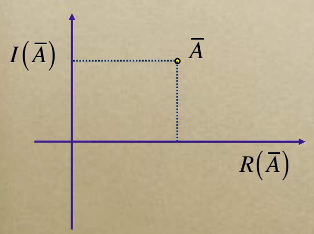
Lezione 14

Vettori rotanti



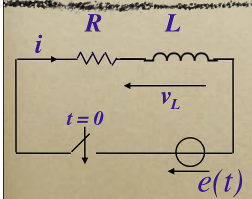
Piano di Gauss

$$\bar{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jA sen(\omega t+\alpha)$$

VettoriRotanti

Prima di procedere oltre, facciamo vedere perché il termine "fasori". La parte reale ed il coefficiente dell'immaginario delle grandezze Ā variano nel tempo con legge sinusoidale, mentre il modulo di Ā resta costante nel tempo. Di conseguenza nel piano di Gauss il punto rappresentativo della funzione complessa di variabile reale Ā si muove lungo una circonferenza. Se consideriamo un vettore che congiunge l'origine delle coordinate con il punto rappresentativo di Ā, potremo dire che le grandezze in esame sono rappresentate da vettori rotanti nel piano di Gauss: perciò il termine "fasori".

RL con forzamento sinusoidale



$$e(t) = E_M sen(\omega t+\eta)$$

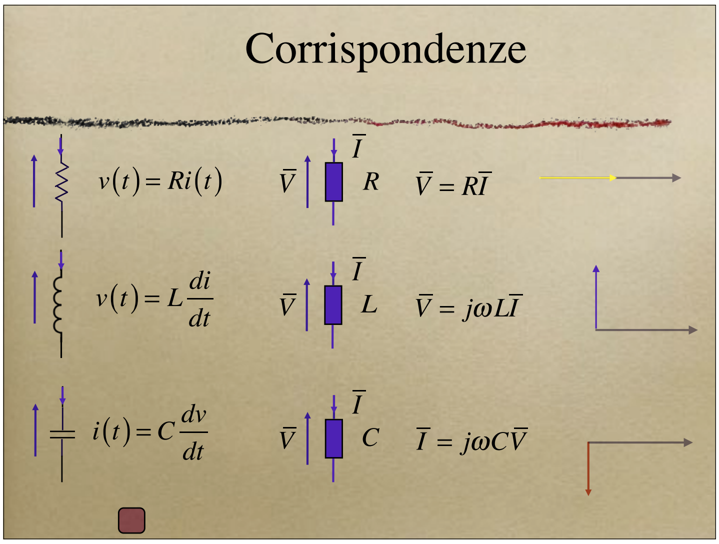
$$I_M = \frac{E_M}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \qquad \varphi = arctg\frac{\omega L}{R}$$

$$i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + I_M sen(\omega t+\eta-\varphi)$$

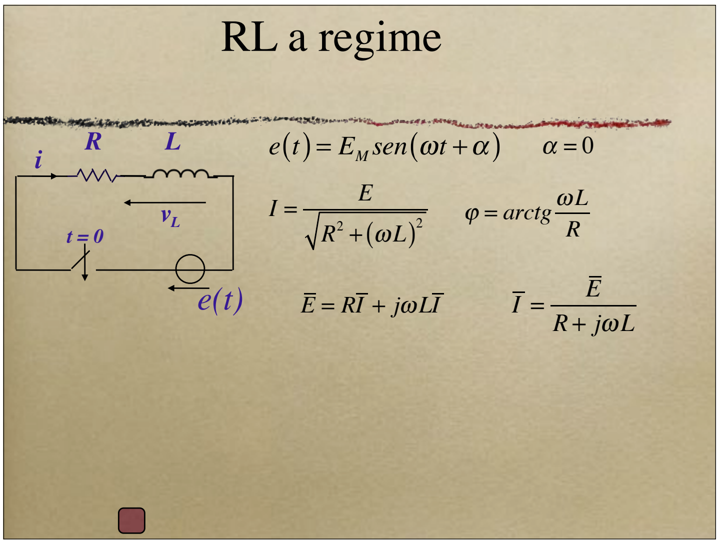
$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R+j\omega L} \Rightarrow I = \frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}; \qquad \eta - arctg\frac{\omega L}{R} = \eta - \varphi$$

