \cdot 10^2\sqrt{2}$$

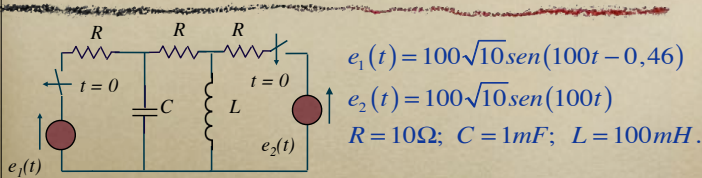
$$\tan\gamma = 1,57$$

$$\sin\gamma = 0,12$$

$$A = -0,35 \cdot 100\sqrt{2}$$

In conclusioni le due equazioni che ci consentono di ricavare A e γ : la prima che viene dal valore di v_C all'istante 0 e la seconda dal valore della sua derivata sempre all'istante zero. Eliminando $A\sin\gamma$ si ricava $A\cos\gamma$ e quindi $\tan\gamma$ come rapporto. Invertendo si ottiene γ e quindi A.

Un esempio



$$e_1(t) = 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46)$$

$$e_2(t) = 100\sqrt{10}\sin(100t)$$

$$R = 10\Omega; C = 1mF; L = 100mH.$$

$$A = -0,65 \cdot 100\sqrt{2}$$

$$\gamma = 1$$

$$v_C(t) = -65\sqrt{2}e^{-50t}\sin(50t + 1) + 100\sqrt{2}\sin(100t - 0,46)$$

Una semplice verifica

$$v_C(0) = -65\sqrt{2}\sin(1) - 100\sqrt{2}\sin(0,46)$$

In definitiva la soluzione del nostro problema. Si può facilmente verificare che il valore iniziale della tensione sul condensatore sia quello richiesto.

Condensatore ed induttore



$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = v(t - \Delta t) + \frac{i(t)}{C} \Delta t$$

$$v(t) = k_0 + R_C i(t)$$



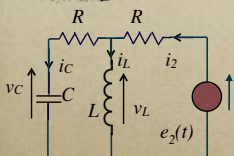
$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = i(t - \Delta t) + \frac{v(t)}{L} \Delta t$$

$$i(t) = k_0 + G_L v(t)$$

Eliminiamo ora il vincolo del regime stazionario. Dovremo introdurre i bipoli a memoria. Consideriamo la caratteristica di tali bipoli in forma discreta: il condensatore ci appare avere una caratteristica che potremmo assimilare a quella di un generatore di tensione di valore $k_0 = v(t - \Delta t)$ con una resistenza in serie pari a $\Delta t / C$ - si ricordi che abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore. Analogamente l'induttore ci appare come un generatore di corrente $i(t - \Delta t)$ con una conduttanza in parallelo pari $\Delta t / L$.

Un esempio



$$e_1(t) = 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46)$$

$$e_2(t) = 100\sqrt{10}\sin(100t)$$

$$R = 10\Omega; C = 1mF; L = 100mH.$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

$$e_2|_{t=0} = Ri_2|_{t=0} + L \frac{di_L}{dt}|_{t=0}$$

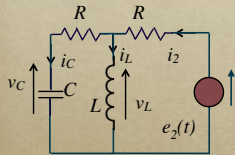
$$L \frac{di_L}{dt}|_{t=0} = Ri_C|_{t=0} + v_C|_{t=0}$$

$$i_2|_{t=0} = i_L|_{t=0} + i_C|_{t=0}$$

In altri termini in ogni istante la caratteristica di questi bipoli ci appare trattabile con le nozioni che abbiamo introdotto, a condizione di conoscere le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori nell'istante precedente. Del resto se per esempio in uno degli esempi che abbiamo trattato inseriamo le caratteristiche in forma discretizzata...

