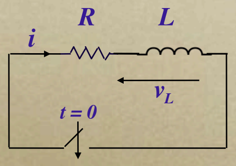
Lezione 12

RL in evoluzione libera

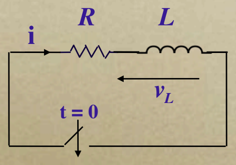


$i(0) = I_0$

Es. I-4

Esaminiamo ora un caso simile al precedente in cui al posto del condensatore sia presente un induttore L; la storia è la stessa, cambiano solo i protagonisti. Ci limiteremo ad elencare un certo numero di passaggi che dovrebbero essere di per sé chiari!

RL in evoluzione libera



$$i(0) = I_0$$

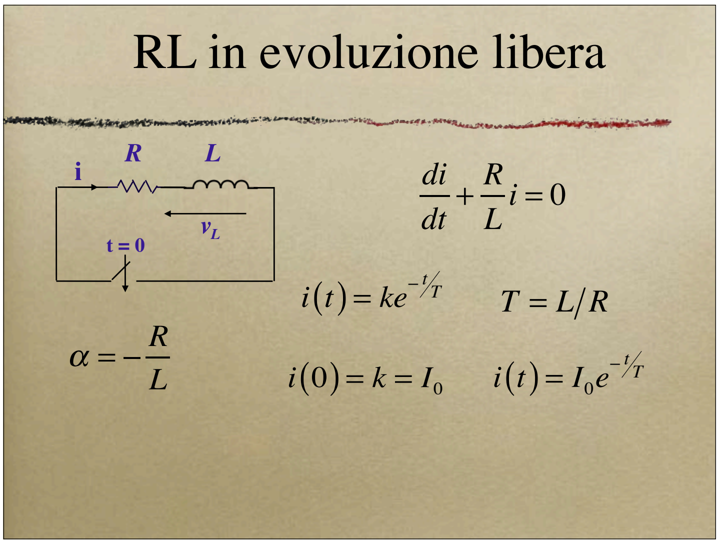
$$v_L = L\frac{di}{dt}$$

$$v_R = Ri$$

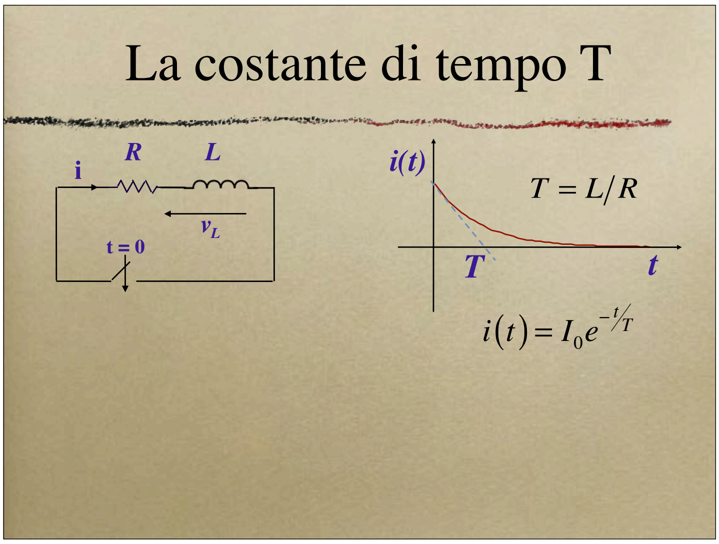
$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

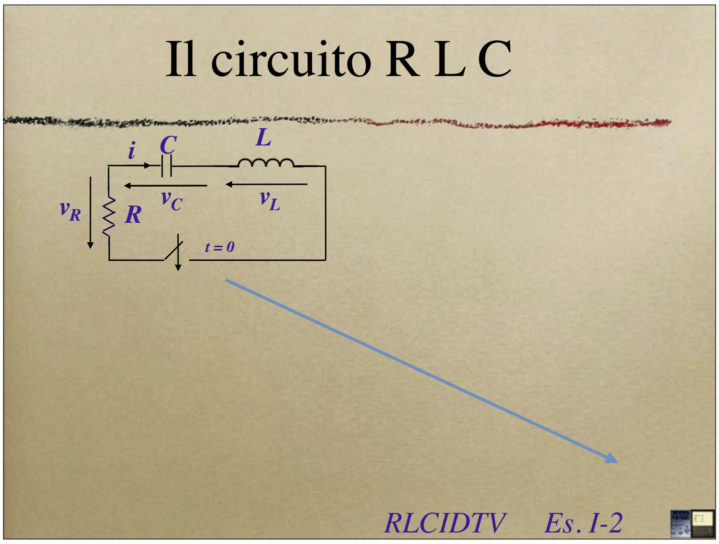
In primo luogo l'equazione all'unica maglia presente. Anche in questo caso siamo in presenza di una equazione differenziale ordinaria e omogenea, che può essere risolta con la tecnica precedentemente ricordata.



