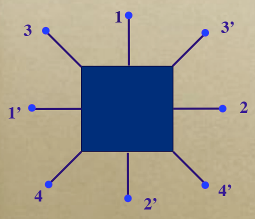
Lezione 10

---

n-bipoli o n-porte.

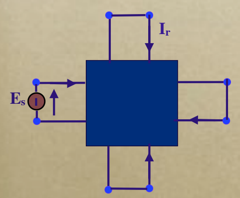


Accoppiando a due a due i morsetti di un N-polo, si ottiene un n-bipolo o n-porte.

Una rete passiva con un certo numero di poli può anche essere considerata da un'altro punto di vista. Assumiamo che il numero di poli N sia pari e poniamo n = N/2. Se scegliamo n coppie di poli e conveniamo di collegare sempre tale N–polo al "resto del mondo" avendo cura che la corrente che entra in un polo di ogni singola coppia sia uguale a quella che esce dall'altro, la struttura così ottenuta godrà evidentemente di speciali proprietà.

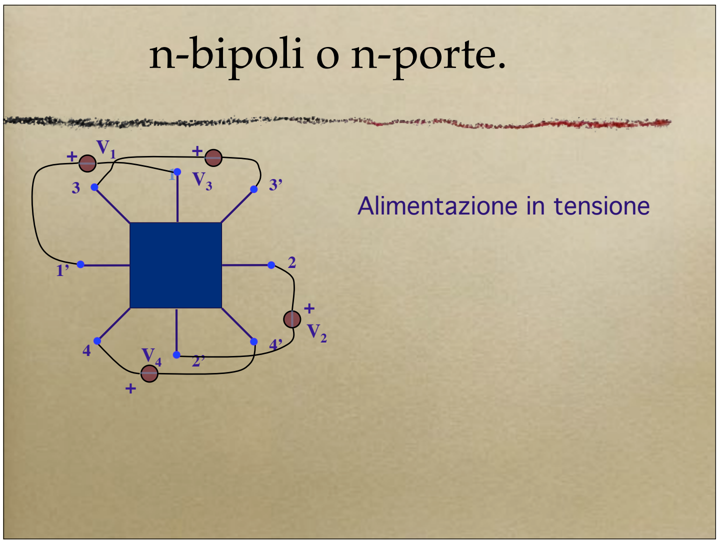
---

n-bipoli o n-porte.

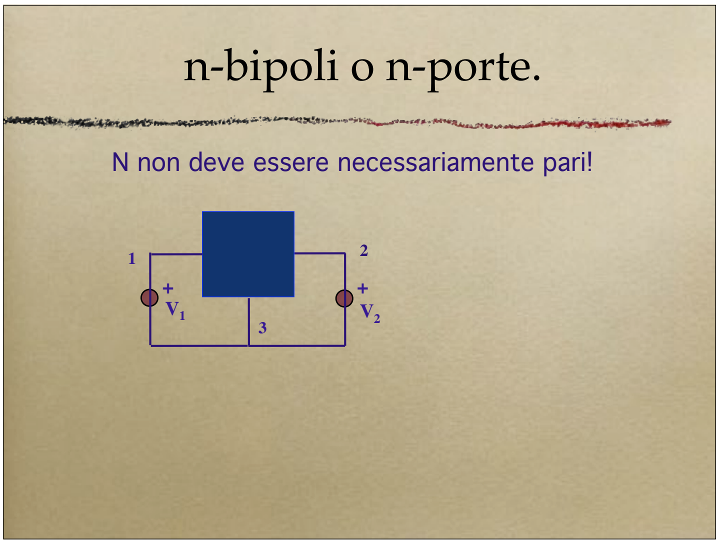


Accoppiando a due a due i morsetti di un N-polo, si ottiene un n-bipolo o n-porte.

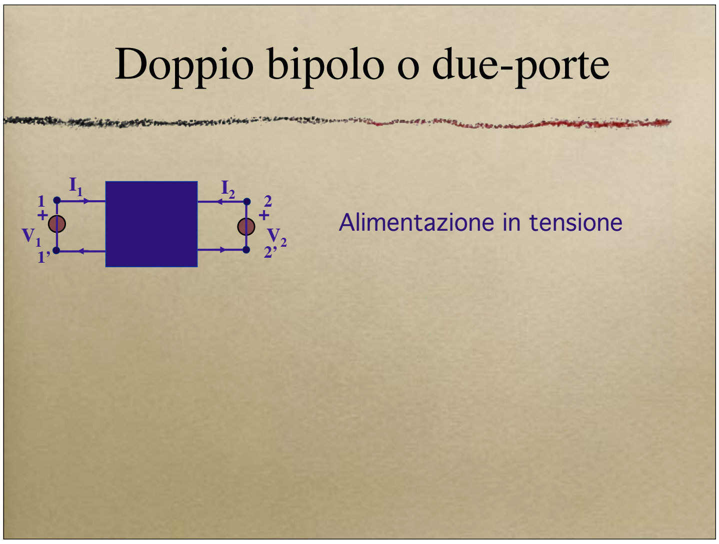
Una rete passiva con un certo numero di poli può anche essere considerata da un'altro punto di vista. Assumiamo che il numero di poli N sia pari e poniamo n = N/2. Se scegliamo n coppie di poli e conveniamo di collegare sempre tale N–polo al "resto del mondo" avendo cura che la corrente che entra in un polo di ogni singola coppia sia uguale a quella che esce dall'altro, la struttura così ottenuta godrà evidentemente di speciali proprietà.



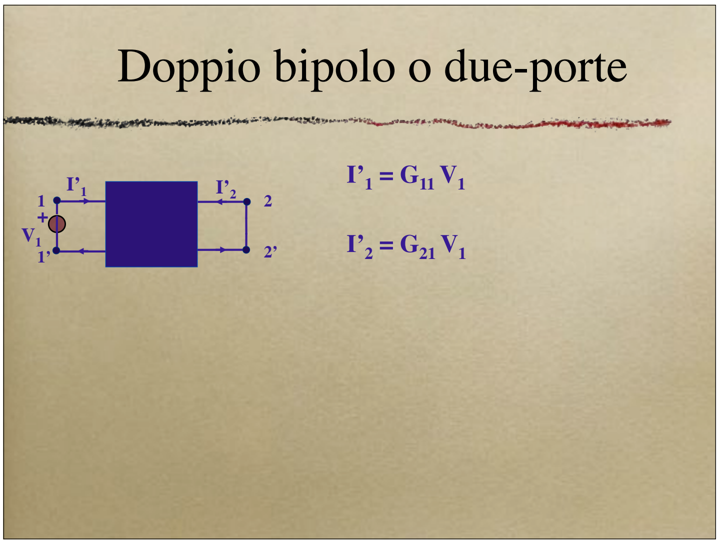
Vogliamo evidenziare tali proprietà del sistema descritto, che d'ora in poi chiameremo n-bipolo. Un generico n-bipolo sarà rappresentato come in figura e sarà caratterizzato da n porte costituite dalle n coppie di morsetti associati. Si parlerà infatti anche di un sistema ad n porte.



