Lezione 11

Nell'esposizione della teoria dei circuiti, che abbiamo fin qui presentato, il tempo è entrato in maniera veramente marginale. Dovendo trattare di correnti, quindi di moto di cariche, non si può certo dire che il tempo non sia stato per nulla preso in considerazione; ma l'aver limitato tutto al caso di correnti stazionarie ha fatto sì che il tempo non sia entrato direttamente in gioco.

Le equazioni di Maxwell in forma integrale

$$\oiint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\iiint_V \rho\, dV = \frac{Q_v}{\varepsilon_o}$$

$$\oint_\gamma \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\iint_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{S}$$

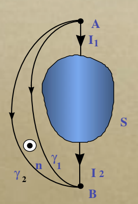
$$\oiint_S \bar{B}\cdot d\bar{S} = 0$$

$$\oint_\gamma \bar{B}\cdot d\bar{l} = \iint_S \mu_o\left(\bar{J} + \varepsilon_o \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right)\cdot d\bar{S}$$

In questa lezione cercheremo di estendere la gran parte dei concetti che abbiamo sviluppato per il regime stazionario al caso in cui le grandezze in gioco non sono più costanti nel tempo.

La prima domanda da porsi è se sia possibile anche in regime non stazionario parlare di bipoli. A rigore la risposta è negativa. Infatti in un regime non stazionario non è più possibile parlare di differenza di potenziale, né è lecito assumere che la corrente entrante in un morsetto di un resistore sia eguale a quella uscente dall'altro: due affermazioni che, come sappiamo, sono alla base della definizione di bipolo.

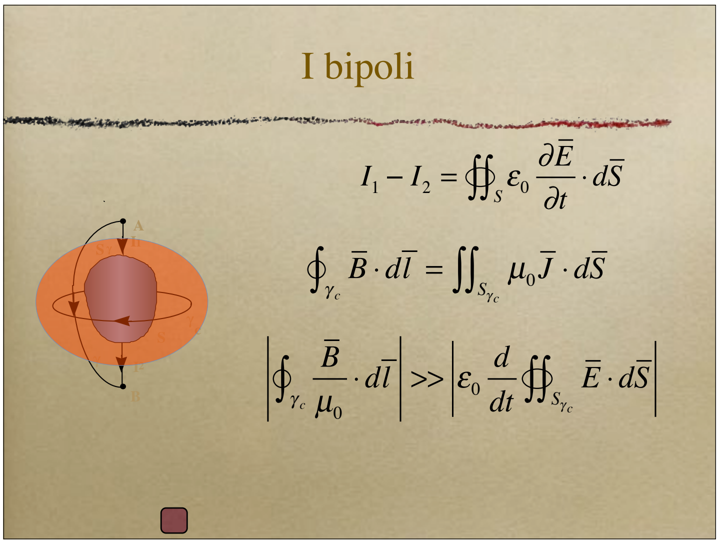
I bipoli



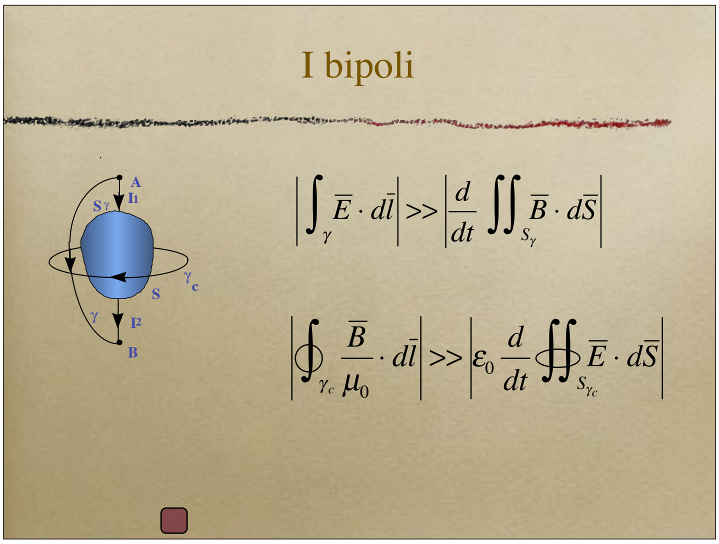
$$\int_{\gamma_1} \bar{E}\cdot d\bar{l} - \int_{\gamma_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \frac{d}{dt}\iint_S \bar{B}\cdot d\bar{S}$$

$$\left|\int_\gamma \bar{E}\cdot d\bar{l}\right| >> \left|\frac{d}{dt}\iint_{S_\gamma} \bar{B}\cdot d\bar{S}\right|$$

Quando il campo elettrico (e magnetico) varia nel tempo, il suo integrale di linea tra due punti dipende dalla linea che si percorre per andare da un punto all'altro. Se però la differenza tra i due integrali è sufficientemente piccola, come indicato dalla relazione in figura, allora potremo ancora parlare di tensione indipendente dal percorso e quindi di d.d.p.

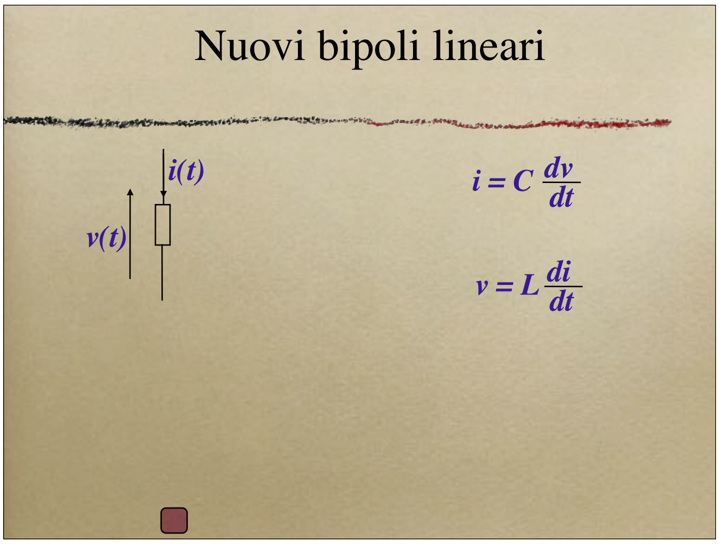


Analogamente, la quantità di carica elettrica che entra in una superficie chiusa non è necessariamente eguale, istante per istante, alla quantità di carica che ne esce. Ciò comporta, naturalmente, che la quantità di carica contenuta nella superficie stessa si modifichi nel tempo: cresca in un determinato intervallo di tempo per poi diminuire in un intervallo successivo. Se però, anche qui tale differenza è sufficientemente piccola allora potremo ancora ritenere valida la prima legge di K.

