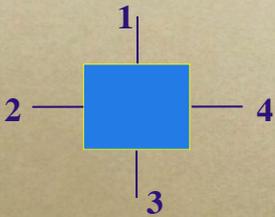


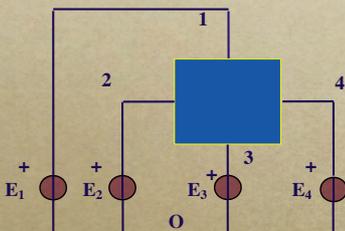
Lezione 9

N-poli



Fin'ora ci siamo limitati a bipoli. Esistono però anche dispositivi che non sono riconducibili a bipoli, nel senso che non interagiscono con l'esterno attraverso due soli poli. In figura è rappresentato un quadripolo, ma si può pensare, in generale, a N-poli. Si pone il problema a questo punto di estendere il concetto di "caratteristica" a tali dispositivi.

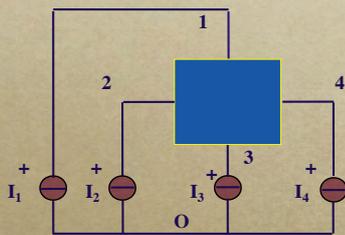
N-poli passivi



Pilotato in tensione

Supponiamo di alimentare ogni polo con un generatore ideale di tensione E_r e supponiamo ancora che il dispositivo (o la rete che possiamo immaginare nella scatola!) sia lineare. In tal caso potremo usare il teorema di sovrapposizione e affermare che la corrente I_i nel ramo del generatore i esimo è la somma delle correnti I_{ir} che si ottengono nel ramo i esimo quando di volta in volta lasciamo operare il solo generatore nel ramo r esimo.

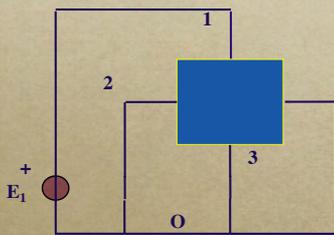
N-poli passivi



Non è possibile pilotarlo in corrente

Si noti che l'N polo non può essere alimentato in corrente. N correnti arbitrarie, infatti, non necessariamente rispetterebbero la LKI al nodo O.

N-poli passivi



$$\begin{aligned} I_1 &= G_{11} E_1 \\ I_2 &= G_{21} E_1 \\ I_3 &= G_{31} E_1 \\ I_4 &= G_{41} E_1 \end{aligned}$$

D'altra parte in ognuna delle reti così ottenute, a causa della linearità, la corrente I_i dovrà risultare proporzionale alla tensione E_r . Chiamiamo G_{ir} tale fattore di proporzionalità, che ha appunto le dimensioni dell'inverso di una resistenza, cioè di una conduttanza.

N-poli passivi

$$I_1 = G_{11} E_1 + G_{12} E_2 + G_{13} E_3 + G_{14} E_4$$

$$I_2 = G_{21} E_1 + G_{22} E_2 + G_{23} E_3 + G_{24} E_4$$

$$I_3 = G_{31} E_1 + G_{32} E_2 + G_{33} E_3 + G_{34} E_4$$

$$I_4 = G_{41} E_1 + G_{42} E_2 + G_{43} E_3 + G_{44} E_4$$

In conclusione sommando l'effetto di tutti i generatori presenti avremo N relazioni (quattro nel nostro esempio!) che legano le N correnti alle N differenze di potenziale applicate tra i poli del dispositivo ed il nodo comune O.

In generale

$$I_1 = G_{11} E_1 + G_{12} E_2 + \dots + G_{1s} E_s \dots + G_{1N} E_N$$

$$I_r = G_{r1} E_1 + G_{r2} E_2 + \dots + G_{rs} E_s \dots + G_{rN} E_N$$

$$I_N = G_{N1} E_1 + G_{N2} E_2 + \dots + G_{Ns} E_s \dots + G_{NN} E_N$$

Matrice delle Conduttanze

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1s} & \dots & G_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{r1} & G_{r2} & \dots & G_{rs} & \dots & G_{rN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & G_{Ns} & \dots & G_{NN} \end{pmatrix}$$

In altri termini l'N-polo invece di essere individuato da un solo parametro G come un bipolo, è individuato da N parametri G_{rs} cioè da una matrice di ordine N di conduttanze che prende appunto il nome di matrice delle conduttanze. Come vedremo, in realtà, i parametri indipendenti da cui realmente dipende la matrice delle conduttanze non sono N, bensì in numero molto minore.

