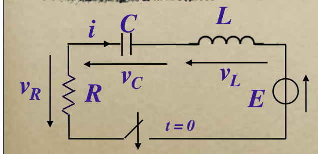
Lezione 13

Circuito R L C in evoluzione forzata



$$v_R + v_C + v_L = E$$

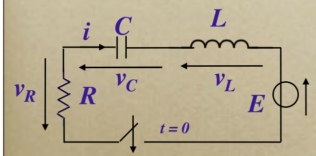
$$v_L = L\frac{di}{dt} \qquad i = C\frac{dv_C}{dt} \qquad v_R = Ri$$

$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + LC\frac{d^2v_C}{dt^2} = E$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Passiamo ora ad esaminare il caso del circuito RLC serie in presenza di un forzamento costante. È facile ricavare l'equazione nella incognita $v_{C.}$ Anche in questo caso essendo l'integrale generale della omogenea associata già noto, occorrerà determinare soltanto la soluzione particolare. Essendo il forzamento costante, è possibile utilizzare la stessa tecnica usata per l'equazione del primo ordine: si assume che la soluzione particolare sia una costante e si ricava immediatamente che v_{Cp}= $E_{0.}$ Si noti che in questo modo si è automaticamente scelto come soluzione particolare quella di regime. Utilizzeremo questa tecnica in seguito anche quando il forzamento non è più costante nel tempo; naturalmente la soluzione di regime non potrà essere costante ma dovrà ricalcare l'andamento del forzamento.

Circuito R L C in evoluzione forzata



$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

$$v_{C_r} = E$$

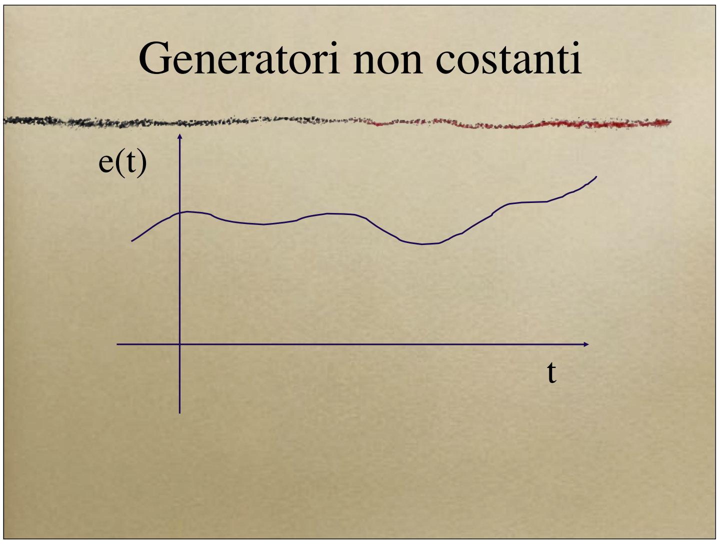
$$v_C(t) = k_1e^{\alpha_1 t} + k_2e^{\alpha_2 t} + E$$

$$v_C(t) = k_1e^{\alpha t} + k_2te^{\alpha t} + E$$

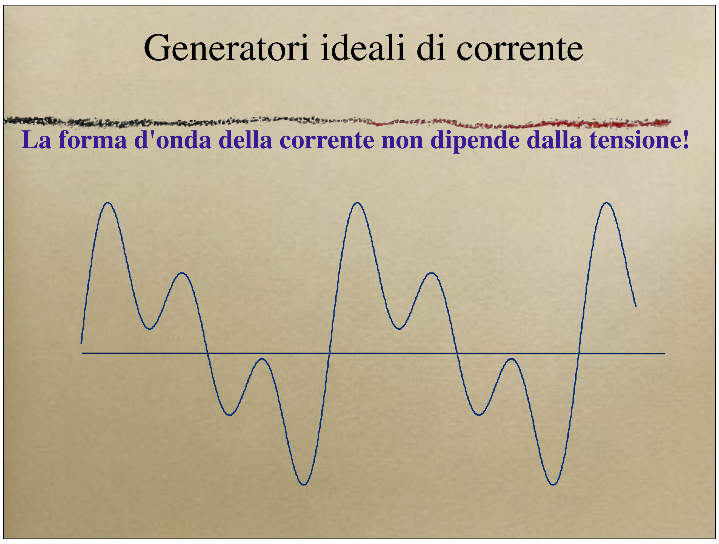
$$v_C(t) = ke^{\alpha t}sen(\beta t + \phi) + E$$

