Lezione 7

Fin qui si è parlato soltanto di proprietà delle reti di bipoli che non dipendono dalla natura dei bipoli stessi, ma solo dal fatto che tali reti sono sottoposte ai dettami della LKC e della LKT. Vogliamo ora invece occuparci di proprietà delle reti di bipoli che dipendono dalla natura dei bipoli stessi.

Le proprietà di non amplificazione!

Principio di non amplificazione delle tensioni: Se in una rete di bipoli esiste un solo ramo attivo, allora il potenziale dei due nodi a cui il lato attivo si appoggia sono l'uno il massimo e l'altro il minimo tra tutti i potenziali dei nodi della rete.

Un'altra proprietà delle reti di bipoli che discende dal mero fatto che per tali reti valgono la LKT e la LKC, è il così detto principio di non amplificazione delle tensioni.

Non amplificazione delle tensioni

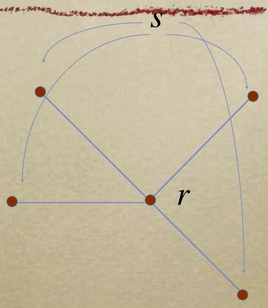
Se per un nodo r tutti i prodotti $V_{rs} I_{rs}$ delle tensioni e delle correnti che convergono nel nodo stesso - con le convenzioni implicite nell'ordine dei pedici - sono maggiori od eguali a zero, il potenziale di tale nodo non può essere né quello massimo né quello minimo tra i potenziali di tutti i nodi della rete.

La dimostrazione è immediata se ci si convince prima della seguente affermazione: se per un nodo r di una rete tutti i prodotti $V_{rs}I_{rs}$ delle tensioni e correnti di tutti i lati che convergono nel nodo stesso – con le convenzioni implicite nell'ordine dei pedici – sono maggiori od eguali a zero, il potenziale di tale nodo non può essere né quello massimo né quello minimo della rete.

Non amplificazione delle tensioni

$V_{rs}\, I_{rs} \geq 0.$

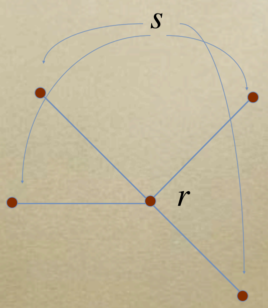
$\sum_s I_{rs} = 0.$



Infatti dato che $\Sigma_s\, I_{rs}=0$ per la LKC, alcune delle I_{rs} – per r fissato – saranno positive ed altre negative. Ciò comporta che, nella ipotesi che tutti i prodotti $V_{rs}I_{rs}$ siano maggiori di zero – sempre per un fissato r –, anche tra le V_{rs} ve ne saranno alcune positive ed altre negative; ciò equivale a dire che il potenziale del nodo r non è né il minimo né il massimo della rete.

Non amplificazione delle tensioni

- *Solo per i nodi dell'unico ramo attivo non si può affermare che $V_{rs}\, I_{rs} \geq 0$ per qualsiasi ramo!*
- *I potenziali di tali nodi sono dunque l'uno il massimo e l'altro il minimo.*



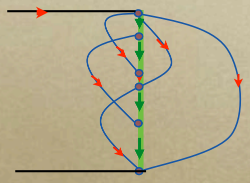
Ritornando ora al nostro teorema iniziale, nel caso sia presente un solo lato attivo, i suoi nodi sono gli unici per i quali non si può affermare che $V_{sr}I_{rs}>0$ per ogni s, per la presenza del generatore. Per i nodi interni, a cui fanno capo solo bipoli passivi, questa proprietà è invece certamente verificata. D'altra parte in ogni rete deve pur esserci un nodo a potenziale minimo ed uno a potenziale massimo; se ne conclude che tali potenziali sono assunti dai due nodi dell'unico lato attivo.

Non amplificazione delle correnti

Se in una rete di bipoli esiste un solo ramo attivo, allora la corrente che circola in tale ramo è la più grande in valore assoluto tra tutte le correnti dei rami della rete.

Si può dimostrare anche il seguente teorema duale del precedente.
Val la pena di ricordare che entrambi questi teoremi sono validi solo in regime stazionario (c.c.).

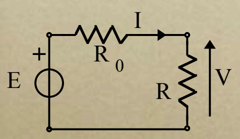
Dimostrazione



In verde i rami dell'albero ed in blu quelli del coalbero.

Provate a dimostrarlo da voi. Vi fornisco solo uno schema che può aiutarvi a comprendere come dimostrarlo.

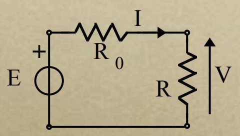
Risposte ad Esercizi : Es.4



Trovare il valore di R che rende massima la potenza dissipata nella stessa resistenza R.

$$P = R\,I^2 = R\left(\frac{E}{R + R_0}\right)^2;$$

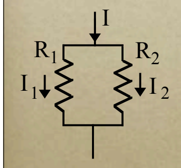
Risposte ad Esercizi : Es.4



$$P = R\,I^2 = R\left(\frac{E}{R + R_0}\right)^2;$$

$$\frac{1}{E^2}\frac{dP}{dR} = \left(\frac{1}{R + R_0}\right)^2 - 2\,R\left(\frac{1}{R + R_0}\right)^3 = 0; \qquad R = R_0.$$

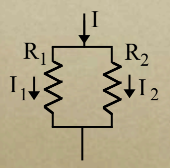
Risposte ad Esercizi : Es.5



Determinare la ripartizione delle correnti nei due rami imponendo che la potenza dissipata nel circuito sia minima con la condizione

$I_1 + I_2 = I.$

Risposte ad Esercizi : Es.5



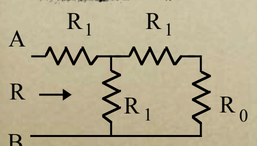
$$P = R_1 I_1^2 + R_1 I_2^2 =$$

$$= R_1 I_1^2 + R_2 (I - I_1)^2 .$$

$$\frac{dP}{dI_1} = 2R_1 I_1 - 2 R_2 (I - I_1) = 0 .$$

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Risposte ad Esercizi : Es.6

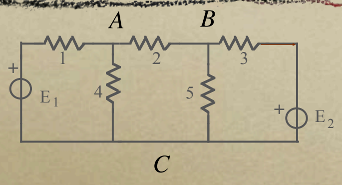


Determinare il valore di R_1 che rende la resistenza R vista dai due morsetti A e B uguale alla resistenza R_0 di carico.

$$R = R_1 + \frac{(R_1 + R_0)\, R_1}{R_1 + R_0 + R_1} = R_0$$

$$(2R_1 + R_0)\, R_0 - (3R_1 + 2\, R_0)\, R = 0; \qquad R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}} .$$

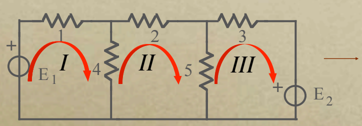
Esercizi: con il metodo dei potenziali ai nodi.



$I_3 = 2{,}14$ A.

$R_1 = 4{,}5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 35\ \Omega$;
$R_5 = 200\ \Omega$;
$E_1 = 290$ V;
$E_2 = 180$ V.

Esercizi: metodo delle correnti di maglia.



$I_3 = 2{,}14$ A.

$R_1 = 4{,}5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 35\ \Omega$;
$R_5 = 200\ \Omega$;
$E_1 = 290$ V;
$E_2 = 180$ V.

Reti lineari

Principio di sovrapposizione degli effetti.

In primo luogo la sovrapponibilità degli effetti. È questa una proprietà del tutto generale dei sistemi lineari; sistemi, cioè, in cui l'effetto è linearmente dipendente dalla causa. Essa si può esprimere affermando che una particolare combinazione lineare di cause produce la stessa combinazione lineare degli effetti che ognuna delle cause produrrebbe se si trovasse ad agire da sola.

Principio di sovrapposizione degli effetti.

In una rete in cui agiscano più generatori, le correnti nei singoli rami possono essere ottenute sommando algebricamente le correnti che si avrebbero nei rami corrispondenti qualora ogni generatore agisse da solo.

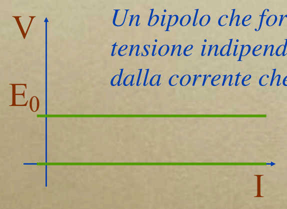
Si potrebbe utilizzare la precedente affermazione quale definizione di sistema lineare, tanto i due fatti sono intimamente legati. In particolare consideriamo una rete con più generatori; se individuiamo nei singoli generatori le cause e nelle correnti e nelle tensioni sui rami gli effetti, siamo portati ad affermare che le correnti o le tensioni sui lati di una tale rete possono essere calcolate come somma di quelle indotte sugli stessi rami dai singoli generatori.

Come si eliminano gli altri generatori?

I generatori di f.e.m. vanno sostituiti con dei bipoli cortocircuito.