Definizioni

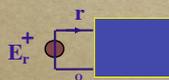
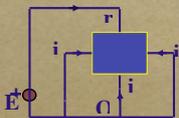
$$I_1 = G_{11} E_1 + G_{12} E_2 + \dots + G_{1s} E_s \dots + G_{1N} E_N$$

$$I_r = G_{r1} E_1 + G_{r2} E_2 + \dots + G_{rs} E_s \dots + G_{rN} E_N$$

$$I_N = G_{N1} E_1 + G_{N2} E_2 + \dots + G_{Ns} E_s \dots + G_{NN} E_N$$

Conduttanze Proprie

$$G_{rr} = \frac{I_r}{E_r} \Big|_{\substack{E_r \neq 0 \\ i \neq r}}$$



Per ora osserviamo che tra le G_{rs} ve ne sono alcune che si distinguono dalle altre: quelle del tipo G_{rr} con pedici eguali, e cioè gli elementi della diagonale della matrice. Esse infatti, per costruzione, sono derivate da schemi circuitali del tipo mostrato. Risulta evidente che esse sono delle "reali conduttanze equivalenti" del bipolo (questa volta è un vero bipolo) che si ottiene prendendo in considerazione un polo dell'n-polo e come altro estremo l'insieme di tutti gli altri n - 1 poli collegati in corto circuito tra di loro.

Definizioni

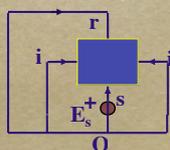
$$I_1 = G_{11} E_1 + G_{12} E_2 + \dots + G_{1s} E_s \dots + G_{1N} E_N$$

$$I_r = G_{r1} E_1 + G_{r2} E_2 + \dots + G_{rs} E_s \dots + G_{rN} E_N$$

$$I_N = G_{N1} E_1 + G_{N2} E_2 + \dots + G_{Ns} E_s \dots + G_{NN} E_N$$

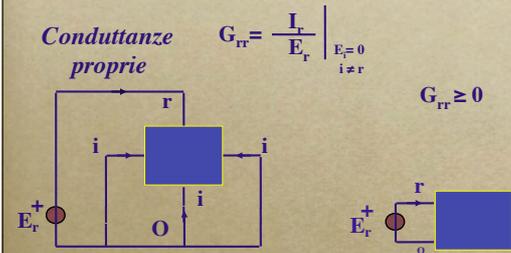
Conduttanze Improprie o mutue

$$G_{rs} = \frac{I_r}{E_s} \Big|_{\substack{E_r \neq 0 \\ i \neq s}}$$



Natura diversa hanno invece le G_{rs} che rappresentano semplicemente il rapporto tra la corrente nel ramo r e la tensione nel ramo s, quando tutti gli altri poli, tranne l'essesimo, sono collegati in corto circuito. Si tratta certamente di grandezze che hanno le dimensioni di conduttanze, ma non sono conduttanze mostrate dalla rete a particolari coppie di morsetti. Per questa ragione si distinguono le due grandezze con nomi diversi: conduttanze proprie o autoconduttanze, le prime e conduttanze mutue, le seconde.

Le proprietà della matrice delle conduttanze

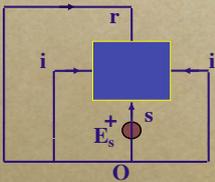


Vediamo ora di quali proprietà godono gli elementi di una matrice di conduttanze. Osserviamo in primo luogo che avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore a tutti i poli, dovrà necessariamente essere, per la passività della rete, $G_{rr} \geq 0$, in quanto effettive conduttanze di bipoli equivalenti.

Le proprietà della matrice delle conduttanze

Conduttanze improprie

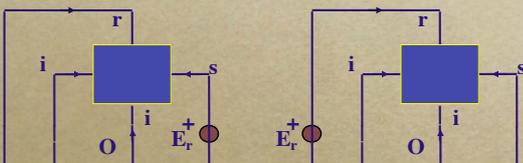
$$G_{rs} = \frac{I_r}{E_s} \Big|_{\substack{E_r=0 \\ i \neq s}} \quad G_{rs} \leq 0$$



Le G_{rs} invece non sono necessariamente positive; anzi è possibile dimostrare facilmente che deve risultare $G_{rs} \leq 0$. Infatti perché si abbia $G_{rs} > 0$ dovrebbe essere $I_r > 0$ con $E_s > 0$; ma in tal caso all'interno della rete, alimentata dalla sola E_s tra il nodo s ed il nodo O dovrebbe esistere un nodo a potenziale minore di quello di O ; ma ciò è impossibile per il principio di non amplificazione delle tensioni.