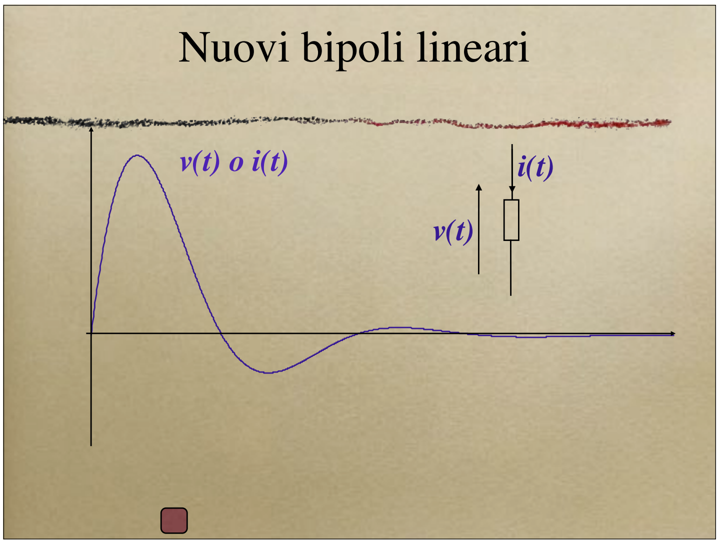


Per fortuna questi fenomeni sono tanto più rilevanti quanto più grande è la rapidità di variazione nel tempo delle grandezze elettriche. Così accade che, se le variazioni sono sufficientemente lente, l'errore che si commette nel trascurare tali fenomeni è sufficientemente piccolo. È questo un enunciato puramente qualitativo che può lasciare largamente insoddisfatti. Si rimanda coloro che fossero interessati ad una trattazione più approfondita del problema alla seconda appendice integrativa del libro di testo.

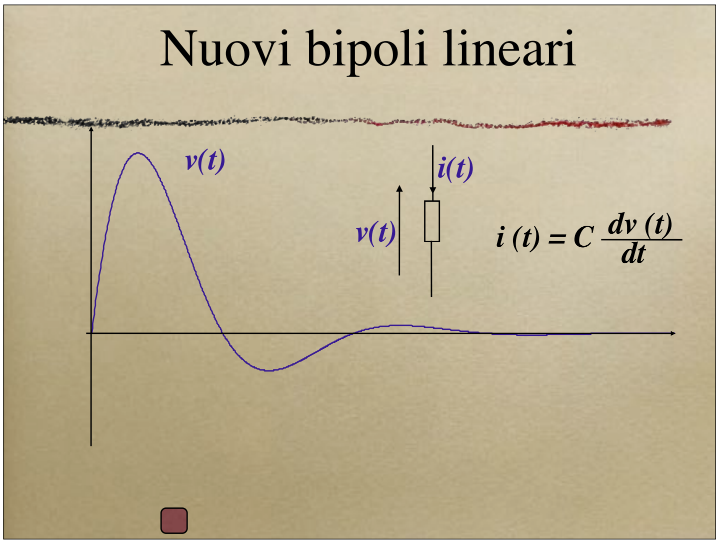
Anche in regime dinamico, dunque, parleremo di differenza di potenziale ai morsetti di un resistore e di un unico valore, in ogni istante, della corrente che lo attraversa; il legame tra queste due grandezze sarà fornito dalla caratteristica del bipolo che scriveremo (convenzione dell'utilizzatore) v=Ri, dove l'uso delle lettere minuscole v ed i serve appunto a ricordare, per convenzione, che si tratta di grandezze variabili nel tempo.



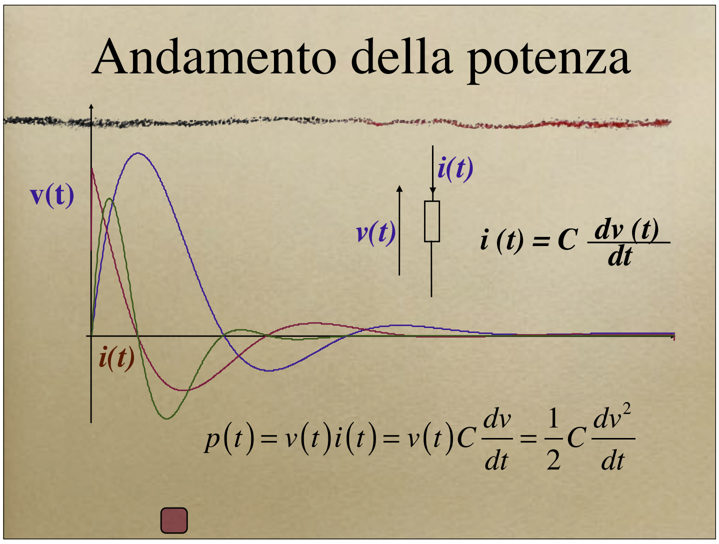
In regime dinamico il bipolo resistore non è l'unico bipolo lineare e passivo che possiamo introdurre; si può pensare, per esempio, ad una relazione di proporzionalità tra corrente e derivata della tensione o tra tensione e derivata della corrente. Essendo l'operatore derivata lineare, tali caratteristiche saranno anche esse lineari. Siamo cosí portati ad introdurre due nuove tipi di bipoli. Il condensatore C e l'induttore L. Le relative costanti di proporzionalità prendono il nome, rispettivamente, di capacità del condensatore e di induttanza, o coefficiente di autoinduzione, dell'induttore. Nel Sistema Internazionale la capacità si misura in farad e l'induttanza in henry e sono entrambe definite positive, se si assume una convenzione dell'utilizzatore sul bipolo.



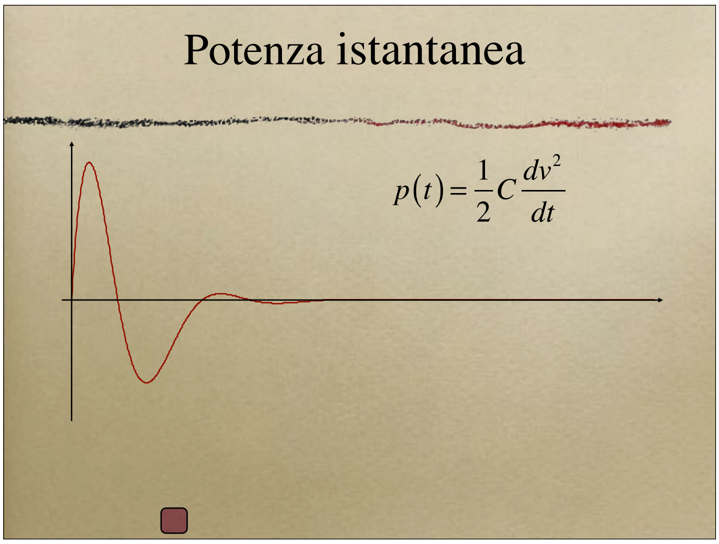
Si osservi che le caratteristiche dei due nuovi bipoli lineari introdotti non possono essere descritte, come accadeva per il resistore, in un piano (i,v). È questo soltanto il riflesso di differenze ben più significative che vogliamo ora cercare di porre in evidenza.