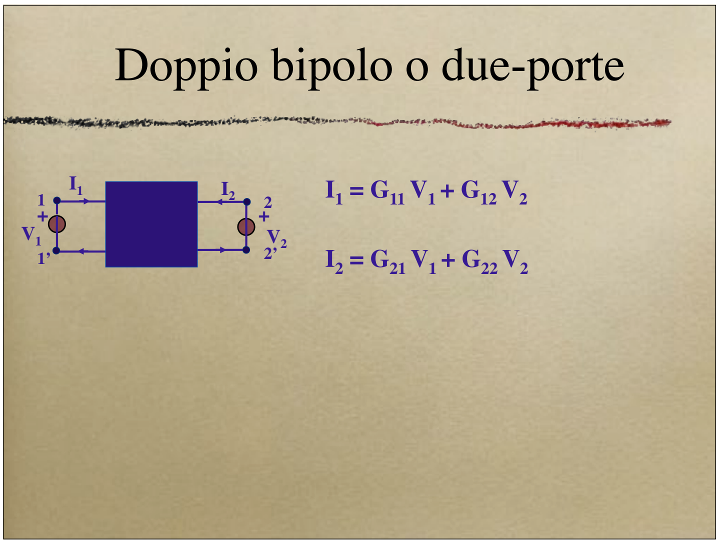
Naturalmente i poli di partenza non debbono essere necessariamente in numero pari perché un polo può essere utilizzato due volte, come mostrato in figura.



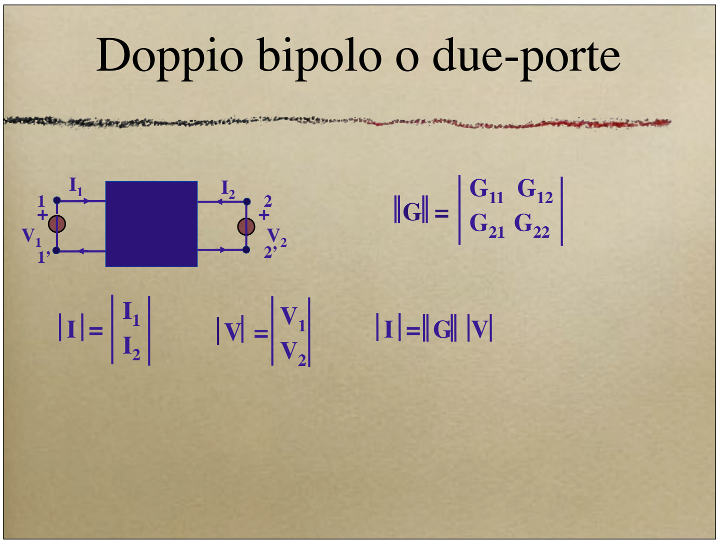
Parleremo in generale di N-porte, ma, per semplicità, faremo sempre riferimento grafico a un due-porte o doppio bipolo, anche perché è il caso che più frequentemente si presenta. Anche in questo caso possiamo immaginare di alimentarlo in tensione e …



…. applicare la sovrapposizione degli effetti.



La teoria generale del n-bipolo lineare ricalca quella del N-polo. Anche per l'n-bipolo, alimentato con n generatori di tensione, avremo una matrice n x n delle conduttanze, che nel seguito indicheremo con il simbolo G.



Utilizzando il formalismo matriciale le relazioni precedenti prendono la forma mostrata, dove ׀V׀ ed ׀I׀ sono rispettivamente i vettori colonna (o riga) delle tensioni e delle correnti e ׀׀G׀׀ la matrice dei parametri G.

n-bipolo o n-porte

$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} \ldots G_{1s} \ldots G_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{r1} \ldots G_{rs} \ldots G_{rn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{n1} \ldots G_{ns} \ldots G_{nn} \end{vmatrix} \qquad |I| = \|G\|\,|V|$$

In generale per un n-porte, avremo…

Definizioni

$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} \ldots G_{1s} \ldots G_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{r1} \ldots G_{rs} \ldots G_{rn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{n1} \ldots G_{ns} \ldots G_{nn} \end{vmatrix}$$

Conduttanze proprie

$$G_{rr} = \left.\frac{I_r}{V_r}\right|_{\substack{V_i=0 \\ i \neq r}}$$

dove G_{rr} è il rapporto tra la corrente I_r e la tensione V_r quando tutte le altre porte sono state cortocircuitate.

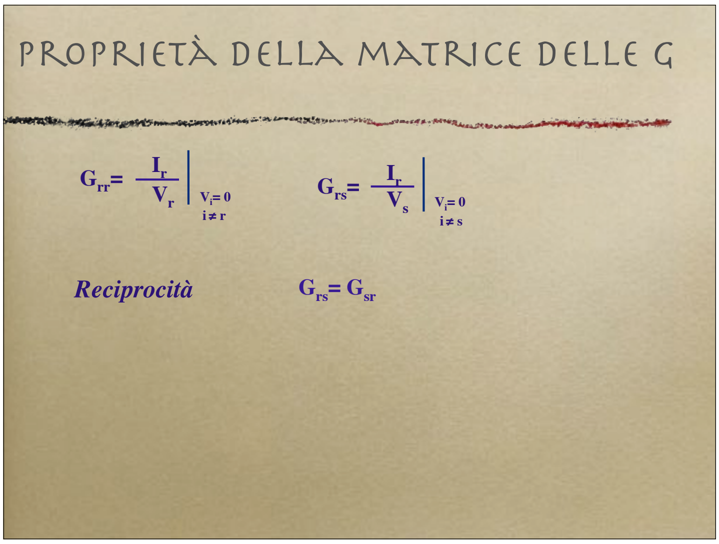
Definizioni

$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} \ldots G_{1s} \ldots G_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{r1} \ldots G_{rs} \ldots G_{rn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{n1} \ldots G_{ns} \ldots G_{nn} \end{vmatrix}$$