Le proprietà della matrice delle conduttanze

$$G_{rs} = \frac{I_r}{E_s} \Big|_{\substack{E_r=0 \\ i \neq s}} = G_{sr} = \frac{I_s}{E_r} \Big|_{\substack{E_s=0 \\ i \neq r}} \quad \text{Reciprocità}$$



Ma c'è di più. Se proviamo ad applicare il teorema di reciprocità alle due reti che hanno portato all'individuazione di G_{rs} e G_{sr} troviamo immediatamente che esse debbono essere eguali. La matrice G è necessariamente simmetrica. Questo significa che $\frac{1}{2}$ degli N parametri che la compongono, solo $N - (N - N)/2$ sono indipendenti.

Le proprietà della matrice delle conduttanze

Nodo 0

$$I_1 = G_{11} E_1 + G_{12} E_2 + \dots + G_{1s} E_s \dots + G_{1N} E_N$$

$$I_r = G_{r1} E_1 + G_{r2} E_2 + \dots + G_{rs} E_s \dots + G_{rN} E_N$$

$$I_N = G_{N1} E_1 + G_{N2} E_2 + \dots + G_{Ns} E_s \dots + G_{NN} E_N$$

Se infine proviamo ad applicare la LKC al nodo 0 troviamo che la somma delle I_r deve essere nulla.

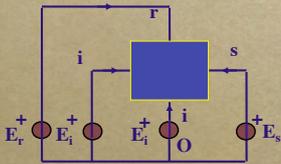
Le proprietà della matrice delle conduttanze

Nodo 0

$$E_1 \sum_r G_{r1} + E_2 \sum_r G_{r2} + \dots + E_s \sum_r G_{rs} + \dots + E_N \sum_r G_{rN} = 0$$

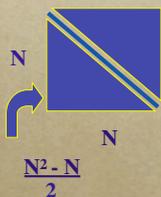
$$\sum_r G_{rs} = 0$$

$$G_{ss} = - \sum_{r \neq s} G_{rs}$$



Il che, essendo le E_s qualsiasi, comporta che $\sum_r G_{rs} = 0$, per ogni s .
E quindi anche $G_{ss} = - \sum_{r \neq s} G_{rs}$.
Una volta note le mutue conduttanze, dunque, lo sono anche le autoconduttanze.

In conclusione



N^2 elementi

$$G_{rr} = 0$$

$$G_{rs} = 0$$

$$N^2 - \frac{N^2 - N}{2}$$

$$G_{sr} = G_{rs}$$

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

$$G_{ss} = - \sum_{r \neq s} G_{rs}$$

In conclusione i parametri indipendenti nella matrice G sono $N(N-1)/2$.

Condizioni di fisica realizzabilità

$$G_{rr} \geq 0 \quad G_{rs} \leq 0 \quad G_{sr} = G_{rs} \quad G_{ss} = -\sum_{r \neq s} G_{rs}$$

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

Per assegnare, dunque, una matrice di conduttanza non si possono scegliere N numeri qualsiasi, anzi il modo più immediato per farlo è quello di assegnare $N(N-1)/2$ grandezze, negative naturalmente, che rappresentano le $N(N-1)/2$ mutue conduttanze dell' N -polo! In ogni caso queste condizioni, che debbono sempre essere soddisfatte, vengono dette condizioni di fisica realizzabilità.

Analisi del N-polo

Dato un N-polo determinare la sua matrice delle conduttanze

$$G_{rr} \geq 0 \quad G_{rs} \leq 0 \quad G_{sr} = G_{rs} \quad G_{ss} = -\sum_{r \neq s} G_{rs}$$

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

Il procedimento per cui, data la rete, se ne determina la matrice delle conduttanze viene detto di analisi dell' N -polo. Ne mostreremo una possibile soluzione che passa attraverso la sostituzione dell' N -polo di partenza con uno equivalente a poligono.

Sintesi del N-polo

Dati N^2 numeri che soddisfino le condizioni di fisica realizzabilità trovare un N-polo che abbia quella matrice delle conduttanze

$$G_{rr} \geq 0 \quad G_{rs} \leq 0 \quad G_{sr} = G_{rs} \quad G_{ss} = -\sum_{r \neq s} G_{rs}$$

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

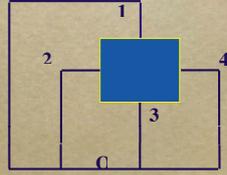
Il processo inverso, prende il nome di sintesi dell' N -polo: data cioè una matrice quadrata N che soddisfi alle condizioni di cui in precedenza, che giustamente ora possono prendere il nome di condizioni di fisica realizzabilità, determinare un N -polo che presenti appunto quella data come matrice delle conduttanze.