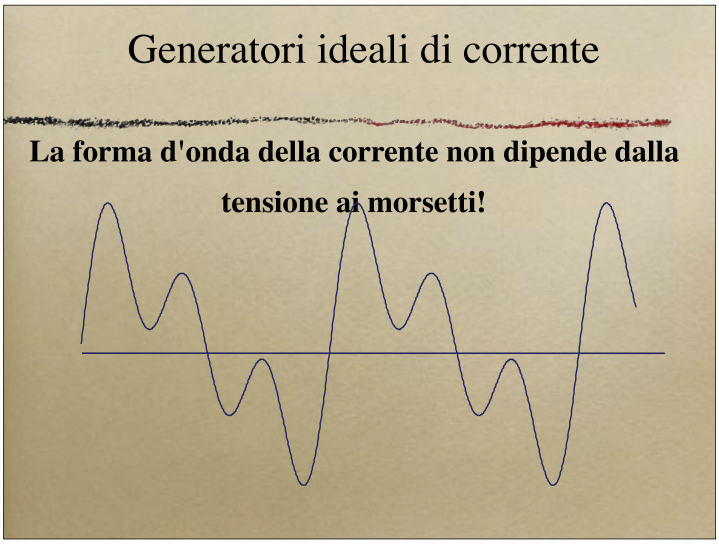
Es. II.4, II.5, II.6

Come nel caso dell'evoluzione libera avremo i tre casi possibili: aperiodico, o smorzato, o sopracritico – critico e oscillatorio, o subcritico. Evidentemente, le costanti k_1, k_2, k e ϕ sono da determinarsi utilizzando le condizioni iniziali.

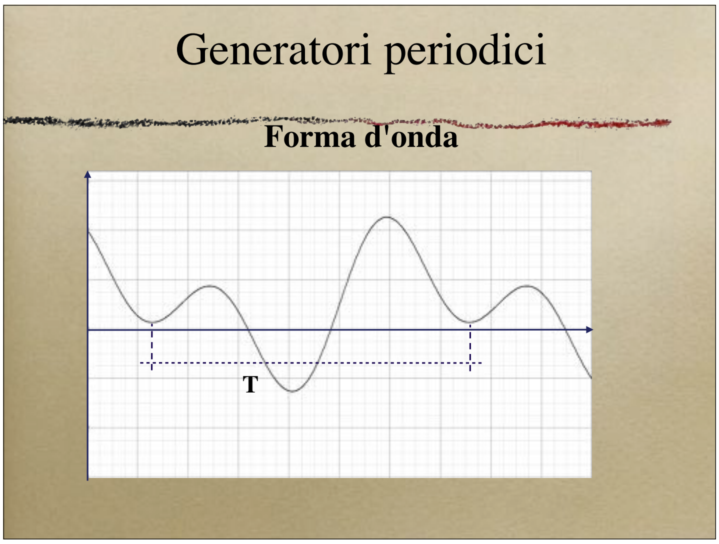


Fino a questo punto abbiamo preso in considerazione esclusivamente generatori di tensione e di corrente costanti. Essendo ora il nostro modello in grado di descrivere anche regimi dinamici, possiamo prendere in considerazione anche generatori di tensione e di corrente variabili nel tempo. Si tratterà sempre di generatori ideali nel senso che si assume che l'andamento nel tempo della grandezza erogata non dipenda in alcun modo dalle condizioni in cui il generatore lavora.

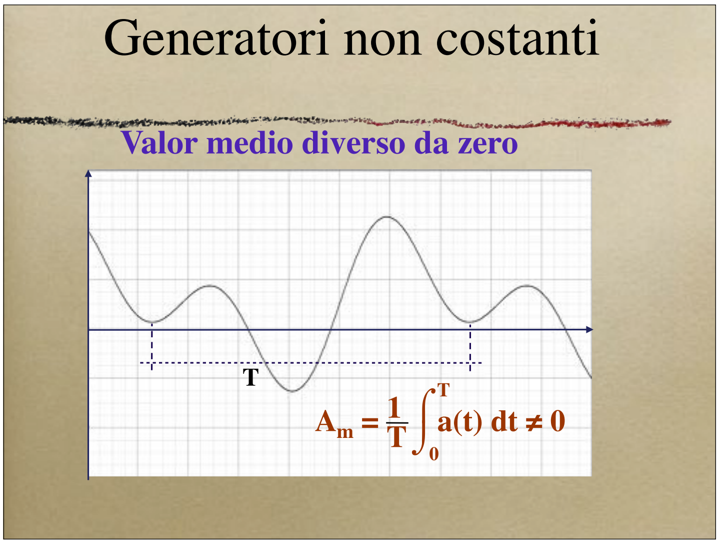




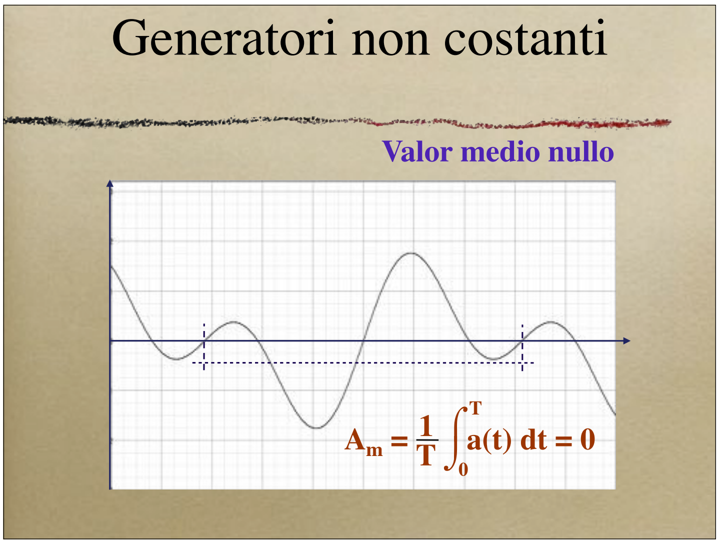
In un primo momento limiteremo la nostra attenzione ai generatori in grado di fornire forme d'onda periodiche, ed in particolare sinusoidali. I motivi per questa scelta sono diversi e proveremo ad illustrarne alcuni brevemente più avanti.



