Lezione 6

Incognite tensioni e correnti

N-1 ai nodi; *I*

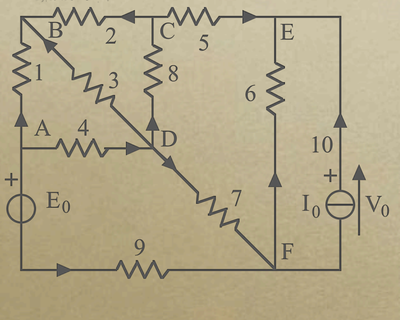
l - (N-1) alle maglie; *V*

l caratteristiche $I = f(V)$ o $V = g(I)$

2l equazioni in 2l incognite

Ritorniamo ora al nostro problema generale di una rete qualsiasi per la quale abbiamo già visto come scrivere un sistema di 2l equazioni indipendenti in 2l incognite: le correnti e le tensioni in ogni ramo.

Un esempio!



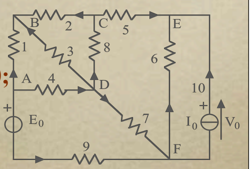
N = 6;

l = 10.

Ecco la rete su cui abbiamo ragionato.

Sistema di equazioni risolvente.

A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0;$ 1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0;$ 2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0:$
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$ 3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0;$
E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0;$ 4) $V_6 - V_{10} = 0;$
F) $I_9 + I_7 - I_6 - I_{10} = 0.$ 5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0.$



+ le equazioni caratteristiche!

$V_x = f(I_x)$

Generatore isolato di tensione E_0

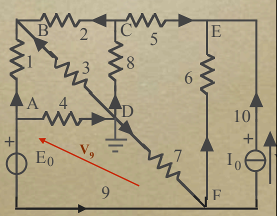
Ed il sistema di equazioni che abbiamo ottenuto. Domandiamoci se si può fare di meglio che scrivere le equazioni nelle incognite correnti e tensioni. Se immaginiamo di avere tutte caratteristiche del tipo V=f(I), potremmo ridurre il numero delle equazioni a l, semplicemente sostituendo nelle equazioni alle maglie le espressioni delle stesse tensioni in funzione delle correnti fornite dalle caratteristiche. Le incognite saranno le correnti nei rami.

Sistema di equazioni risolvente.

A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0;$ 1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0;$ 2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0:$
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$ 3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0;$
E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0;$ 4) $V_6 - V_{10} = 0;$
F) $I_9 + I_7 - I_6 - I_{10} = 0;$ 5) $V_4 + V_7 - V_9 - E_0 = 0.$

$V_x = RI_x.$

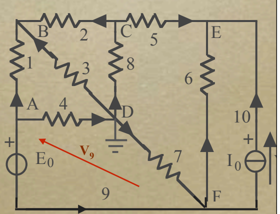
$V_9 = E_0$



La presenza generatori di tensione isolati non costituisce un problema.
Per esempio nel nostro caso, se supponessimo che nel lato 9 non ci sia la resistenza R_9, non potremmo esprimere la tensione sul generatore in funzione della corrente che esso eroga. Non potremmo quindi eliminare la tensione V_9 in funzione della corrente I_9. Ma questo non costituisce un problema dato che E_0 (e quindi V_9) è assegnata, e non incognita.

Incognite correnti: primo caso.

A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0;$ 1) $R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0;$
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0;$ 2) $R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 = 0;$
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$ 3) $R_8 I_8 + R_5 I_5 - V_0 - R_7 I_7 = 0;$
E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0;$ 4) $R_6 I_6 + V_0 = 0;$
F) $I_9 + I_7 - I_6 - I_{10} = 0;$ 5) $R_4 I_4 + R_7 I_7 - E_0 = 0.$



E possiamo ottenere comunque le l equazioni nelle correnti di lato.

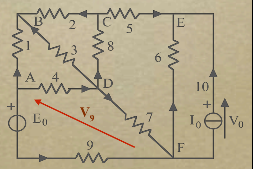
Sistema di equazioni risolvente.

A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0;$ 1) $R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0;$
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0;$ 2) $R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 = 0;$
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$ 3) $R_8 I_8 + R_5 I_5 - V_0 - R_7 I_7 = 0;$
E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0;$ 4) $R_6 I_6 + V_0 = 0;$
F) $I_9 + I_7 - I_6 - I_{10} = 0.$ 5) $R_4 I_4 + R_7 I_7 - (E_0 + R_9 I_9) = 0.$

+ le equazioni caratteristiche!

$V_x = RI_x.$

$V_9 = E_0 + R_9 I_9$

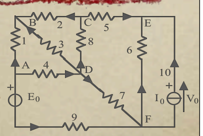


Notare il segno + dovuto alla scelta dei versi di I_9 ed E_0!

Per la presenza del resistore R9, la caratteristica del lato 9 non è più singolare e anche in questo caso si ottengono facilmente le equazioni nelle sole correnti.

Incognite correnti: primo caso.

A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0;$ 1) $R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0;$
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0;$ 2) $R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 = 0;$
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$ 3) $R_8 I_8 + R_5 I_5 - V_0 - R_7 I_7 = 0;$
E) $I_5 + I_6 + I_0 = 0;$ 4) $R_6 I_6 + V_0 = 0;$
F) $I_9 + I_7 - I_6 - I_0 = 0.$ 5) $R_4 I_4 + R_7 I_7 - (E_0 + R_9 I_9) = 0.$

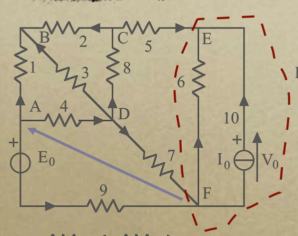


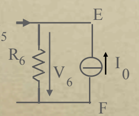
Problema: Generatore isolato di corrente I_0

l equazioni nelle l-1 incognite "I" + "V_0"

Apparentemente anche il generatore di corrente parrebbe porre un'analogo problema. Infatti non è possibile esprimere V0 in funzione di I0, In effetti il problema non sussiste perché se è vero che non si elimina la tensione V0 nelle equazioni è pur vero che scompare una incognita, I0, che è nota perché assegnata. In questo caso, dunque, effettuando la sostituzione si ottiene un sistema di equazioni in 9 incognite correnti nei rami ed un tensione V0

Le caratteristiche

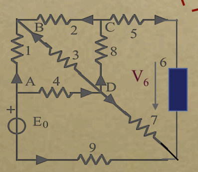




$I_5 + I_0 + I_6 = 0$

$I_5 = -I_0 + V_6/R_6.$

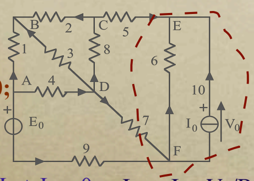
$V_6 = R_6(-I_5 - I_0)$

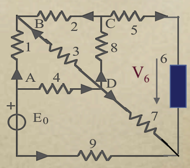


In effetti avremmo potuto ragionare anche per il generatore di corrente come abbiamo fatto per quello di tensione. Consideriamo infatti il bipolo racchiuso nella linea tratteggiata. Esso ha una caratteristica V6 = R6(-I5 - I0), e quindi potremmo modificare la rete come mostrato con un nuovo bipolo nel ramo 6 (che è poi anche il ramo 5) la cui tensione V6 può essere eliminata dalle equazioni alle maglie.