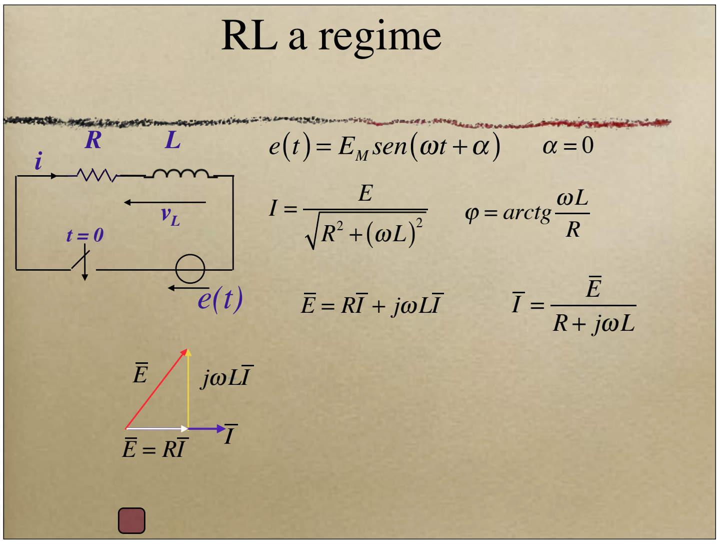
Proviamo ad applicare il metodo dei fasori al circuito RL serie già risolto in precedenza. Si scrive l'equazione all'unica maglia presente in termini di fasori. Con facili passaggi si ricava immediatamente il fasore della corrente. Il modulo del numero complesso rappresentativo della corrente è, dunque, il rapporto tra il modulo del fasore di e(t) e del numero complesso R + jωL e la sua fase è la differenza tra le fasi del numeratore e del denominatore. I risultati sono in perfetto accordo, se si tiene conto della relazione tra valor massimo e valor efficace di una funzione sinusoidale, con i risultati già trovati.



Come si vede, la tecnica che abbiamo costruito semplifica notevolmente tutte le operazioni. In pratica, per un circuito in regime sinusoidale, basterà scrivere direttamente le equazioni relative alla LKC ed alla LKT in termini di fasori, esprimendo anche le caratteristiche dei bipoli presenti nella rete come relazioni tra fasori, così come mostrato nelle immagini. Il rapporto tra i due fasori rappresentativi della tensione e della corrente prende il nome di impedenza e verrà indicato d'ora in poi con il simbolo Z.

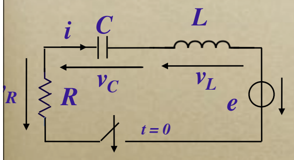


L'impedenza è dunque un numero complesso; la sua parte reale conserva il nome di resistenza, mentre il coefficiente della parte immaginaria è detto reattanza. Si noti che, coerentemente alle definizioni date, si può affermare che l'impedenza caratteristica di un induttore è pari a jX=jωL e che la sua reattanza è X=ωL, positiva per definizione. Un condensatore invece presenterà una impedenza –jX=–j/ωC, ed una reattanza X=1/ωC. Infine chiameremo ammettenza l'inverso di una impedenza. Anche l'ammettenza è dunque un numero complesso la cui parte reale è una conduttanza mentre il coefficiente dell'immaginario prende il nome di suscettanza.



Nella figura è rappresentato anche il diagramma fasoriate del circuito in esame. Si parte dal fasore della corrente e da quello della caduta sul resistore, che è proporzionale, e quindi in fase, alla corrente. Poi si disegna il favore della tensione sull'induttore, a 90° gradi in anticipo. Infine la congiungente l'origine con l'estremo della caduta induttiva rappresenta il fasore della tensione E.