N poli attivi

$$I_1 = G_{11} E_1 + G_{12} E_2 + \dots + G_{1s} E_s \dots + G_{1N} E_N + I_{10}$$

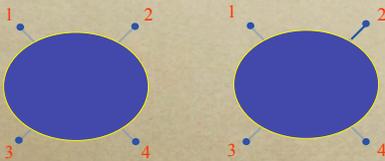
$$I_r = G_{r1} E_1 + G_{r2} E_2 + \dots + G_{rs} E_s \dots + G_{rN} E_N + I_{r0}$$

$$I_N = G_{N1} E_1 + G_{N2} E_2 + \dots + G_{Ns} E_s \dots + G_{NN} E_N + I_{N0}$$



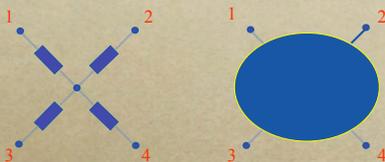
E' facile estendere quanto detto a N-poli che contengano anche elementi attivi. Infatti, applicando la sovrapposizione degli effetti, come abbiamo fatto per definire la caratteristica del N polo passivo, basterà aggiungere un'ultimo termine che sarà la corrente prodotta dai generatori interni quando tutti i poli sono cortocircuitati con il punto O.

Stella e Poligono



Delle infinite reti che possono dare luogo ad un N-polo se ne distinguono immediatamente due di tipo particolare: la rete a poligono, completo o meno, e quella a stella.

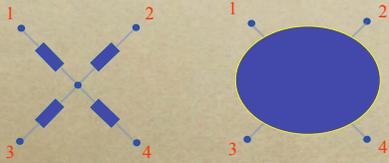
Stella e Poligono



Un N-polo a stella è caratterizzato dal fatto di avere un solo nodo interno e nessuna maglia chiusa.

L'Npolo a stella è costituito da N lati ognuno collegato tra uno degli N poli ed un nodo interno O comune, come mostrato in figura. Un n-polo a stella, dunque, ha un solo nodo interno.

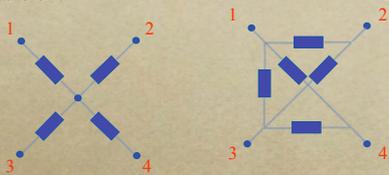
Stella e Poligono



Un N-polo a poligono è caratterizzato dal fatto di non avere nodi interni.

Mentre l'N-polo a poligono è caratterizzato da non aver nodi interni.

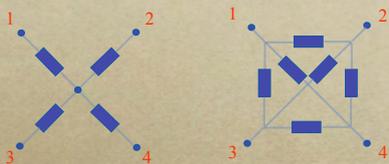
Stella e Poligono



Un N-polo a poligono è caratterizzato dal fatto di non avere nodi interni.

Se poi in un N-polo a poligono tutte le coppie di nodi sono collegate con un bipolo, esso prende il nome di N-polo a poligono completo.

Stella e Poligono

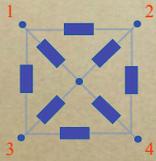


Se tutti i morsetti dell'N-polo a poligono sono collegati tra loro con un bipolo, allora l'N-polo si dice a poligono completo.

È facile verificare che il numero di lati di una tale rete è pari ad $N(N-1)/2$; le combinazioni, cioè, di N oggetti a due a due senza ripetizione.

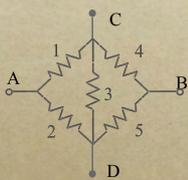
N-polo generico

Non tutti gli N-poli sono a stella o a poligono .



Si noti che non tutti gli N-poli sono o a stella o a poligono, come mostra chiaramente l'esempio in figura.

Circuito a ponte

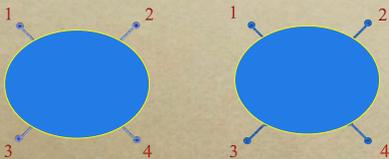


$$\begin{aligned}R_1 &= 1 \Omega; \\R_2 &= 1 \Omega; \\R_3 &= 3 \Omega; \\R_4 &= 3 \Omega; \\R_5 &= 3 \Omega.\end{aligned}$$

Es.19.1

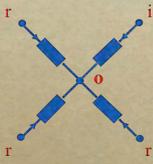
Ricorderete la classica rete a ponte mostrata in figura, che abbiamo utilizzato per mostrare come non tutte le reti si possono ridurre ad un unico bipolo utilizzando solo accoppiamenti serie e parallelo. La difficoltà era dovuta alla presenza nella rete di strutture del tipo a triangolo o a poligono come 1, 2, 3 e 3, 4, 5 o equivalentemente a stella come 2, 3, 4, che non sono riconducibili ad un sistema a due morsetti e cioè ad un bipolo. Ora siamo in grado di risolvere il problema.