Se $i(0) = I_0$, se cioè l'induttore aveva una energia magnetica $W_m = L I_0^2/2$ immagazzinata all'istante t=0, o anche, mutuando il linguaggio introdotto per il condensatore, se l'induttore era inizialmente carico alla corrente I_0, il circuito è sede di una corrente che ha un andamento esponenziale decrescente con costante di tempo T=L/R.

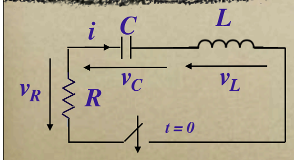


La costante di tempo ha anche in questo caso il significato rilevato per la scarica del condensatore.



A questo punto possiamo provare a mettere insieme i due nuovi bipoli in un circuito RLC serie. Verifichiamo in laboratorio il funzionamento del circuito.

Il circuito R L C



$$v_R + v_C + v_L = 0$$

$$v_L = L\frac{di}{dt} \qquad i = C\frac{dv_C}{dt} \qquad v_R = Ri$$

$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + LC\frac{d^2v_C}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0$$

Dal punto di vista analitico, la legge di K all'unica maglia presente fornisce questa volta un'equazione del secondo ordine in v_C: basta sostituire la corrente i presente nelle due caratteristiche dell'induttore e del resistore con l'espressione ricavata dalla caratteristica del condensatore e usare le e espressioni trovate nell'equazione alla maglia. Si ottiene così un'equazione nella v_C.

Equazioni del secondo ordine

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0 \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$e^{\alpha x}\left(\alpha^2 + a_1\alpha + a_0\right) = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \qquad y(x) = k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}$$

Ma in laboratorio…

Es. I-3

L'equazione così ottenuta è un'equazioni differenziale ordinaria, lineare, omogenea, di secondo ordine a coefficienti costanti. Ragionamenti del tutto analoghi a quelli esposti per il caso dell'equazione di primo ordine ci porterebbero a costruire una soluzione sotto forma di sviluppo in serie di potenze. Più semplicemente possiamo generalizzare il metodo dell'equazione caratteristica. Esistono dunque due valori di α che rendono l'esponenziale $e^{\alpha x}$ soluzione della nostra equazione, e tali valori sono le radici dell'equazione caratteristica. Per la linearità dell'equazione, possiamo affermare che una famiglia di soluzioni dell'equazione è data dalla espressione mostrata dove α_1 ed α_2 sono le radici e k_1 e k_2 due costanti arbitrarie.

Equazioni del secondo ordine

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0 \qquad y'' = -a_1 y' - a_0 y$$

$$y(x) = k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}$$

Integrale generale

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

- **Reali e distinte**
- **Reali e coincidenti**
- **Complesse coniugate**

D'altra parte, la struttura stessa dell'equazione ci dice che, se sono noti in un punto il valore della incognita e quello della sua derivata prima, sono noti anche i valori assunti nello stesso punto da tutte le derivate, di ogni ordine, della funzione stessa: il valore della derivata seconda è, infatti, direttamente valutabile dall'equazione, mentre quello delle derivate di ordine superiore si ottiene facilmente derivando di volta in volta l'equazione stessa.
Resta ora da esaminare i vari casi che la natura dell'equazione caratteristica può presentare. A seconda del valore del discriminate dell'equazione, le radici possono essere reali e distinte, reali e coincidenti ed immaginarie coniugate.

RADICI REALI E DISTINTE

$$y(x)=k_1e^{\alpha_1 x}+k_2e^{\alpha_2 x}$$

$$v_C(t)=k_1e^{\alpha_1 t}+k_2e^{\alpha_2 t}$$

DueRadiciDist 

L'ultima affermazione è legata al fatto, che nel nostro caso, i coefficienti dell'equazione sono, per ipotesi, reali.
Partiamo dal caso in cui le radici siano distinte. La soluzione è somma di due esponenziali decrescenti e quindi la tipologia di forma d'onda è quella mostrata.