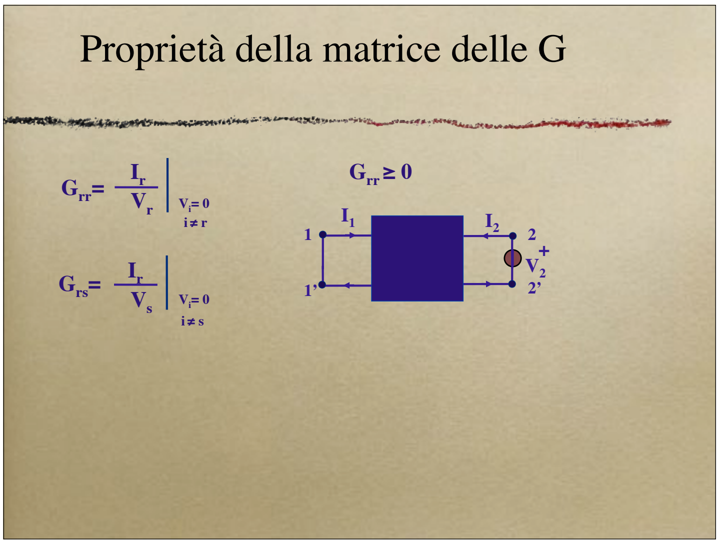
Conduttanze mutue o improprie

$$G_{rs} = \left.\frac{I_r}{V_s}\right|_{\substack{V_i=0 \\ i \neq s}}$$

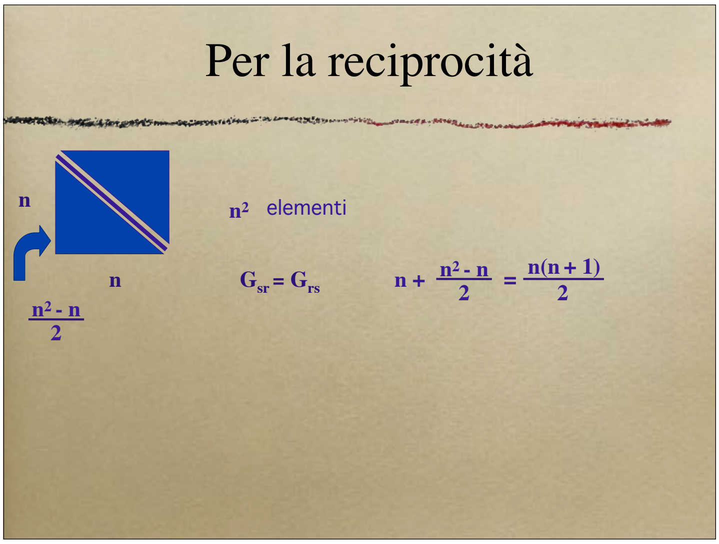
Analogamente per G_{rs}. Questa volta la porta alimentata è la essesima e la corrente va valutata alla porta erresima, quando tutte le altre eccetto la essesima sono in corto.



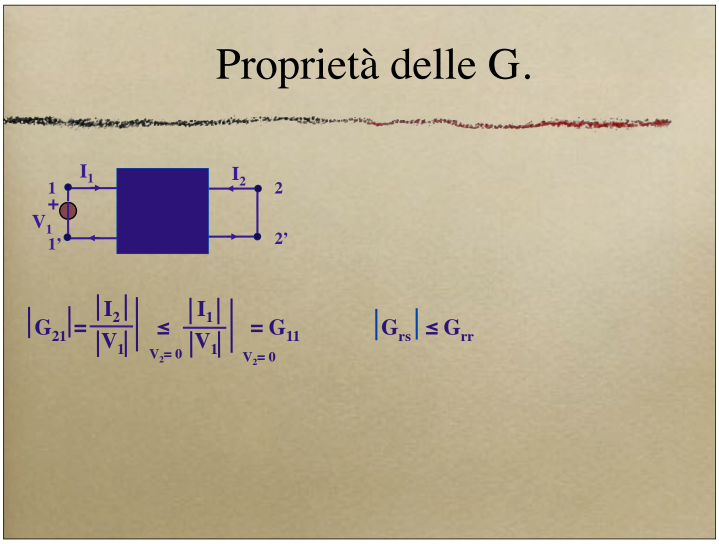
Anche in questo caso la matrice sarà simmetrica per la reciprocità.



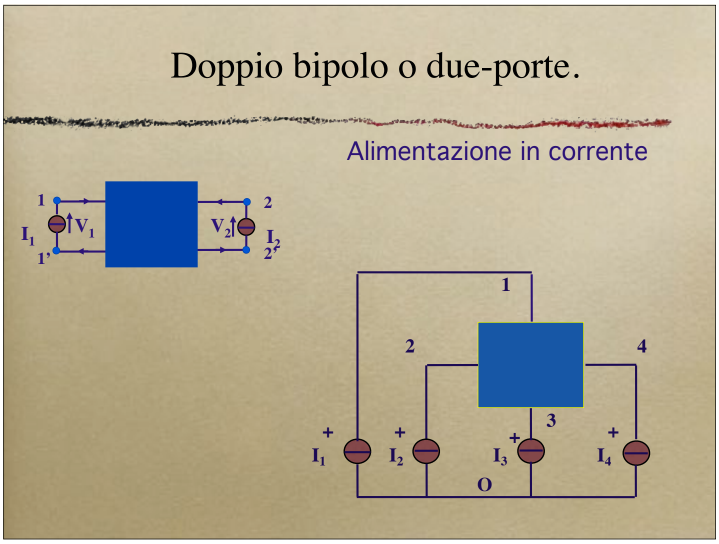
Naturalmente avremo che G_{rr} dovrà essere necessariamente positiva in quanto reale conduttanza all'unica porta alimentata, alla quale si è fatta la convenzione dell'utilizzatore. Nulla si può dire invece a priori sul segno delle G_{rs}.



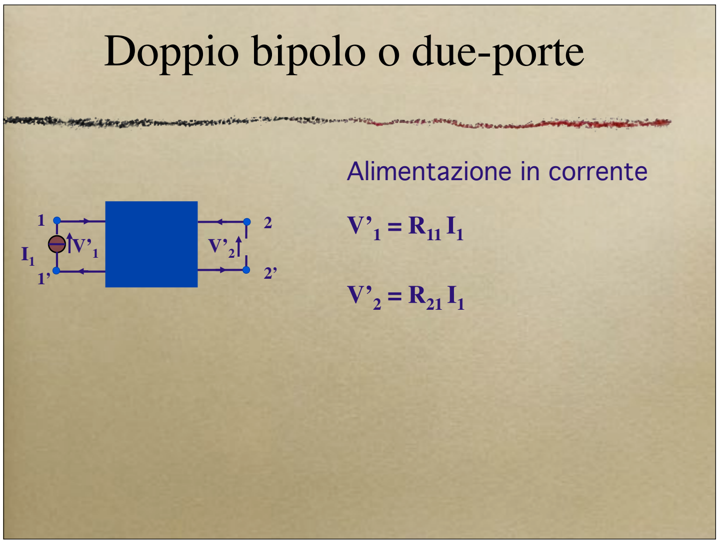
In base alla sua simmetria la matrice delle G avrà solo n(n+1)/2 termini indipendenti. Non sarà valida l'altra proprietà che per l'N-polo abbiamo ottenuto applicando la LKC al nodo O, perché in questo caso non c'è un nodo O.



Per le Grs, invece si può dedurre un'altra proprietà più debole di quella equivalente dell'N-polo, applicando i teoremi di non amplificazione come mostrato in figura. Ogni conduttanza mutua G_{rs} deve essere minore in modulo di qualsiasi conduttanza propria della matrice, almeno in continua.



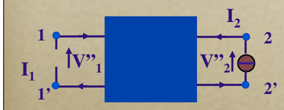
Un fatto sostanzialmente diverso per l'n-porte è che esso può essere alimentato anche in corrente, contrariamente a quanto accade per l'N-polo, come è facile comprendere confrontando le due situazioni diverse.



Ancora una volta si applica la sovrapposizione: prima rete.

Doppio bipolo o due-porte

Alimentazione in corrente



$$V''_1 = R_{12}\, I_2$$

$$V''_2 = R_{22}\, I_2$$

Seconda rete,

Matrice delle R

$$V_1 = R_{11}\, I_1 + R_{12}\, I_2$$

$$V_2 = R_{21}\, I_1 + R_{22}\, I_2$$

Somma. Si ottiene una matrice delle R.

Proprietà della matrice delle R

$$R_{rs} = \left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i = 0 \\ i \neq s}} \qquad R_{sr} = \left.\frac{V_s}{I_r}\right|_{\substack{I_i = 0 \\ i \neq r}}$$

Reciprocità $\quad R_{rs} = R_{sr}$

Ancora una volta per la reciprocità dedurremo che la matrice è simmetrica.

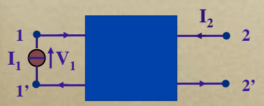
Proprietà della matrice delle R

$$R_{rr} = \left.\frac{V_r}{I_r}\right|_{\substack{I_i=0 \\ i\neq r}} \qquad R_{rr} \geq 0$$

$$R_{rs} = \left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i=0 \\ i\neq s}}$$

E che le resistenze proprie sono necessariamente positive.