Stella e Poligono



Domandiamoci, infatti, in quali condizioni due N-poli - dello stesso numero di poli - possono considerarsi equivalenti. Come logica estensione dell'equivalenza dei bipoli, potremo dire che essi possono ritenersi equivalenti quando, sottoposti alla stessa ennupla di tensioni, assorbono la stessa ennupla di correnti. In particolare cerchiamo le concrete condizioni di equivalenza tra un N-polo a poligono ed uno a stella.

Stella



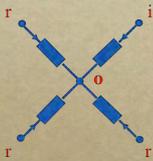
$$I_r = \frac{V_r - V_0}{R_r}$$

$$\sum_r I_r = \sum_r \frac{V_r - V_0}{R_r} = 0$$

$$V_0 = \frac{\sum_r \frac{V_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}}$$

Cominciamo dalla stella. In primo luogo applicando la LKC all'unico nodo interno ricaviamo il potenziale di tale nodo in funzione di quelli dei nodi esterni, come è semplicemente mostrato in figura.

Stella



$$I_i = \frac{V_i - V_0}{R_i}$$

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i} \frac{\sum_r \frac{V_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}} \quad V_0 = \frac{\sum_r \frac{V_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}}$$

$$G_0 = \sum_r \frac{1}{R_r}$$

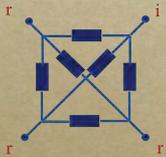
$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

$$= V_i \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i^2 G_0} \right) - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r}$$

Il che ci consente di scrivere la generica corrente entrante in un nodo i in funzione esclusivamente dei potenziali ai nodi esterni, visto che già abbiamo il potenziale del nodo 0 in funzione dei potenziali esterni. È questa in fondo la caratteristica dell' N -polo a stella, pilotato in tensione. Si noti che se tiriamo fuori dalla sommatoria il termine in i , che pure è presente in essa, potremo scrivere la caratteristica anche in questo nuovo modo, dove la dipendenza da V_i è esplicitata, e G_0 è definita in figura.

Poligono completo

$$I_i = V_i \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i^2 G_0} \right) - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} \quad \text{Stella} \quad G_0 = \sum_r \frac{1}{R_r}$$



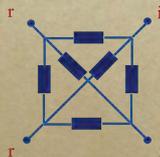
$$I_i = \sum_{r \neq i} \frac{V_i - V_r}{R_{ir}} = V_i \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_{ir}} - \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_{ir}}$$

$$R_{ir} = R_i G_0 R_r$$

Per il poligono è più semplice determinare la caratteristica pilotata in tensione, perché ogni corrente di polo sarà somma delle $N-1$ correnti (il poligono è completo!) dei rami che convergono in quel nodo. Separando i due termini nella sommatoria si ottiene la caratteristica cercata.

Facciamo vedere ora che se sussiste la relazione $R_{ir} = R_i G_0 R_r$ tra i parametri del poligoni (doppio pedice) e quelli della stella (un solo pedice) allora le due caratteristiche diventano identiche.

Poligono completo



$$I_i = V_i \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i^2 G_0} \right) - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r}$$

$$R_{ir} = R_i G_0 R_r \quad G_0 = \sum_r \frac{1}{R_r}$$

$$I_i = V_i \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_{ir}} - \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_{ir}}$$

$$V_i \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_i G_0 R_r} = \frac{V_i}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_r} =$$

$$= \frac{V_i}{R_i G_0} \sum_r \frac{1}{R_r} - \frac{V_i}{R_i^2 G_0} = V_i \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i^2 G_0} \right)$$

Infatti sostituendo l'espressione di R_{ir} assegnata nella caratteristica del poligono, il secondo termine diventa immediatamente identico al secondo dell'altra caratteristica (freccia arancione). Con la sostituzione proposta il primo termine della caratteristica del poligono (circolo arancione) si trasforma come mostrato e quindi le due caratteristiche coincidono.

Trasformazione Poligono - Stella

$$R_{ir} = R_i G_0 R_r \quad \frac{N(N-1)}{2} \quad \text{relazioni}$$

$$\text{Stella-poligono} \quad \text{sempre} \quad \frac{N(N-1)}{2} \quad \text{incognite}$$

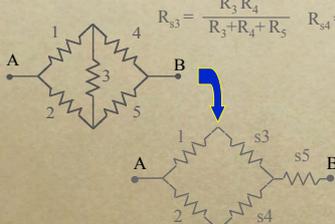
$$\text{Poligono-stella} \quad N=3 \quad N \quad \text{incognite}$$

$$N \geq \frac{N(N-1)}{2} \quad N=3$$

Per $N > 3$, nella trasformazione Poligono-Stella, il numero delle equazioni è superiore al numero delle incognite ed il problema, quindi, non ammette soluzione!