Equazioni nelle incognite correnti

1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0:$
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0;$
4) $V_6 - V_{10} = 0;$
5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0.$





$I_5 + I_0 + I_6 = 0$ $\quad I_5 = -I_0 - V_6/R_6$ $\quad V_6 = R_6(-I_5 - I_0)$

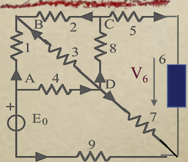
1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0:$
3) $V_8 + V_5 - V_6 - V_7 = 0;$
4) $V_4 + V_7 - V_9 = 0.$

1) $R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0;$
2) $R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 = 0;$
3) $R_8 I_8 + R_5 I_5 + R_6 (I_5 + I_0) - R_7 I_7 = 0;$
4) $R_4 I_4 + R_7 I_7 - (E_0 + R_9 I_9) = 0.$

Più le equazioni ai nodi (quattro)

In questo caso le maglie indipendenti saranno solo 4, perché abbiamo eliminato un nodo.

Sistema completo: secondo caso.



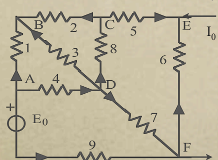
A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0;$
B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0;$
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$
F) $I_9 + I_7 - I_5 = 0.$

1) $R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0;$
2) $R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 = 0;$
3) $R_8 I_8 + R_5 I_5 + R_6 (I_5 + I_0) - R_7 I_7 = 0;$
4) $R_4 I_4 + R_7 I_7 - (E_0 + R_9 I_9) = 0.$

Avremo dunque un sistema di otto equazioni in 8 incognite correnti.

Equazioni nelle incognite correnti: un altro punto di vista

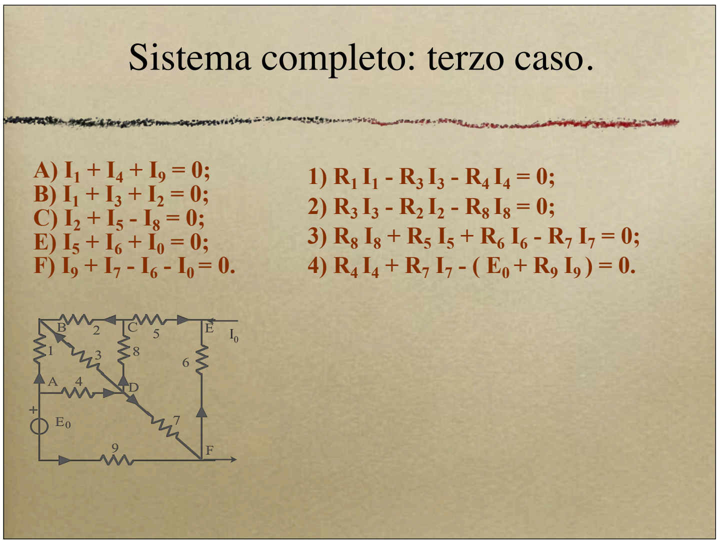
1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0:$
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0;$
4) $V_6 - V_{10} = 0;$
5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0.$



1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0:$
3) $V_8 + V_5 - V_6 - V_7 = 0;$
4) $V_4 + V_7 - V_9 = 0.$

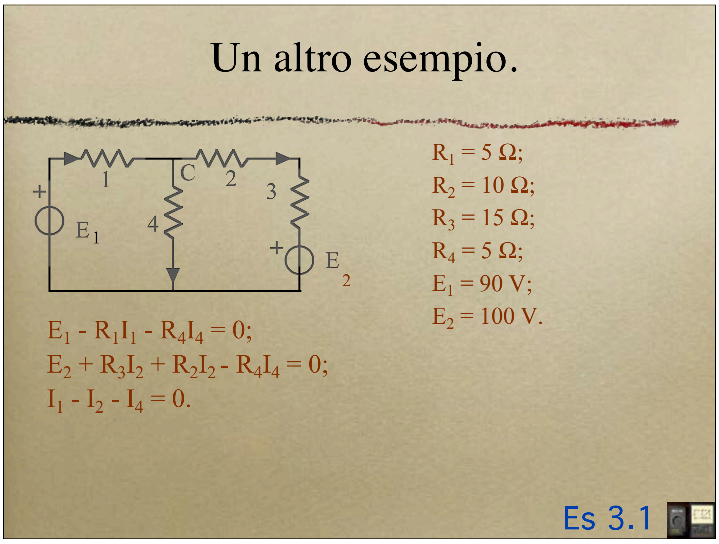
1) $R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0;$
2) $R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 = 0;$
3) $R_8 I_8 + R_5 I_5 - R_6 I_6 - R_7 I_7 = 0;$
4) $R_4 I_4 + R_7 I_7 - (E_0 + R_9 I_9) = 0.$

Un altro punto di vista può essere il seguente: dato che il generatore ideale di corrente ha il solo compito di immettere una corrente nel nodo E e di prelevarla dal nodo F, potremmo disegnare il circuito come mostrato. In tal caso avremo solo 4 maglie: la quinta è in questo caso”nascosta”.



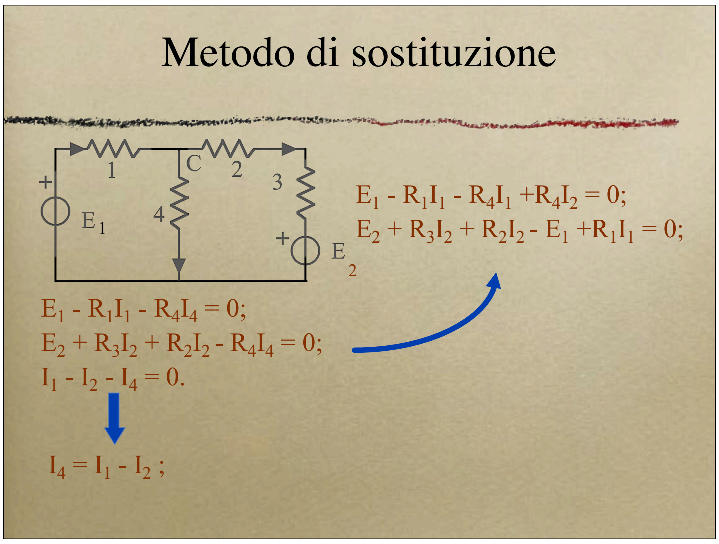
Ma avremo ancora 6 nodi e quindi 5 equazioni per le L.K.C.

