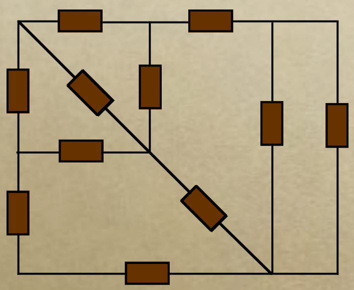
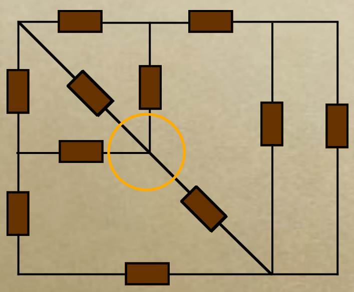
Lezione 4

Circuito o rete elettrica



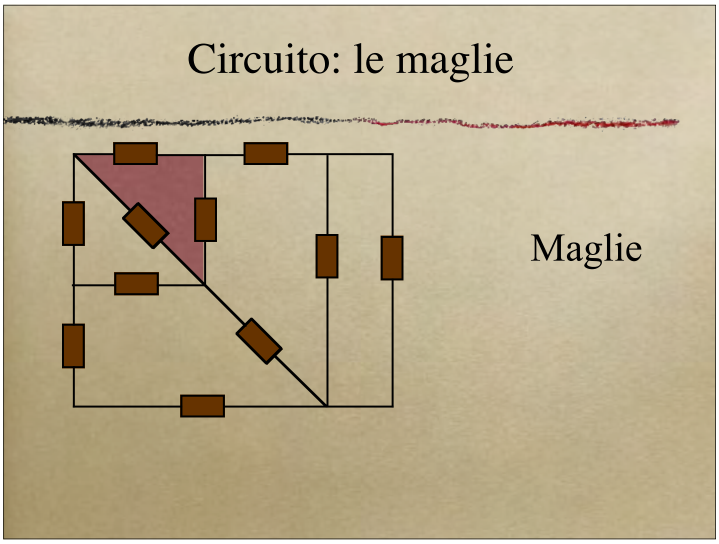
Supponiamo ora di disporre di l bipoli e di collegarli tra di loro in una maniera qualsiasi. Quello che si ottiene è un circuito elettrico o anche rete elettrica. In generale sono note le caratteristiche dei singoli bipoli, quindi i legami tra tensioni ai morsetti e correnti circolanti – naturalmente una volta scelta una convenzione per i versi positivi di tensioni e correnti – mentre invece non è noto il particolare valore di corrente o di tensione che effettivamente si stabilisce nella rete così fatta in ogni bipolo. Determinare tali valori significa "risolvere la rete".

Circuito: i nodi



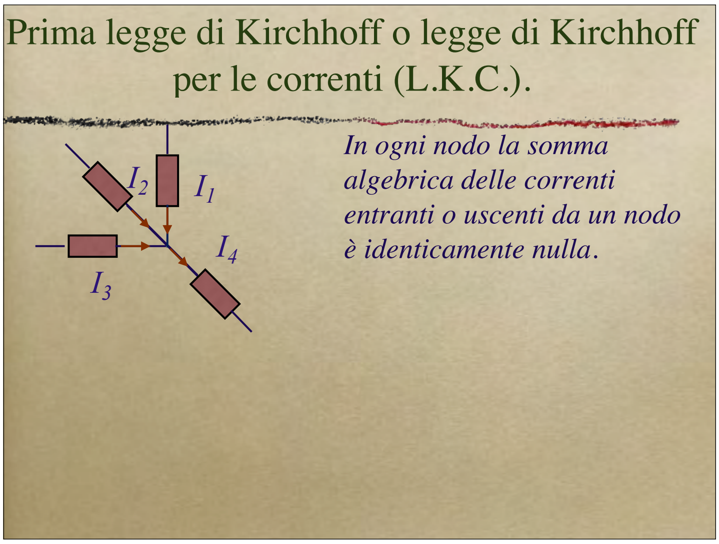
Nodi

Come abbiamo già detto chiameremo nodo di una rete un punto in cui convergono più di due bipoli della rete stessa e chiameremo lato o ramo della rete il tratto tra due nodi.



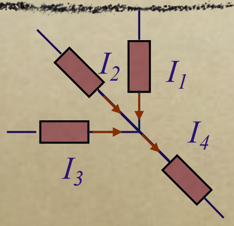
Infine ogni insieme di lati della rete che forma un anello chiuso prenderà il nome di maglia della rete.