RADICI COMPLESSE CONIUGATE

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{LC}=0 \qquad y''+a_1y'+a_0y=0$$

$$\Delta=a_1^2-4a_0\le 0 \qquad R^2<\frac{4L}{C} \qquad \alpha_{1,2}=(\alpha\pm j\beta)$$

$$y(x)=k_1e^{\alpha_1 x}+k_2e^{\alpha_2 x}$$

$$y(x)=(A+jB)e^{(\alpha+j\beta)x}+(A-jB)e^{(\alpha-j\beta)x}$$

Se il discriminante dell'equazione caratteristica è negativo, le soluzioni dell'equazione sono complesse. Esse sono anche coniugate in quanto i coefficienti dell'equazione sono reali. La soluzione generale è, dunque, una combinazione lineare, con due costanti arbitrarie, delle funzioni esponenziali $e^{(\alpha+j\beta)x}$ e $e^{(\alpha-j\beta)x}$. D'altra parte, invece di tali funzioni è possibile prendere in considerazione le funzioni $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\cos\beta x$ che come è noto sono combinazioni lineari delle precedenti.

OSCILLAZIONI

$$y(x)=(A+jB)e^{(\alpha+j\beta)x}+(A-jB)e^{(\alpha-j\beta)x} \qquad R^2<\frac{4L}{C}$$

$$y(x)=e^{\alpha x}\left[(A+jB)e^{j\beta x}+(A-jB)e^{-j\beta x}\right]$$

$$y(x)=e^{\alpha x}\left[A\left(e^{j\beta x}+e^{-j\beta x}\right)+jB\left(e^{j\beta x}-e^{-j\beta x}\right)\right]$$

Come del resto mostrano questi passaggi algebrici che non richiedono ulteriori commenti

OSCILLAZIONI

$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[A\left(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}\right) + jB\left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)\right]$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[2A\frac{\left(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}\right)}{2} - 2B\frac{\left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)}{2j}\right]$$

OSCILLAZIONI

$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[2A\frac{\left(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}\right)}{2} - 2B\frac{\left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right)}{2j}\right]$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[2A\cos\beta x - 2B sen\beta x\right]$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L} \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Quindi nel caso di soluzioni complesse dell'equazione caratteristica, l'integrale generale della nostra equazione può porsi nella forma indicata.

OSCILLAZIONI

$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[2A\cos\beta x - 2B sen\beta x\right]$$

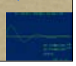
$$y(x) = 2\sqrt{A^2 + B^2}\, e^{\alpha x}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos\beta x - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} sen\beta x\right]$$

$$sen(\beta x + \phi) = sen\phi\cos\beta x + \cos\phi\, sen\beta x$$

$$y(x) = 2\sqrt{A^2 + B^2}\, e^{\alpha x} sen(\beta x + \phi)$$

$$y(x) = k e^{\alpha x} sen(\beta x + \phi)$$

DueRadiciCompCon



O anche in quest'ultima, dove è evidente che la soluzione è di tipo oscillatorio smorzato.

OSCILLAZIONI

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{LC}=0 \qquad R^2<\frac{4L}{C}$$

$$v_C(t)=ke^{\alpha t}sen(\beta t+\phi)$$

Caso oscillante o sottocritico

$$\alpha=-\frac{R}{2L} \qquad \beta=\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{T^2}}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad T=\frac{2L}{R}$$

E con la simbologia del nostro circuito e la variabile temporale t…

RADICI COINCIDENTI

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{LC}=0 \qquad R^2=\frac{4L}{C}$$

$$\alpha=-\frac{R}{2L}=-\frac{1}{T} \qquad e^{\alpha t} \qquad e^{(\alpha+\Delta\alpha)t}$$

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{e^{(\alpha+\Delta\alpha)t}-e^{\alpha t}}{\Delta\alpha}=\frac{de^{\alpha t}}{d\alpha}=te^{\alpha t}$$

Il caso delle due radici coincidenti è in realtà solo un caso limite: non ci troveremo mai nelle condizioni di poter affermare che il discriminante è esattamente nullo. Comunque, anche in questo caso si può costruire l'integrale generale ricavando una seconda soluzione con il ragionamento seguente: partendo dalla condizione di radici distinte, poniamo $\alpha_1 = \alpha$ ed $\alpha_2 = \alpha + \Delta\alpha$ e consideriamo la combinazione lineare delle due soluzioni $e^{(\alpha+\Delta\alpha)t}/\Delta\alpha - e^{\alpha t}/\Delta\alpha$ che è ancora una soluzione. Facendo tendere $\Delta\alpha$ a zero, e quindi α_2 ad α_1, per ritrovare la condizione di radici coincidenti, si vede chiaramente che la nuova soluzione tende alla derivata di $e^{\alpha t}$ rispetto ad α e cioè a $te^{\alpha t}$