Naturalmente discorsi del tutto analoghi si potrebbero fare nel caso in cui si intenda eliminare le correnti, nelle equazioni ai nodi, in funzione delle tensioni sui lati. Il risultato sarà di l equazioni nelle incognite tensioni, salvo i casi analogo al precedente, in cui sia presente un generatore di tensione isolato, la sua corrente resta tra le incognite, mentre una delle tensioni risulta assegnata.



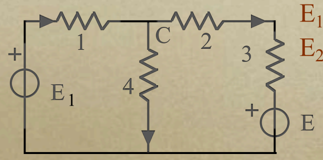
Proviamo a sviluppar un altro esempio e a portarlo fino infondo.

Abbiamo due maglie (scegliamo i “buchi della rete”) e due nodi, quindi due equazioni alle maglie e una equazione ai nodi.



Risolviamo con il metodo di sostituzione. Ricaviamo I4 dalla terza e sostituiamo nelle altre due.

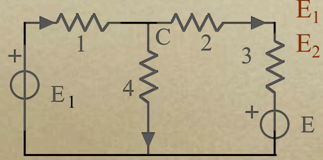
Un altro esempio.



$$E_1 - R_1I_1 - R_4I_1 + R_4I_2 = 0;$$
$$E_2 + R_3I_2 + R_2I_2 - E_1 + R_1I_1 = 0;$$
$$\Downarrow$$
$$I_1 = -\frac{E_2 + R_3I_2 + R_2I_2 - E_1}{R_1};$$

Ora ricaviamo I1 dalla seconda...

Un altro esempio.

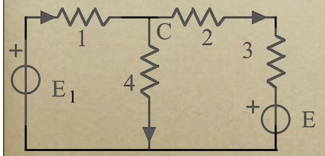


$$E_1 - R_1I_1 - R_4I_1 + R_4I_2 = 0;$$
$$E_2 + R_3I_2 + R_2I_2 - E_1 + R_1I_1 = 0;$$
$$\Uparrow$$
$$I_1 = -\frac{E_2 + R_3I_2 + R_2I_2 - E_1}{R_1};$$

$$E_1 + R_4I_2 + (R_1 + R_4)\frac{E_2 + R_3I_2 + R_2I_2 - E_1}{R_1} = 0.$$

... e sostituiamo nella prima. Otteniamo una equazione nella sola I2.

Un altro esempio.



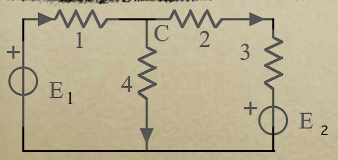
$R_1 = 5\ \Omega;$
$R_2 = 10\ \Omega;$
$R_3 = 15\ \Omega;$
$R_4 = 5\ \Omega;$

$E_1 = 90$ V;
$E_2 = 100$ V

$$I_2 = -\frac{E_1 + (R_1 + R_4)\dfrac{E_2 - E_1}{R_1}}{R_4 + (R_1 + R_4)\dfrac{R_3 + R_2}{R_1}} = -2\text{ A}.$$

Che, con i valori assegnati dei parametri, ci fornisce -2A.

Un altro esempio.



$R_1 = 5\ \Omega;$
$R_2 = 10\ \Omega;$
$R_3 = 15\ \Omega;$
$R_4 = 5\ \Omega;$

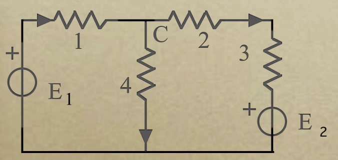
$E_1 = 90\ V;$
$E_2 = 100\ V$

$I_2 = -2\ A;$
$I_1 = \ \ 8\ A.$

$$I_1 = -\frac{E_2 + R_3 I_2 + R_2 I_2 - E_1}{R_1}$$

Dalla conoscenza di I2 è facile ricavare I1

Un altro esempio.



$R_1 = 5\ \Omega;$
$R_2 = 10\ \Omega;$
$R_3 = 15\ \Omega;$
$R_4 = 5\ \Omega;$

$E_1 = 90\ V;$
$E_2 = 100\ V$

$I_2 = -2\ A;$
$I_1 = \ \ 8\ A;$
$I_4 = \ 10\ A.$

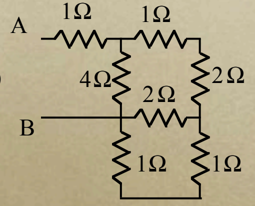
$I_4 = I_1 - I_2\ ;$

Es 3.1

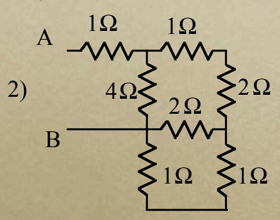
E poi I4. Verifichiamo i risultati in Laboratorio.

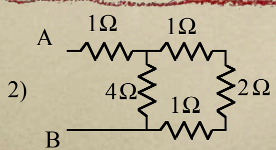
Alcuni esercizi: Es.2

2)



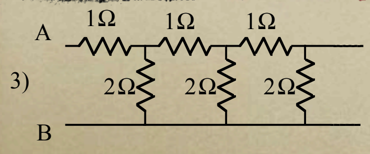
Risposte ad Esercizi : Es.2



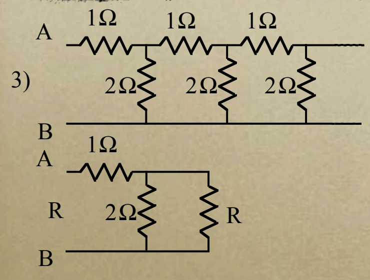


R = 3Ω;

Alcuni esercizi: Es.3



Risposte ad Esercizi : Es.3

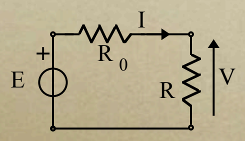


$$R = \frac{2\,R}{2\;+R} + 1$$

$$R = 2$$

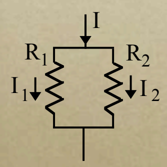
$$R = -1$$

Esercizi: Es.4



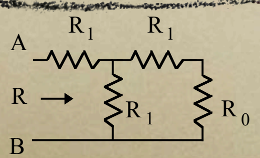
Trovare il valore di R che rende massima la potenza dissipata nella stessa resistenza R.