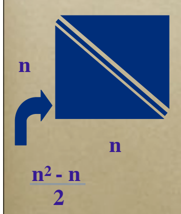
Proprietà della matrice delle R.



$$|R_{21}| = \left.\frac{|V_2|}{|I_1|}\right|_{I_2=0} \leq \left.\frac{|V_1|}{|I_1|}\right|_{I_2=0} = R_{11} \qquad |R_{rs}| \leq R_{rr}$$

E ancora una volta, dedurremo dai teoremi di non amplificazione, che ogni resistenza mutua deve essere minore in modulo di qualsiasi resistenza propria della matrice.

Per la reciprocità



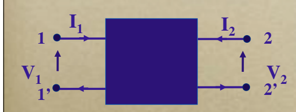
n^2 elementi

$$R_{sr} = R_{rs}$$

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

In conclusione i parametri indipendenti anche per le R saranno solo n(n+1)/2

Doppio bipolo o due-porte



$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}$$

$$\|R\| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}$$

È interessante indagare come si possa passare dalla conoscenza della matrice delle G, per esempio, a quella delle R. Ovviamente non è vero che ogni parametro R è l'inverto del corrispondente parametro G. Sarebbe un grave errore. Per ricavare la relazione corretta possiamo ragionare in questo modo.

Doppio bipolo o due-porte

$$I_1 = G_{11} V_1 + G_{12} V_2$$
$$I_2 = G_{21} V_1 + G_{22} V_2$$

$$V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2$$
$$V_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & G_{12} \\ I_2 & G_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}}$$

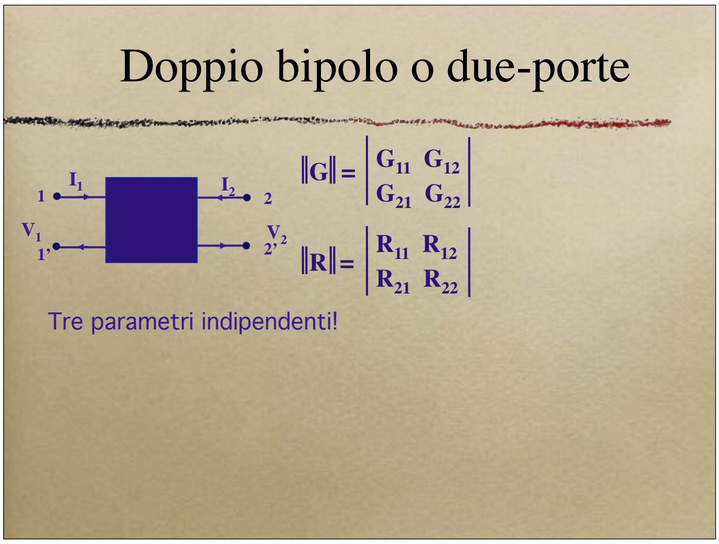
$$R_{11} = \frac{G_{22}}{G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21}}$$

Se dalle equazioni delle I in funzione di V voglio ottenere quelle delle V in funzione delle I, debbo evidentemente risolvere il primo sistema di equazioni, immaginando che le V sono le incognite e le I i termini noti. Con la regola di Cramer si ottiene facilmente il risultato, da cui si deduce che R_{11}, per esempio, ha l'espressione mostrata

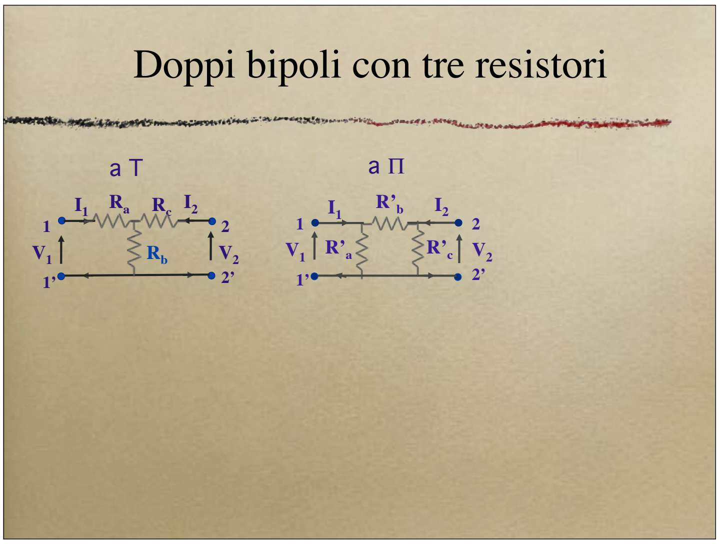
In generale

$$R_{rs} = \frac{|G_{rs}|}{|G|} \qquad G_{rs} = \frac{|R_{rs}|}{|R|}$$

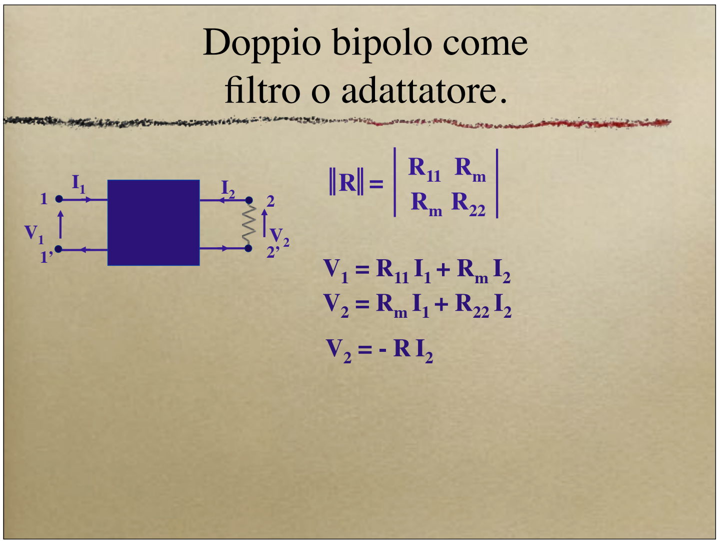
Ed in generale, dove $|G|$ ed $|R|$ sono rispettivamente i determinanti della matrice delle conduttanze e delle resistenze, mentre G_{sr} e R_{sr} sono i minori aggiunti dei termini di posto s,r nei due casi. In altri termini la matrice delle G è la inversa della matrice delle R.



Dovendo il doppio bipolo dipendere da soli tre parametri, si potrà realizzarlo con almeno tre resistori.

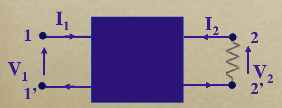


E tre bipoli possono essere collegati a fare un doppio bipolo in solo due modi diversi. Il primo prende il nome di doppo bipolo a T ed il secondo a Π, per l'evidente somiglianza grafica dei corrispondenti schemi elettrici classici.



Nello schema indicato, in cui la porta secondaria è chiusa su di un carico R, domandiamoci qual'è la resistenza vista dalla porta primaria.

Doppio bipolo come filtro o adattatore.

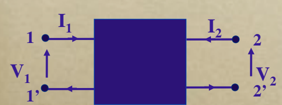


$$\|R\| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_m \\ R_m & R_{22} \end{vmatrix}$$

$$\frac{V_1}{I_1} = R_{11} - \frac{R_m^2}{R + R_{22}}$$

È facile ricavare il risultato indicato in figura. In questo caso si dice che il doppio bipolo fa da filtro, o adattatore, modificando la resistenza eventualmente vista da un generatore collegato alla porta primaria.