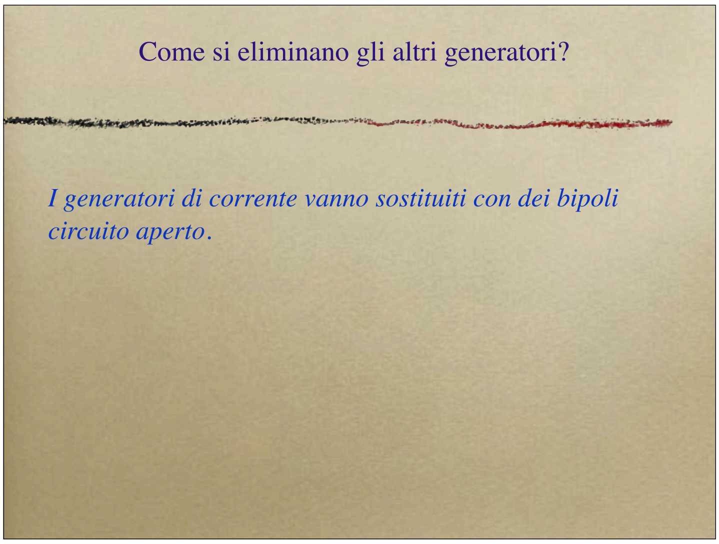
È necessario qualche commento su quest'ultima affermazione: per far sí che un generatore agisca da solo occorre evidentemente "eliminare" gli altri. Cosa significhi "eliminare un generatore" dipende evidentemente dal tipo di generatore.

Generatore ideale di tensione

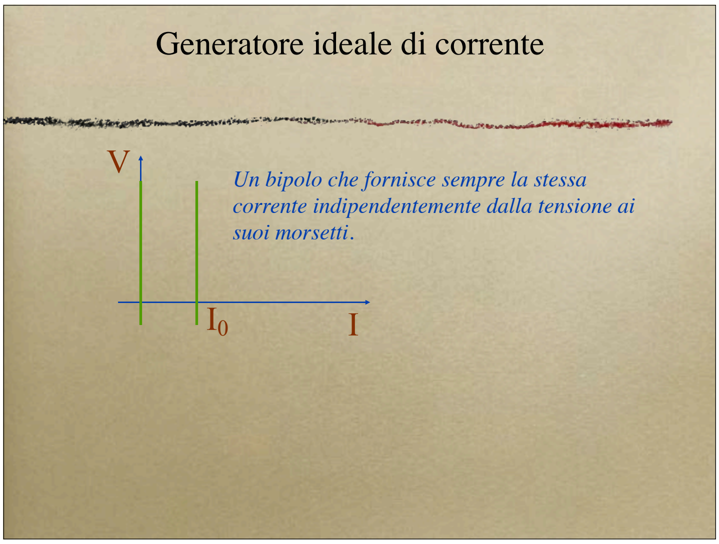


Un bipolo che fornisce la stessa tensione indipendentemente dalla corrente che lo attraversa.

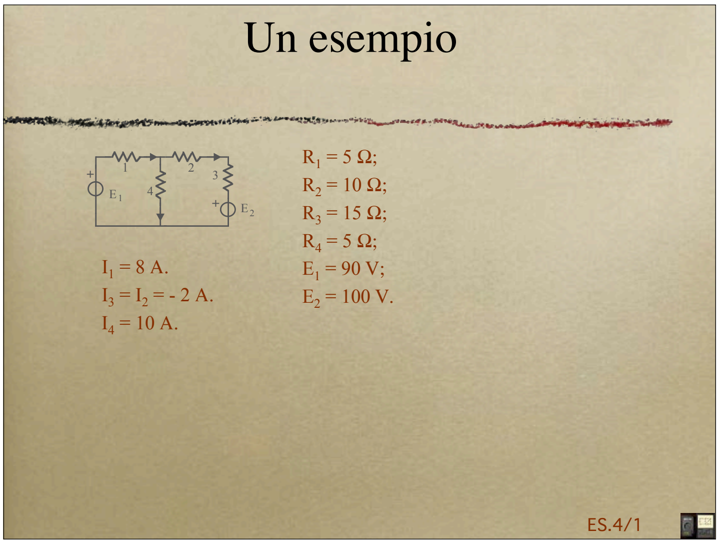
Un generatore di tensione ideale, per esempio, per sua natura si lascia percorrere da una qualsiasi corrente e produce ai suoi morsetti sempre la stessa tensione. Per eliminare i suoi effetti bisogna ridurre la sua tensione a zero senza impedire il passaggio della corrente. Questo, in realtà, equivale a sostituire il generatore ideale di tensione con un bipolo corto circuito.



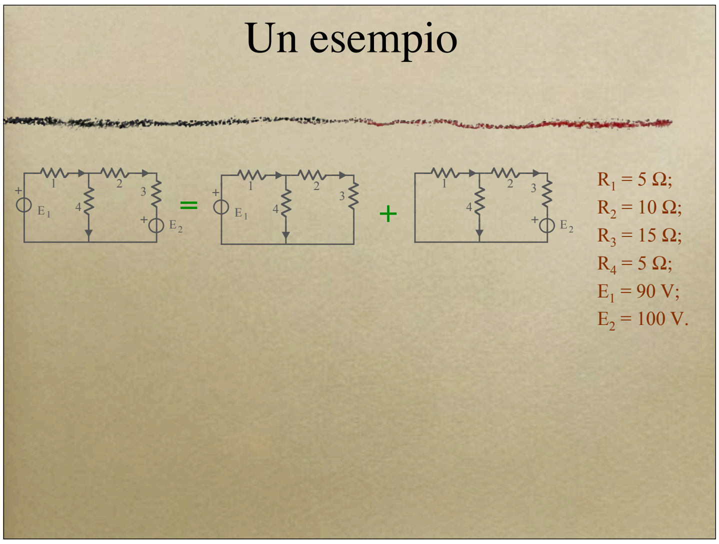
Un ragionamento del tutto analogo porta alla conclusione che i generatori ideali di corrente, invece, debbono essere sostituiti con dei bipoli a vuoto. Nel linguaggio corrente si parla di cortocircuitare i generatori di tensione ed aprire i generatori di corrente, il che, preso alla lettera non è corretto; un generatore ideale di tensione, per definizione, non consente che la sua tensione venga annullata da un corto circuito in parallelo.



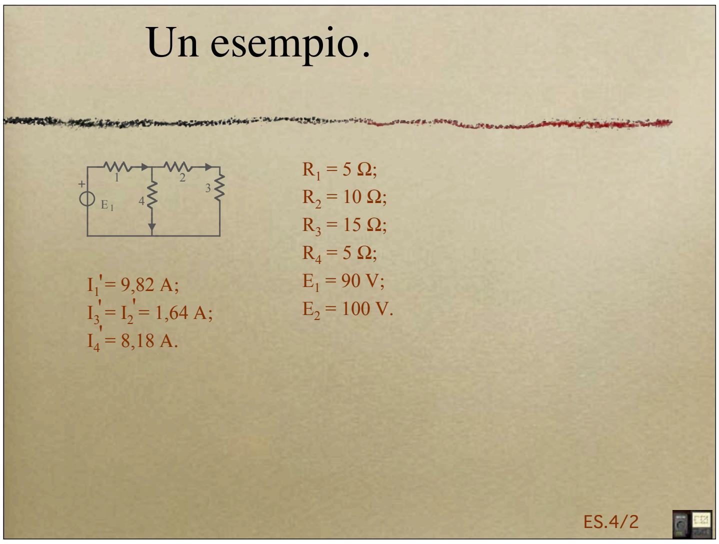
Analogo discorso si può fare per il generatore ideale di corrente. Ciò nonostante l'espressione sintetica è molto comoda e largamente usata; essa va intesa nel senso prima specificato di sostituire i bipoli in questione rispettivamente con bipoli corto circuito ed a vuoto. Il principio di sovrapposizione degli effetti è di grande utilità sia dal punto di vista pratico che dal punto di vista puramente speculativo.



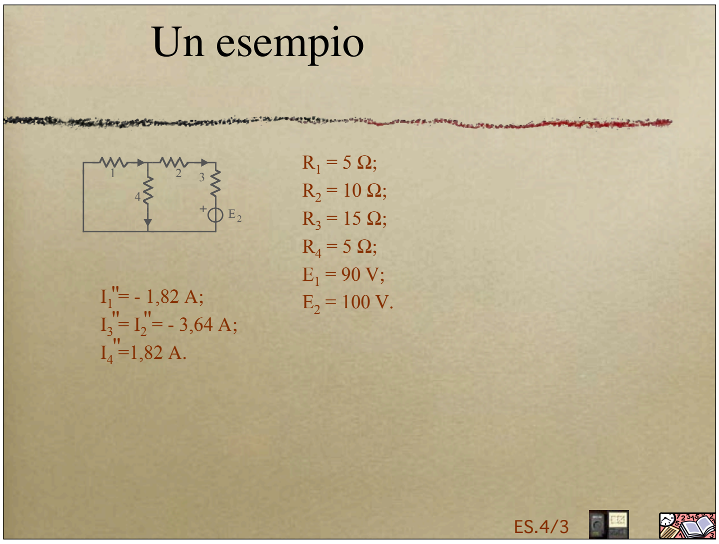
Dal punto di vista pratico esso fornisce, se vogliamo, il più elementare metodo di soluzione di una rete. Il principio ci consente infatti di affermare che la soluzione di una rete comunque complessa, con più generatori, è riconducibile alla soluzione di più reti in ognuna delle quali agisce un solo generatore. Proviamo con un esempio.



Schema grafico molto utile ad indicare l'applicazione della sovrapposizione degli effetti. Il simbolo + tra i due circuiti sottintende sovrapposizione.