Esercizi: Es.5



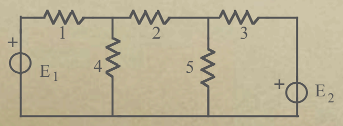
Determinare la ripartizione delle correnti nei due rami imponendo che la potenza dissipata nel circuito sia minima con la condizione $I_1 + I_2 = I$.

Esercizi: Es.6



Determinare il valore di R_1 *che rende la resistenza R vista dai due morsetti A e B uguale alla resistenza* R_0 *di carico.*

Esercizi.

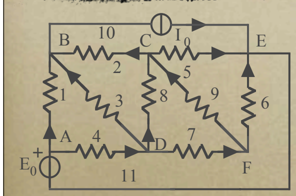


$I_3 = 2{,}14$ A.

$R_1 = 4{,}50\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 15\ \Omega$;
$R_4 = 35\ \Omega$;
$R_5 = 200\ \Omega$;
$E_1 = 290$ V;
$E_2 = 180$ V.

Es 3/2

Esercizi: Es.8



$R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$;
$R_4 = R_5 = R_6 = 2\ \Omega$;
$R_7 = R_8 = R_9 = 4\ \Omega$;
$E_0 = 10$ V;
$I_0 = 2$ A.

$I_8 = 0{,}56$ A;
$I_1 = 3{,}74$ A;
$I_2 = -1{,}98$ A.

Es 3.3

Incognite tensioni o correnti

Equazioni	*Incognite*
N-1 ai nodi;	*I*
ℓ - (N-1) alle maglie;	*V*
ℓ caratteristiche	*$I = f(V)$ o $V = g(I)$*

ℓ equazioni nelle incognite "I" o "V"

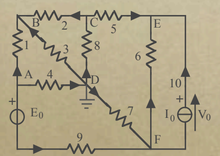
Abbiamo visto nella lezione precedente che è possibile ridurre il numero delle equazioni risolventi del circuito eliminando le incognite tensioni o correnti.

Incognite tensioni o correnti

- *In presenza di un generatore di corrente la corrispondente tensione non può scomparire come incognita!*
- *In presenza di un generatore di tensione la corrispondente corrente non può scomparire come incognita!*

Vediamo ora come si possa ulteriormente ridurre il numero delle incognite e delle equazioni. Esistono due possibilità duali: o si sceglie un sistema di incognite che per definizione soddisfa alle equazioni alle maglie, o uno che soddisfa quelle ai nodi. Si può, per esempio, scegliere, come incognite del problema, invece delle tensioni sui lati o delle correnti nei rami, i potenziali relativi ai nodi della rete.

Metodo dei potenziali ai nodi



$V_1 = V_A - V_B$.

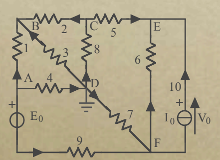
$$I_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1}$$

$V_D = 0.$

Il nodo con potenziale nullo viene detto nodo di riferimento o nodo a terra – terminologia che ricorda il fatto che in un circuito in generale è conveniente collegare un punto dello stesso ad un corpo il cui potenziale sia eguale a quello dell'operatore e possa ritenersi stabile, e ciò sia per ragioni di sicurezza degli operatori, sia per evitare che gli effetti esterni al circuito stesso possano rendere fluttuanti i potenziali dei nodi.

A tale scopo, possiamo porre ogni tensione di lato nella forma $V_r–V_s$, dove Vr e Vs sono, evidentemente, i potenziali dei nodi r ed s rispetto ad un riferimento che, come è noto, è arbitrario. Se in particolare scegliamo come riferimento per i potenziali quello assunto da uno dei nodi, ci ritroveremo con n –1 incognite V_i, potenziali assunti dai restanti nodi della rete rispetto al nodo prescelto.

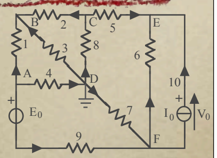
Correnti di lato in funzione dei potenziali nei nodi



1) $V_A - V_B = R_1 I_1$;
2) $V_C - V_B = R_2 I_2$;
3) $V_D - V_B = - V_B = R_3 I_3$
4) $V_A - V_D = V_A = R_4 I_4$;
5) $V_C - V_E = R_5 I_5$;
6) $V_F - V_E = R_6 I_6$;
7) $V_D - V_F = - V_F = R_7 I_7$;
8) $V_D - V_C = - V_C = R_8 I_8$;
9) $V_A - V_F - E_0 = R_9 I_9$.

Il sistema di n – 1 equazione nelle n – 1 incognite (i potenziali ai nodi) che ci occorre per risolvere la rete, si può facilmente ottenere scrivendo le equazioni dettate dalla LKC ad n – 1 nodi, esprimendo però le correnti nei singoli rami in funzione delle differenze di potenziale $V_i – V_j$. Osserviamo che per le incognite V_i non occorre scrivere le equazioni che esprimono la LKT; esse infatti, per definizione, le soddisfano, trattandosi appunto di potenziali.

Le equazioni



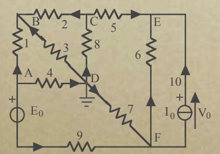
A) $I_9 + I_1 + I_4 = 0;$
B) $I_1 + I_2 + I_3 = 0;$
C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$
D) $I_3 - I_4 + I_7 + I_8 = 0;$
E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0;$

1) $V_A - V_B = R_1 I_1;$
2) $V_C - V_B = R_2 I_2;$
3) $V_D - V_B = - V_B = R_3 I_3$
4) $V_A - V_D = V_A = R_4 I_4;$
5) $V_C - V_E = R_5 I_5;$
6) $V_F - V_E = R_6 I_6;$
7) $V_D - V_F = - V_F = R_7 I_7;$
8) $V_D - V_C = - V_C = R_8 I_8;$
9) $V_A - V_F - E_0 = R_9 I_9.$

$$\text{A)}\ \frac{V_A - V_F - E_0}{R_9} + \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A}{R_4} = 0;$$
$$\text{B)}\ \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{-V_B}{R_3} = 0;$$
$$\text{C)}\ \frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{V_C - V_E}{R_5} - \frac{-V_C}{R_8} = 0;$$
$$\text{D)}\ \frac{-V_B}{R_3} + \frac{-V_A}{R_4} + \frac{-V_F}{R_7} + \frac{-V_C}{R_8} = 0;$$
$$\text{E)}\ \frac{V_C - V_E}{R_5} + \frac{V_F - V_E}{R_6} + I_0 = 0.$$

L'automatica riduzione delle equazioni rende pertanto conveniente la scelta dei potenziali ai nodi come incognite. Naturalmente la conoscenza dei potenziali in ogni nodo equivale ad aver risolto la rete. Infatti, la differenza dei due potenziali relativi ad un determinato ramo fornisce la tensione sul lato, e da questa, mediante la caratteristica del lato, si può risalire alla corrente che lo interessa.