otteniamo le equazioni mostrate dove

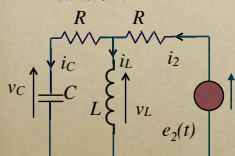
Un esempio



$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2(t) &= Ri_2(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} - L \frac{di_L(t-\Delta t)}{\Delta t} \\ L \frac{di_L(t)}{dt} - L \frac{di_L(t-\Delta t)}{\Delta t} &= R \left[C \frac{dv_C(t)}{dt} - C \frac{dv_C(t-\Delta t)}{\Delta t} \right] + v_C(t) \\ i_2(t) &= i_L(t) + \left[C \frac{dv_C(t)}{dt} - C \frac{dv_C(t-\Delta t)}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

Un esempio

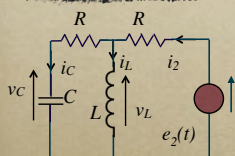


$$\begin{aligned} e_1(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t - 0,46) \\ e_2(t) &= 100\sqrt{10}\sin(100t) \\ R &= 10\Omega; \quad C = 1\text{mF}; \quad L = 100\text{mH}. \end{aligned}$$

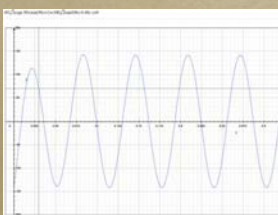
$$\begin{aligned} e_2(t) &= Ri_2(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} - L \frac{di_L(t-\Delta t)}{\Delta t} \\ L \frac{di_L(t)}{dt} - L \frac{di_L(t-\Delta t)}{\Delta t} &= R \left[C \frac{dv_C(t)}{dt} - C \frac{dv_C(t-\Delta t)}{\Delta t} \right] + v_C(t) \\ i_2(t) &= i_L(t) + \left[C \frac{dv_C(t)}{dt} - C \frac{dv_C(t-\Delta t)}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

I termini riquadrati in rosso sono noti, mentre quelli cerchiati sono incogniti: è facile verificare che tali incognite sono solo 3, cioè quante sono le equazioni.

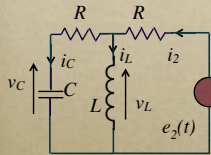
Un esempio



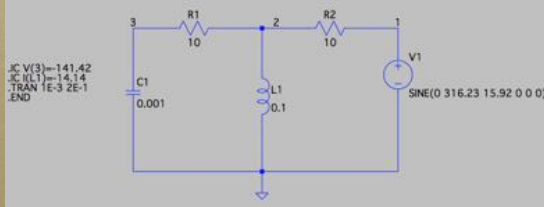
$$\begin{aligned} v_C(t) &= -65\sqrt{2}e^{-50t}\sin(50t+1) + \\ &+ 100\sqrt{2}\sin(100t - 0,46) \end{aligned}$$



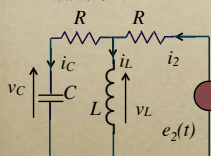
Un esempio



$$v_C(t) = -65\sqrt{2}e^{-50t}\sin(50t+1) + 100\sqrt{2}\sin(100t-0,46)$$



Un esempio

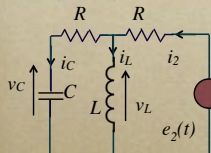


$$v_C(t) = -65\sqrt{2}e^{-50t}\sin(50t+1) + 100\sqrt{2}\sin(100t-0,46)$$

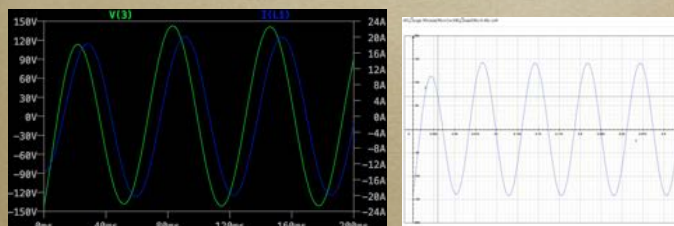
```

Esercizio n.21.net
* /Users/LucianoDemenna/Desktop/LT Spice Mat/Dati LTSpice/Esercizio
n.21.asc
V1 1 0 SINE(0 316.23 15.92 0 0 0)
R1 2 3 10
R2 1 2 10
C1 3 0 0.001
L1 2 0 0.1
.IC V(3)=-141.42
.IC I(L1)=-14.14
.TRAN 1E-3 2E-1
.END
.backanno
.end
    
```