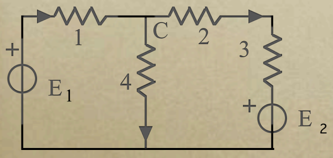


La soluzione del primo circuito in laboratorio. Ma il risultato si ritrova anche applicando la riduzione della rete vista dai morsetti dell'unico generatore ad un unico bipolo. In simboli, indicando per semplicità solo i pedici dei resistori):
[(2+3)//4]+1



E il secondo circuito.

Un esempio.



$R_1 = 5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 5\ \Omega$;

$E_1 = 90$ V;
$E_2 = 100$ V

$I_1 = 8$ A;
$I_2 = -2$ A;
$I_4 = 10$ A.

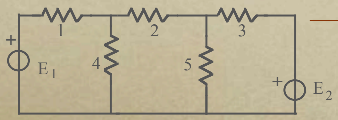
$I_1' = 9{,}82$ A;
$I_3' = I_2' = 1{,}64$ A;
$I_4' = 8{,}18$ A.

$I_1'' = -1{,}82$ A;
$I_3'' = I_2'' = -3{,}64$ A;
$I_4'' = 1{,}82$ A.

Es 3.1

Da confrontare con i risultati già noti.

Esercizi: sovrapposizione degli effetti



$R_1 = 4{,}5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 35\ \Omega$;
$R_5 = 200\ \Omega$;
$E_1 = 290$ V;
$E_2 = 180$ V.

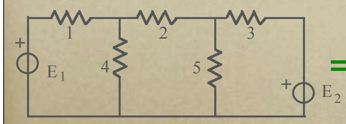
$I_3 = 2{,}14$ A.

Es. 6.0

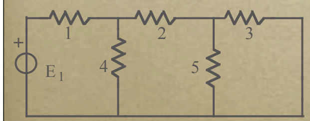
Provate a risolvere anche questo esercizio con la sovrapposizione degli effetti.

Esercizi.

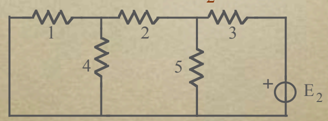
$R_1 = 4{,}5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 35\ \Omega$;
$R_5 = 200\ \Omega$;
$E_1 = 290$ V;
$E_2 = 180$ V.

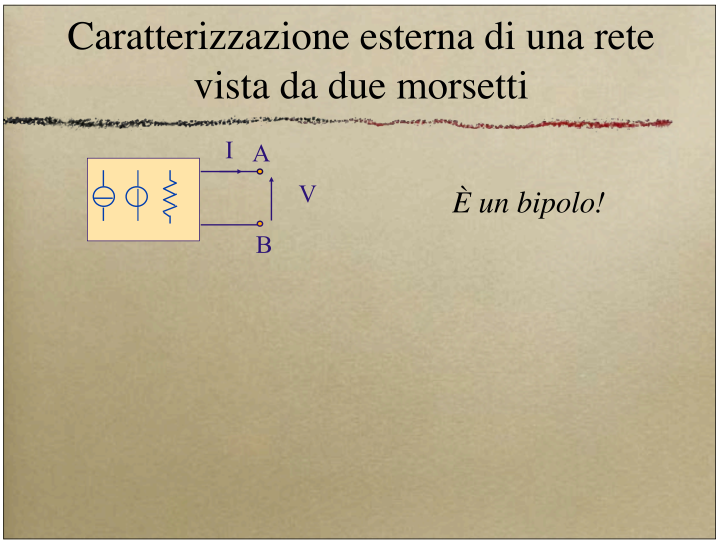


=

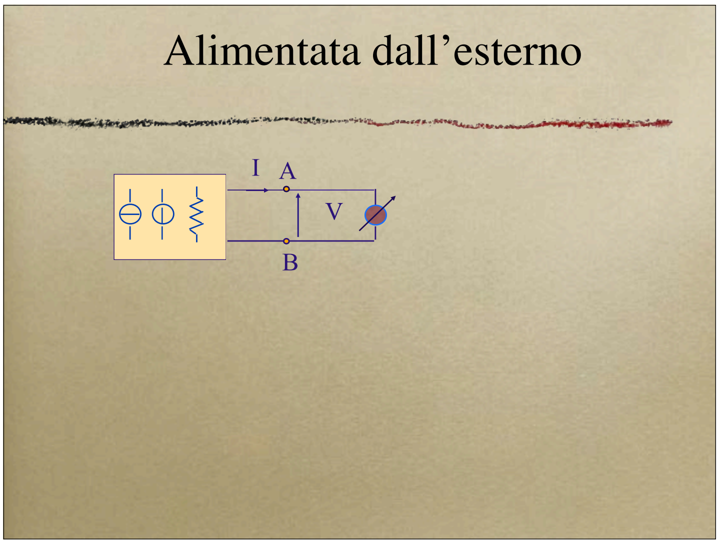


+

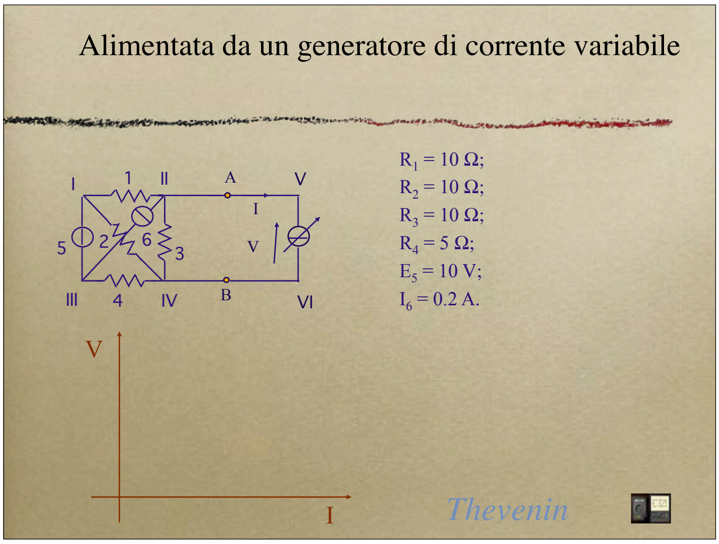




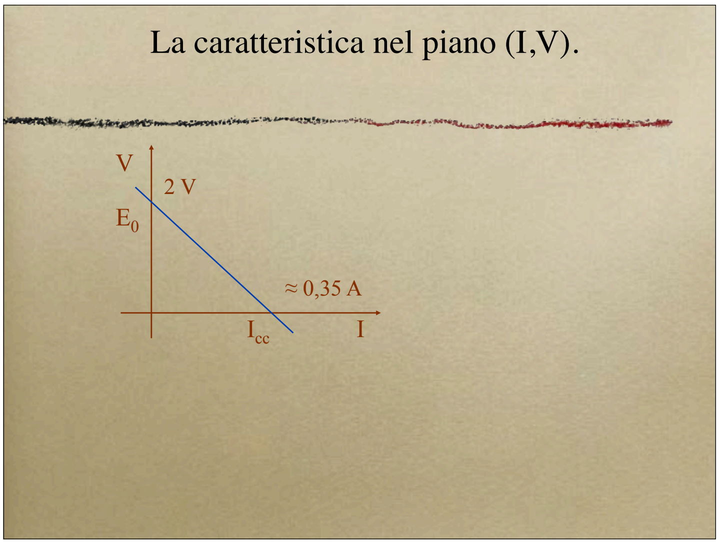
Abbiamo visto che una rete passiva vista da due nodi è sempre riconducibile ad un unico bipolo equivalente. È possibile una riduzione simile anche per una rete che contenga bipoli attivi. Per dimostrarlo, consideriamo una qualsiasi rete attiva e scegliamo su di essa due nodi che prolunghiamo al di fuori della scatola che contiene la rete. I simboli stanno a ricordare che nella rete sono presenti generatori di tensione e di corrente e bipoli passivi.



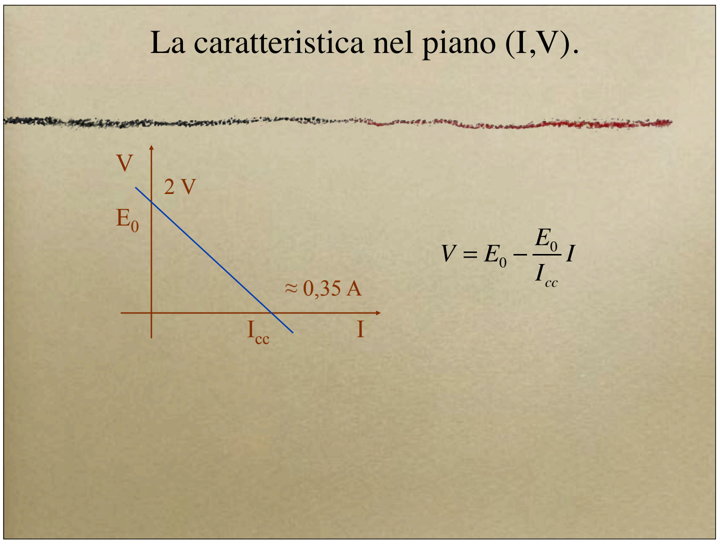
Ovviamente, che si tirati di un bipolo, questo è fuor di dubbio: quella che non conosciamo è la sua caratteristica. Prima di enunciare e dimostrare i due importantissimi teoremi di Thévenin, e di Norton che risolvono il nostro problema, fornendoci appunto la caratteristica cercata, proviamo a trovarla in via sperimentale, inserendo tra i due morsetti un generatore variabile di corrente.