Orbene, in base alle definizioni ora date ed a quella di bipolo, è facile vedere che per ogni rete è possibile scrivere un certo numero di equazioni che legano tensioni tra i nodi e correnti nei lati fra loro utilizzando le leggi di Kirchhoff.



La prima legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le correnti (LKC) afferma: in ogni nodo la somma algebrica delle correnti entranti (o uscenti) nel nodo è identicamente nulla. Il termine "algebrica" sta a indicare che ogni corrente va presa con il suo segno se il verso positivo scelto sul ramo corrispondente è effettivamente entrante nel nodo (o uscente se si è scelto di effettuare la somma delle correnti uscenti dal nodo!), o con il segno opposto nel caso contrario, come è mostrato nell'esempio in figura.

Prima legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le correnti (L.K.C.).



In ogni nodo la somma algebrica delle correnti entranti o uscenti da un nodo è identicamente nulla.

E ora sappiamo anche perché!

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

E ora sappiamo anche perché. Infatti la somma algebrica delle correnti entranti nel nodo rappresenta, per definizione di intensità della corrente elettrica, la quantità di carica che nell'unità di tempo viene globalmente portata nel nodo. In regime stazionario tale contributo, per unità di tempo, resta evidentemente costante. In queste condizioni se esso non fosse nullo, a condizione di attendere un tempo sufficientemente lungo, si potrebbe portare nel nodo in questione una carica grande quanto si vuole. Ciò è evidentemente impossibile, non fosse altro per il fatto che i portatori di carica sono dotati di massa non nulla e, quindi, con la carica, crescerebbe indefinitivamente anche la massa del nodo.

Equazioni di Maxwell

forma differenziale e integrale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_v}{\varepsilon_0}$$

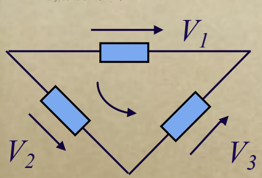
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_\gamma$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \qquad \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_\gamma} \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_\gamma$$

Ritorniamo ora alle equazioni di Maxwell che qui riportiamo nelle due forme: locale o differenziale, valide punto per punto nello spazio di interesse, e Integrali, valide su ogni curva, superficie o volume.

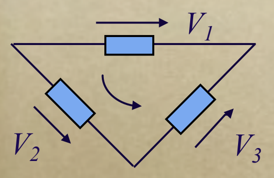
Seconda legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le tensioni (L.K.T).



In ogni maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto, a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza prescelto, è identicamente nulla.

Consideriamo ora una maglia di una rete e supponiamo di percorrerla in uno dei due possibili versi. Sommiamo algebricamente le tensioni su ogni lato della maglia così come le incontriamo seguendo l'orientazione prescelta. Anche qui "algebricamente" sta a indicare che ogni tensione verrà presa con il proprio segno o con il segno opposto a seconda che il verso prescelto per essa sul singolo lato coincida o non con quello di orientazione della maglia. Dato che la tensione su ogni ramo è per definizione l'integrale di linea del campo E tra i due morsetti del bipolo inserito nel ramo, ed in virtù della scelta di sommare "algebricamente" le tensioni, tale somma verrà a coincidere con l'integrale di E lungo una linea chiusa.

Seconda legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le tensioni (L.K.T).



$$-V_1 + V_2 + V_3 = 0.$$

In ogni maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto, a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza prescelto, è identicamente nulla.

E ora sappiamo anche perché!

In regime stazionario tale circuitazione deve essere nulla e tale sarà dunque la somma delle tensioni lungo la maglia e quindi la seconda legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT): in una maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza scelto, è identicamente nulla.

Equazioni di Maxwell

forma differenziale e integrale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_v}{\varepsilon_0}$$

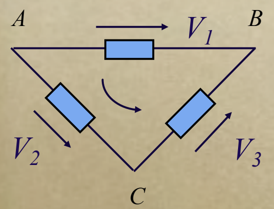
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_\gamma$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \qquad \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_\gamma} \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_\gamma$$

Ritorniamo ora alle equazioni di Maxwell che qui riportiamo nelle due forme: locale o differenziale, valide punto per punto nello spazio di interesse, e Integrali, valide su ogni curva, superficie o volume.