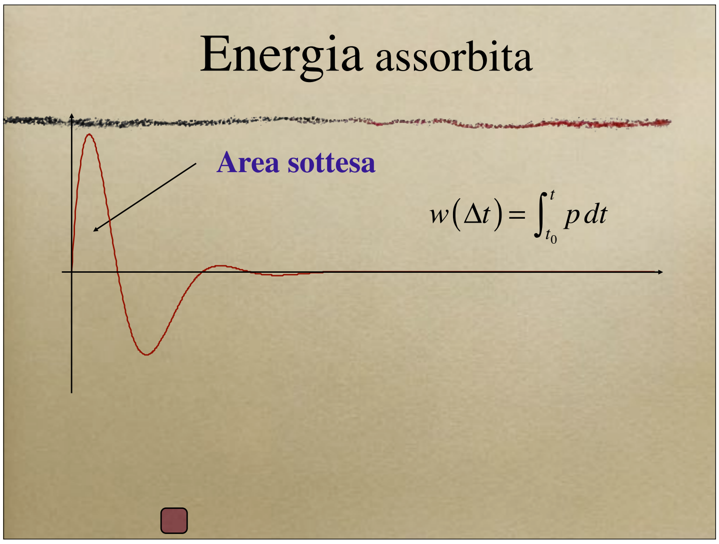
Nell'immagine a lato sono rappresentati gli andamenti di tensione e corrente in un condensatore per un caso particolare: si noti che, essendo la corrente proporzionale alla derivata della tensione, essa è nulla dove la tensione ha un massimo o un minimo.



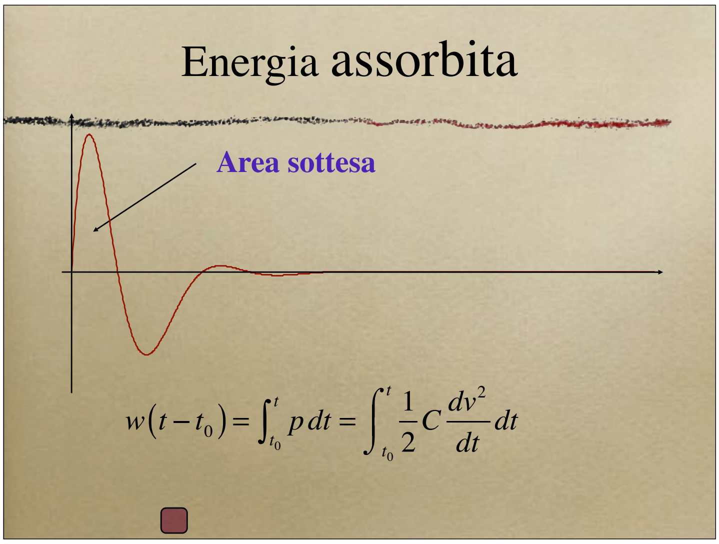
D’altra parte v, per definizione, è il lavoro svolto per portare una carica unitaria attraverso il salto di potenziale pari appunto a v. Per "i" cariche al secondo la potenza, istante per istante, sarà data dalla espressione indicata.



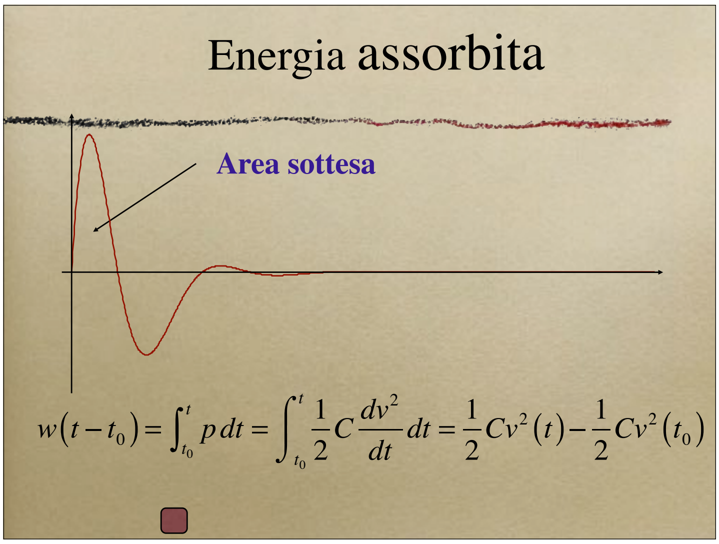
Avendo assunto una convenzione dell'utilizzatore, tale potenza è una potenza assorbita dal bipolo. Dall'andamento nel tempo della potenza riportata in figura si vede che essa è, per alcuni intervalli di tempo, negativa. Ma una potenza assorbita negativa corrisponde ad una potenza generata positiva; questo vuol dire che il condensatore in alcuni intervalli di tempo è in grado di fornire potenza ai suoi morsetti piuttosto che assorbirla. Il comportamento è dunque radicalmente differente da quello del bipolo resistore che invece è solo in grado di assorbire potenza.



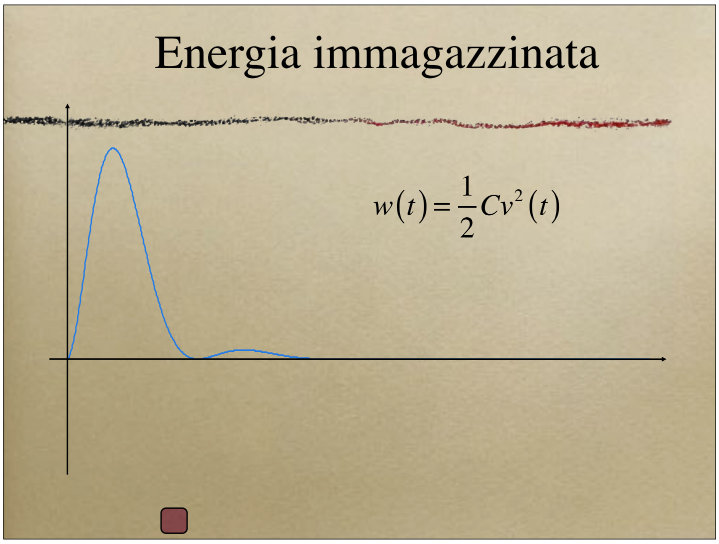
Per approfondire ancora l'argomento proviamo a calcolare l'energia fornita al bipolo in un intervallo di tempo (t_0, t).



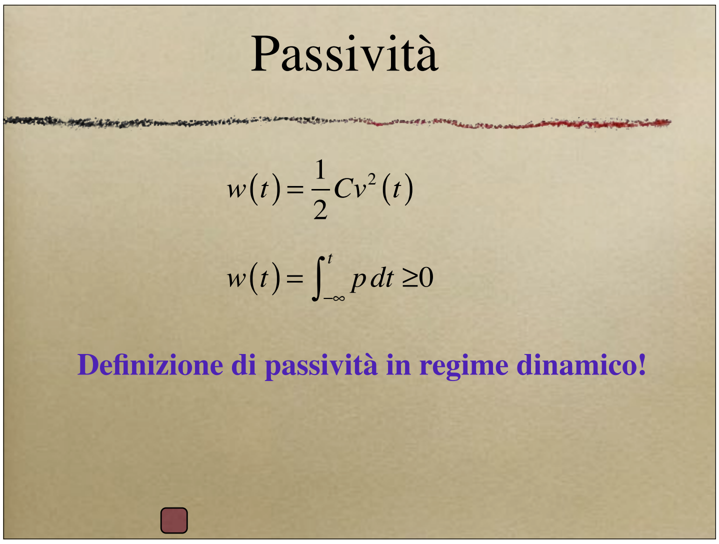
Graficamente tale energia sarà rappresentata dall'area sottesa alla curva.