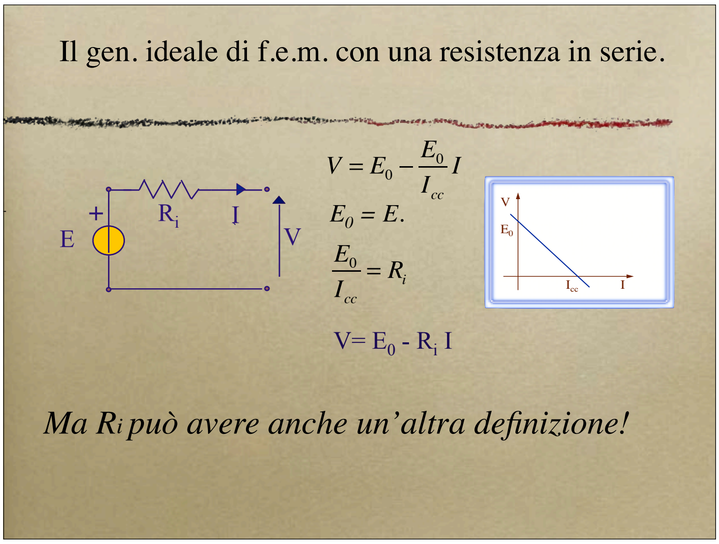
In laboratorio, naturalmente, non possiamo ragionare in astratto e dobbiamo necessariamente sperimentare su di un circuito particolare: per esempio quello mostrato in figura. Si noti che tra i morsetto A e B – dal punto di vista della rete – abbiamo fatto la convenzione del generatore. Inoltre abbiamo scelto di alimentare la rete con un generatore di corrente: stiamo quindi cercando una caratteristica del tipo V=f(I)



In effetti, essendo la rete per definizione di bipoli lineari, non c'era motivo di pensare che la caratteristica equivalente non fosse anche essa lineare. Nel piano (I,V) dunque, la caratteristica è una retta che in generale non passa per l'origine degli assi, essendo presenti anche bipoli attivi. Per individuare una retta occorrono, naturalmente, due suoi punti. Si propongono a tale scopo, in maniera molto evidente, i due punti in cui la caratteristica interseca gli assi.

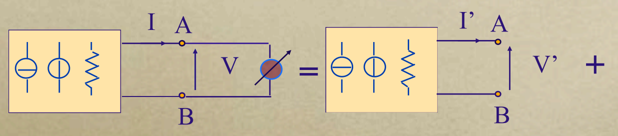


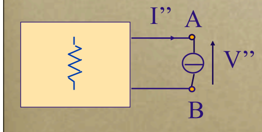
Il primo punto di coordinate $V=E_0$ ed $I=0$ corrisponde alle condizioni in cui il bipolo non è attraversato da corrente. Appare naturale indicare E_0 con il termine "tensione a vuoto" del bipolo. L'altro punto è quello individuato da $V=0$ ed $I=Icc$. In tali condizioni tra i morsetti A e B c'è tensione nulla, come se il bipolo fosse "chiuso su di un corto circuito". e quindi il nome "corrente di corto circuito" dato alla corrente Icc.



Data la rete, si possono calcolare sia E_0 che I_{cc} e quindi la caratteristica del bipolo equivalente, che sarà rappresentata da una equazione del tipo indicato. Essa ci appare come la caratteristica, di un bipolo costituito da un generatore di tensione $E= E_0$ con in serie un bipolo passivo R_i. Ma R_i può avere anche un'altra definizione, che è data appunto dalla seconda parte del teorema di Thévenin

Applicando la sovrapposizione degli effetti





$$I = I' + I'' = I'' = -\frac{V''}{R_e}$$

$$V = V' + V'' = E_0 + V'' = E_0 - R_e I$$

Quindi $R_i = R_e$

Infatti applicando la sovrapposizione degli effetti alla rete originaria, avendo cura di conservare le stesse convenzione dei segni, si ottiene facilmente la stessa relazione già dedotta in precedenza, $V=E_0-R_eI$, ma questa volta R_e, è la resistenza equivalente vista dai morsetti A e B della rete resa passiva.

Teorema del generatore equivalente di f.e.m.

Una rete attiva vista da due suoi morsetti A e B è equivalente ad una rete con un generatore ideale di f.e.m. con in serie un resistore.

Il generatore di f.e.m. ha una tensione ai morsetti pari alla tensione a vuoto E_0 nella rete originaria.

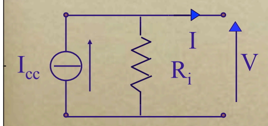
E quindi il teorema di Thévenin o del generatore equivalente di tensione, nella sua prima parte…

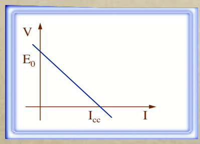
Teorema del generatore equivalente di f.e.m.

Il resistore ha una resistenza pari a quella vista dai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva, e cioè i generatori di f.e.m. sono stati sostituiti da corto circuiti e quelli di corrente da bipoli a vuoto.

… e nella seconda.

Il generatore ideale di corrente con una resistenza in parallelo.





$$I = I_{cc} - \frac{V}{R_i}.$$

Un discorso del tutto analogo si può fare per il teorema di Norton, che stabilisce l’equivalenza ad un circuito del tipo mostrato. Si noti che quella fornita dal teorema di Norton è una caratteristica pilotata in tensione I=f(V). Come bisognerà alimentare la nostra scatola chiusa dall’esterno per dimostrare il teorema?

Teorema del generatore equivalente di corrente.

Una rete attiva vista da due suoi morsetti A e B è equivalente ad una rete costituita da un generatore ideale di corrente con in parallelo un resistore.

Il generatore di corrente eroga una corrente pari alla corrente di corto circuito I_{cc} ai morsetti A e B nella rete originaria.

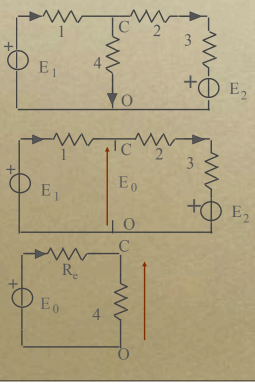
Comunque l’enunciato tel teorema di Norton è il seguente, nella sua prima parte…

Teorema del generatore equivalente di corrente.

Il resistore ha una resistenza pari a quella vista dai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva, e cioè i generatori di f.e.m. sono stati sostituiti da corto circuiti e quelli di corrente da bipoli a vuoto.

e nella sua seconda parte, dimostrabile ancora una volta applicando la sovrapposizione degli effetti.

Un esempio: in Lab



$R_1 = 5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 5\ \Omega$;
$E_1 = 90$ V;
$E_2 = 100$ V.

Valori misurati

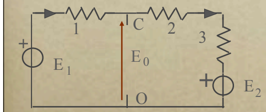
$E_0 = 91{,}67$ V; $R_e = 4{,}17\ \Omega$.

$I_2 = -2$ A;
$I_4 = 10$ A;
$I_1 = 8$ A.

Es 4.1 Es 5.1 Es 5.2

I teoremi appena dimostrati non costituiscono soltanto un importante risultato teorico, ma possono fornire anche un aiuto sul piano pratico per la risoluzione delle reti. Consideriamo per esempio la rete in figura che abbiamo già risolto per altre vie, e supponiamo di voler applicare il teorema di Thévenin ai morsetti C ed A. In laboratorio è facile calcolare E_0 ed R_i, e quindi I_4 e tutte le altre correnti.

Un esempio: analiticamente



$E_0 = 91{,}67$ V;
$R_e = 4{,}17\ \Omega$.

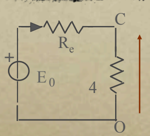
$R_1 = 5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 5\ \Omega$;
$E_1 = 90$ V;
$E_2 = 100$ V.

$$E_0 = E_1 - R_1 I_1 = E_1 - R_1 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 91{,}67 \text{ V}$$

$$R_e = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 4{,}17\ \Omega.$$

Ma allo stesso risultato si può arrivare anche analiticamente con pochi passaggi.

Un esempio: il risultato.



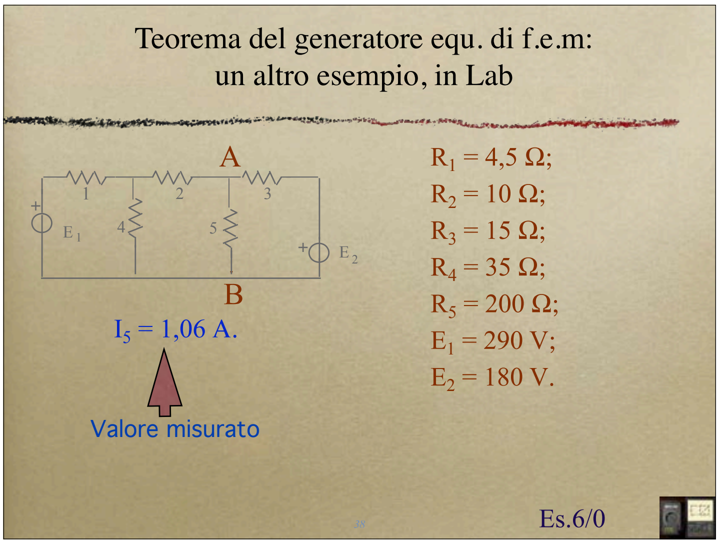
$E_0 = 91{,}67$ V;
$R_e = 4{,}17\ \Omega$.