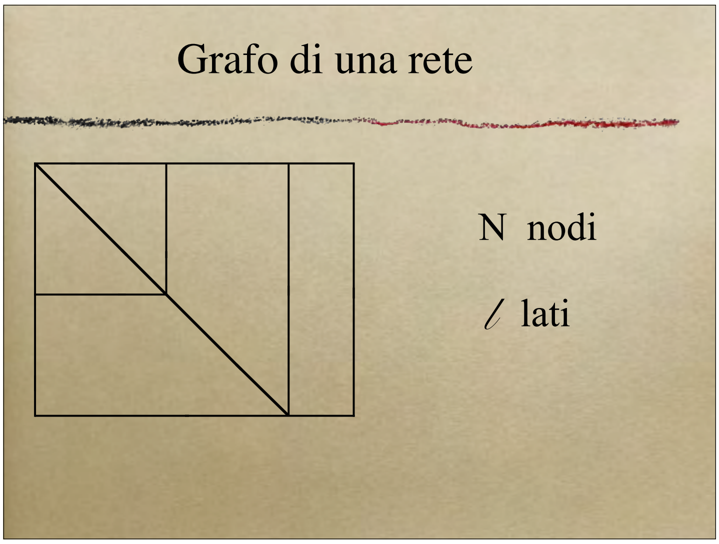
Seconda legge di Kirchhoff.



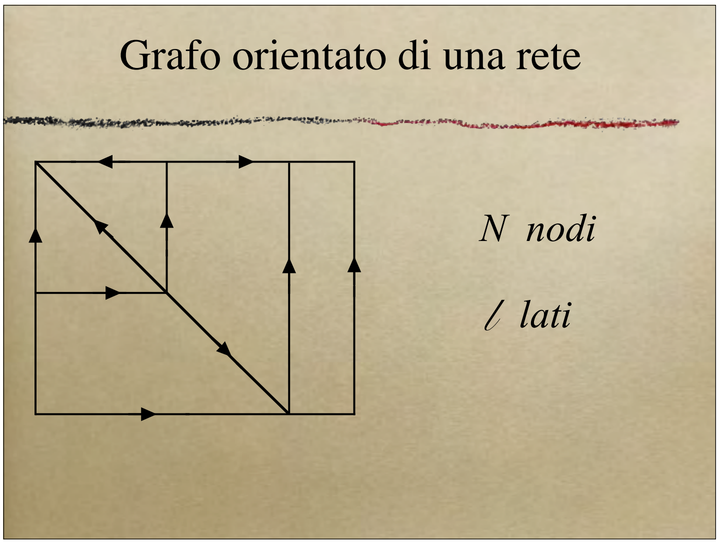
In ogni maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto, a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza prescelto, è identicamente nulla.

$$-(V_B - V_A) + (V_C - V_A) + (V_B - V_C) = 0.$$

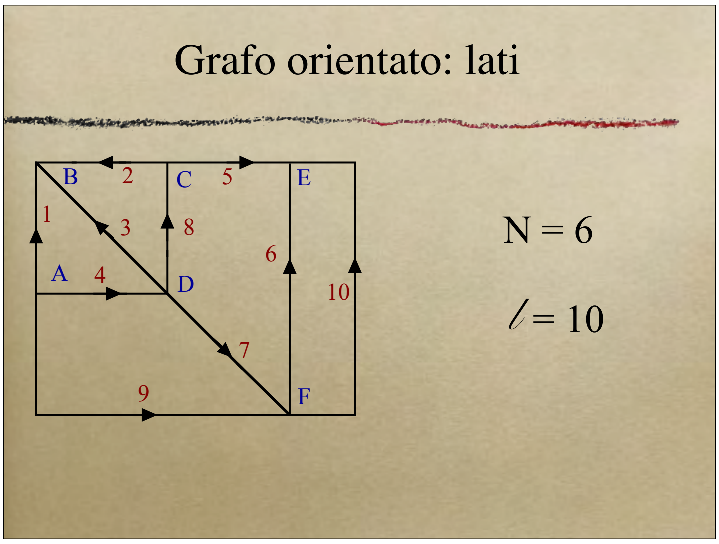
Possiamo verificare la validità della legge precedentemente enunciata ragionando anche in un altro modo: in regime stazionario ogni tensione è in realtà una differenza di potenziale e potrà essere messa sotto la forma Vr – Vs, dove con Vr e Vs si sono indicati i potenziali nei nodi, rispettivamente, r ed s. La somma di cui sopra potrà essere riscritta nella maniera mostrata in figura, ed è, evidentemente, identicamente nulla perché ogni potenziale di nodo compare due volte e con segno opposto. Quindi la LKT è una diretta conseguenza della definizione di bipolo.