Potenza dissipata nel Doppio bipolo

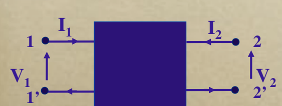


$$V_1 = R_{11} I_1 + R_m I_2$$
$$V_2 = R_m I_1 + R_{22} I_2$$

$$P = V_1 I_1 + V_2 I_2 = R_{11} I_1^2 + 2 R_m I_1 I_2 + R_{22} I_2^2$$

La potenza assorbita dal doppio bipolo è, naturalmente la somma di quelle assorbite alle due porte.

Potenza dissipata nel Doppio bipolo

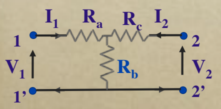


$$V_1 = R_{11} I_1 + R_m I_2$$
$$V_2 = R_m I_1 + R_{22} I_2$$

$$P = V_1 I_1 + V_2 I_2 = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{I_2^2}{G_{22}}$$

Si può dimostrare che tale potenza si può scrivere anche in un diverso modo, dove la potenza assorbita è espressa come somma della potenza assorbita dalla porta primaria quando la secondaria è a vuoto e la potenza assorbita dalla porta secondaria con la primaria in corto circuito.

Matrice delle R per il doppio bipolo a T

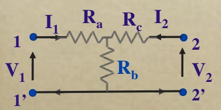


$$R_{rs} = \left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i = 0\\ i \neq s}}$$

$$R_{11} = R_a + R_b$$
$$R_{22} = R_c + R_b$$
$$R_m = R_b$$

Proviamo a calcolare i parametri R e G per i due doppi bipolo a T ed a Π.
I parametri R.

Matrice delle G per il doppio bipolo a T

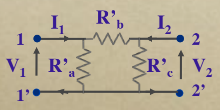


$$G_{rs} = \left.\frac{I_r}{V_s}\right|_{\substack{V_i = 0\\ i \neq s}}$$

$$G_{11} = \frac{1}{R_a + \dfrac{R_b\, R_c}{R_b + R_c}}$$
$$G_{22} = \frac{1}{R_c + \dfrac{R_b\, R_a}{R_b + R_a}}$$
$$G_m = -\frac{R_b}{R_a\,(R_b + R_c) + R_b\, R_c}$$

I parametri G

Matrice delle R per il doppio bipolo a Π

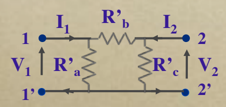


$$R_{rs} = \left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i = 0\\ i \neq s}}$$

$$R'_{11} = \frac{R'_a\,(R'_b + R'_c)}{R'_a + R'_b + R'_c}$$
$$R'_{22} = \frac{R'_c\,(R'_b + R'_a)}{R'_a + R'_b + R'_c}$$
$$R'_m = \frac{R'_a\, R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c}$$

E ancora, i parametri R

Matrice delle G per il doppio bipolo a Π



$$G_{rs} = \left.\frac{I_r}{V_s}\right|_{\substack{V_i = 0\\ i \neq s}}$$

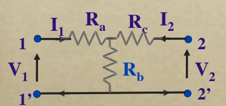
$$G'_{11} = \frac{R'_a + R'_b}{R'_a R'_b}$$

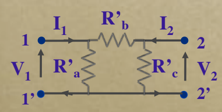
$$G'_{22} = \frac{R'_c + R'_b}{R'_c R'_b}$$

$$G'_m = -\frac{1}{R'_b}$$

E i parametri G

Il segno delle mutue!





$$R_m = R_b$$

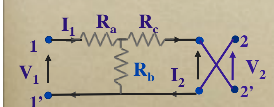
$$G_m = -\frac{R_b}{R_a(R_b + R_c) + R_b R_c}$$

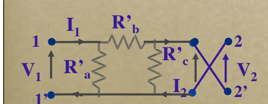
$$R'_m = \frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c}$$

$$G'_m = -\frac{1}{R'_b}$$

Guardando l'espressione dei parametri mutui nei diversi casi, si potrebbe pensare che, per esempio, non sia possibile sintetizzare una matrice delle conduttanze con una mutua positiva, con un doppio bipolo a T. Infatti la formula trovata nel caso in questione è necessariamente negativa.

Inversione dei morsetti





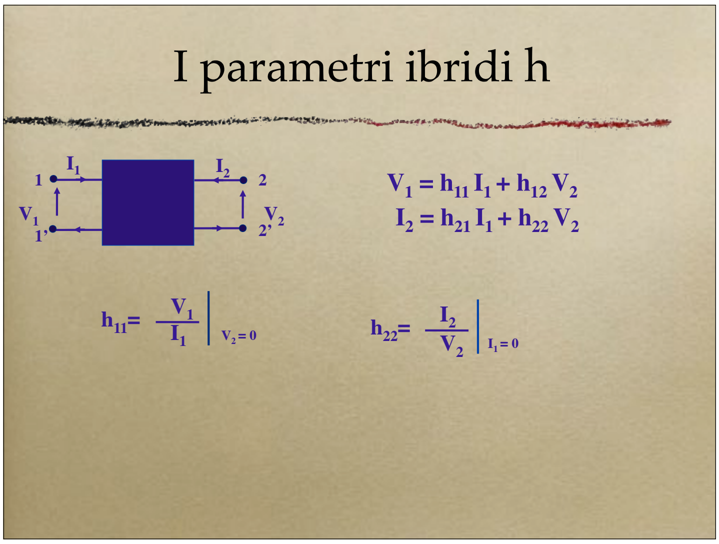
$$R_m = -R_b$$

$$G_m = \frac{R_b}{R_a(R_b + R_c) + R_b R_c}$$

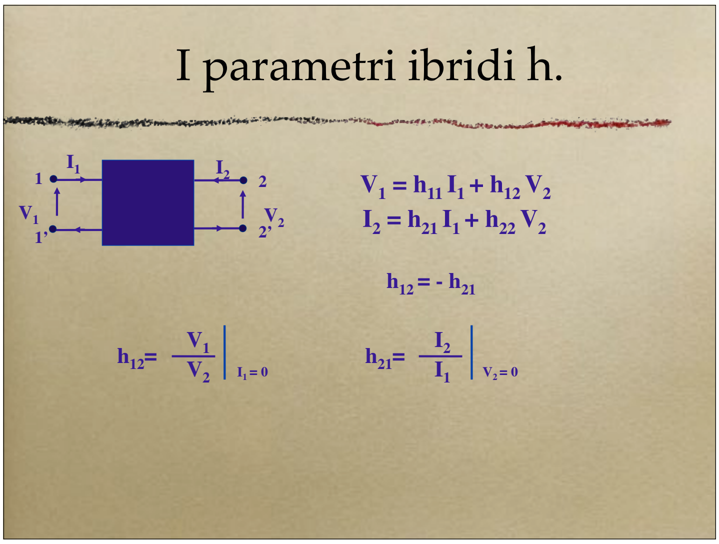
$$R'_m = -\frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c}$$