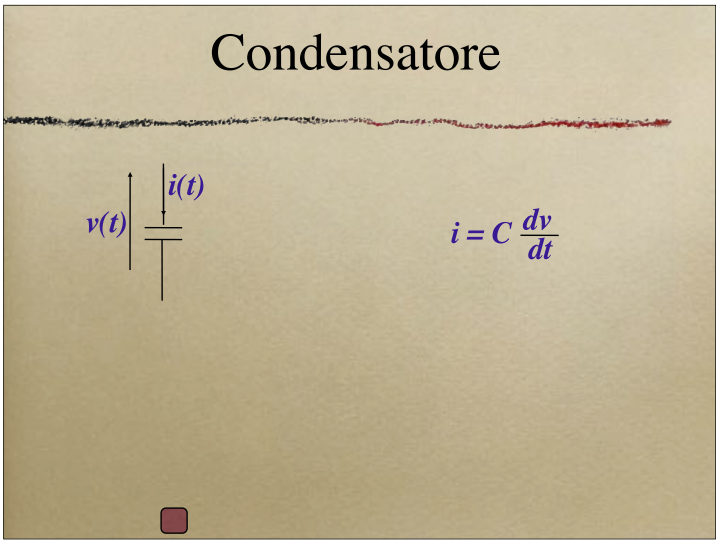
Sviluppando l'integrale si ottiene l'energia assorbita in questa forma. Se per esempio scegliamo t_0 nell'istante in cui v=0, possiamo affermare che l'energia assorbita fino all'istante t, dipende soltanto dal valore della tensione ai capi del condensatore allo stesso istante t ed è, per la precisione, pari a $Cv^2/2$.



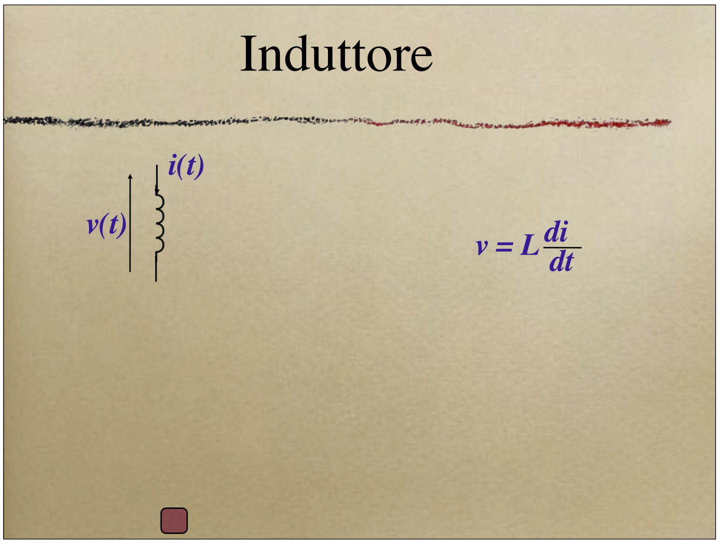
Una conseguenza immediata di tale affermazione è che, se il condensatore fino all'istante iniziale t_0 ha assorbito una energia nulla (v=0), l'energia che verrà assorbita in un successivo intervallo (t_0,t) sarà sempre positiva ($Cv^2/2$). In altri termini un condensatore è in grado di fornire energia ai suoi morsetti soltanto se tale energia è stata assorbita in un intervallo precedente. Si dice che l'energia è stata in precedenza immagazzinata dal condensatore e per questo motivo essa può successivamente essere restituita.



Per ora limitiamoci a questa osservazione e notiamo che, non essendo il condensatore in grado di produrre energia elettrica, ma soltanto di immagazzinarla, esso va considerato a tutti gli effetti un bipolo passivo; il suo comportamento, però, ci consiglia di modificare la definizione fin qui usata di passività di un bipolo. Diremo che un bipolo è passivo se l'energia da esso assorbita – convenzione dell'utilizzatore, quindi – dall'origine dei tempi (–∞) fino ad un qualsiasi istante t è non negativa



Il simbolo grafico che useremo per indicare questo tipo do bipolo è quello mostrato. Con la convenzione dell'utilizzatore la costante C, capacità del condensatore, è definita positiva, almeno nei limiti della nostra trattazione.



Ragionamenti analoghi per l'induttore ci portano a concludere che anche in questo caso c'è una energia immagazzinata, ma questa volta dipendente dalla corrente…

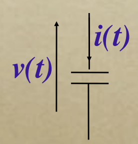
Energia assorbita dall'induttore

$$w(\Delta t) = \int_{t_0}^{t} p\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} L \frac{di^2}{dt} dt = \frac{1}{2} L i^2(t) - \frac{1}{2} L i^2(t_0)$$

$$w(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

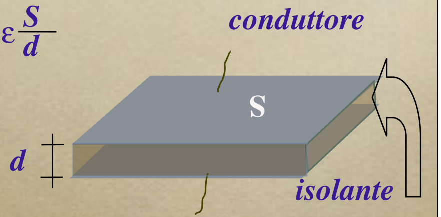
Come effettivamente mostrano questi passaggi. Il fatto che sia l'induttore che il condensatore abbiano in generale una energia immagazzinata, ha come conseguenza che essi sono bipoli che, in un certo senso, posseggono una "memoria". In ogni istante il valore di energia da essi posseduto dipende dalla loro storia passata e condizionerà la loro storia futura. È dunque una memoria a tutti gli effetti e vedremo quanto ciò condizionerà il loro comportamento dinamico.

Condensatore



$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

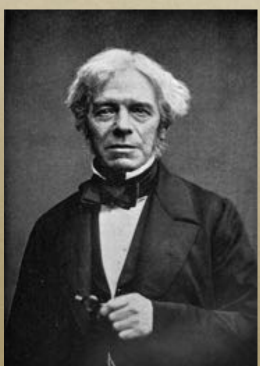
$$i = C \frac{dv}{dt}$$



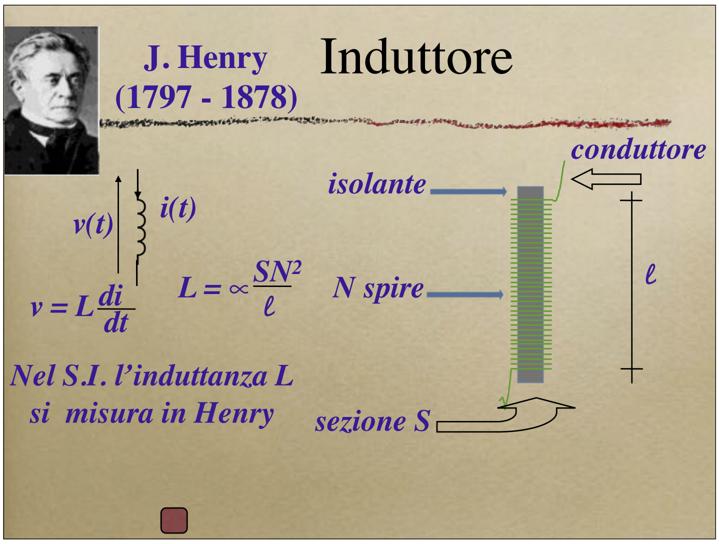
Nel S.I. La capacità C si misura in Farad