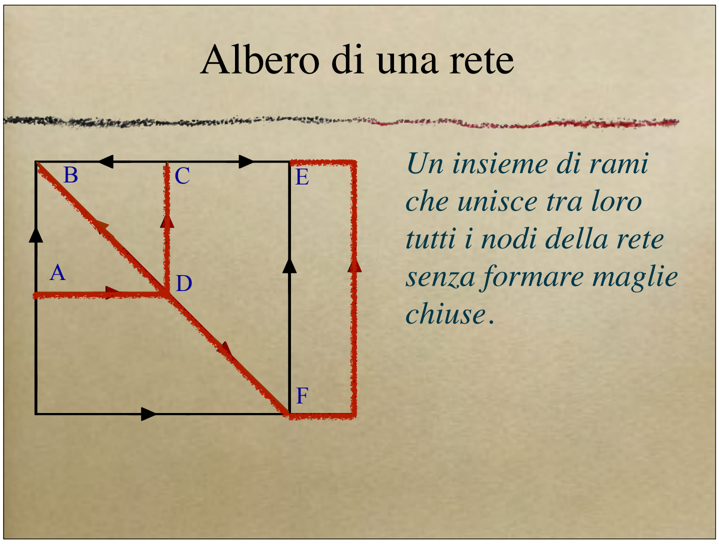
Osserviamo infine che sia le LKT che le LKC impongono legami lineari rispettivamente tra le tensioni e le correnti.
Per studiare una rete possiamo per il momento prescindere dalla natura dei vari bipoli che ne costituiscono i diversi rami, e focalizzare la nostra attenzione sulla struttura della rete stessa, cioè sul modo in cui i bipoli sono collegati tra loro. Una tale struttura prende il nome di grafo della rete. In un grafo possiamo individuare l rami e N nodi.



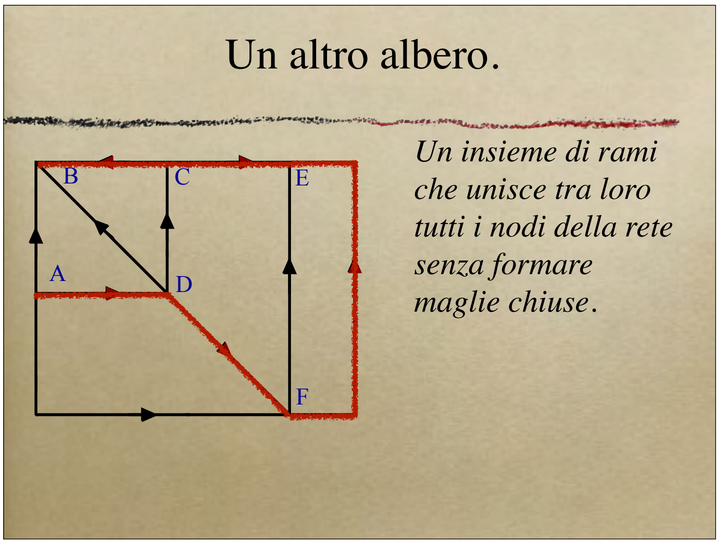
Se poi orientiamo ogni ramo del grafo, scegliendo uno dei due versi possibili, diremo che il grafo è orientato.



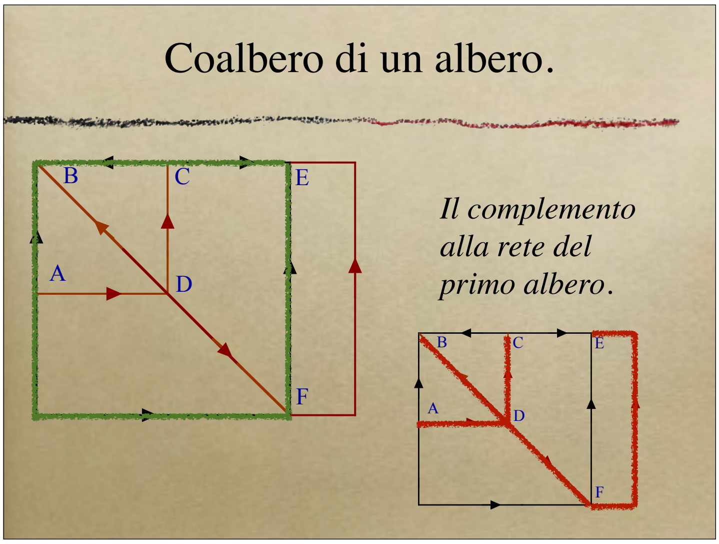
Indicheremo i nodi con le lettere e i lati con i numeri arabi. Nel caso in figura dieci lati e sei nodi.