$$G'_m = \frac{1}{R'_b}$$

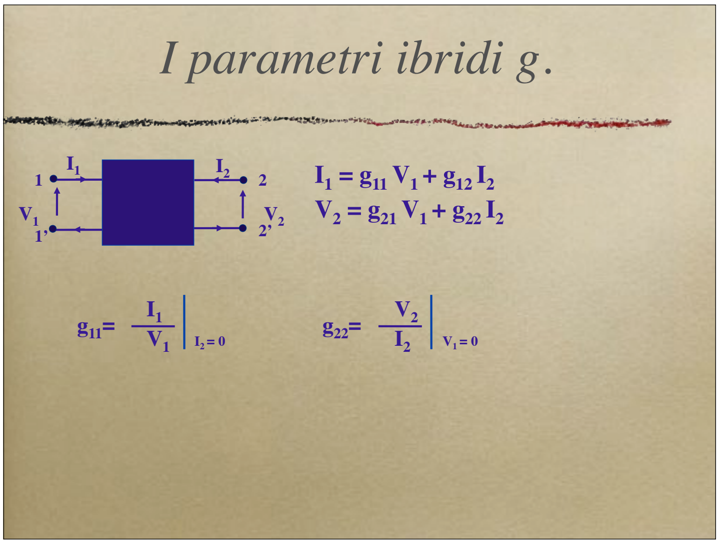
Una semplice inversione dei morsetti secondari risolve immediatamente il problema, dato che con tale inversione le nuove formule sono quelle indicate.



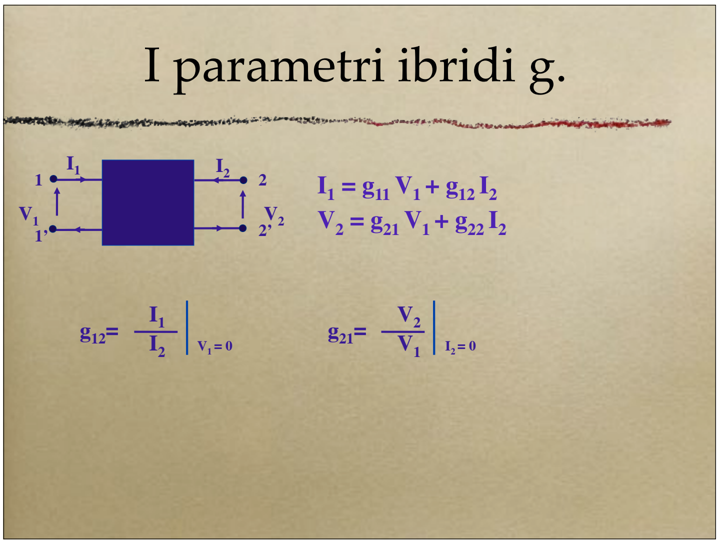
Facciamo ora un brevissimo cenno ad altre possibili rappresentazioni dell'n-bipolo ed, in particolare, del doppio bipolo o due porte. Invece di esprimere le tensioni alle porte in funzione delle correnti, o viceversa, è possibile esprimere, per esempio, la V_1 e la I_2 in funzione della V_2 e della I_1.
I parametri h così definiti prendono il nome di parametri ibridi; si noti, infatti, che essi non hanno tutti le stesse dimensioni. Mentre h_{11} ha le dimensioni di una resistenza ed h_{22} ha quelle di una conduttanza,



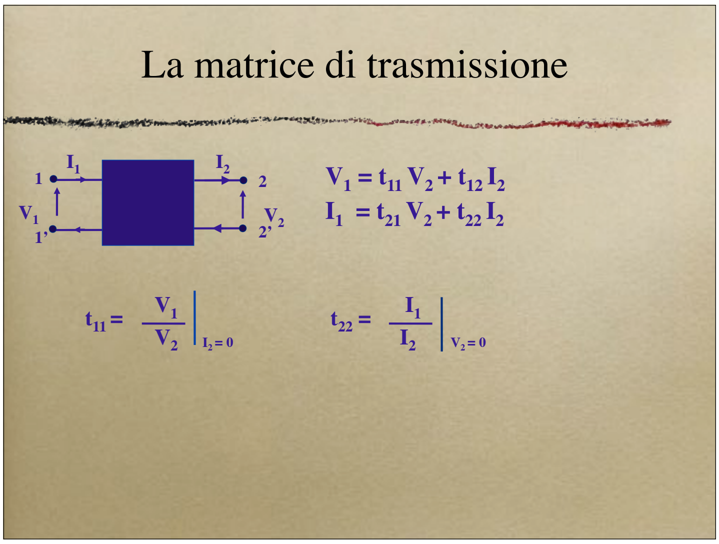
h_{12} ed h_{21} hanno le dimensioni di numeri puri. Si noti infine che per i parametri h la reciprocità è espressa dalla relazione $h_{21} = - h_{12}$. Sapete dimostrarlo?



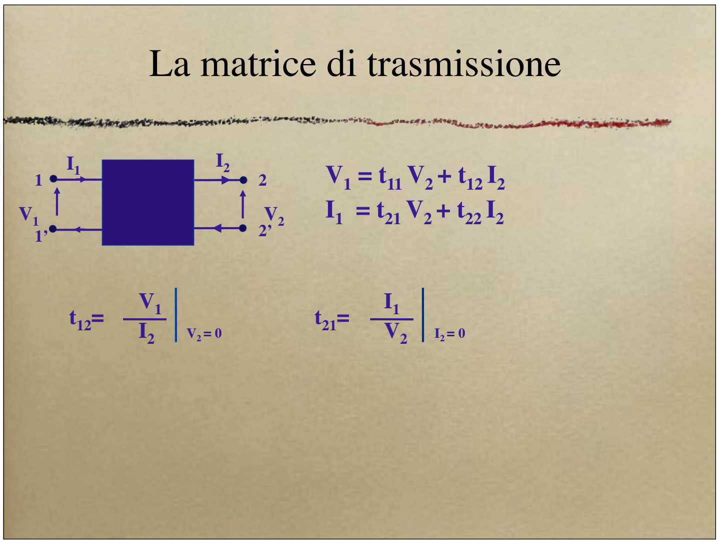
La rappresentazione ibrida analoga, in cui V_2 e I_1 sono espressi in funzione di V_1 ed I_2 , viene detta dei parametri g e di essa diamo le definizioni. Evidentemente mentre g_{11} è una conduttanza, g_{22} è una resistenza.



E ancora, g_{12} e g_{21} sono numeri puri. Il primo viene detto guadagno in corrente ed il secondo fattore di amplificazione in tensione.

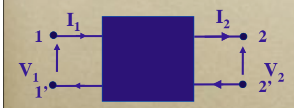


Un cenno infine alla descrizione del doppio bipolo con la cosiddetta matrice di trasmissione che mette in relazione le grandezze ad una porta con quelle all'altra. Si noti la scelta della convenzione del generatore alla porta secondaria; il motivo di tale scelta sarà chiarito successivamente. Naturalmente, t_{11} e t_{21} sono numeri puri.



Mentre t_{12} è una resistenza e t_{21} una conduttanza.

La matrice di trasmissione.