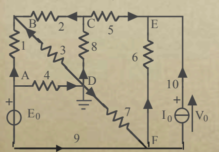
Le equazioni ai nodi in funzione dei potenziali nei nodi



$$\text{A)}\ \frac{V_A - V_F - E_0}{R_9} + \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A}{R_4} = 0;$$
$$\text{B)}\ \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{-V_B}{R_3} = 0;$$
$$\text{C)}\ \frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{V_C - V_E}{R_5} - \frac{-V_C}{R_8} = 0;$$
$$\text{D)}\ \frac{-V_B}{R_3} + \frac{-V_A}{R_4} + \frac{-V_F}{R_7} + \frac{-V_C}{R_8} = 0;$$
$$\text{E)}\ \frac{V_C - V_E}{R_5} + \frac{V_F - V_E}{R_6} + I_0 = 0.$$

In definitiva ecco le equazioni. Come si vede la presenza di un generatore isolato di corrente non comporta difficoltà.
Ma anche la presenza di un generatore isolato di tensione si può facilmente gestire. Supponiamo infatti che R_9 sia nulla.

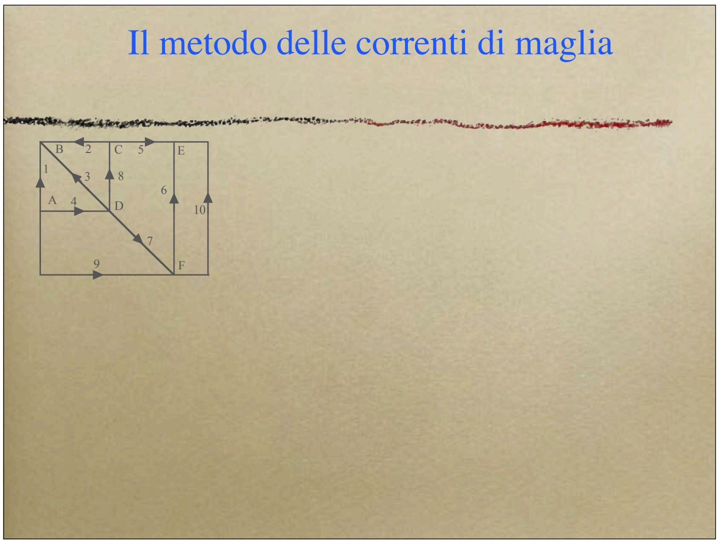
Le equazioni ai nodi in funzione dei potenziali nei nodi



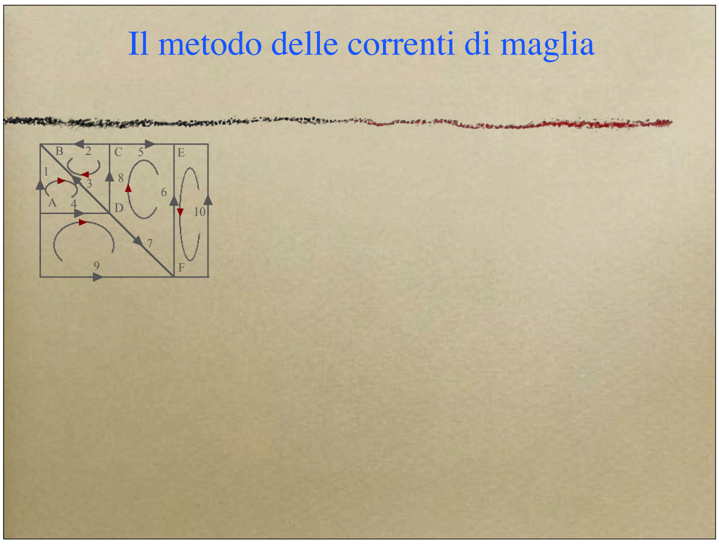
$$\text{A)}\ I_9 + \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A}{R_4} = 0;$$
$$\text{B)}\ \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{-V_B}{R_3} = 0;$$
$$\text{C)}\ \frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{V_C - V_E}{R_5} - \frac{-V_C}{R_8} = 0;$$
$$\text{D)}\ \frac{-V_B}{R_3} + \frac{-V_A}{R_4} + \frac{-V_F}{R_7} + \frac{-V_C}{R_8} = 0;$$
$$\text{E)}\ \frac{V_C - V_E}{R_5} + \frac{V_F - V_E}{R_6} + I_0 = 0.$$

$$V_A - V_F = E_0$$

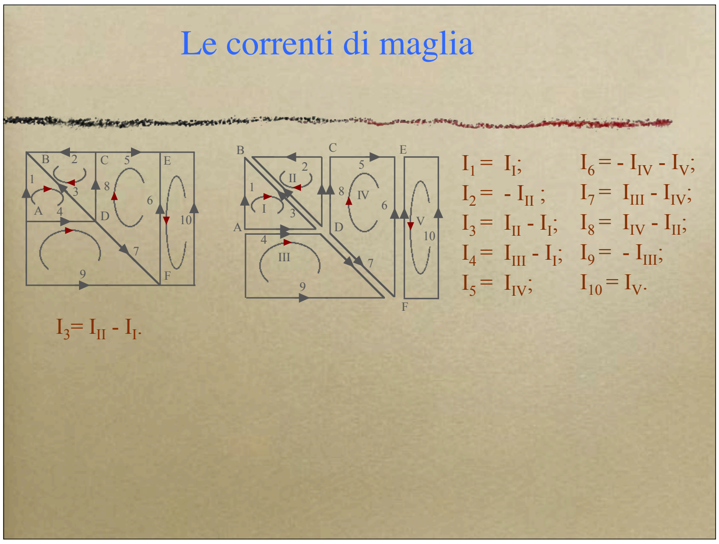
Come mostrato in questa figura. In tal caso la corrente I_9 non può essere ottenuta dalla caratteristica del bipolo e deve quindi rimanere come incognita. D'altra parte però alle equazioni si aggiunge la relazione imposta dal generatore di tensione e quindi il numero di equazioni aumenta di una unità.



Il metodo duale prende il nome di metodo delle correnti di maglia. Si tratta di trovare questa volta un insieme di incognite che soddisfa per definizione le equazioni nodi.