Circuito R L C in evoluzione forzata



$$\frac{d^2 i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=\frac{1}{L}\frac{de}{dt}$$

$$i(t)=k_1e^{\alpha_1 t}+k_2e^{\alpha_2 t}+i_r$$

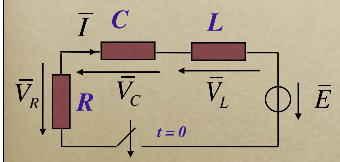
$$i_r=?$$

$$i(t)=k_1e^{\alpha t}+k_2te^{\alpha t}+i_r$$

$$i(t)=ke^{\alpha t}sen(\beta t+\phi)+i_r$$

Proviamo ad applicare il metodo dei fasori per calcolare la soluzione di regime in un caso più complesso: il circuito RLC serie con forzamento sinusoidale. La soluzione dell'omogenea associata è già nota; limitiamoci quindi a calcolare la soluzione a regime con il metodo dei fasori.

Circuito R L C in evoluzione forzata



$$e(t)=E_M sen(\omega t+\alpha_0)$$

$$i_r(t)=I_M sen(\omega t+\alpha_0-\varphi)$$

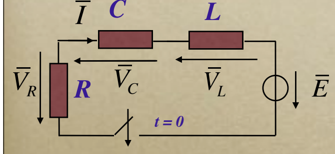
$$\bar{E}=Ee^{j(\omega t+\alpha_0)}$$

$$\bar{E}=R\bar{I}+j\omega L\bar{I}-j\frac{1}{\omega C}\bar{I} \qquad \bar{I}=Ie^{j(\omega t+\alpha_0-\varphi)}$$

$$\bar{I}=\frac{\bar{E}}{R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}}$$

Dall''equazione alla maglia scritta in termini fasoriali si ricava immediatamente, con semplici passaggi algebrici, il fasore della corrente.

Circuito R L C in evoluzione forzata



$$\bar{E}=R\bar{I}+j\omega L\bar{I}-j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

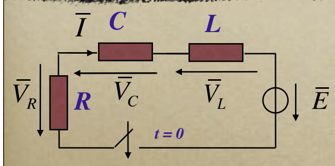
$$\bar{I}=\frac{\bar{E}}{R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}}$$

$$i_r(t)=\sqrt{2}\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}sen(\omega t+\alpha_0-\varphi)$$

$$\varphi=arctg\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

E quindi il valore massimo della i e la sua fase iniziale.

Circuito R L C in evoluzione forzata



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L}\frac{de}{dt}$$

$$i(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} + i_r$$

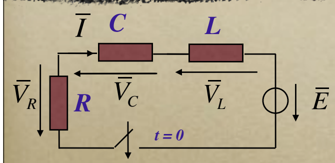
$$i(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t} + i_r$$

$$i(t) = k e^{\alpha t} sen(\beta t + \phi) + i_r$$

$$i_r(t) = \sqrt{2}\frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} sen(\omega t + \alpha_0 - \varphi)$$

Da cui l'integrale generale della completa.

Impedenza



$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

$$\bar{E} = Z\bar{I}$$

Impedenza *Z*

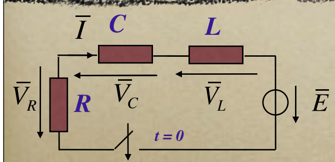
$$Z = R + jX$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

***R* = resistenza**
***X* = reattanza**

In conclusione, la soluzione nel regime sinusoidale si trova facilmente se si introduce il concetto di impedenza: un numero complesso la cui parte reale chiameremo resistenza e quella immaginaria reattanza. In termini fasoriali l'impedenza gioca lo stesso ruolo che in continua giocava la sola resistenza.