Se dunque si ha un N-polo a stella, è sempre possibile costruire un N-polo a poligono completo le cui $N(N-1)/2$ resistenze di lato R_{ri} siano date dalle $N(N-1)/2$ relazioni trovate, che risulta equivalente alla stella di partenza. Il caso opposto, invece, in cui siano note le $N(N-1)/2$ resistenze in un poligono completo, e si voglia costruire un poligono a stella equivalente, è risolvibile solo nel caso in cui il numero delle equazioni, $N(N-1)/2$, è pari al numero di incognite N , cioè solo nel caso $N=3$!

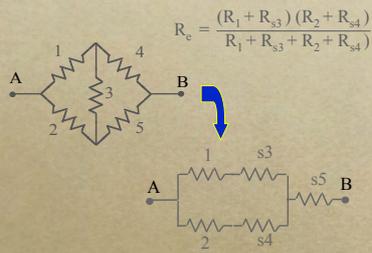
Circuito a ponte



$$R_{s3} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} \quad R_{s4} = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} \quad R_{s5} = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5}$$

È facile vedere come l'introduzione di questa trasformazione risolva anche il problema del circuito a ponte. Sostituendo il triangolo 3,4,5 con la stella s_3, s_4 ed s_5 , si ottiene un circuito che si può facilmente ridurre ulteriormente.

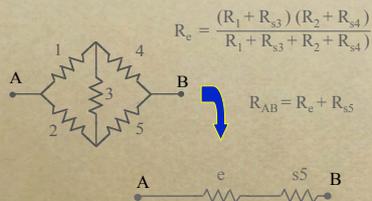
Circuito a ponte



$$R_c = \frac{(R_1 + R_{s3})(R_2 + R_{s4})}{R_1 + R_{s3} + R_2 + R_{s4}}$$

Primo passo e

Circuito a ponte

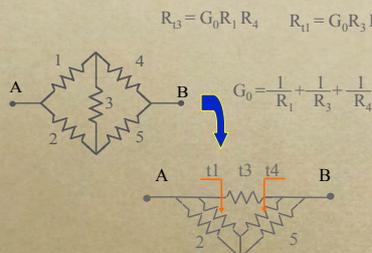


$$R_c = \frac{(R_1 + R_{s3})(R_2 + R_{s4})}{R_1 + R_{s3} + R_2 + R_{s4}}$$

$$R_{AB} = R_c + R_{s5}$$

secondo passo.

Circuito a ponte



$$R_{t3} = G_0 R_1 R_4 \quad R_{t1} = G_0 R_3 R_1 \quad R_{t4} = G_0 R_4 R_3$$

$$G_0 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Si poteva anche, naturalmente, sostituire la stella 1,3,4 con il triangolo \$t_1, t_3, t_4\$.

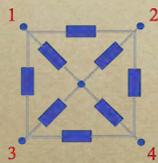
N-polo a poligono

- In un N-polo a poligono non sono presenti nodi interni

Osserviamo che un N-polo a poligono potrebbe anche essere definito come un N-polo che non possiede nodi interni. Questo ci consente di dimostrare che in realtà ogni N-polo è sempre riconducibile ad un N-polo a poligono completo.

N-polo generico

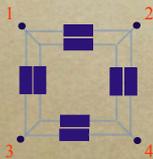
Non tutti gli N-poli sono a stella o a poligono .



Pensiamo ad un N-polo che non sia né a poligono né a stella. L'N-polo mostrato nell'esempio ha un nodo interno, e quindi non è a poligono. D'altra parte non è neanche a stella perché a rami tra i nodi come (1,2) o (2,4) ecc.

N-polo generico

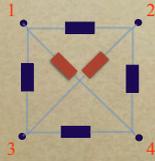
Eliminando i nodi interni .



Se con successive trasformazioni stella poligono - sempre possibili - eliminiamo tutti i nodi interni, otterremo, evidentemente un N-polo a poligono.

N-polo generico

Eliminando i nodi interni .



Come mostrato in figura; eventualmente l'Apollo a poligono ottenuto, non sarà completo, ma questo non ha importanza perché sarà sempre possibile "completarlo" aggiungendo tra i nodi non collegati dei bipoli a vuoto.