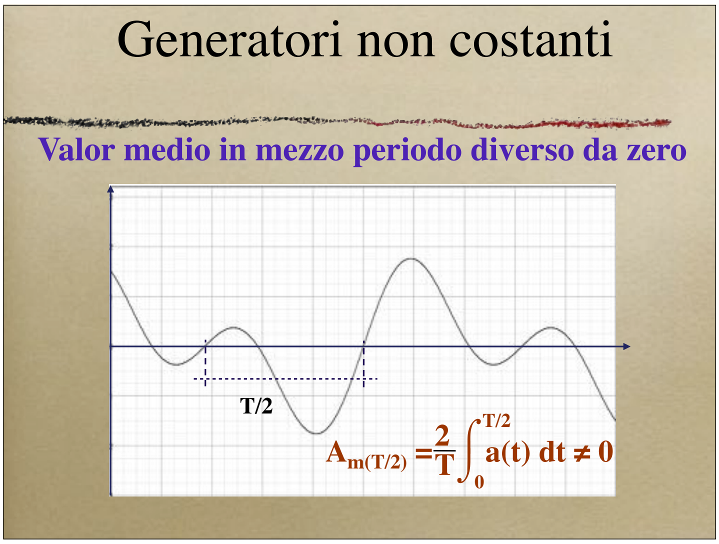
Per ora ricordiamo qualche definizione che ci sarà necessaria nel seguito. Una variazione temporale che si ripeta identicamente dopo un certo intervallo di tempo T viene detta periodica; l'intervallo T viene detto periodo della grandezza periodica. Nel periodo T la funzione periodica a(t) assumerà un massimo che indicheremo con il simbolo A_M.



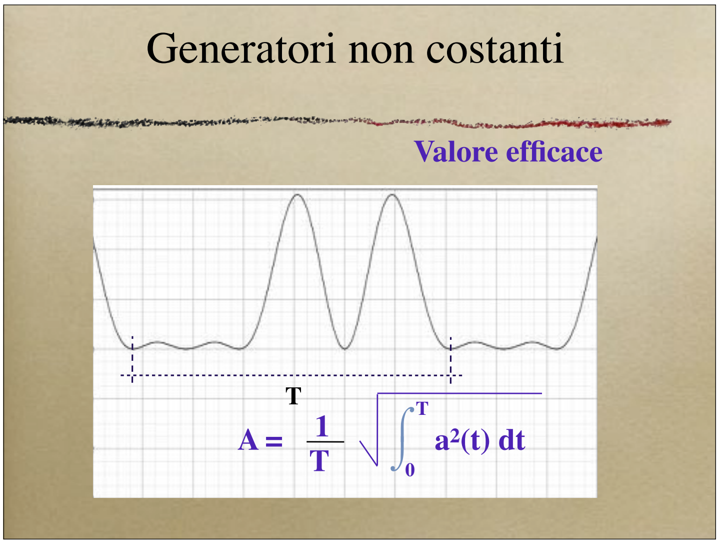
Definiremo ancora, per a(t), il valore medio in un periodo. In generale il valor medio di una funzione periodica non è nullo: l'area sottesa dalla funzione nella sua parte positiva non è eguale alla corrispondente area della sua parte negativa.



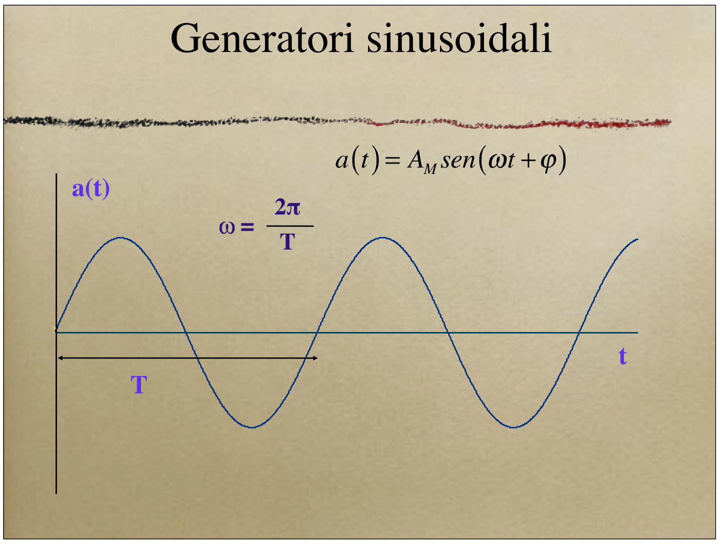
La condizione di valor medio nullo individua una particolare classe di funzioni periodiche.