Ammettenza



$$\bar{I} = Y\bar{E}$$

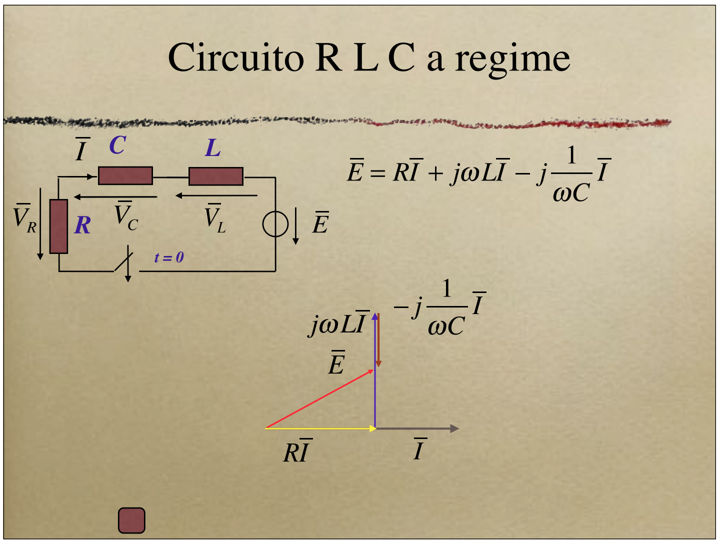
Ammettenza *Y*

$$Y = G + jS$$

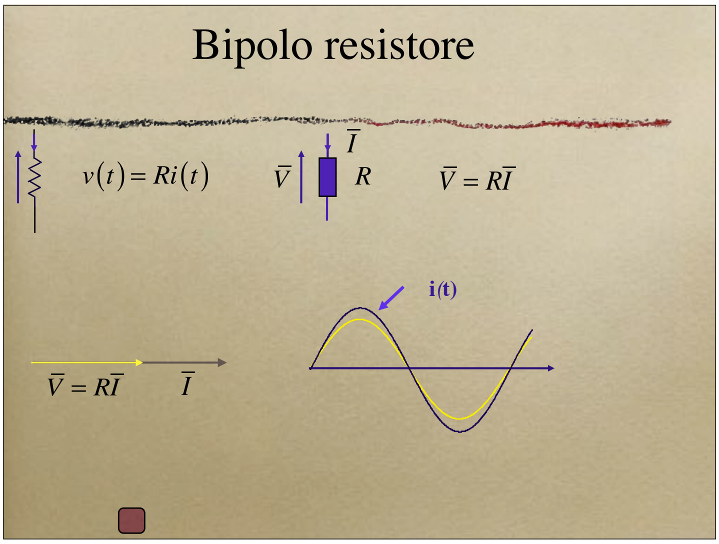
***G* = conduttanza**
***S* = suscettanza**

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad S = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

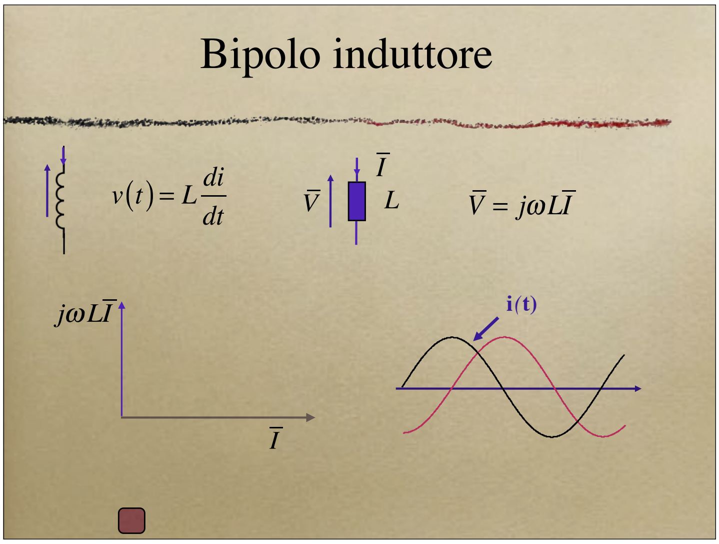
Invece della impedenza potremo utilizzare l'ammettenza, che giocherà lo stesso ruolo che in continua giocava la sola conduttanza.



Il diagramma fasoriale del circuito RLC si costruisce partendo dal fasore della corrente.