Riduzione a poligono

Attraverso successive eliminazioni dei nodi interni, mediante trasformazioni stella poligono, è possibile eliminare tutti i nodi interni in un N-polo e trasformarlo quindi in un N-polo a poligono, non necessariamente completo.

E quindi il teorema.

Riduzione a poligono completo

Le coppie di morsetti non collegati direttamente tra loro in un N-polo a poligono non completo possono essere immaginate collegate da bipoli circuito aperto, completando di fatto così l'N-polo.

Conclusione

Ogni N-polo può sempre essere ricondotto ad un N-polo a poligono completo

Analisi e sintesi

Analisi



Dato l'N-polo ricavarne la matrice delle conduttanze.

Sintesi



Data la matrice delle conduttanze ricavarne l'N-polo

La matrice delle conduttanze deve soddisfare
Le condizioni di fisica realizzabilità!

Nella pratica si possono porre due tipologie di problemi per un N-polo: l'analisi e la sintesi. Naturalmente nella sintesi la matrice delle conduttanze assegnata deve soddisfare le regole di fisica realizzabilità.

Analisi

Conduttanze
Proprie

$$G_{rr} = \left. \frac{I_r}{E_r} \right|_{\substack{E_i=0 \\ i \neq r}} \geq 0$$

Conduttanze
Improprie o mutue

$$G_{rs} = \left. \frac{I_r}{E_s} \right|_{\substack{E_i=0 \\ i \neq s}} \leq 0$$

Simmetria

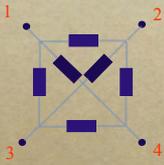
$$G_{sr} = G_{rs}$$

LKC al nodo O

$$G_{ss} = - \sum_{r \neq s} G_{rs}$$

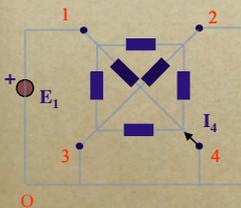
Nell'analisi queste condizioni saranno naturalmente rispettate perché si parte da un N-polo assegnato e quindi fisicamente esistente. Nella sintesi invece esse dovranno essere imposte ai dati assegnati.

Sintesi di un N-polo a poligono completo.



Utilizzando le considerazioni fatte a proposito dell'Apollo a poligono completo noi possiamo dare almeno una modalità per sintetizzare un N-polo da una matrice assegnata di G_{rs} che soddisfano le condizioni di fisica realizzabilità. Abbiamo visto infatti come tali condizioni consentivano di assegnare le solo conduttanze mutue, perché le altre venivano di conseguenza date.

Sintesi di un N-polo a poligono completo.



$$G_{14} = \frac{I_4}{E_1} \Big|_{\substack{E_i=0 \\ i \neq 1}}$$

$$G_{14} = -\frac{1}{R_{14}}$$

Dalla definizione di G_{rs} (G_{14} nell'esempio) si vede che la corrente I_4 non può che scorrere solo nel ramo (4,1) perché i rami (2,4) e (3,4) non possono essere percorsi da correnti altrimenti ai loro capi insisterebbe una tensione non nulla, il che non è possibile perché tali rami sono stati cortocircuitati. Se ne consegue che disponendo una resistenza, che possiamo chiamare per comodità, R_{14} pari a $-1/G_{14}$ tra i nodi 1 e 4 si ottiene il risultato cercato.

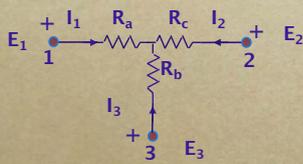
Sintesi di un N-polo a poligono completo

Data una matrice delle conduttanze di un N-polo, che rispetti le condizioni di fisica realizzabilità, è sempre possibile costruire un N-polo a poligono completo che sia compatibile con tale matrice inserendo tra ogni coppia di morsetti r ed s una resistenza R_{rs} pari a $-1/G_{rs}$, dove G_{rs} è l'elemento di posto r ed s della matrice assegnata.

E quindi il teorema fondamentale della sintesi di un N-polo!