$R_1 = 5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 5\ \Omega$;
$E_1 = 90$ V;
$E_2 = 100$ V.

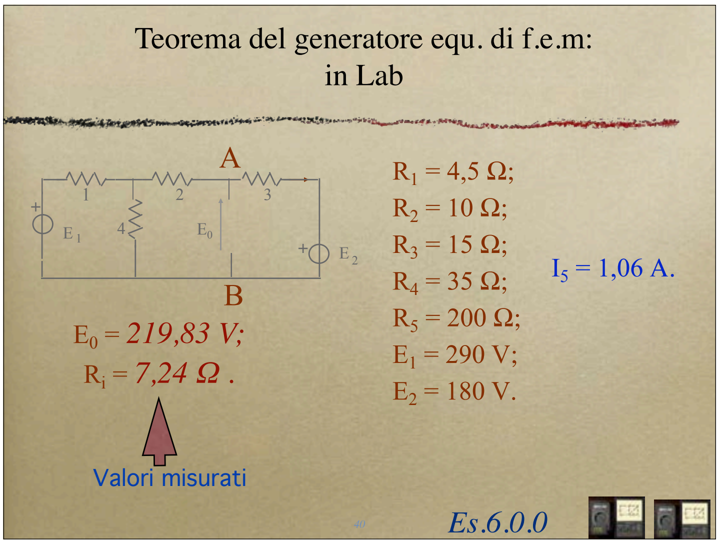
$$I_4 = \frac{E_0}{R_e + R_4} = \frac{91{,}67}{9{,}17} = 9{,}99 A$$

$I_4 = 10$ A;

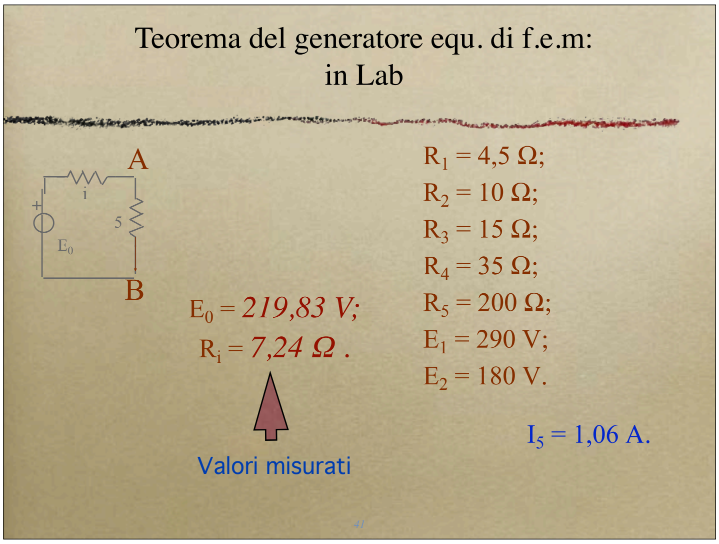
E quindi, in accordo con i risultati sperimentali, il calcolo di I_4.



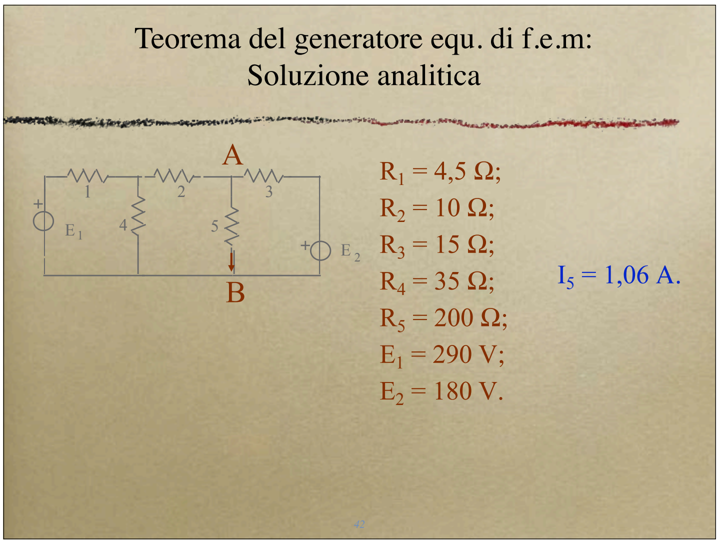
Un altro esempio un po' più complesso. Come vedete abbiamo scelto i morsetti A e B per applicare il teorema del generatore equivalente di f.e.m. In laboratorio ricaviamo immediatamente il risultato cercato.



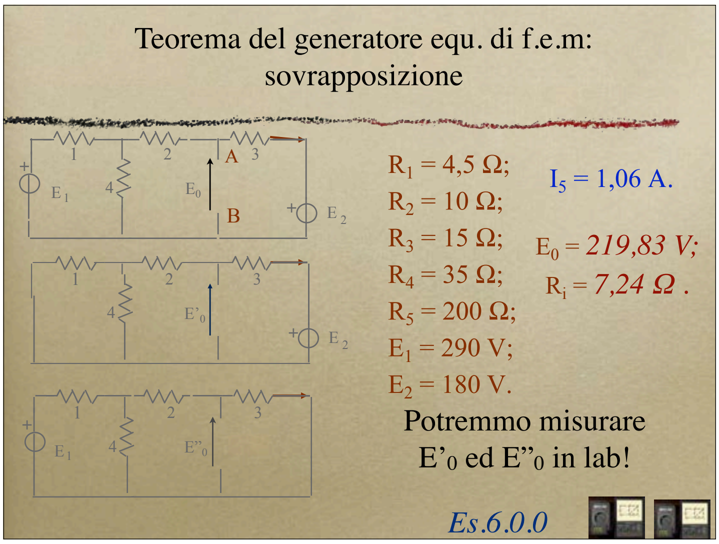
Dobbiamo calcolare E_0 ed R_i. Possiamo ancora farlo in laboratorio.



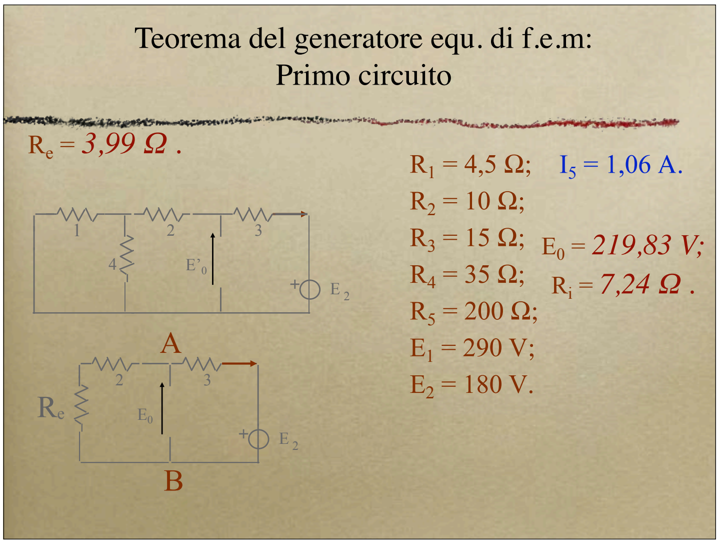
E quindi il risultato.



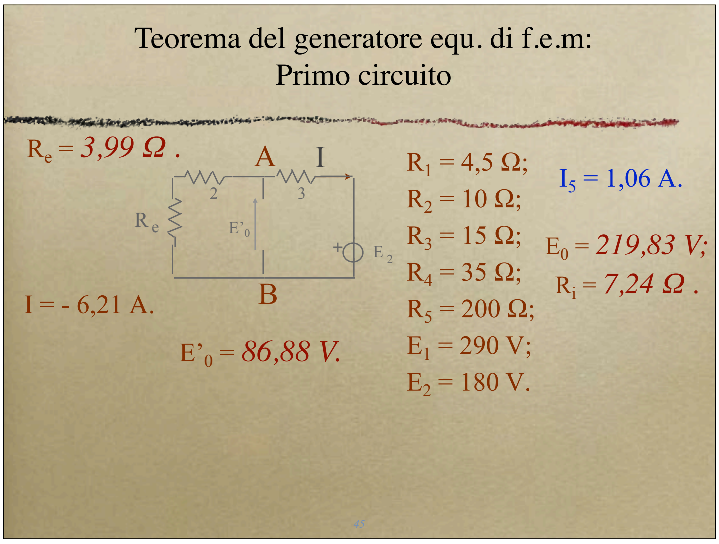
Proviamo la soluzione analitica. Per calcolare E_0 potremmo applicare la sovrapposizione degli effetti.