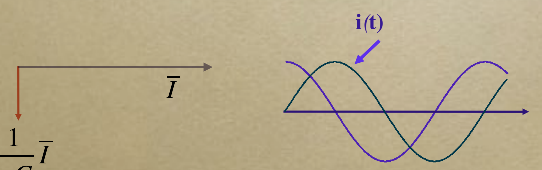
Riepiloghiamo le caratteristiche dei diversi componenti nei rispettivi ambiti: nel dominio del tempo, quello dei fasori e dei fasori come vettori. Aggiungiamo anche il grafico dell'andamento nel tempo di tensione e corrente. Si noti che le due sinusoidi sono in fase!



Per l'induttore! La tensione "anticipa" di π/2 rispetto alla corrente

Bipolo condensatore

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} \qquad \bar{I} = j\omega C\bar{V}$$



$$\bar{V} = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

E per il condensatore! La tensione “ritarda” di π/2 rispetto alla corrente.

Proprietà delle reti in regime sinusoidale

- Le proprietà delle reti dimostrate in regime continuo restano valide purché si usino i concetti di impedenza ed ammettenza al posto di quelli di resistenza e conduttanza.
- Fanno eccezione i teoremi di non amplificazione.
- Bisogna ricordare che impedenze ed ammettenze sono numeri complessi.

Con la sola eccezione dei teoremi di non amplificazione, tutte le proprietà dimostrate in regime continuo restano valide in regime sinusoidale, ma in termini di fasori.

Bisognerà, naturalmente, ricordare che i fasori e le impedenze o ammettenze sono numeri complessi, e quindi bisognerà operare di conseguenza.

Operazioni sui numeri complessi

In forma cartesiana

$$(a+jb)+(c+jd) = a+c+j(b+d)$$

$$(a+jb)(c+jd) = (ac-bd)+j(bc+ad)$$

$$\frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

Ricordiamo le operazioni fondamentali nella rappresentazione cartesiana.

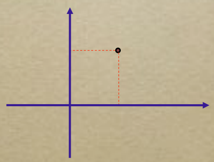
Operazioni sui numeri complessi

In forma polare

$$(a+jb)=Ae^{j\alpha}, \quad \text{con} \quad \mathrm{A}=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad tg\alpha=\frac{b}{a}$$

$$Ae^{j\alpha}Be^{j\beta}=ABe^{j(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}}=\frac{A}{B}e^{j(\alpha-\beta)}$$



Ed in quella polare.

Serie e parallelo di impedenze

Serie

$$Z=Z_1+Z_2 \qquad \mathrm{Y}=\frac{Y_1Y_2}{Y_1+Y_2}$$

Parallelo

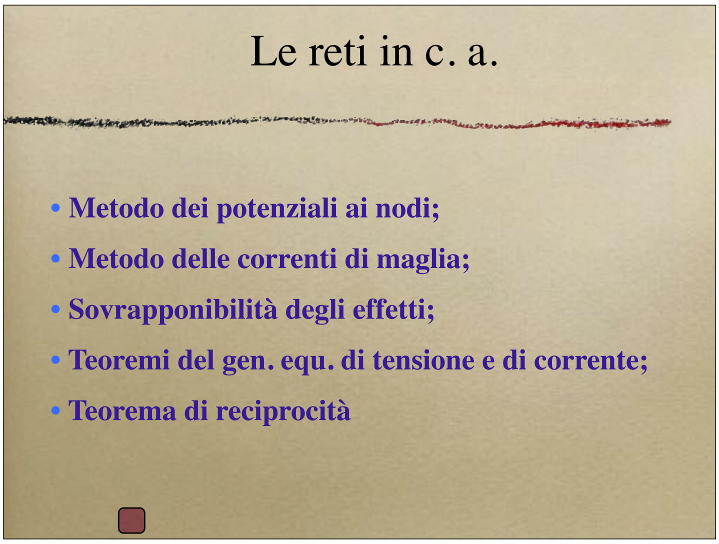
$$Z=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2} \qquad Y=Y_1+Y_2$$

Avremo dunque le formule per la serie ed il parallelo di due impedenze.