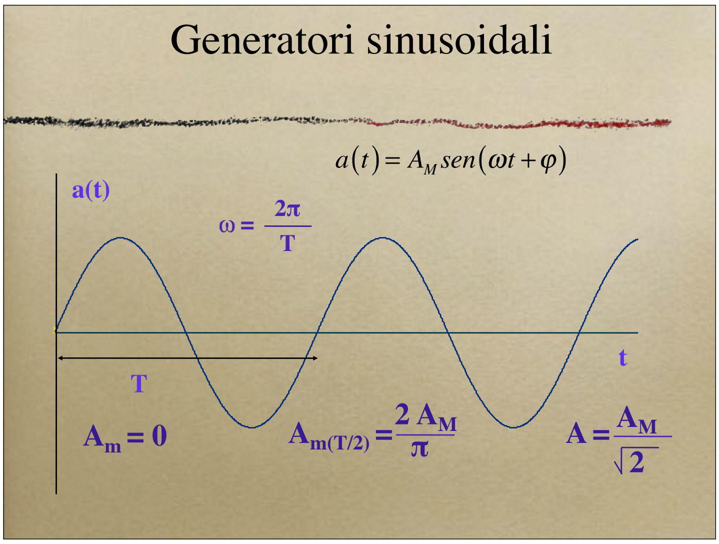
Per esse potrà essere utile a volte definire il valor medio in un semiperiodo.



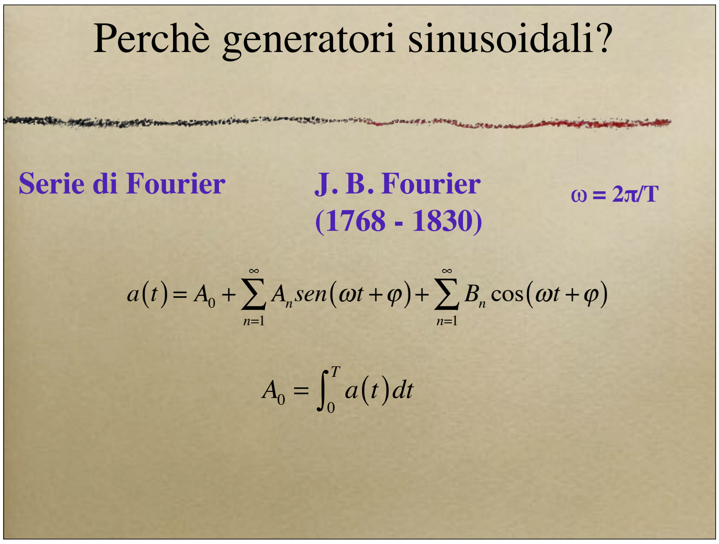
Più interessante è in questi casi il valore efficace definito come la radice quadrata del valore quadratico medio.



Particolari funzioni periodiche a valor medio nullo sono le ben note funzioni sinusoidali e cosinusoidali:



È facile verificare che il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari al suo valor massimo diviso la radice di 2 e che il suo valor medio in un semiperiodo è pari al valor massimo moltiplicato per 2/π. L'argomento della funzione sinusoidale viene detto fase istantanea della funzione stessa mentre ϕ prende il nome di fase iniziale.



Per le funzione periodiche si può dimostrare un'importante proprietà che prende il nome di sviluppo in serie di Fourier. Tale proprietà consente di porre una qualsiasi funzione periodica a(t) come somma di infiniti termini del tipo $A_n\sin(n\omega t)$ ed $B_n\cos(n\omega t)$, con n intero ed ω = 2π/T = frequenza angolare, o spesso, per brevità, solo frequenza. In realtà si preferisce conservare al termine frequenza il significato di inverso del periodo per cui f=1/T=ω/2π; da cui il nome di frequenza angolare per ω. Dalla formula dello sviluppo di Fourier si può facilmente calcolare che Il coefficiente A_0 è il valore medio della grandezza periodica.

Perchè generatori sinusoidali?

Serie di Fourier $\omega = 2\pi/T$

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen(\omega t + \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T a(t)\, sen n\omega t\, dt \qquad B_n = \frac{2}{T}\int_0^T a(t)\cos n\omega t\, dt$$

E che i coefficienti A_n e B_n sono, rispettivamente, le medie pesate secondo le funzioni seno e coseno della funzione periodica da sviluppare.

Un esempio

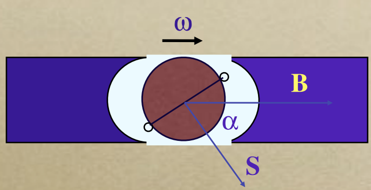
Serie di Fourier **Onda quadra**

$$a(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sen\left[(2n+1)\omega t\right]}{2n+1}$$

Fourier

Per la funzione rettangolare mostrata in figura, per esempio, lo sviluppo in serie è quello mostrato, come si può verificare con una semplice simulazione.
Se siamo in regime lineare, se cioè è valido il principio di sovrapposizione degli effetti, una volta noto il comportamento di un sistema quando in esso tutte le grandezze variano con legge sinusoidale, è possibile ricavare il comportamento del sistema, utilizzando appunto la sovrapposizione degli effetti, in condizioni di variabilità temporale diverse.