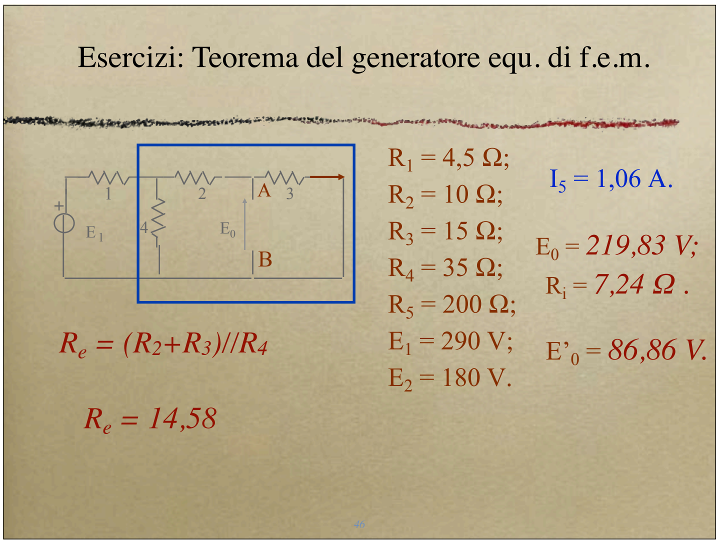
Così come indicato! Anche in questo caso possiamo anticipare i risultati in laboratorio.



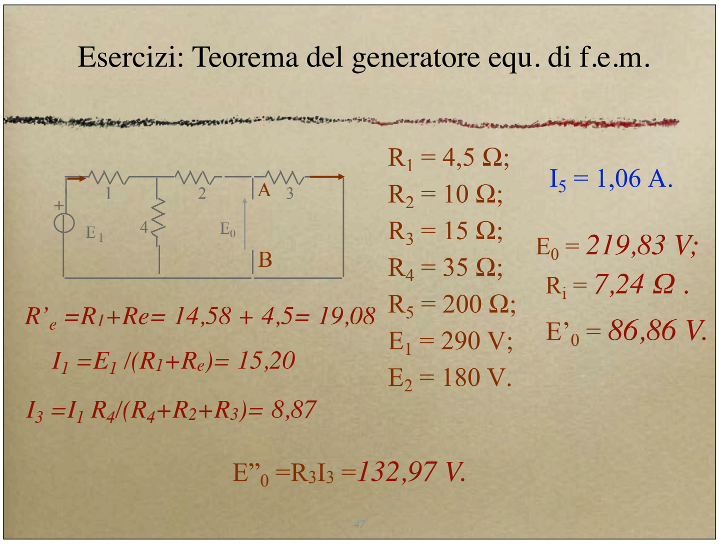
Ora invece calcoliamo analiticamente E'_0. Quando agisce il solo generatore E_2, il circuito può essere ridotto così.



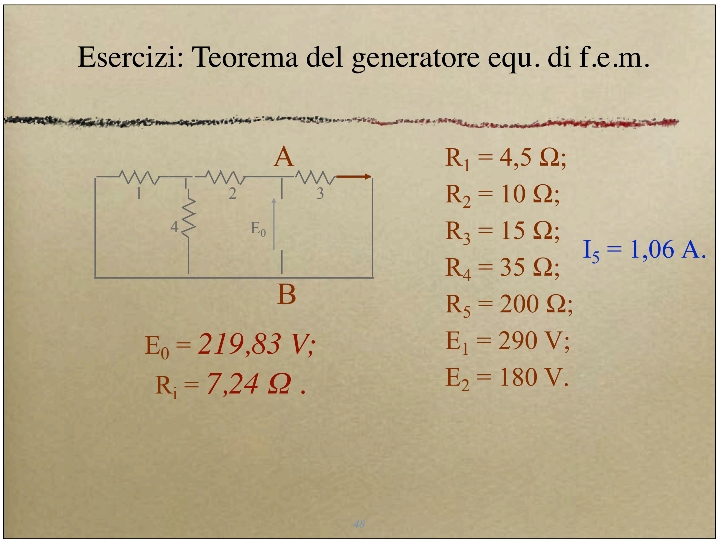
E quindi possiamo calcolare la corrente I (notare il verso scelto) dalla quale si ricava la tensione cercata moltiplicando per R_e + R_2. Questa è la E'_0



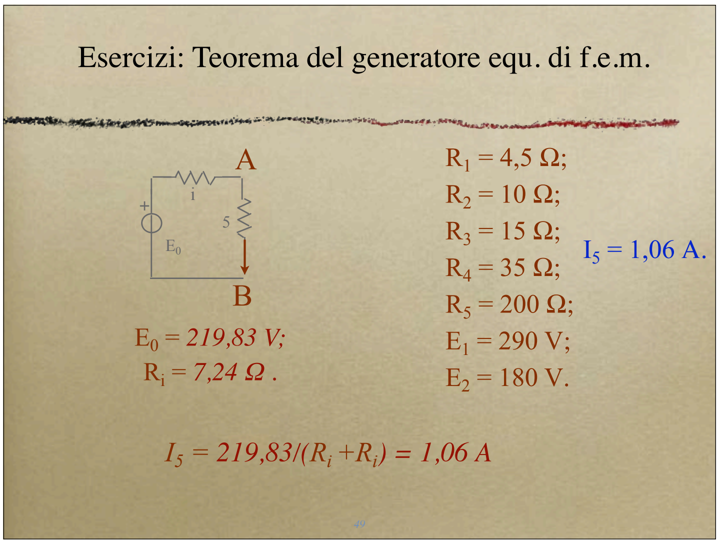
Nell'altro caso il circuito può essere ridotto nel modo mostrato e quindi il generatore E_1 vede una resistenza pari a R_e+R_1



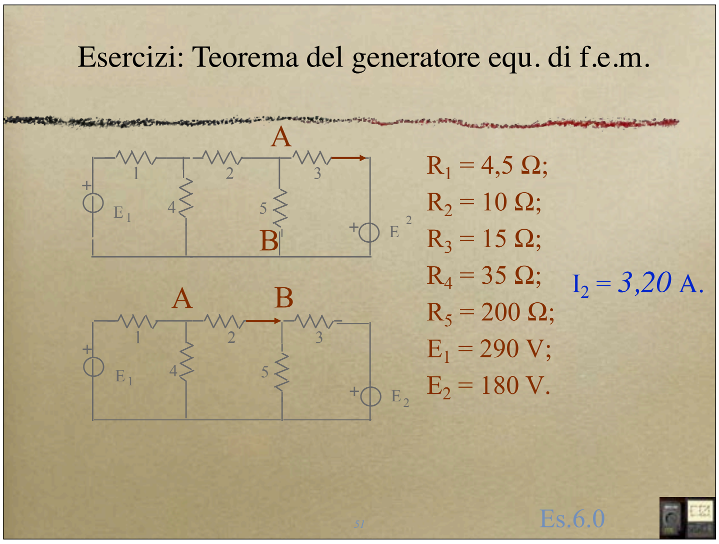
Il che ci consente di calcolare la corrente I_1 e quindi, ripartendo la corrente I_3 che coincide co I_2. A questo punto la tensione a vuoto E''_0 è pari al prodotto di R_3 per I_3



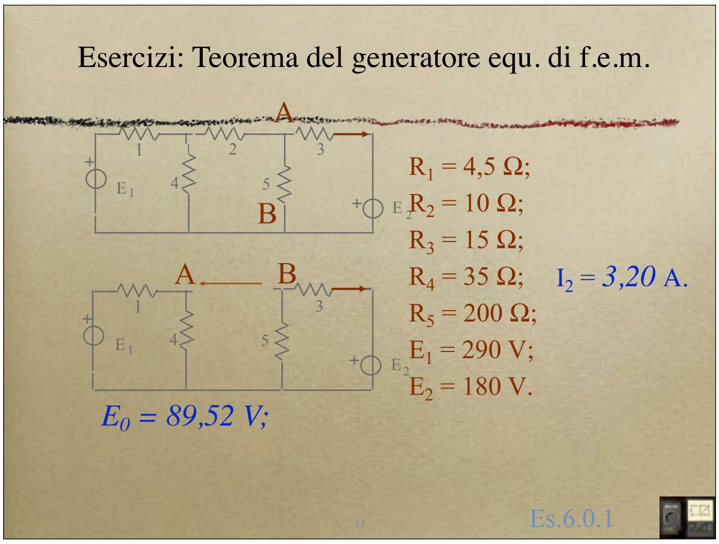
A questo punto conosciamo tutti dati per calcolare I_5.



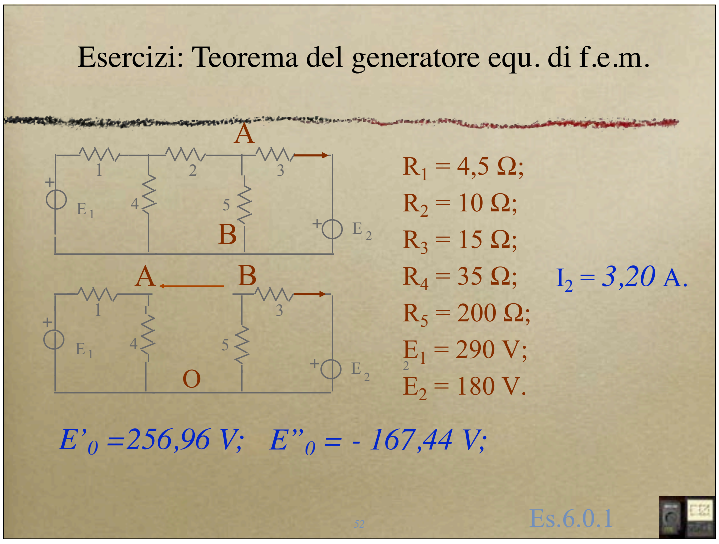
Che, fortunatamente, coincide con quello misurato in laboratorio.