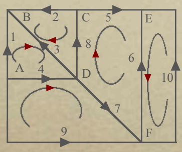
Per costruire un tale sistema consideriamo un insieme di maglie indipendenti della rete in esame. Per esempio i buchi della rete. Associamo ora ad ogni maglia una corrente di maglia ed esprimiamo la corrente in ogni lato come la somma o differenza di correnti di maglia – di cui il lato in questione rappresenta la parte in comune – a seconda dei versi scelti per le correnti di maglia.

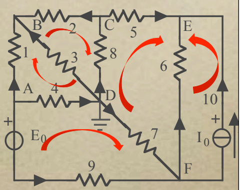


Per capire le correnti di maglia basta immaginare i lati comuni a più maglie effettivamente divisi in due, come mostrato nella figura. Con questa schematizzazione appare evidente come, per esempio, la corrente I_3 sia la differenza della corrente I_{II} che circola nella maglia II e quella che circola nella maglia I.

Le correnti di lato in funzione delle correnti di maglia

$I_1 = I_I;$ $\quad I_6 = - I_{IV} - I_V;$
$I_2 = - I_{II};$ $\quad I_7 = I_{III} - I_{IV};$
$I_3 = I_{II} - I_I;$ $\quad I_8 = I_{IV} - I_{II};$
$I_4 = I_{III} - I_I;$ $\quad I_9 = - I_{III};$
$I_5 = I_{IV};$ $\quad I_{10} = I_V.$

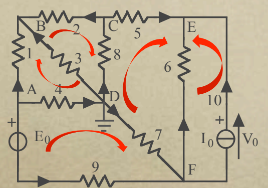




E così per le altre correnti di lato.
È evidente che tali incognite correnti di maglia godono, per costruzione, della proprietà di soddisfare la LKC ai nodi. Infatti in ogni nodo una corrente di maglia entra ed esce e quindi le LKC ai nodi, scritte in termini di correnti di maglia, si riconducono a pure identità.

Le equazioni alle maglie scritte utilizzando le correnti di maglia

$R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0;$
$R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 = 0;$
$R_8 I_8 + R_5 I_5 - R_6 I_6 - R_7 I_7 = 0;$
$+ R_6 I_6 + V_0 = 0;$
$R_4 I_4 + R_7 I_7 - (E_0 + R_9 I_9) = 0.$

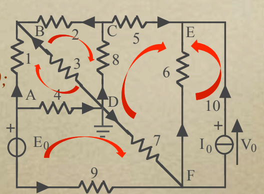


$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$
$R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II}) = 0;$
$R_8 (I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6 (I_{IV} + I_V) - R_7 (I_{III} - I_{IV}) = 0;$
$- R_6 (I_{IV} + I_V) + V_0 = 0;$
$R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$
$I_0 = I_V$

A questo punto sostituiamo questi valori nelle equazioni alle maglie.
Le equazioni così ottenute sono indipendenti e in numero pari alle incognite e quindi sono un sistema risolvente per il circuito in esame.
Si noti che se si tiene conto che I_V è in realtà assegnata, la quarta equazione non fa che fornirci il valore della tensione sul generatore di corrente. Eliminandola abbiamo un sistema di 4 equazioni in 4 incognite.

I generatori di corrente

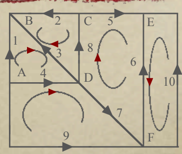
$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$
$R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II}) = 0;$
$R_8 (I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6 (I_{IV} + I_0) - R_7 (I_{III} - I_{IV}) = 0;$
$- R_6 (I_{IV} + I_0) + V_0 = 0;$
$R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$
$I_0 = I_V$



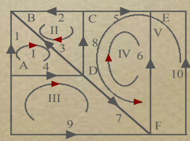
Si noti il ruolo del generatore di corrente. Per la sua presenza la corrente di maglia IV non è incognita, ma assegnata. D'altra parte la tensione sul generatore di corrente non è nota e non si può eliminare dalle equazioni.
Quindi la presenza di una incognita in più è compensata da quella di una equazione in più: $I_0 = I_V$

Una diversa scelta del sistema di maglie indipendenti.

$$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$$
$$R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II}) = 0;$$
$$R_8 (I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6 (I_{IV} + I_0) - R_7 (I_{III} - I_{IV}) = 0;$$
$$- R_6 (I_{IV} + I_0) + V_0 = 0;$$
$$R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$$

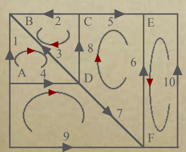


$$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$$
$$R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_V) = 0;$$
$$R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_V) + R_5 (I_{IV} - I_V) + V_0 - R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_V) = 0;$$
$$- R_6 I_{IV} + V_0 = 0;$$
$$R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_V) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$$

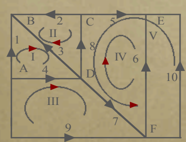


Naturalmente era possibile scegliere anche un diverso insieme di maglie indipendenti. Vediamo questo cosa comporta. Posiamo scegliere le maglie derivanti dall'albero 3,4,8,7,10. Le maglie e le relative correnti di maglia sono segnate in figura. Le equazioni sono diverse perché le incognite sono diverse! Si noti che la corrente $I_0=I_V$ sembra interessare rami diversi da quelli di prima.

Le nuove equazioni.



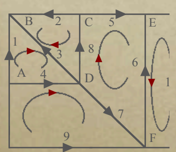
$$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$$
$$R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II}) = 0;$$
$$R_8 (I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6 (I_{IV} + I_0) - R_7 (I_{III} - I_{IV}) = 0;$$
$$- R_6 (I_{IV} + I_0) + V_0 = 0;$$
$$R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$$



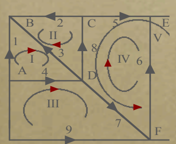
$$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$$
$$R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_0) = 0;$$
$$R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_0) + R_5 (I_{IV} - I_0) + V_0 - R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_0) = 0;$$
$$- R_6 I_{IV} + V_0 = 0;$$
$$R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_0) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$$

Mentre in precedenza la corrente I_0 sembrava interessare solo il ramo 6, oltre a quello del generatore, ora invece interessa i rami 5,8 e 7, come se tale corrente abbia scelto un diverso percorso nella rete. Ma ciò naturalmente così non è: in realtà siamo noi che abbiamo scelto di chiudere diversamente l'ultima maglia.

Confronto



$$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$$
$$R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II}) = 0;$$
$$R_8 (I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6 (I_{IV} + I_0) - R_7 (I_{III} - I_{IV}) = 0;$$
$$R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$$



$$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$$
$$R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_0) = 0;$$
$$R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_0) + R_5 (I_{IV} - I_0) + V_0 - R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_0) = 0;$$
$$R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_0) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$$

Se poi, come spesso si fa, non si disegna il generatore di corrente, ma solo il suo punto di ingresso e quello di uscita, allora anche l'equazione alla maglia V diventa non necessaria. e ci troviamo con quattro equazioni nelle quali, nei due casi, sembra che la corrente del generatore faccia due percorsi distinti: ramo 6 nel primo e rami 5,8 e 7 nel secondo.