I generatori



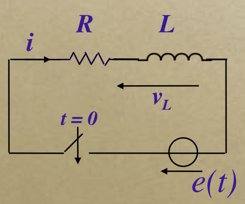
$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \Phi(t) = BS\cos\alpha \qquad \alpha = \omega t$$

$$e(t) = BS\omega sen\omega t = E_M sen\omega t$$

Un altro motivo che ci spinge a focalizzare la nostra attenzione sui generatori ideali di tipo sinusoidale, altrettanto importante, è, potremmo dire, di carattere essenzialmente pratico. Infatti sarebbe facile far vedere, utilizzando la legge di Faraday-Neumann, che il modo più naturale, in linea di principio, per costruire un generatore di f.e.m. è quello di far ruotare una spira conduttrice in un campo magnetico. Se il campo è uniforme, e la velocità angolare di rotazione della spira è costante, la forza elettromotrice che ne scaturisce è di forma d'onda sinusoidale. Naturalmente, le cose sono molto più complesse di quanto una descrizione così sintetica possa far immaginare; ma, al fondo, è questo uno dei principali motivi per cui la produzione della energia elettrica si realizza in regime sinusoidale.

RL con forzamento sinusoidale

$$e(t)=E_M sen(\omega t+\eta) \qquad \frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{e(t)}{L}$$



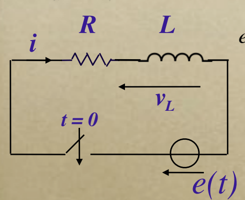
$$i(t)=ke^{-\frac{R}{L}t}+i_r(t)$$

$$i_r(t)=?$$

Es. III.1

Consideriamo, per esempio, il circuito RL serie che abbiamo già preso in considerazione, e supponiamo che esso sia alimentato da un generatore di tensione sinusoidale e(t)= E_M sen (ωt + η). È necessario assumere una fase iniziale η≠0 in quanto l'origine dei tempi è già stata fissata quando si è assunto che l'interruttore viene chiuso a t=0.
È facile scrivere l'equazione che esprime la LKT all'unica maglia presente.

RL con forzamento sinusoidale



$$e(t)=E_M sen(\omega t+\eta) \qquad i(t)=ke^{-\frac{R}{L}t}+i_r(t)$$

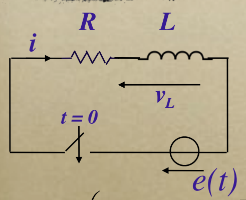
$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{e(t)}{L}$$

$$i_r=I_M sen(\omega t+\eta-\varphi)$$

$$\omega I_M sen\left(\omega t+\eta-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{R}{L}I_M sen(\omega t+\eta-\varphi)=\frac{E_M}{L}sen(\omega t+\eta)$$

La soluzione dell'omogenea associata sarà ancora del tipo $ke^{-\frac{R}{L}t}$, ma non possiamo più supporre che la soluzione particolare sia costante, in quanto il forzamento non è costante. Possiamo, però, utilizzare lo stesso modo di ragionare che ci ha portato a trovare la soluzione particolare quando il generatore di tensione era costante. In fondo nel caso del forzamento costante abbiamo cercato una soluzione particolare che avesse le stesse caratteristiche del forzamento, e cioè costante. Nel caso del forzamento sinusoidale possiamo cercare una soluzione particolare che sia dello stesso tipo, cioè sinusoidale.

RL con forzamento sinusoidale



$$i(t)=ke^{-\frac{R}{L}t}+i_r(t)$$

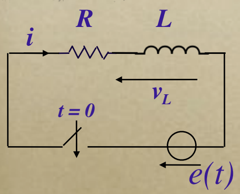
$$i_r=I_M sen(\omega t+\eta-\varphi)$$

$$\omega I_M sen\left(\omega t+\eta-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{R}{L}I_M sen(\omega t+\eta-\varphi)=\frac{E_M}{L}sen(\omega t+\eta)$$

$$A_M sen(\omega t+\alpha)+B_M sen(\omega t+\beta)=C_M sen(\omega t+\gamma)$$

Ben note formule trigonometriche (FORMULA DELL'ANGOLO AGGIUNTO) ci permettono di scrivere relazioni…

RL con forzamento sinusoidale



$$\omega I_M sen\left(\omega t+\eta-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{R}{L}I_M sen(\omega t+\eta-\varphi)=$$

$$=\frac{E_M}{L}sen(\omega t+\eta)$$

$$A_M sen(\omega t+\alpha)+B_M sen(\omega t+\beta)=C_M sen(\omega t+\gamma)$$

$$C_M^2=A_M^2+B_M^2+2A_M B_M\cos(\alpha-\beta)$$

$$\gamma=arctg\left(\frac{A_M sen\alpha+B_M sen\beta}{A_M\cos\alpha+B_M\cos\beta}\right)$$

che ci consentono...