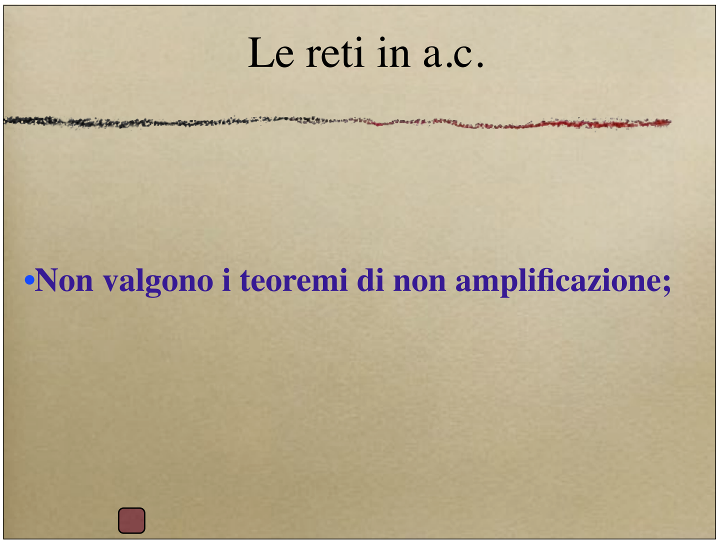
Le reti in c.a.

Tutte le proprietà delle reti valide per il regime continuo (o c.c.) restano valide anche nel regime sinusoidale (o c. a.)

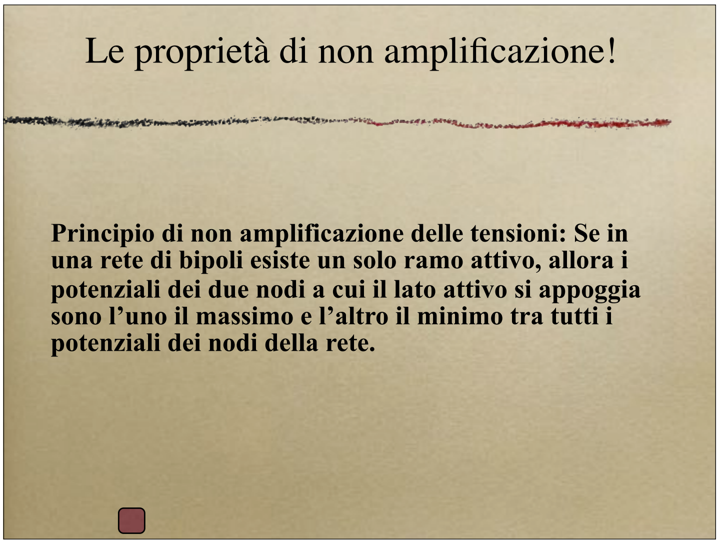
E naturalmente!



Potremo estendere quindi al campo dei fasori le diverse tecniche ed i teoremi studiati per il regime continuo.



Vediamo perché!



Ricordiamo le premesse dei teoremi in questione.

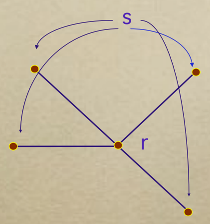
Non amplificazione delle tensioni

Se per un nodo r tutti i prodotti $V_{rs}\, I_{rs}$ delle tensioni e delle correnti che convergono nel nodo stesso - con le convenzioni implicite nell'ordine dei pedici - sono maggiori od eguali a zero, il potenziale di tale nodo non può essere né quello massimo né quello minimo tra i potenziali di tutti i nodi della rete.

E anche.

Non amplificazione delle tensioni

$$\sum_s \overline{I}_{rs} = 0$$



Ma in c.a., anche se tutti i bipoli sono passivi, non si può affermare che $v_{rs}(t)\, i_{rs}(t) \geq 0$ per ogni t!

Ma…

Le reti in a.c.

N-poli ed n-bipoli di impedenze.