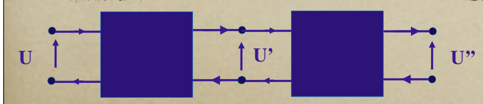


$$V_1 = t_{11} V_2 + t_{12} I_2$$
$$I_1 = t_{21} V_2 + t_{22} I_2$$

$$U' = T\,U \qquad \begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

La rappresentazione con la matrice di trasmissione è molto utile quando si hanno due doppi bipoli in cascata. Infatti utilizzando un simbolismo matriciale, si può caratterizzare il primo doppio bipolo con la matrice T…

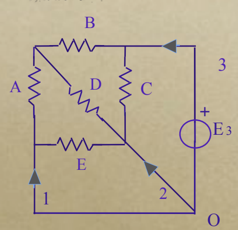
La matrice di trasmissione.



$$\begin{cases} U = T\,U' \\ U' = T'\,U'' \end{cases} \Longrightarrow U = TT'\,U''$$

e con T' il secondo. Grazie alle convezioni fatte sulle porte secondarie si potrà affermare che la matrice di trasmissione di due doppi bipoli in cascata è il prodotto delle singole matrici dei doppi bipoli.

Esercizi: Matrice delle G



$G_{13} = -\ 1/4\ S$

$I_3 = E_3/R_e$

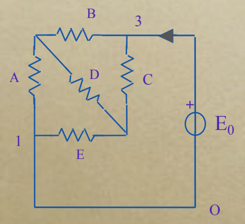
$R_B = R_C = R_E = 1\Omega;$

$R_A = R_D = 2\ \Omega.$

$R_e = ((R_A // R_D) + R_B) // R_C$

Ecco un circuito a ponte visto però come un tripolo. Lo schema rappresentato è quello in base al quale si può calcolare la G_{13} del N-polo. Notare che a fusa dei collegamenti effettuati per cortocircuitare gli altri poli, le residenze R_A e R_D sono in parallelo perché R_E è cortocircuitata.

Circuito a ponte

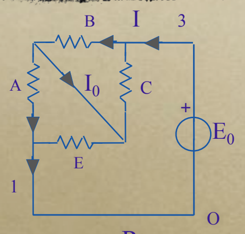


$R_A = 1\ \Omega;$
$R_B = 1\ \Omega;$
$R_C = 3\ \Omega;$
$R_E = 3\ \Omega;$
$R_D = 3\ \Omega;$
$E_0 = 3V.$

Quale condizione debbono verificare i valori delle resistenze perché il ponte sia in equilibrio?

Torniamo al circuito a ponte, alimentato tra i morsetti 3 ed 1, e domandiamoci se è possibile, per opportuni valori delle sue resistenze, che nel ramo D la corrente sia nulla.

Ponte in equilibrio



$R_A = 1\ \Omega;$
$R_B = 1\ \Omega;$
$R_C = 3\ \Omega;$
$R_E = 3\ \Omega;$
$R_D = 3\ \Omega;$
$E_0 = 3V.$

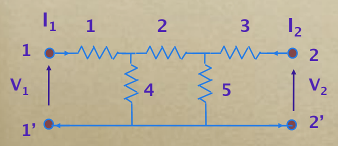
$$I_B = I\frac{R_C}{R_B + R_C}$$

$$I_A = I\frac{R_E}{R_A + R_E}$$

$$\Longrightarrow \quad R_B R_E = R_A R_C$$

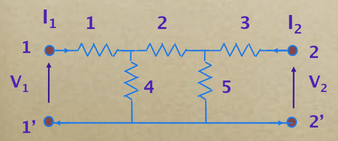
Se la corrente nel ramo D è nulla vuol dire che i nodi r ed s sono allo stesso potenziale e quindi è come se la resistenza in D fosse cortocircuitata, ed rami B e C e quelli A ed E fossero in parallelo. E' facile quindi ricavare le espressioni di IA ed IB che eguagliate danno la relazione cercata.

Esercizi: Matrice delle R e delle G



Calcolare la matrice delle R e delle G per il seguente doppio bipolo.

Esercizi:
Matrice delle R e delle G



$$R_{11} = \frac{(R_2 + R_5)\,R_4}{R_2 + R_5 + R_4} + R_1$$

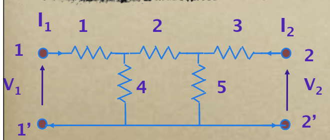
$$R_{22} = \frac{(R_2 + R_4)\,R_5}{R_2 + R_5 + R_4} + R_3$$

$$R_m = \frac{R_5\,R_4}{R_2 + R_5 + R_4}$$

$$R_{rs} = \left.\frac{V_r}{I_s}\right|_{\substack{I_i = 0 \\ i \neq s}}$$

Matrice delle R

Esercizi:
Matrice delle R e delle G



$$G_{11} = \left[\frac{(R_e + R_2)\,R_4}{R_2 + R_e + R_4} + R_1\right]^{-1}$$

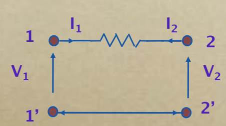
$$G_{rs} = \left.\frac{I_r}{V_s}\right|_{\substack{V_i = 0 \\ i \neq s}}$$

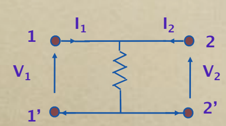
$$R_e = \frac{R_3\,R_5}{R_3 + R_5}$$

$$G_m = \frac{-\,R_4\,R_5\,/(R_3 + R_5)}{(R_2 + R_e + R_4)\,R_1 \;+\; (R_2 + R_e)\,R_4}$$

Matrice delle G.

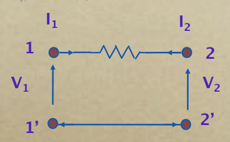
Esercizi:
Rappresentazioni possibili





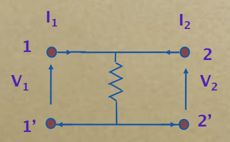
Non tutte le rappresentazioni (matrice delle R, delle G,delle h, delle g o delle t) sono sempre possibili per qualsiasi bipolo. Ecco due bipoli che non possono avere determinate rappresentazioni, quali?

Esercizi:
Rappresentazioni possibili



$$R_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1 = 0}$$

Solo matrice delle G



$$G_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1 = 0}$$

Solo matrice delle R

Il primo può avere solo quella delle G ed il secondo quella delle R

Esercizi:
Condizioni di fisica realizzabilità

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Delle seguenti matrici R di un doppio bipolo, quale non soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità e perché?

Rispondere alla domanda

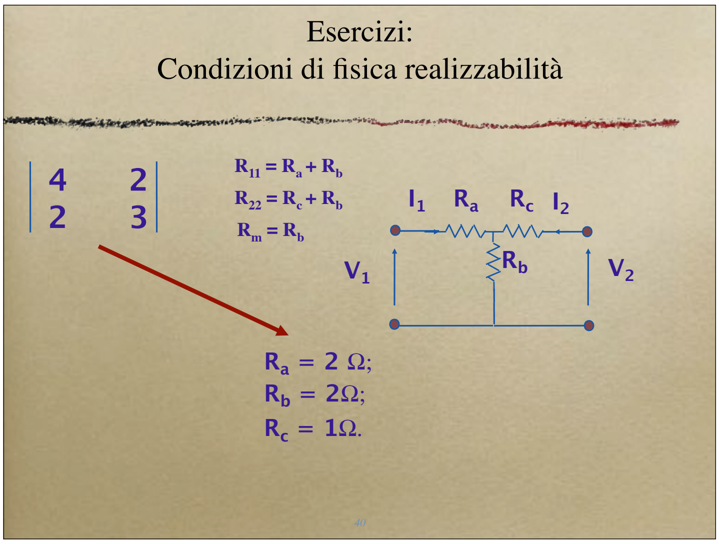
Esercizi:
Condizioni di fisica realizzabilità