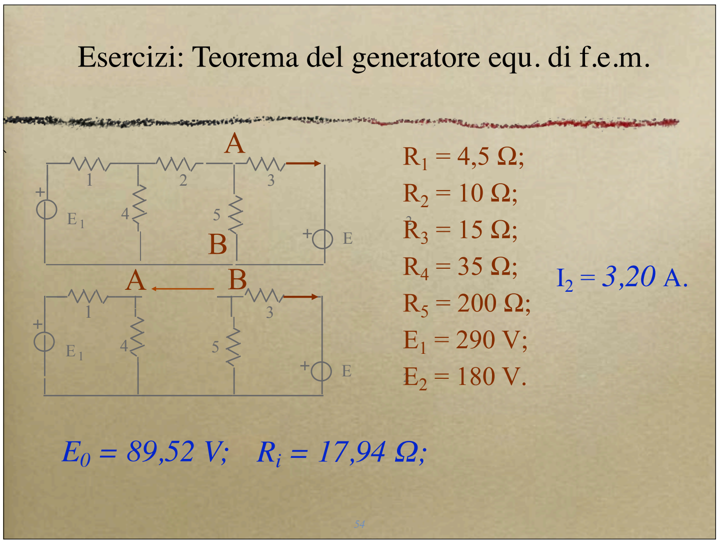
Ma, naturalmente, la scelta di dove applicare il teorema di Thevenin non è unica. Proviamo due nuovi punti. Prima misuriamo in laboratorio la corrente I_2.



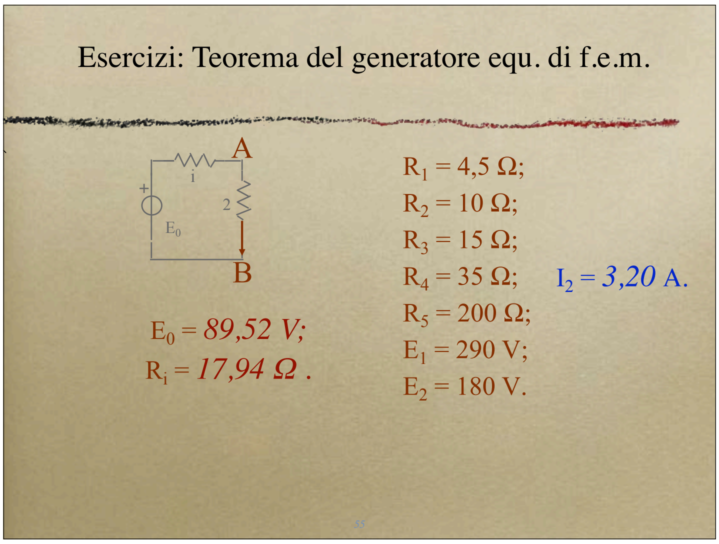
E anche direttamente il valore E_0.



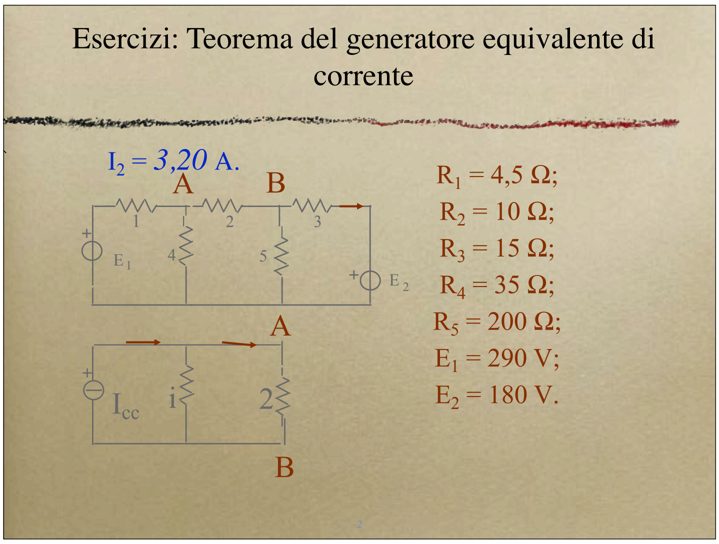
In laboratorio possiamo anche misurare direttamente i valori E'_0 ed E''_0, per applicare la sovrapposizione degli effetti ed ottenere E_0.



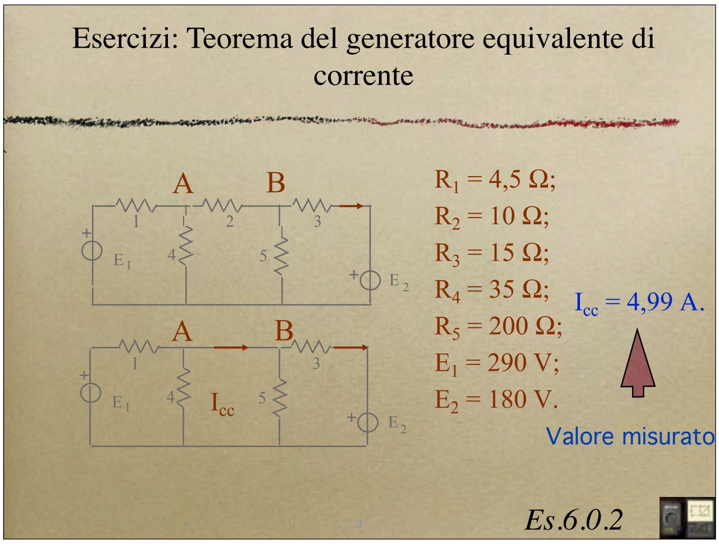
E quindi ottenere il valore I_2. Si noti che sia il calcolo analitico di E_0 che quello di R_i, con la scelta fatta dei due nuovi punti A e B, è molto semplificato. Infatti nel nuovo circuito i due generatori agiscono separatamente e quindi è molto facile calcolare sia la corrente $I_1=I_4$ che la $I_3=I_5$, come pure la $R_i=(R_1//R_4)+(R_3//R_5)$.



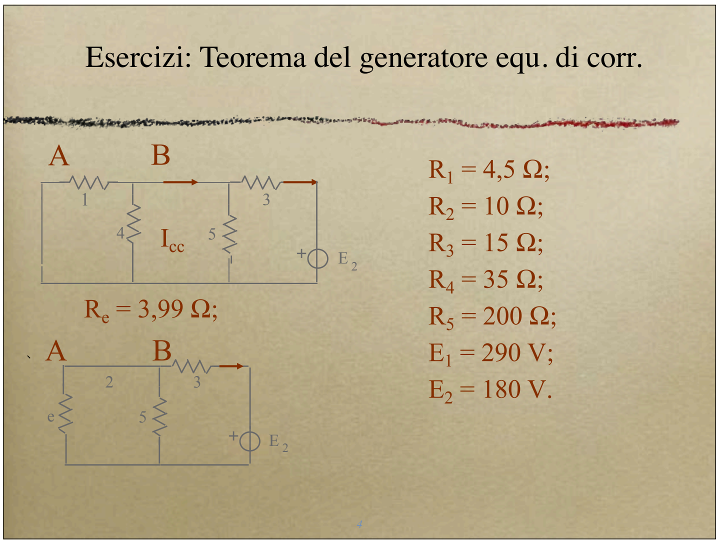
E in conclusione il circuito finale ed il risultato.



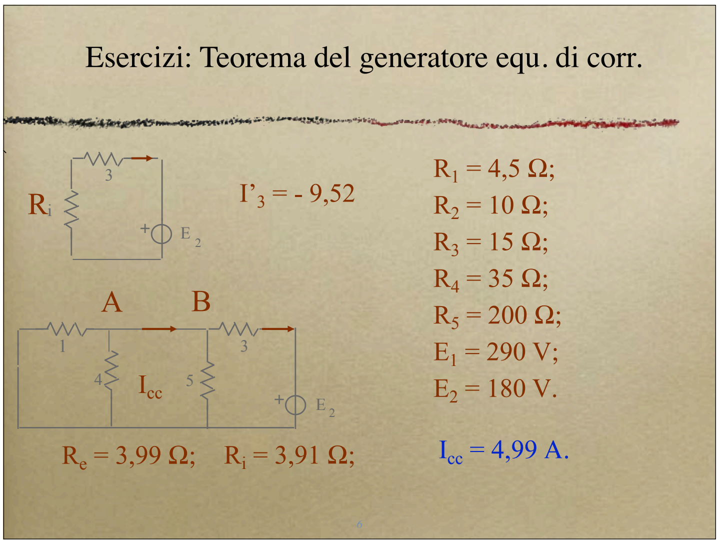
Ma perché solo il teorema di Thevenin? Si potrebbe applicare anche quello di Norton. Proviamo ai morsetti A e B.