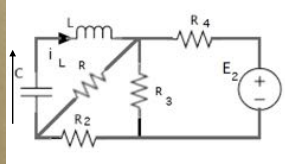
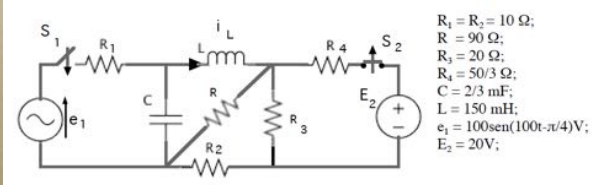
Un esempio



$$v_C(t) = -65\sqrt{2}e^{-50t}\sin(50t+1) + 100\sqrt{2}\sin(100t-0,46)$$



Un altro esempio



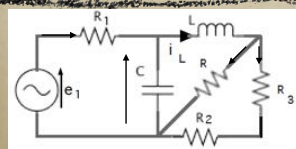
$$i_L(0) = 0$$

$$v_C(0) = \frac{E_2}{R_4 + \frac{R_3(R+R_2)}{R_3+R+R_2}} \frac{R_3R}{R_3+R+R_2} = 9V$$

$$i_L(0) = 0A$$

$$v_C(0) = 9V$$

Un altro esempio



$$e_1 = R_1(i_L + i_C) + v_C$$

$$v_C = L \frac{di_L}{dt} + Ri$$

$$Ri = (R_3 + R_2)(i_L - i)$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

Le equazioni che reggono il circuito sono:

$$e_1 = R_1 i_1 + v_C \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$v_C = L \frac{di_L}{dt} + Ri \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$Ri = (R_3 + R_2) i_2$$

$$i_1 = i_L + i_C$$

$$i_L = i + i_2$$

Eliminando ancora i dalla terza ed i_C dalla caratteristica del condensatore, si ottiene:

$$e_1 = R_1(i_L + C \frac{dv_C}{dt}) + v_C$$

$$v_C = L \frac{di_L}{dt} + R \frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} i_L$$

$$i_L(0) = 0A$$

$$v_C(0) = 9V$$

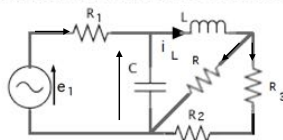
Un altro esempio

Nella prima equazione compaiono sia v_C che la sua derivata, che possono entrambe essere ottenute dalla seconda equazione e dalla sua derivata.

$$\frac{dv_C}{dt} = L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} \frac{di_L}{dt}$$

In conclusione

$$e_1 = R_1 \left[i_L + C \left(L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} \frac{di_L}{dt} \right) \right] + L \frac{di_L}{dt} + R \frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} i_L$$



$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left[\frac{R}{L} \frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} + \frac{1}{R_1 C} \right] \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{R_1 C L} \left(\frac{R(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} + R_1 \right) i_L = \frac{e_1}{R_1 C L}$$

Che porta all'equazione omogenea:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 300 \frac{di_L}{dt} + 32500 i_L = 0$$

$$i_L(0) = 0A$$

$$v_C(0) = 9V$$

Un altro esempio

$$i_L(t) = 2.66 \sin(100t - 1.72)$$

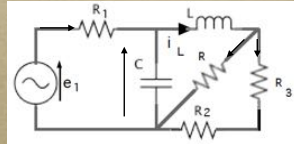
Passando ai fasori si vede immediatamente che la corrente erogata dal generatore e_1 a regime è data da