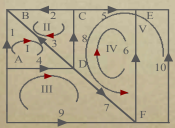
I generatori di corrente ed il metodo delle correnti di maglia!

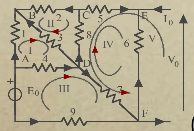
In presenza di rami con un generatore di corrente, volendo utilizzare il metodo delle correnti di maglia, basta scegliere ad arbitrio (!) un percorso per la corrente del generatore di corrente.

Tale scelta equivale ad una particolare scelta dell'insieme di maglie indipendenti.

Non sorprendono quindi le seguenti affermazioni: In presenza di rami con un generatore di corrente, volendo utilizzare il metodo delle correnti di maglia, basta scegliere ad arbitrio (!) un percorso per la corrente del generatore di corrente. Tale scelta equivale ad una particolare scelta dell'insieme di maglie indipendenti.

Scrittura diretta delle equazioni





$$(R_1+R_3+R_4)I_I - R_3 I_{II} - R_4 I_{III} = 0$$

$$(R_3+R_2+R_8)I_{II} - R_3 I_I - R_8 I_{IV} + R_8 I_0$$

$R_1 I_I - R_3(I_{II} - I_I) - R_4(I_{III} - I_I) = 0;$

$R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_0) = 0;$

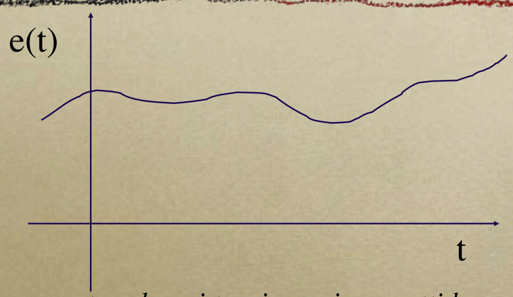
$R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_0) + R_5 (I_{IV} - I_0) + V_0 - R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_0) = 0;$

$- R_6 I_{IV} + V_0 = 0;$

$R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_0) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$

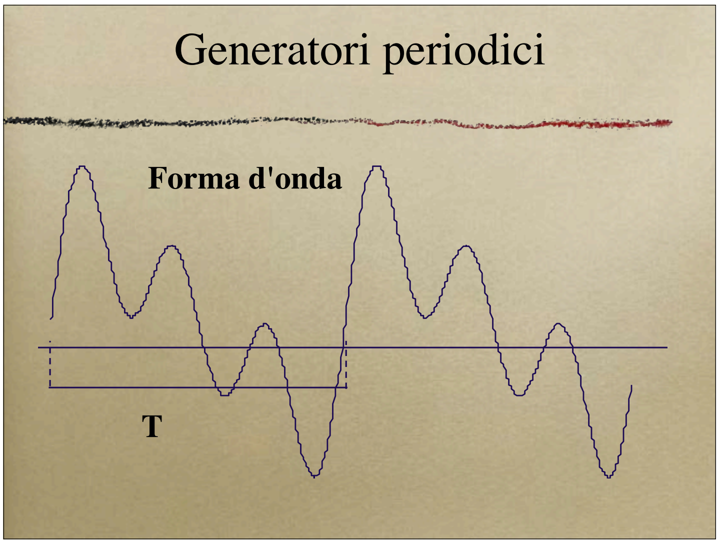
Con un po' di esercizio sarà facile scrivere le equazioni direttamente in funzione delle correnti di maglia come lustrato nei due esempi di figura!

Generatori non costanti

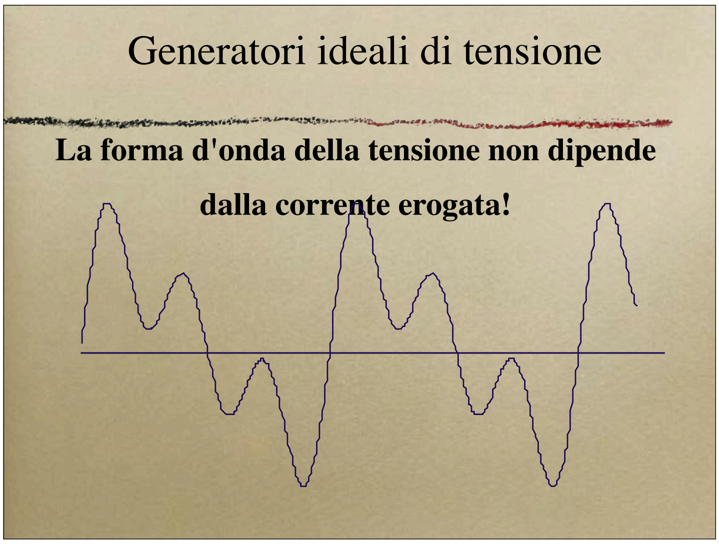


Un generatore la cui tensione ai morsetti ha un andamento nel tempo che non dipende dalla corrente erogata. Si parlerà di "forma d'onda" della tensione

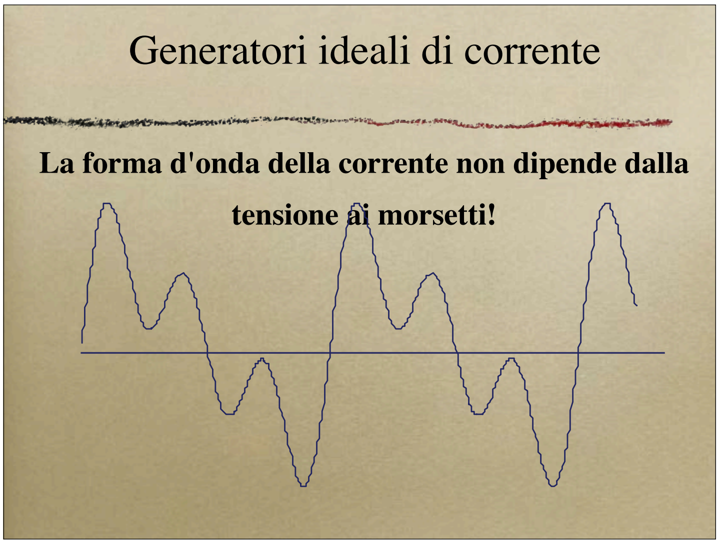
Come abbiamo accennato, estenderemo la teoria dei circuiti anche a regimi dinamici in cui le grandezze in gioco non si mantengono costanti, e accetteremo che anche in questi regimi le leggi di Kirchhoff siano valide; sarà allora un'approssimazione, ma un'approssimazione molto soddisfacente.