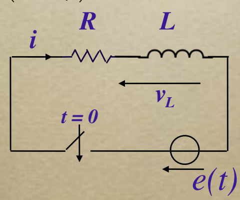
RL con forzamento sinusoidale

$$\omega I_M sen\left(\omega t+\eta-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{R}{L}I_M sen(\omega t+\eta-\varphi)=\frac{E_M}{L}sen(\omega t+\eta)$$

$$A_M sen(\omega t+\alpha)+B_M sen(\omega t+\beta)=C_M sen(\omega t+\gamma)$$

$$C_M^2=A_M^2+B_M^2+2A_M B_M\cos(\alpha-\beta)$$

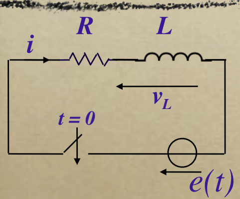
$$\gamma=arctg\left(\frac{A_M sen\alpha+B_M sen\beta}{A_M\cos\alpha+B_M\cos\beta}\right)$$



$$I_M=\frac{E_M}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\qquad \varphi=arctg\frac{\omega L}{R}$$

... di ottenere agevolmente la soluzione.

RL con forzamento sinusoidale



$$e(t)=E_M sen(\omega t+\eta)$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{e(t)}{L}$$

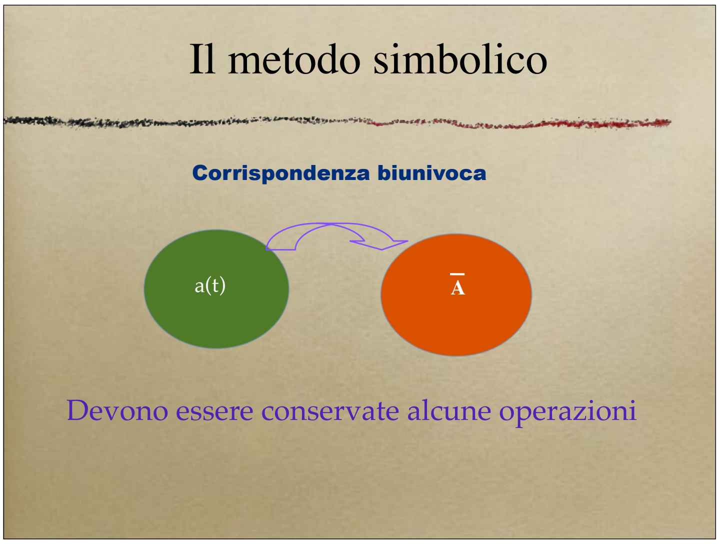
$$I_M=\frac{E_M}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\qquad \varphi=arctg\frac{\omega L}{R}$$