RADICI COINCIDENTI

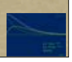
$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{LC}=0 \qquad R^2=\frac{4L}{C}$$

Caso critico

$$\alpha=-\frac{R}{2L}=-\frac{1}{T}$$

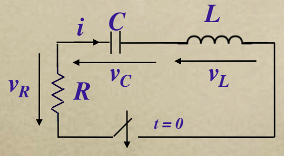
$$e^{\alpha t} \qquad te^{\alpha t} \qquad v_C(t)=k_1e^{\alpha t}+k_2te^{\alpha t}$$

DueRadiciCoinc



EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0$$



$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

In definitiva, riassumendo quanto abbiamo detto,

POSIZIONI

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0 \qquad T = \frac{2L}{R}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Delta = \frac{4}{T^2}\left(1 - \omega_0^2 T^2\right)$$

e con alcune posizioni formali che rendono più chiara la casistica, e cioè definendo T, ω_0 come mostrato,

I TRE CASI

$$\Delta = \frac{4}{T^2}\left(1 - \omega_0^2 T^2\right) \qquad T = \frac{2L}{R} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega_0 T < 1$ **Caso aperiodico o smorzato o sopracritico**

$\omega_0 T = 1$ **Caso critico**

$\omega_0 T > 1$ **Caso periodico o oscillante o subcritico**

Possiamo elencare i tre casi con le notazioni indicate.

SMORZATO

$$\Delta = \frac{4}{T^2}\left(1-\omega_0^2 T^2\right) \qquad T = \frac{2L}{R} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega_0 T < 1$ **Caso aperiodico o smorzato o sopracritico**

$$v_C(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \qquad \alpha_{1,2} = -\frac{1}{T} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Il caso aperiodico o smorzato o sopracritico

OSCILLANTE

$$\Delta = \frac{4}{T^2}\left(1-\omega_0^2 T^2\right) \qquad T = \frac{2L}{R} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha = -\frac{1}{T} \qquad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{T^2}}$$

$\omega_0 T > 1$ **Caso periodico o oscillante o subcritico**

$$v_C(t) = k e^{\alpha t} sen(\beta t + \phi) \qquad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Il caso periodico o oscillante o sub critico

CRITICO

$$\Delta = \frac{4}{T^2}\left(1-\omega_0^2 T^2\right) \qquad T = \frac{2L}{R} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega_0 T = 1$ **Caso critico**

$$\alpha = -\frac{1}{T}$$

$$v_C(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t}$$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ed il caso critico.

CONDIZIONI INIZIALI

Caso periodico o oscillante o subcritico

$\omega_0 T > 1$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0 \qquad \alpha = -\frac{1}{T} \quad T = \frac{2L}{R}$$

$$v_C(t) = ke^{\alpha t} sen(\beta t + \phi) \qquad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{T^2}}$$

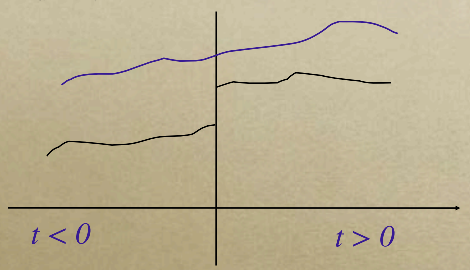
$v_C(0) = V_0$

$i(0) = I_0$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Le costanti k_1 e k_2 , o k e φ, sono da determinarsi utilizzando le condizioni iniziali. Infatti, essendo presenti nel circuito due elementi a memoria, per determinarne univocamente l'evoluzione occorrerà conoscere il loro livello energetico all'istante iniziale; in altri termini occorrerà conoscere il valore della tensione sul condensatore, diciamo V_0, e quello della corrente nell'induttore, diciamo I_0, all'istante iniziale.

CONDIZIONI INIZIALI



$v_C(0) = V_0$

$i(0) = I_0$

Si noti che mentre ogni altra grandezza nel nostro modello può avere una discontinuità all'atto della chiusura o dell'apertura di un interruttore, la tensione sui condensatori e le correnti negli induttori non possono avere tali comportamenti. Una loro discontinuità infatti implicherebbe una discontinuità dell'energia immagazzinata, il che non è possibile in assenza di generatori o dissipatori di potenza infinita.