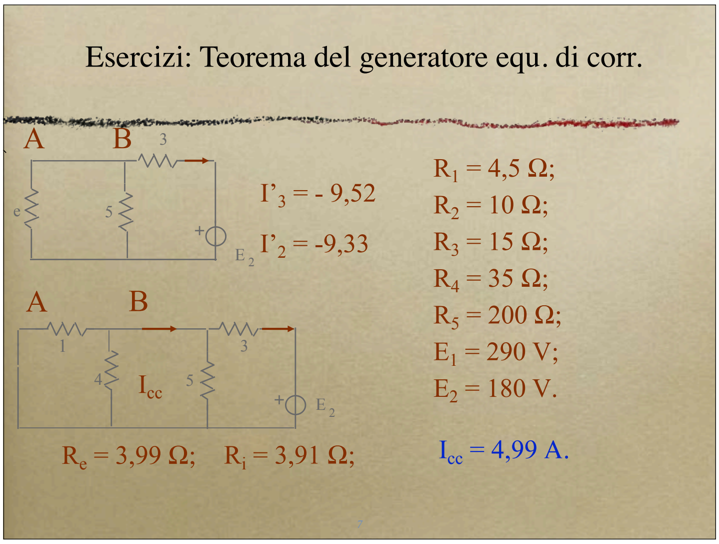
Bisognerà calcolare la corrente di cortocircuito. Che naturalmente possiamo misurare in laboratorio.



Oppure calcolare applicando ancora una volta la sovrapposizione degli effetti. nel primo circuito R_1 ed R_4 sono in parallelo e la resistenza equivalente è R_e. Poi il parallelo di quest'ultima con R_5.



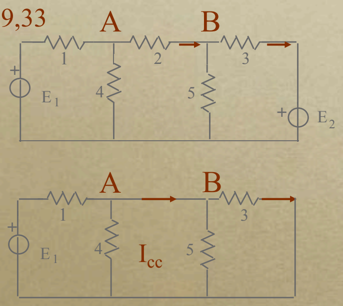
Infine il risultato per I'_3 (notare l segno!). Ma a noi serve I'_2, cioè la corrente nel ramo A B. Quindi bisognerà ripartire la corrente.



E si calcola I'_2.

Esercizi: Teorema del generatore equ. di corr.

$I'_2 = -9{,}33$



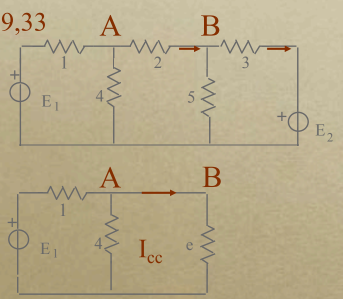
$R_1 = 4{,}5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 35\ \Omega$;
$R_5 = 200\ \Omega$;
$E_1 = 290$ V;
$E_2 = 180$ V.

$I_{cc} = 4{,}99$ A.

Ora passiamo al secondo circuito.

Esercizi: Teorema del generatore equ. di corr.

$I'_2 = -9{,}33$



$R_e = 13{,}95\ \Omega$;

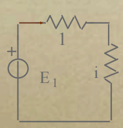
$R_1 = 4{,}5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 35\ \Omega$;
$R_5 = 200\ \Omega$;
$E_1 = 290$ V;
$E_2 = 180$ V.

$I_{cc} = 4{,}99$ A.

Prima la riduzione …

Esercizi: Teorema del generatore equ. di corr.

$I'_2 = -9{,}33$



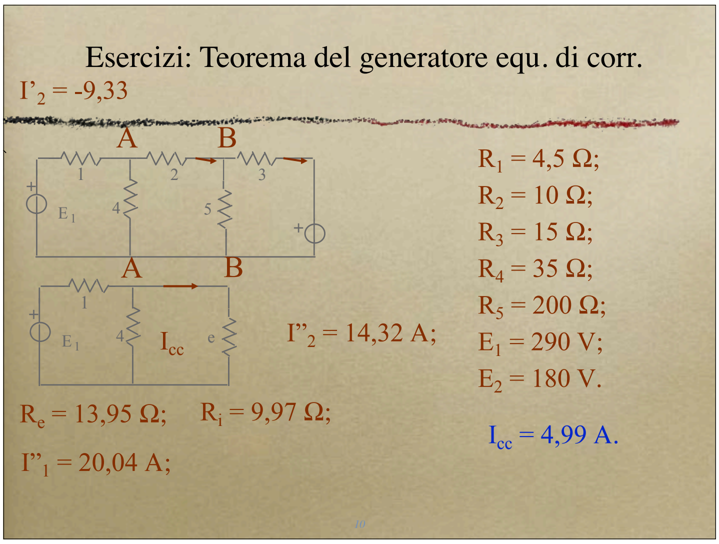
$R_1 = 4{,}5\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 35\ \Omega$;
$R_5 = 200\ \Omega$;
$E_1 = 290$ V;
$E_2 = 180$ V.

$R_e = 13{,}95\ \Omega$; $R_i = 9{,}97\ \Omega$;

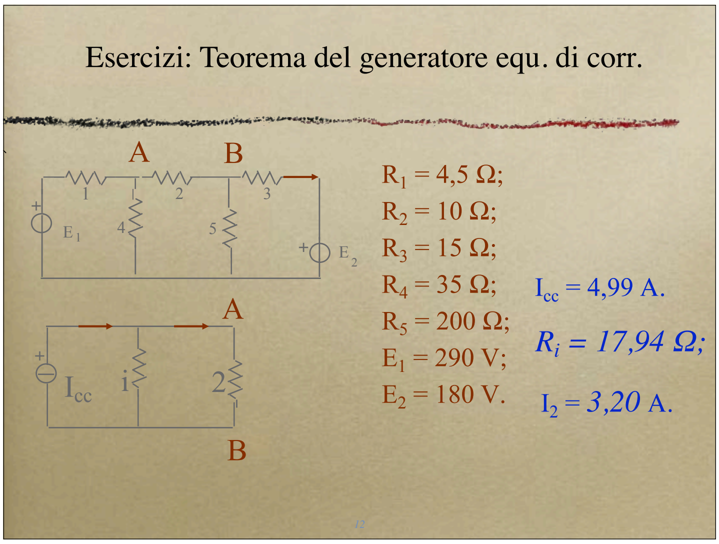
$I''_1 = 20{,}04$ A;

$I_{cc} = 4{,}99$ A.

E poi il calcolo di I''_1.



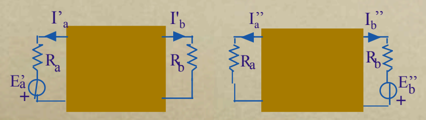
E quindi ripartendo si ottiene I''_2.



E quindi il risultato. La R_i, naturalmente è la stessa di prima.

Un'altra proprietà generale delle reti è quella descritta dal cosiddetto principio di reciprocità. Si consideri una rete passiva qualsiasi e si individuino in essa due rami, diciamo il ramo a ed il ramo b. Alimentiamo la rete ponendo un generatore di tensione E_a nel ramo a e indichiamo con I_b la corrente, in un determinato verso, che circola nel ramo b in conseguenza dell'inserimento del generatore E_a nel ramo a.

Enunciato del teorema di reciprocità



$$\frac{E'_a}{I'_b} = \frac{E''_b}{I''_a}$$

Viceversa sia I'_a la corrente prodotta nel ramo a quando un generatore E'_b è inserito nel ramo b della rete passiva. Orbene il teorema afferma che: $E_a/I_b = E'_b/I'_a$. Cioè, in sintesi, il rapporto tra causa in a ed effetto in b è uguale al rapporto tra causa in b ed effetto in a. Da ciò il nome di reciprocità.

Dimostrazione del teorema di reciprocità

$$\sum_k V'_k I''_k = 0 \qquad \sum_k V''_k I'_k = 0$$

$$V'_k = R_k I'_k \quad \text{per } k \neq a$$

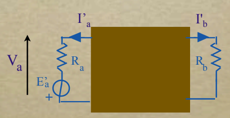
$$V'_a = -E'_a + R_a I'_a \quad \text{per } k = a$$

$$\sum_k V'_k I''_k = -E'_a I''_a + R_a I'_a I''_a + \sum_{k \neq a} R_k I'_k I''_k = 0$$

$$\sum_k V''_k I'_k = -E''_b I'_b + R_b I''_b I'_b + \sum_{k \neq b} R_k I''_k I'_k = 0$$

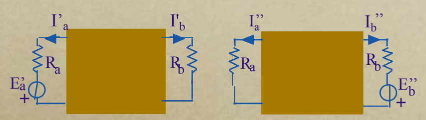
$$\sum_k V'_k I''_k = -E'_a I''_a + \sum_k R_k I'_k I''_k = 0$$

$$\sum_k V''_k I'_k = -E''_b I'_b + \sum_k R_k I''_k I'_k = 0$$



La dimostrazione è immediata se si applica il teorema di Tellegen alle due reti mostrate in figura e si fa attenzione ai segni. Nel riquadro c'è, evidentemente, una rete passiva.

E quindi la tesi!



$$E''_a I'_a = E'_a I''_a$$

$$\frac{E'_a}{I'_b} = \frac{E''_b}{I''_a}$$

Dalle due ultime relazioni si ricava facilmente la tesi del teorema.

Riepilogo della Lezione

Teoremi di non amplificazione

Principio di sovrapposizione: un esempio;

Caratterizzazione esterna delle reti attive;

Teorema del generatore equivalente di f.e.m.;

Teorema del generatore equivalente di corrente;

Esercizi;

Teorema di reciprocità.