Sarebbe facile verificare sperimentalmente che un sistema costituito da due lamine conduttrici di superficie S, con interposto uno strato isolante di spessore d, entro buoni limiti delle grandezze in gioco (correnti e tensioni) si comporta come un condensatore e la sua capacità è data dalla formula indicata.
la capacità nel Sistema Internazionale si misura in Farad, †

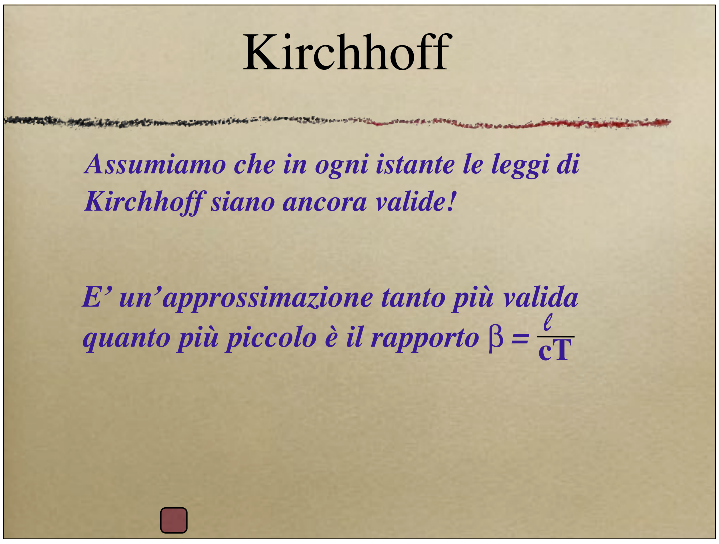
M. Faraday (1791 - 1867)



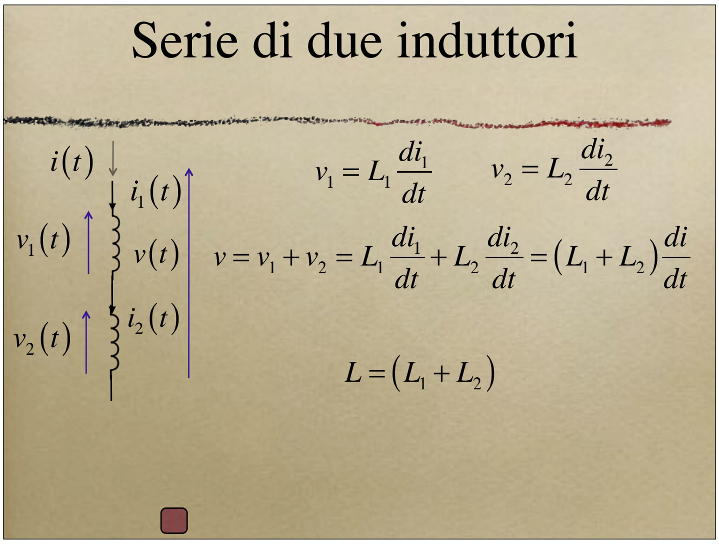
Dal nome di Michael Faraday.



Analogamente si potrebbe verificare che un avvolgimento di N spire di sezione S, avvolte su di un supporto isolante, di lunghezza l, si comporta come un induttore. La sua induttanza L è data dalla formula mostrata. Nel S.I. di misura l'induttanza si misura in Henry, dal nome dello scienziato J.Henry.

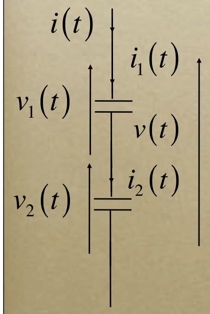


Pur se con le loro specificità, i bipoli induttore e condensatore, se inseriti in una rete insieme ad altri bipoli, devono anche loro sottostare alle leggi di Kirchhoff: la LKC e la LKT, istante per istante. La conseguenza immediata di questa constatazione è che tutte le proprietà delle reti che abbiamo potuto dimostrare valide in regime stazionario basandoci sulle sole leggi di Kirchhoff, restano valide, istante per istante, anche in regime dinamico. Fanno eccezione i teoremi di non amplificazione.
Possiamo dunque costruire una rete di bipoli non più solo resistivi, e scrivere per tale rete delle relazioni tra tensioni e correnti dettate dalle leggi di Kirchhoff.



Resta da vedere come da queste equazioni si giunge alla determinazione delle grandezze elettriche, tensione e corrente, nel loro andamento temporale. Tratteremo questo aspetto partendo da casi particolari estremamente semplici fino a giungere ai casi più complessi.
Cominciamo con osservare che non pone alcun problema una rete costituita o da soli induttori o da soli condensatori. È infatti molto facile ricavare regole di equivalenza per i quattro casi indicati negli schemi riportati nelle immagini a lato. Si ha infatti per la serie di due induttori, che il zipolo risultante è ancora un induttore e ha una induttanza pari a L_1+L_2

Serie di due condensatori



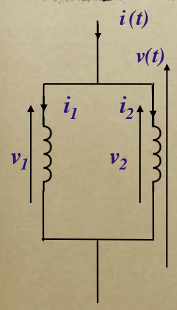
$$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt} \qquad i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} = \frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} = i\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Per la serie di due condensatori si ha che il zipolo equivalente è ancora un condensatore, ma la sua capacità è data dal prodotto delle due capacità dei condensatori in serie diviso la loro somma.

Parallelo di due induttori



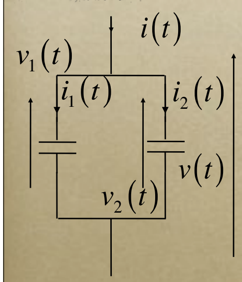
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \qquad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{v_1}{L_1} + \frac{v_2}{L_2} = v\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)$$

$$L = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)^{-1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Cosa analoga accade per il parallelo di due induttori.

Parallelo di due condensatori

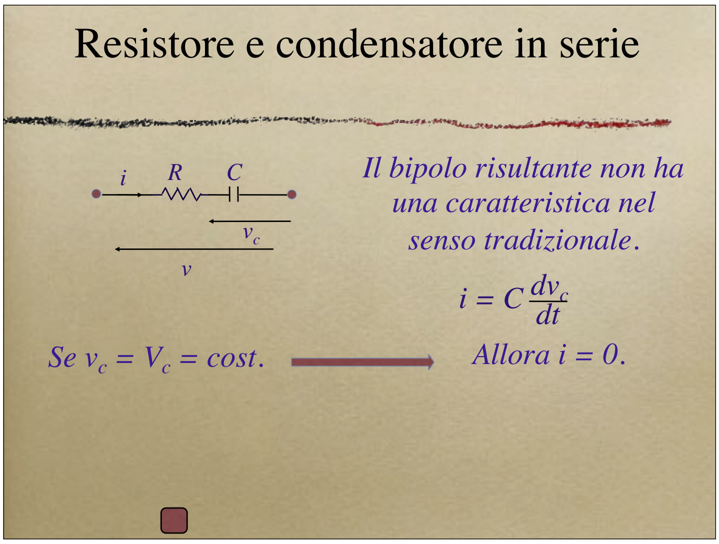


$$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt} \qquad i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt}$$