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z} = \frac{\bar{E}_1}{R_1 + \frac{-jX_C(jX_L + R_0)}{jX_L + R_0 - jX_C}} \quad \text{con} \quad R_0 = \frac{R(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} = \frac{90}{4}$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}_1}{R_1 + \frac{-jX_C(jX_L + R_0)}{jX_L + R_0 - jX_C}} \cdot \frac{-jX_C}{jX_L + R_0 - jX_C}$$

E inserendo i valori numerici:

$$\bar{I}_L = \frac{40}{9\sqrt{2}} \frac{e^{-j35/4}}{\left(\frac{4}{3} - j\right)} = \frac{8}{3\sqrt{2}} e^{-j3.72}$$



$$i_L(0) = 0A$$

$$v_C(0) = 9V$$

Un altro esempio

La prima condizione iniziale è direttamente sulla corrente nell'induttore e quindi di facile utilizzo:

$$A \sin \varphi - 2.66 \sin(1.72) = 0$$

Per determinare la condizione sulla derivata della corrente occorre riandare alle equazioni di Kirchhoff valutate all'istante 0; si ottiene facilmente:

$$v_C(0) = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} + R \frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} i_L(0)$$

Da cui:

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{v_C(0)}{L} = 60$$

$$i_L(0) = 0A$$

$$v_C(0) = 9V$$

Un altro esempio

E quindi:

$$A \sin \varphi = 2.66 \sin(1.72)$$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = 266 \cos(1.72) - 150 A \sin \varphi + 100 A \cos \varphi = 60$$

$$\tan \varphi = \frac{2.66 \sin(1.72)}{0.6 - 2.66 \cos(1.72) + 3.99 \sin(1.72)} = 0.53$$

$$A = \frac{2.66 \sin(1.72)}{\sin \varphi} = 5.60$$

Per cui la soluzione cercata è:

$$i_L(t) = 5.60 e^{-150t} \sin(100t + 0.49) + 2.66 \sin(100t - 1.72)$$

$$i_L(0) = 0A$$

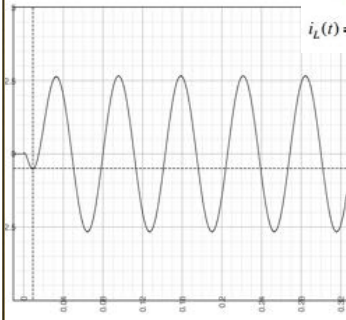
$$v_C(0) = 9V$$

Un altro esempio

$$5.60 \exp(-150t) \sin(100t + 0.49) + 2.66 \sin(100t - 1.72), t > 0$$

Per cui la soluzione cercata è:

$$i_L(t) = 5.60e^{-150t} \sin(100t + 0.49) + 2.66 \sin(100t - 1.72)$$

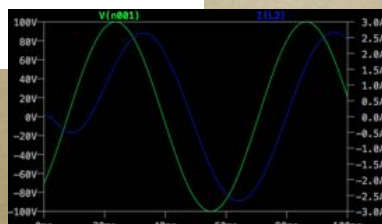


$$i_L(0) = 0A$$

$$v_C(0) = 9V$$

Un altro esempio

```
* /Users/lucianodemenna/Desktop/Es ICE16L15 n.2.asc
V1 N001 0 SINE(0 100 15.92 0 0 -45)
R1 1 N001 10
R3 2 N002 20
R2 N002 0 10
R4 2 0 90
C1 1 0 0.66mF
L2 1 2 0.150
.IC V(1)=9
.IC I(L2)=0
.TRAN 0 0.1
.backanno
.end
```



Riepilogo della Lezione

Potenze in regime sinusoidale;

Potenza attiva e reattiva;

Strumenti di misura in a.c.;

Esercizi

Dinamica dei circuiti di ordine superiore;

La soluzione nel dominio del tempo;

Un esempio;