Tra le diverse forme d'onda che si possono immaginare rivestono grande importanza – e vedremo poi perché – quelle di tipo periodico, cioè forme d'onda che si ripetono dopo un certo intervallo di tempo T, detto periodo.



In queste condizioni bisognerà ridefinire il concetto di generatore ideale di tensione e di corrente: diremo generatore ideale di tensione un generatore la cui tensione ai morsetti ha un andamento nel tempo che non dipende dalla corrente erogata. Si parlerà di "forma d'onda" della tensione.



Analogamente, per i generatori di corrente, si parlerà di forma d'onda della corrente indipendente dalla tensione ai morsetti.
Orbene in queste condizioni tutto quello che abbiamo detto finora per i bipoli descritti da caratteristiche di tipo algebrico continuerà ad essere valido. Si parlerà di "reti resistive".

Reti resistive

c.c.		var
V	$\longrightarrow$	v(t)
I	$\longrightarrow$	i(t)

Converremo sempre di indicare le grandezze relative ai regimi dinamici con le lettere piccole e quelle dei regimi stazionari con le lettere grandi. In questo modo possiamo evitare di aggiungere la notazione “(t)” che indica la variabilità temporale.

Proprietà delle reti elettriche

Teorema di Tellegen

Continuando l’esame generale di una rete dal punto di vista del suo grafo, vogliamo illustrare ora una notevole proprietà caratteristica delle reti di bipoli: la proprietà descritta dal teorema che va sotto il nome di Teorema di Tellegen.

Due reti con lo stesso grafo!

$V_k \, I_k$

$V^*_k \, I^*_k$

Consideriamo due reti che abbiano lo stesso grafo, cioè due reti in cui bipoli diversi sono collegati alla stessa maniera tra di loro. Consideriamo per la prima rete un sistema di tensioni V_k sui rami che soddisfi la LKT e per la seconda rete un sistema di correnti I^*_k che soddisfi la LKC. Con V_k intendiamo la tensione positiva nel nodo in cui entra la corrente I^*_k positiva – convenzione dell’utilizzatore per ogni ramo della rete!

Ipotesi!

$V_k\, I_k$ | $V_k^*\, I_k^*$

Le tensioni e le correnti nelle due reti soddisfano le leggi di Kirchhoff

Assumiamo la stessa convenzione sui rami delle due reti

Per ogni ramo del grafo consideriamo il prodotto $V_k\, I_k$ e sommiamo tali prodotti per tutti i rami della rete:

Tellegen

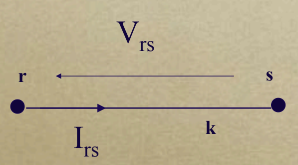
$V_k\, I_k$ | $V_k^*\, I_k^*$

$$\sum_k V_k\, I_k^* = 0$$

Il teorema di Tellegen afferma che tale sommatoria è identicamente nulla.
C'è qualche difficoltà ad esprimere, in generale, questa sommatoria in termini dei nodi r ed s perché non sappiamo a priori quali rami, tra due nodi (r,s), effettivamente sono presenti nella rete; in un grafo, infatti, non tutti i nodi sono direttamente collegati tra loro.

Dimostrazione

$$\sum_k V_k\, I_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r,s} V_{rs}\, I_{rs}^*$$

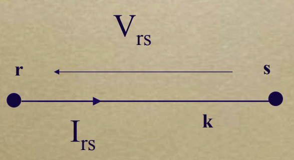


Possiamo, però, facilmente superare l'ostacolo aggiungendo al grafo i rami di collegamento che mancano tra i nodi, assumendo però che nelle due reti particolari considerate tali rami aggiunti siano in realtà dei "bipoli a vuoto". È chiaro che una tale modifica non cambia in nulla la rete, né modifica la sommatoria di cui sopra, in quanto per tali rami sarà $I_{rs}=0$. A questo punto la sommatoria può essere estesa a tutti i valori possibili di r e di s.

Dimostrazione

$$\sum_k V_k I_k^* = \frac{1}{2}\sum_{rs} V_{rs} I_{rs}^* = \frac{1}{2}\sum_r \sum_s V_{rs} I_{rs}^* = \frac{1}{2}\sum_r \sum_s (V_r - V_s) I_{rs}^*$$

$$= \frac{1}{2}\sum_r V_r \sum_s I_{rs}^* - \frac{1}{2}\sum_s V_s \sum_r I_{rs}^* = 0$$

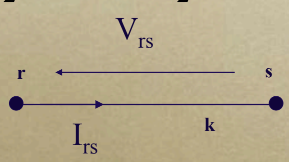


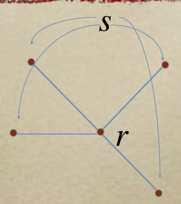
Il fattore un mezzo è necessario, altrimenti ogni ramo è preso due volte in considerazione; per esempio il ramo tra i nodi 1 e 2 sarà incluso per r=1 ed s=2 nonché per s=1 ed r=2! Se le V_{rs} soddisfano la LKT sarà possibile metterle sotto la forma di differenza di potenziale $V_{rs} = V_r - V_s$.

D'altra parte nella prima sommatoria V_r può essere portato fuori della sommatoria su s, mentre nella seconda sommatoria si può fare una cosa analoga per V_s se prima si scambiano le sommatorie su r e su s.

Dimostrazione

$$= \frac{1}{2}\sum_r V_r \sum_s I_{rs}^* - \frac{1}{2}\sum_s V_s \sum_r I_{rs}^* = 0$$





$$\sum_k V_k I_k^* = 0$$

In entrambe le sommatorie compaiono termini del tipo $\Sigma_s I_{rs}$ per un fissato r o $\Sigma_r I_{rs}$ per un fissato s. Tali termini esprimono la somma delle correnti uscenti dal nodo r o entranti nel nodo s. Si osservi che quanto affermato è vero solo se si è avuto la cura di usare sempre la stessa convenzione su ogni bipolo. Le sommatorie suddette sono dunque nulle in base alla LKC. E quindi il teorema, che è valido anche in presenza di bipoli non lineari.

Corollario

$$\sum_k V_k I_k = 0.$$

In una rete la potenza fornita dai generatori presenti è pari alla potenza assorbita dai bipolo passivi della rete stessa.

Si noti che se le due reti coincidono, il teorema si riduce a confermare un teorema della conservazione dell'energia, e quindi della potenza.

Riepilogo della Lezione

- *Metodo dei potenziali ai nodi;*
- *Metodo delle correnti di maglia;*
- *Generatori variabili;*
- *Reti resistive;*
- *Teorma di Tellegen*