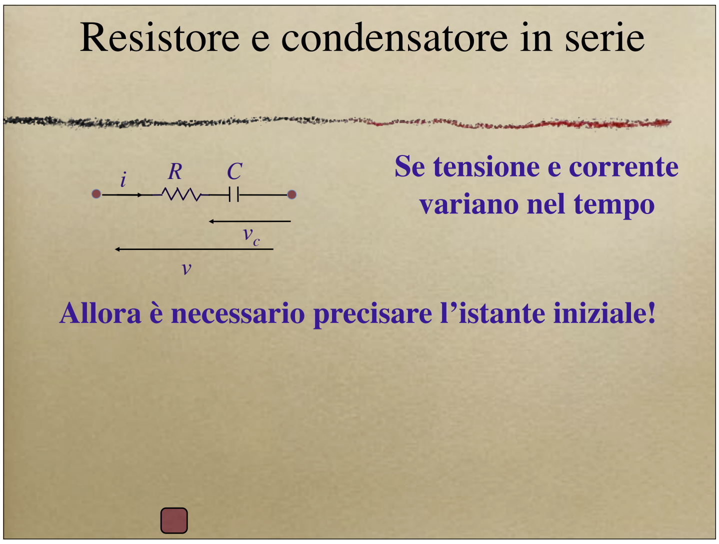
$$i_1 + i_2 = C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = (C_1 + C_2)\frac{dv}{dt}$$

$$C = (C_1 + C_2)$$

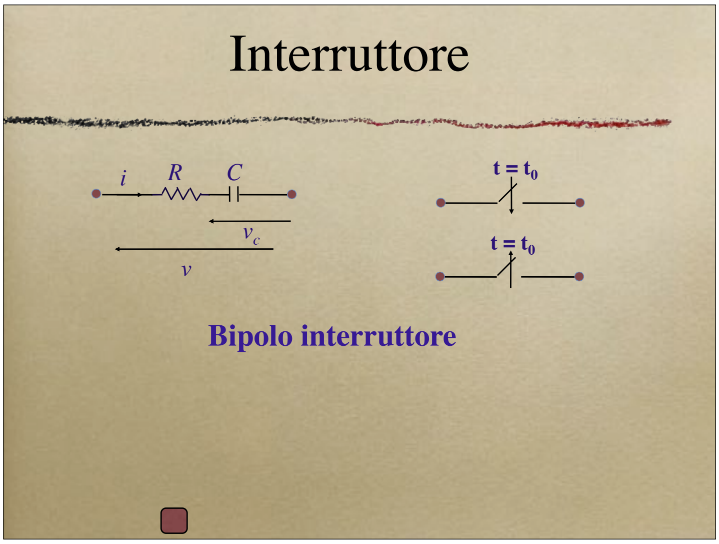
Mentre per il parallelo di due condensatori si ottone facilmente che la capcità risultante è pari alla somma delle due in parallelo.



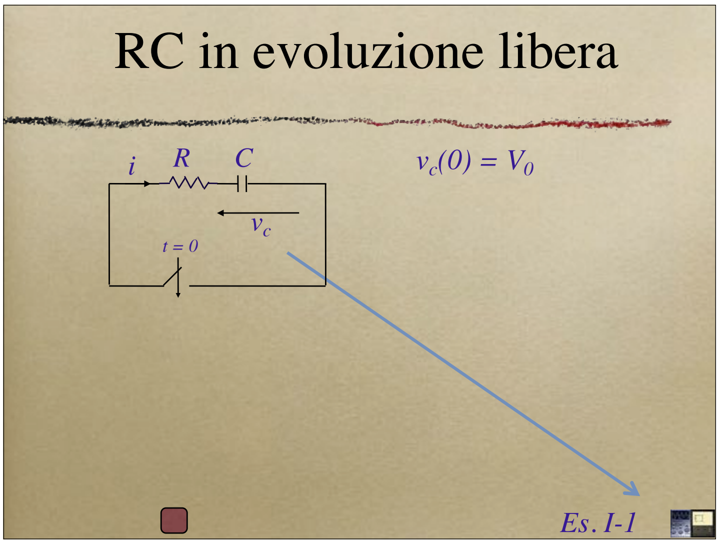
Se nella rete sono presenti anche resistori, le cose si complicano. Consideriamo il caso della serie di un condensatore e di un resistore. Se fossimo in regime stazionario, per la presenza del condensatore che non consente il passaggio di una corrente stazionaria, la soluzione sarebbe banale: i=0. Se invece le grandezze variano nel tempo, diventa necessario precisare quando il fenomeno ha inizio.



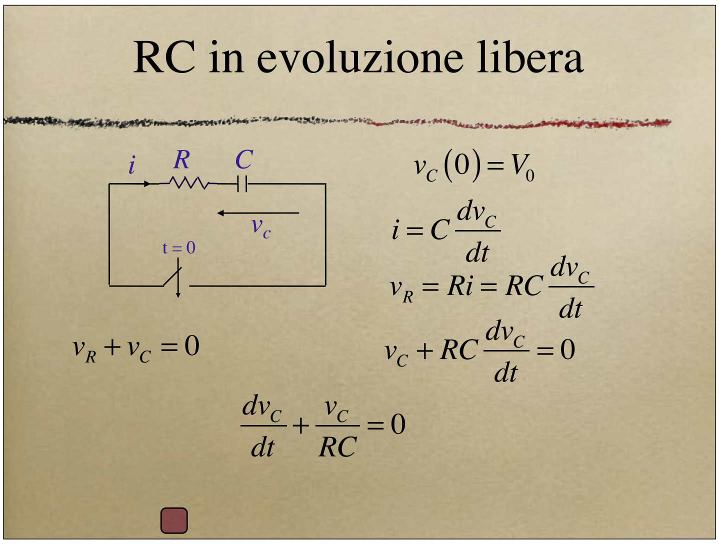
Come abbiamo visto, infatti, i nuovi bipoli introdotti sono in grado di immagazzinare energia; è evidente, quindi, che il comportamento dell'intero circuito sarà necessariamente condizionato dal livello di energia posseduto all'istante iniziale. In un caso concreto l'istante iniziale è chiaramente definito dalla procedura che si mette in opera per collegare i bipoli. Per esempio, dopo aver collegato il morsetto B, collego il morsetto A nell'istante ecc. ecc. Com'è noto, per effettuare concretamente tali collegamenti si utilizzano dispositivi che chiamiamo interruttori.