CONDIZIONI INIZIALI

$$v_C(t) = ke^{\alpha t} sen(\beta t + \phi)$$

$\omega_0 T > 1$

$v_C(0) = V_0 \qquad i(0) = I_0 \qquad v_C(0) = k\, sen(\phi) = V_0$

$$i(t) = C\frac{dv_C}{dt} = \alpha kCe^{\alpha t} sen(\beta t + \phi) + \beta kCe^{\alpha t}\cos(\beta t + \phi)$$

$$i(0) = \alpha kCsen(\phi) + \beta kC\cos(\phi) = I_0$$

Per esempio, nel caso di oscillazioni smorzate, la prima condizione ci fornisce facilmente valore di K sen φ, mentre dall'espressione della corrente si kcos φ. Il loro rapporto danno tan φ e quindi dalla prima si può calcolare k.

Potenza dissipata ed energia immagazzinata

$$v_C(t) = ke^{\alpha t} sen(\beta t + \phi) \qquad \omega_0 T > 1$$

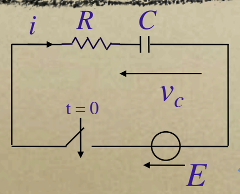
$$i(t) = \alpha kCe^{\alpha t} sen(\beta t + \phi) + \beta kCe^{\alpha t} \cos(\beta t + \phi)$$

$$W_1(t) = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t Ri^2 dt \qquad W_2 = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cv^2$$

EnergiaIDTV

Avendo determinato la corrente dell'induttore e la tensione sul condensatore possiamo provare a fare un bilancio energetico per verificare che effettivamente tutta l'energia dissipata nel resistore tra 0 ad infinito è proprio uguale a quella inizialmente immagazzinata nei due componenti a memoria.

RC in evoluzione forzata



$$v_C(0) = V_0$$

$$v_R = Ri = RC\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_C + RC\frac{dv_C}{dt} = E$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$$v_R + v_C = E$$

$$i = C\frac{dv_C}{dt}$$

Es II-1, Es II-2, Es II-3

I circuiti in regime dinamico che abbiamo fino ad ora studiato contenevano esclusivamente bipoli passivi. La dinamica che tali circuiti mostrano è dovuta alla presenza di una certa energia inizialmente immagazzinata nei componenti con memoria. Vogliamo ora introdurre, anche in regime dinamico, i bipoli attivi, cominciando da un generatore di tensione costante E_0, che inseriamo nel circuito RC serie già studiato nel paragrafo precedente.
Applicando la LKT alla unica maglia presente si ottiene, facilmente l'equazione risolvente.

RC in evoluzione forzata

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

- Differenziali;
- Lineari;
- A coefficienti costanti;
- Non omogenee

$$y' + a_0 y(x) = f(x)$$

$$y' + a_0 y(x) = 0 \qquad y_0(x) \qquad y_r(x)$$

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x)$$

L'equazione ottenuta è ancora una equazione differenziale, ordinaria, a coefficienti costanti, ma a differenza delle precedenti, non è più omogenea per la presenza di un termine assegnato, o noto, a secondo membro. Ci viene in aiuto a questo punto, ancora una volta, la teoria delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti che ci assicura che l'integrale generale dell'equazione può ottenersi aggiungendo a quello dell'omogenea associata una soluzione dell'equazione completa.

RC in evoluzione forzata

$$\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{RC}=\frac{E}{RC}$$

$$y'+a_0y(x)=f(x)=k$$

$$y_r(x)=\frac{k}{a_0}$$

- Differenziali;
- Lineari;
- A coefficienti costanti;
- Non omogenee

$$v_C(t)=ke^{\alpha t}+E \qquad v_C(0)=k+E=V_0$$

$$v_C(t)=(V_0-E)e^{\alpha t}+E \qquad v_C(t)=V_0e^{\alpha t}+E\left(1-e^{\alpha t}\right)$$

Es. I-5

E quindi nel nostro caso, la soluzione indicata, che può essere messa nelle due forme equivalenti.

Riepilogo della Lezione

Scarica di un induttore;

Serie di R, L e C : equazioni del secondo ordine;

Radici reali e distinte;

Radici complesse e coniugate;

Radici coincidenti;

Le condizioni iniziali;

Bilanci energetici;

Carica di un condensatore