$$i(t)=ke^{-\frac{R}{L}t}+I_M sen(\omega t+\eta-\varphi)$$

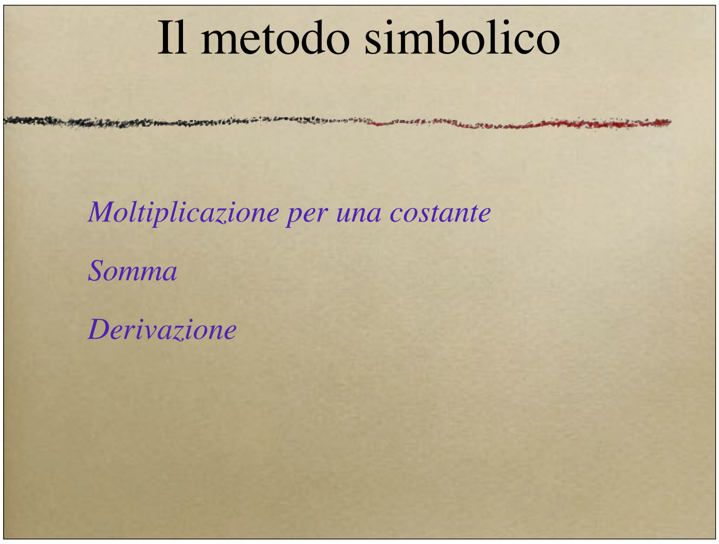
$$i(0)=k+I_M sen(\eta-\varphi)=I_0$$

Es. III.1

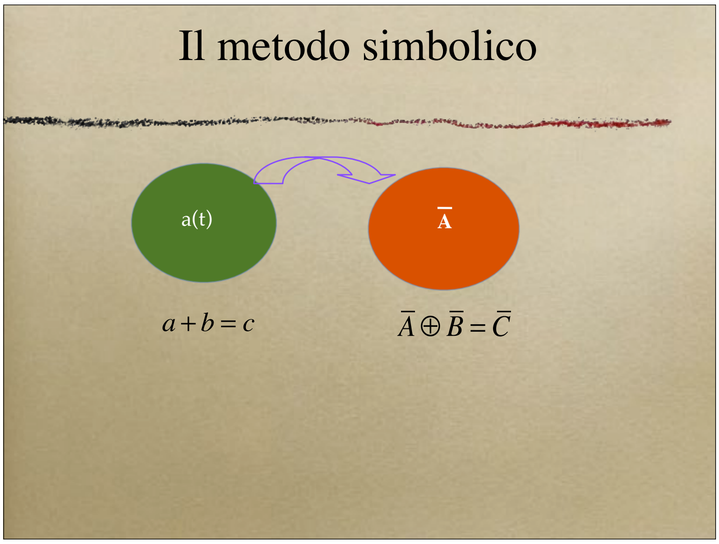
A questo punto si determina il valore della costante di integrazione imponendo la condizione iniziale. La soluzione trovata è ancora una volta somma di un termine che tende a zero ed un termine che, invece, si ripete periodicamente senza mai scomparire: la soluzione a regime permanente. A questo punto ci appare logico interpretare anche il regime stazionario, da cui abbiamo preso le mosse, come un regime permanente in cui i generatori, stazionari appunto, abbiano preso il sopravvento, e si sia persa traccia di un termine transitorio ormai estintosi nel tempo.
Resta il fatto che il calcolo della soluzione permanente in regime sinusoidale è più complicato sul piano operativo.



Siamo dunque alla ricerca di una tecnica che ci consenta di semplificare le operazioni sulle grandezze sinusoidali. Osserviamo che nelle equazioni relative alla LKC ed alla LKT intervengono essenzialmente le seguenti operazioni: a) moltiplicazione per una costante, come nella caratteristica di un resistore, b) somma, come nella somma dei vari termini in una equazione, c) derivata, come nelle caratteristiche di induttori e condensatori. Immaginiamo ora di trovare un insieme di grandezze, che chiameremo insieme delle Ā – mentre chiameremo "a" l'insieme delle funzioni sinusoidali di pulsazione ω – e supponiamo che esista una corrispondenza biunivoca che metta in relazione ogni elemento di a con uno di Ā.

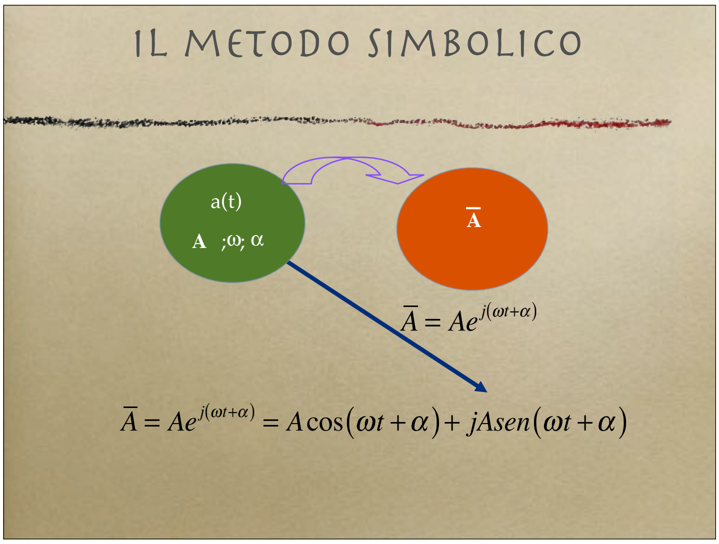


Supponiamo anche che tale corrispondenza conservi le operazioni che abbiamo in precedenza elencato.

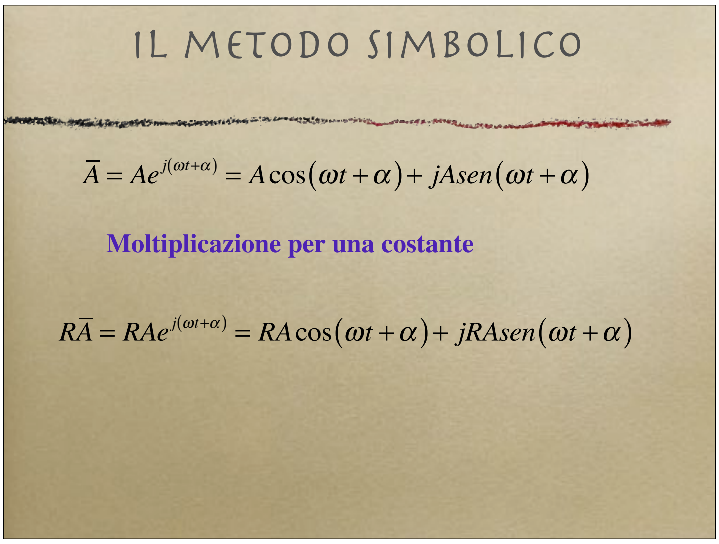


Con questa affermazione intendiamo che se il risultato di una determinata operazione – per esempio la somma – fatta su elementi di "a" è un certo elemento c, allora il risultato della operazione corrispondente – simbolo ⊕ – fatta sugli elementi corrispondenti di Ā fornisce proprio l'elemento di Ā associato a c. Dunque, se esiste un tale insieme ed una tale applicazione, e se operare su Ā risulta più agevole che operare su "a", si potrà in ogni caso trasformare tutte le grandezze di "a" nelle corrispondenti di Ā, operare su queste e, una volta ottenuto il risultato, ritornare in "a" mediante l'applicazione inversa.