Determinare la matrice delle G per questo tripolo

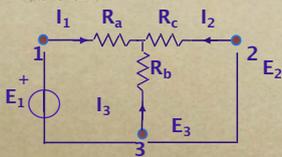
Esercizi



$$\begin{aligned} R_a &= 1\Omega; \\ R_b &= 3\Omega; \\ R_c &= 1\Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= ? \\ G_{22} &= ? \\ G_{33} &= ? \\ G_{12} &= ? \\ G_{13} &= ? \\ G_{23} &= ? \end{aligned}$$

Esercizi



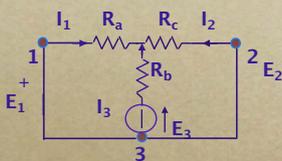
$$\begin{aligned} R_a &= 1\Omega; \\ R_b &= 3\Omega; \\ R_c &= 1\Omega. \end{aligned}$$

$$G_{11} = \frac{I_1}{E_1} \left| \begin{array}{l} E_i = 0 \\ i \neq 1 \end{array} \right.$$

$$G_{22} = \frac{I_2}{E_2} \left| \begin{array}{l} E_i = 0 \\ i \neq 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= 0,57 \text{ S} \\ G_{22} &= 0,57 \text{ S} \\ G_{33} &= \\ G_{12} &= \\ G_{13} &= \\ G_{23} &= \end{aligned}$$

Esercizi

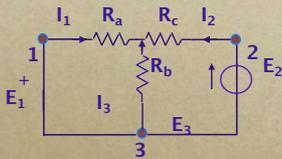


$$\begin{aligned} R_a &= 1\Omega; \\ R_b &= 3\Omega; \\ R_c &= 1\Omega. \end{aligned}$$

$$G_{33} = \frac{I_3}{E_3} \left| \begin{array}{l} E_i = 0 \\ i \neq 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= 0,57 \text{ S} \\ G_{22} &= 0,57 \text{ S} \\ G_{33} &= 0,28 \text{ S} \\ G_{12} &= \\ G_{13} &= \\ G_{23} &= \end{aligned}$$

Esercizi



$$R_a = 1\Omega;$$

$$R_b = 3\Omega;$$

$$R_c = 1\Omega.$$

$$G_{12} = \frac{I_1}{E_2} \Bigg|_{\substack{E_i = 0 \\ i \neq 2}}$$

$$G_{11} = 0,57 \text{ S}$$

$$G_{22} = 0,57 \text{ S}$$

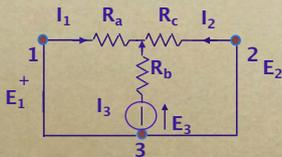
$$G_{33} = 0,28 \text{ S}$$

$$G_{12} = -0,43 \text{ S}$$

$$G_{13} =$$

$$G_{23} =$$

Esercizi



$$R_a = 1\Omega;$$

$$R_b = 3\Omega;$$

$$R_c = 1\Omega.$$

$$G_{13} = \frac{I_1}{E_3} \Bigg|_{\substack{E_i = 0 \\ i \neq 3}}$$

$$G_{11} = 0,57 \text{ S}$$

$$G_{22} = 0,57 \text{ S}$$

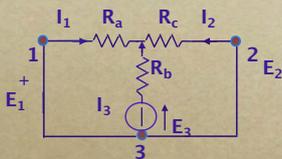
$$G_{33} = 0,28 \text{ S}$$

$$G_{12} = -0,43 \text{ S}$$

$$G_{13} = -0,14 \text{ S}$$

$$G_{23} =$$

Esercizi



$$R_a = 1\Omega;$$

$$R_b = 3\Omega;$$

$$R_c = 1\Omega.$$

$$G_{23} = \frac{I_2}{E_3} \Bigg|_{\substack{E_i = 0 \\ i \neq 3}}$$

$$G_{11} = 0,57 \text{ S}$$

$$G_{22} = 0,57 \text{ S}$$

$$G_{33} = 0,28 \text{ S}$$

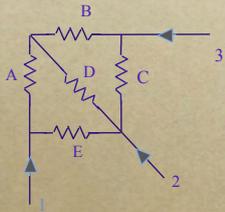
$$G_{12} = -0,43 \text{ S}$$

$$G_{13} = -0,14 \text{ S}$$

$$G_{23} = -0,14 \text{ S}$$

Determinare G_{13} per questo tripoli

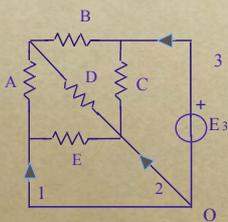
Esercizi: Matrice delle G



$$G_{13} = ?$$

$$R_B = R_C = R_E = 1\Omega;$$
$$R_A = R_D = 2\Omega.$$

Esercizi: Matrice delle G



$$G_{13} = -3/4 \text{ S}$$

$$R_B = R_C = R_E = 1\Omega;$$
$$R_A = R_D = 2\Omega.$$

Riepilogo della Lezione

- Definizione di N-polo passivo;
- Matrice delle conduttanze;
- Proprietà della matrice G.
- Equivalenza tra N-poli
- La trasformazione poligono-stella.
- Analisi e sintesi dell'N-polo;
- Sintesi di un N-polo a poligono completo
- Esercizi