Potremo definire N-poli ed n-bipoli di impedenze

Due porte

$$\bar{V}_1 = Z_{11}\bar{I}_1 + Z_{12}\bar{I}_2$$
$$\bar{V}_2 = Z_{21}\bar{I}_1 + Z_{22}\bar{I}_2$$

Matrice delle impedenze

E avremo quindi, per il doppio dipolo, la matrice delle Z…

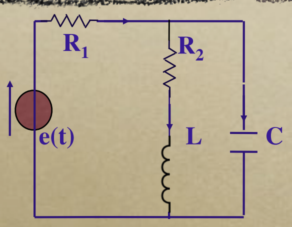
Due porte

$$\bar{I}_1 = Y_{11}\bar{V}_1 + Y_{12}\bar{V}_2$$
$$\bar{I}_2 = Y_{21}\bar{V}_1 + Y_{22}\bar{V}_2$$

Matrice delle ammettenze

e la matrice delle Y.

Un esempio

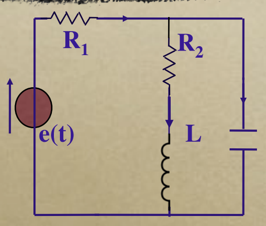


C = 1mF;
L = 50 mH;
R_1 = 10 Ω;
R_2 = 5Ω;

e(t) = 20√2 sen(100t).

Proviamo a fare un esempio: il circuito.

Un esempio

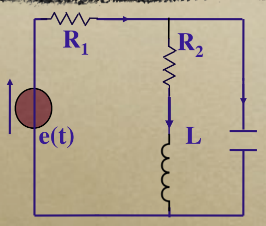


$$E = 20$$
$$X_L = \omega L = 5\Omega$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 10\Omega$$

- Due equazioni alle maglie;
- Una equazione ai nodi.

Le leggi di K.

Un esempio



$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \\ \bar{E} = R_1\bar{I}_1 + (R_2 + jX_L)\bar{I}_2 \\ (R_2 + jX_L)\bar{I}_2 = -jX_C\bar{I}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{E} = R_1(\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + (R_2 + jX_L)\bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 = \dfrac{R_2 + jX_L}{-jX_C}\bar{I}_2 \end{cases}$$

Le equazioni. Eliminando i_1 si riducono a due.

Un esempio

$$\bar{E} = \left[R_1 + R_2 - \frac{R_1X_L}{X_C} + j\left(X_L + \frac{R_1R_2}{X_C}\right)\right]\bar{I}_2$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{\left[R_1 + R_2 - \dfrac{R_1X_L}{X_C} + j\left(X_L + \dfrac{R_1R_2}{X_C}\right)\right]}$$

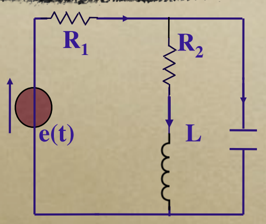
$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{10 + j10} = \frac{\bar{E}}{10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$E = 20$$
$$X_L = \omega L = 5\Omega$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 10\Omega$$

$$i_2(t) = 2\,\mathrm{sen}\left(100t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Eliminando poi i_3 si ottiene il fasore di i_2 e quindi il suo andamento temporale.

Un diverso modo



$$Z = R_1 + \frac{-jX_C\left(R_2 + jX_L\right)}{R_2 + j\left(X_L - X_C\right)}$$

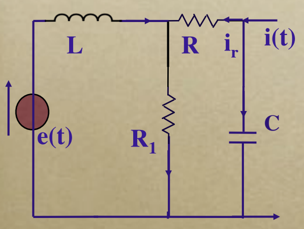
$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{Z}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{Z}\frac{-jX_C}{R_2 + j\left(X_L - X_C\right)}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{R_1 + R_2 - \frac{R_1X_L}{X_C} + j\left(X_L + \frac{R_1R_2}{X_C}\right)}$$

Avremmo anche potuto usare la riduzione ad un unica impedenza, vista dal generatore.

Un’altro esempio



i(t) = sen(1000 t-π/2).

e(t) = √2 sen(1000 t).

C = 0.5 mF;
L = 1 mH;
R_1 = 1 Ω;
R = 2 Ω;

Provate a sviluppare quest’altro esempio.

Riepilogo della Lezione

- **Ancora sul metodo simbolico;**
- **Fasori come vettori rotanti;**
- **Impedenza ed ammettenza;**
- **Esercizi.**