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

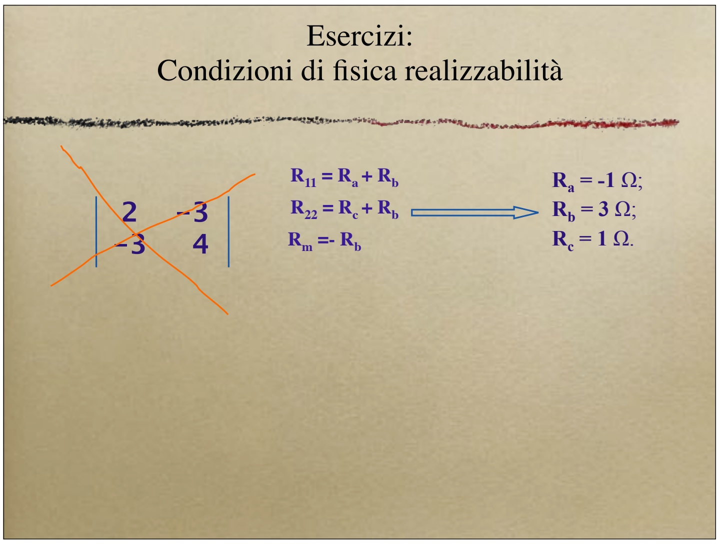
$$\cancel{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}$$

Delle seguenti matrici R di un doppio bipolo, quale non soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità e perché.

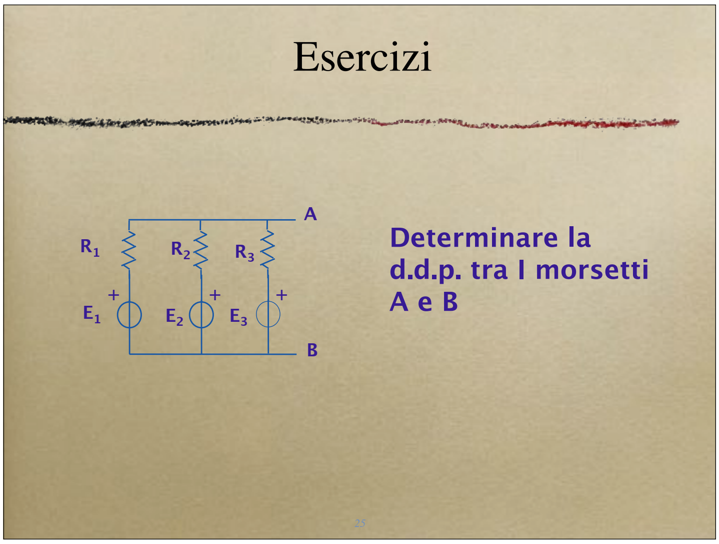
la seconda matrice non soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità: perché?

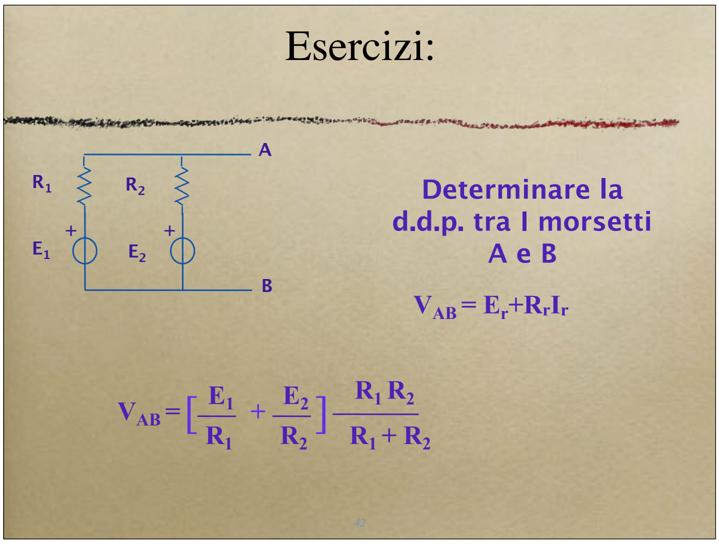


Infatti la prima si può sintetizzare alla maniera seguente.

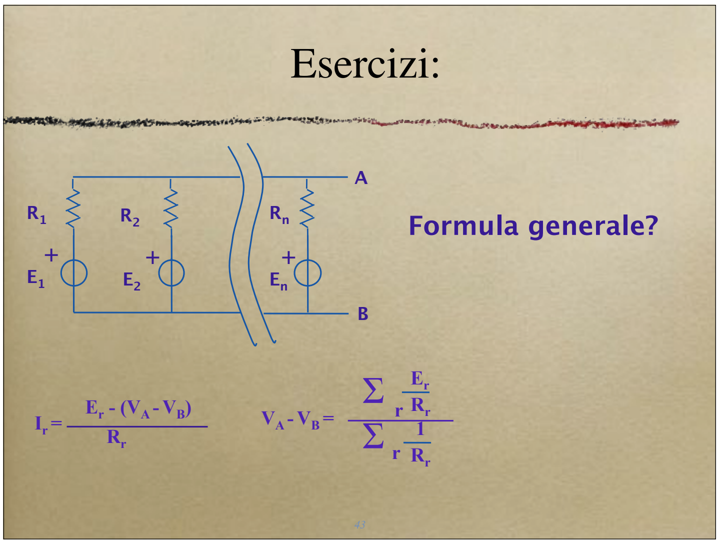


Mentre la seconda richiederebbe una Ra negativa.

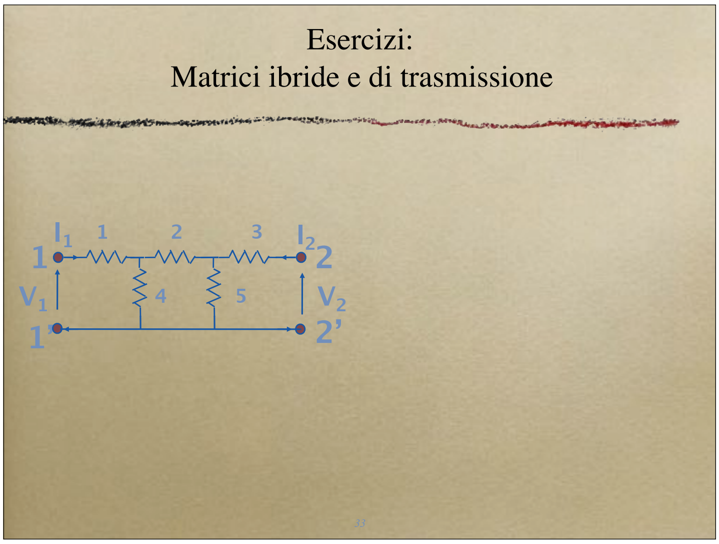




In pratica basta applicare il metodo dei potenziali ai nodi.



E facile comprendere che la formula è valida anche per N lati in parallelo.



Riepilogo della Lezione

- **n-bipoli o n-porte;**
- **Matrice delle G e delle R;**
- **Doppi bipoli a T o a Π;**
- **Doppi bipoli come adattatori;**
- **Potenza assorbita da un doppio bipolo.**
- **Doppi bipoli a T o a Π: formule ;**
- **Rappresentazioni ibride;**
- **Matrice di trasmissione;**
- **Ponte in equilibrio.**