Orbene, facciamo vedere che l'insieme di tutte le funzioni complesse di variabile reale del tipo $Ae^{j(\omega t+\alpha)}$ è un possibile candidato insieme Ā. Infatti, dato che ogni elemento di "a" del tipo a(t) = A_M sen ($\omega t + \alpha$) dipende da tre parametri, e precisamente A_M, ω ed α, e che lo stesso accade per ogni elemento di Ā (perché Ā = $Ae^{j(\omega t+\alpha)}$), è evidente che tra gli insiemi "a" e Ā descritti esiste una corrispondenza biunivoca se ad ogni valore A_M facciamo corrispondere un opportuno valore A. Naturalmente la scelta più immediata sarebbe di porre A = A_M. Per motivi che saranno chiari in seguito, si preferisce porre A = $A_M/\sqrt{2}$, cioè pari al valore efficace della corrispondente grandezza sinusoidale invece che al suo valore massimo.



Notiamo che, per la formula di Eulero, si può affermare che l'applicazione introdotta fa corrispondere ad ogni elemento di Ā un elemento di "a" che, a meno del fattore √2, coincide con il coefficiente della parte immaginaria di Ā.
Che una tale applicazione conservi le operazioni che abbiamo elencato in precedenza, è cosa semplice da dimostrare.



Per quanto riguarda la moltiplicazione per una costante, il fatto è di per sé evidente.

IL METODO SIMBOLICO

$$\overline{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jAsen(\omega t+\alpha)$$

Somma

$$a(t) + B(t) = A_M sen(\omega t+\alpha) + B_M sen(\omega t+\beta)$$

$$Ae^{j(\omega t+\alpha)} + Be^{j(\omega t+\beta)} = A\cos(\omega t+\alpha) + B\cos(\omega t+\beta) + \\ + j\left(Asen(\omega t+\alpha) + Bsen(\omega t+\beta)\right)$$

Come pure per la somma.

IL METODO SIMBOLICO

$$\overline{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jAsen(\omega t+\alpha)$$

Derivazione

$$\frac{d}{dt}A_M sen(\omega t+\alpha) = \omega A_M \cos(\omega t+\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}Ae^{j(\omega t+\alpha)} = -\omega Asen(\omega t+\alpha) + j\omega A\cos(\omega t+\alpha)$$

Ma anche per quel che riguarda l'operazione di derivazione la corrispondenza si mantiene.

IL METODO SIMBOLICO

$$\overline{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jAsen(\omega t+\alpha)$$

La moltiplicazione tra due grandezze del tipo a(t) non si conserva!

$$Ae^{j(\omega t+\alpha)}Be^{j(\omega t+\beta)} = A\cos(\omega t+\alpha)B\cos(\omega t+\beta) + \\ -Asen(\omega t+\alpha)Bsen(\omega t+\beta) + \\ j\left[A\cos(\omega t+\alpha)Bsen(\omega t+\alpha) + \\ B\cos(\omega t+\alpha)Asen(\omega t+\alpha)\right]$$

Notiamo che, invece, la moltiplicazione tra due elementi di Ā, non si conserva.
In conclusione in regime sinusoidale si può così operare: in primo luogo si trasformano tutte le grandezze – tensioni e correnti che variano con legge sinusoidale – nelle corrispondenti funzioni complesse del tipo $Ae^{j(\omega t+\alpha)}$; d'ora in poi useremo il termine fasori per tali grandezze e conserveremo il simbolo Ā per indicarle.

In conclusione

$$\bar{A} = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jAsen(\omega t+\alpha)$$

Dalle grandezze sinusoidali si passa ai fasori

Si opera nel dominio dei fasori

Si ritorna alle grandezze sinusoidali

$$\cancel{\bar{A}+a(t)}$$

Successivamente si scrivono le equazioni che rappresentano le condizioni imposte dalla LKC e dalla LKT, tenendo conto delle caratteristiche dei singoli bipoli – espresse in termini di fasori – e ricordando che ogni operazione di derivazione equivale ad una moltiplicazione per jω. Così facendo le equazioni differenziali si trasformano in equazioni algebriche ed è, dunque, semplice risolverle, ricavando i fasori rappresentativi delle grandezze incognite. A questo punto si può ritornare alle funzioni sinusoidali e determinare le grandezze incognite nel dominio del tempo.

Val a pena di osservare che non ha senso compiere operazioni che coinvolgano elementi di a e di Ā.

Riepilogo della Lezione

La soluzione particolare o di regime e l'integrale completo;

Il metodo simbolico.

Circuito RC con gen. costante ;

Circuito RLC con gen. costante ;

Generatori variabili;

Forme d'onda periodiche;

Perché il regime sinusoidale?

Il circuito R L con un generatore sinusoidale;

Metodo simbolico