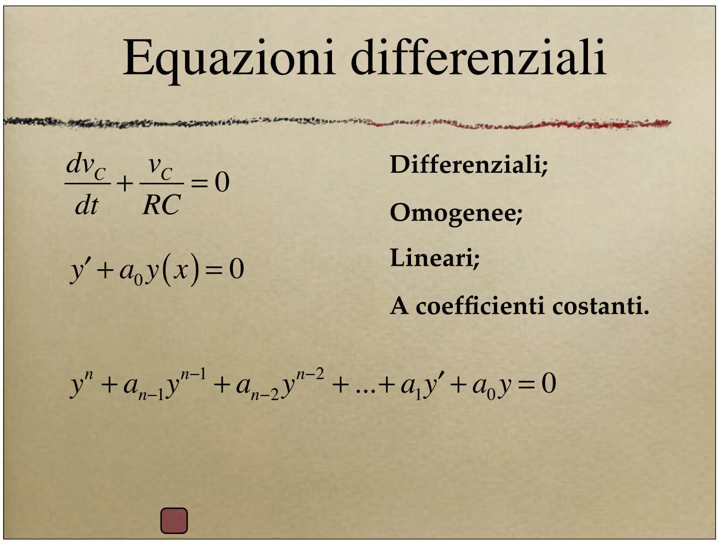
Conviene a questo punto introdurre un'opportuna idealizzazione di tali dispositivi e, precisamente, un bipolo che abbia la caratteristica di essere del tutto simile ad un circuito aperto prima di un determinato istante t_0, che viene detto istante di chiusura dell'interruttore, e viceversa si comporti come un bipolo corto circuito per tutti gli istanti $t \geq t_0$. Ovviamente, dove è possibile, conviene porre $t_0 = 0$, coincidente con l'arbitraria origine dei tempi!
Il bipolo così definito è un interruttore in chiusura; in maniera del tutto analoga si potrà definire un interruttore in apertura.



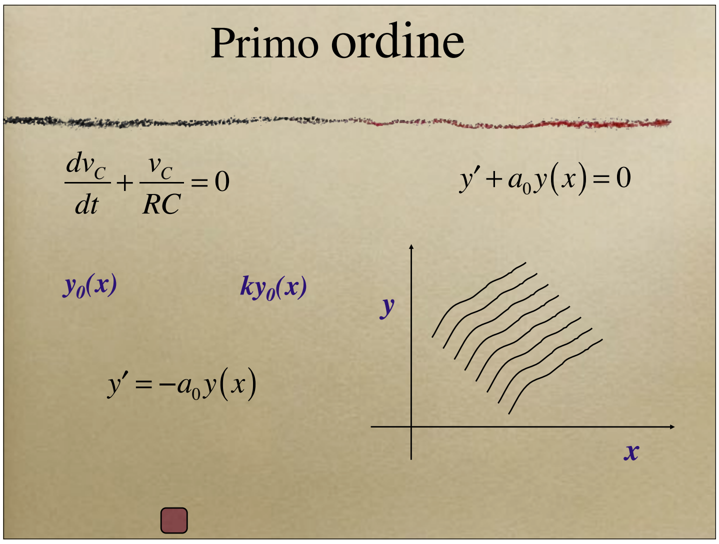
Completiamo, dunque, il circuito precedentemente preso in considerazione inserendo appunto un bipolo interruttore ideale. Il simbolo è quello mostrato nelle figura, dove la freccia indica chiaramente che si tratta di interruttore in chiusura. Notiamo che nella rete non esistono generatori. Questo non vuol dire che la corrente in essa sia necessariamente nulla, perché, come abbiamo visto, in generale c'è dell'energia immagazzinata nel condensatore C all'istante iniziale. Fissiamo il livello di tale energia assegnando il valore V_0 che la tensione sul condensatore ha all'istante t=0.



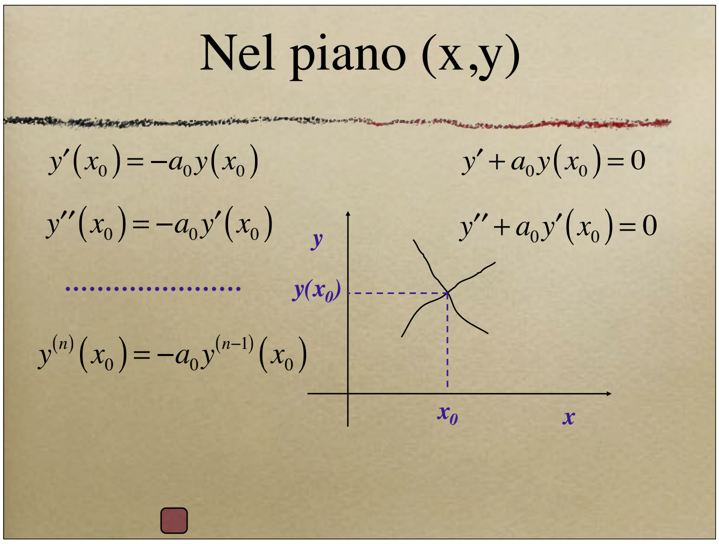
È questo il solo parametro che occorre dare in quanto tutta la storia passata del condensatore è racchiusa nella sua energia immagazzinata all'istante considerato; energia che dipende in maniera univoca dal valore della tensione ai suoi capi: $w=Cv^2/2$. Scriviamo ora l'equazione che esprime la LKT all'unica maglia presente: $v_R+v_C=0$. Con facili passaggi si giunge all'equazione risolvente in forma canonica.



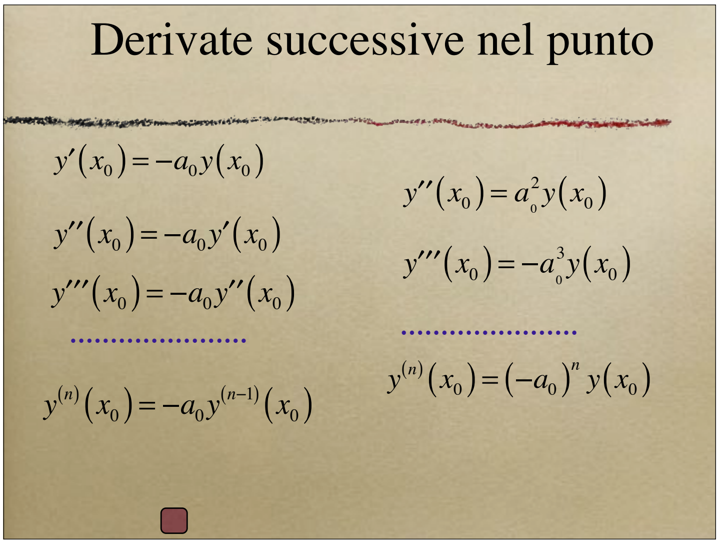
L'equazione in questione è una equazione differenziale ordinaria, omogenea, lineare, del primo ordine, a coefficienti costanti nella incognita $v_C(t)$. È una equazione differenziale, perché l'incognita compare con le sue derivate; ordinaria, perché tali derivate sono appunto ordinarie e non parziali; omogenea, perché non vi compare un termine indipendente dalla incognita a secondo membro; del primo ordine, perché questo è il massimo ordine di derivazione presente; a coefficienti costanti, infine, perché i coefficienti dei vari termini non sono funzioni del tempo.
Il caso più generale è quello di una equazione di ordine n, dove abbiamo scelto di indicare con la lettera x la variabile indipendente e con la y la funzione incognita.



Un classico capitolo dell'Analisi Matematica ci fornisce una metodologia del tutto generale per la sua soluzione; proviamo a ricordare, sinteticamente, le basi su cui tale metodologia si fonda. Cominciamo con l'equazione di primo ordine e osserviamo che se $y_1(x)$ è una soluzione dell'equazione, allora anche $y_2(x)=ky_1(x)$, dove k è una costante arbitraria, è soluzione della stessa equazione. Questo vuol dire che non esiste una unica soluzione, bensì una famiglia di soluzioni che differiscono per una costante moltiplicativa. Vedremo subito che tale famiglia comprende anche tutte le soluzioni possibili.



Possiamo immaginare di rappresentare tutte le soluzioni dell'equazione nel piano (x,y) ottenendo così una famiglia di curve. È facile rendersi conto che tali curve non possono intersecarsi; infatti, se due curve avessero un punto in comune, in quel punto esse dovrebbero avere in comune anche la derivata prima, come si deduce immediatamente perché la nostra equazione mette in relazione il valore della funzione in un punto con quello della sua derivata nello stesso punto.



Derivando poi l'equazione si vede immediatamente che un tale ragionamento è estendibile alle derivate di ordine superiore: se è nota la derivata prima in un punto è nota anche la derivata seconda nello stesso punto. Si noti che tutto ciò è possibile in quanto il coefficiente a_0 è costante! In definitiva si conclude che se due soluzioni avessero un punto in comune, nella rappresentazione nel piano (x,y), esse dovrebbero avere anche tutte le derivate in comune in quel punto, e quindi dovrebbero essere coincidenti.

Sviluppo in serie di Taylor

$$y^{(n)}(x_0) = (-a_0)^n \, y(x_0)$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = y(x_0)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a_0)^n}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= y(x_0)e^{-a_0(x - x_0)}$$

$$y(x) = ke^{-a_0(x - x_0)}$$

Le osservazioni fatte portano a due ulteriori conclusioni. In primo luogo, per individuare una sola soluzione all'interno della famiglia di soluzioni, basta fissare il valore che essa assume in un punto, diciamo x_0. In secondo luogo, poiché se è noto il valore in x_0 sono noti i valori di tutte le derivate nello stesso punto, è possibile esprimere la soluzione cercata sotto forma di uno sviluppo in serie di potenze di punto iniziale x_0. Un osservatore attento avrà riconosciuto che lo sviluppo ottenuto è quello dell'esponenziale

Equazione caratteristica

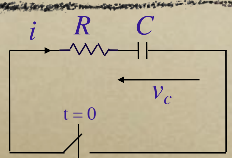
$$y'(x_0) + a_0 y(x_0) = 0 \qquad y(x) = ke^{-a_0(x - x_0)}$$

$$y(x) = ke^{\alpha x} \qquad k\left(\alpha e^{\alpha x} + a_0 e^{\alpha x}\right) = 0 \qquad \alpha = -a_0$$

$$y'(x_0) = -a_0 y(x_0)$$

Abbiamo dunque determinato la soluzione dell'equazione, attraverso un suo sviluppo in serie; proviamo a ritrovare lo stesso risultato guardando le cose da un altro punto di vista. Supponiamo che qualcuno ci abbia suggerito che la soluzione debba essere del tipo ke^{ax}. L'ipotesi non è poi tanto peregrina: la stessa forma dell'equazione ci dice che la sua soluzione deve avere una derivata che coincida, a meno di una costante moltiplicativa, con la soluzione stessa. È immediato pensare alla funzione esponenziale! Volendo determinare a basta sostituire la soluzione ipotizzata nell'equazione ed ottenere $a = -a_0$. L'equazione $a + a_0 = 0$, prende il nome di equazione caratteristica della equazione di partenza.

RC in evoluzione libera



$$v_c(0) = V_0$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{RC} \qquad v_C(t) = ke^{-t/T} \qquad T = RC$$

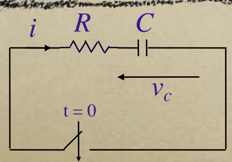
$$v_C(0) = k = V_0$$

$$v_C(t) = V_0 e^{-t/T}$$

Es. I-1

Proviamo ad applicare questa tecnica all'equazione del nostro circuito. In primo luogo l'equazione caratteristica, la cui soluzione è $a = -1/RC$. L'integrale generale sarà dunque $v_C(t) = ke^{-t/T}$. La soluzione dipende da una costante arbitraria; il che è naturale perché non abbiamo ancora imposto la condizione che il condensatore all'istante iniziale abbia la tensione V_0. Imponendo tale condizione si ottiene il risultato cercato.

RC in evoluzione libera



$$v_c(0) = V_0$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{RC} \qquad v_C(t) = V_0 e^{-t/T} \qquad T = RC$$

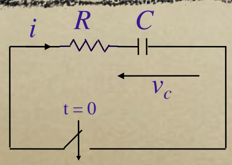
La corrente

$$i(t) = C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{C}{T}V_0 e^{-t/T} = -\frac{1}{R}V_0 e^{-t/T}$$

Es. I-1

La costante di tempo T = RC, che caratterizza il decadimento della tensione sul condensatore, ha una interessante interpretazione geometrica. Se si considera infatti la tangente alla curva che rappresenta l'andamento della tensione nel punto t = 0, e la si prolunga fino ad intersecare l'asse dei tempi, si verifica facilmente che tale intersezione individua un intervallo di tempo pari a T. Si noti che, a causa dell'andamento esponenziale, il valore finale è raggiunto, a rigore, solo dopo un tempo infinito. In pratica, però, dopo un tempo pari ad alcune volte la costante di tempo, il valore della tensione è già molto vicino a quello finale; per t= 3T, per esempio, si ha $v_C(3T) = V_0\, e^{-3} = 0{,}05V_0$. Ricordando che i= C dvC/dt si calcola anche la corrente.:

Energia dissipata durante la scarica



$$v_c(0) = V_0$$

$$i(t) = -\frac{V_0}{R}e^{-t/T}$$

$$W = R\int_0^\infty i^2\,dt = R\int_0^\infty \left[-\frac{V_0}{R}e^{-t/T}\right]^2 dt =$$

$$= \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/T}dt = \frac{V_0^2}{R}\frac{T}{2}\int_0^\infty e^{-x}dx = \frac{1}{2}CV_0^2$$

Siamo ora in grado di effettuare una verifica molto interessante: il risultato trovato ci dice che la rete è sede di una corrente che, partendo dal valore – V_0/R, va a 0 con legge esponenziale. Dato che la corrente i attraversa una resistenza R, essa produrrà una dissipazione di energia che possiamo calcolare, ottenendo $W=CV_0^2/2$. Cioè l'energia dissipata nel resistore da t=0, inizio del fenomeno, a t=∞, è pari a quella inizialmente immagazzinata nel condensatore, a conferma del fatto che tale energia era effettivamente immagazzinata nel condensatore all'istante t=0.

Riepilogo della Lezione

- *Bipoli in regime dinamico;*
- *Condensatori ed induttori;*
- *Energia immagazzinata;*
- *Serie e parallelo di L e C;*
- *Serie di R e C ; Bipolo interruttore;*
- *Equazione risolvente; Equazioni differenziali;*
- *Scarica di C ed energia dissipata;*