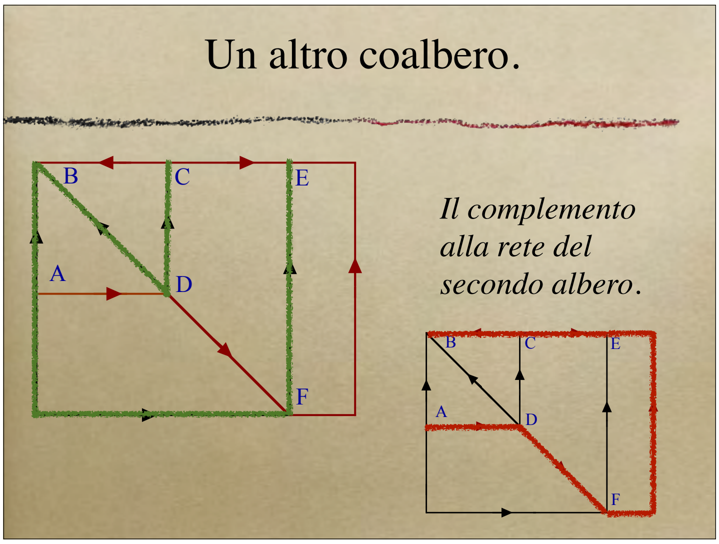
Chiameremo albero di una rete un insieme di rami che unisce fra di loro tutti i nodi della rete senza formare maglie chiuse. Ovviamente esistono in generale più alberi per una rete avente un determinato grafo. In figura è indicato con tratto più grosso un possibile albero per la rete che stiamo esaminando.



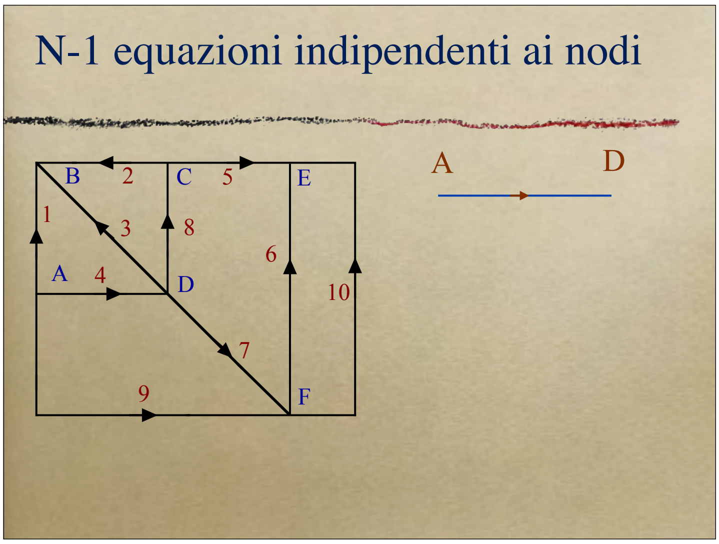
E in questa figura un altro possibile albero della rete.



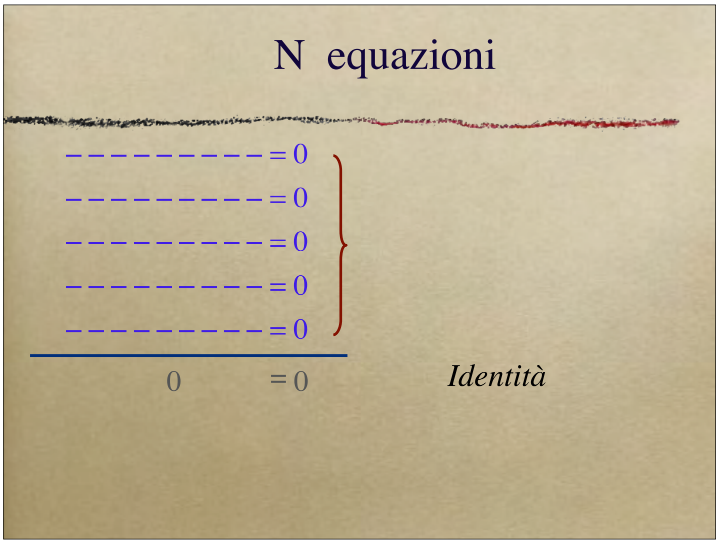
Il complemento di un dato albero a tutta la rete, cioè l’insieme dei rami che restano esclusi dall’albero, prende il nome di coalbero della rete. In questa figura è indicato il coalbero relativo al primo albero



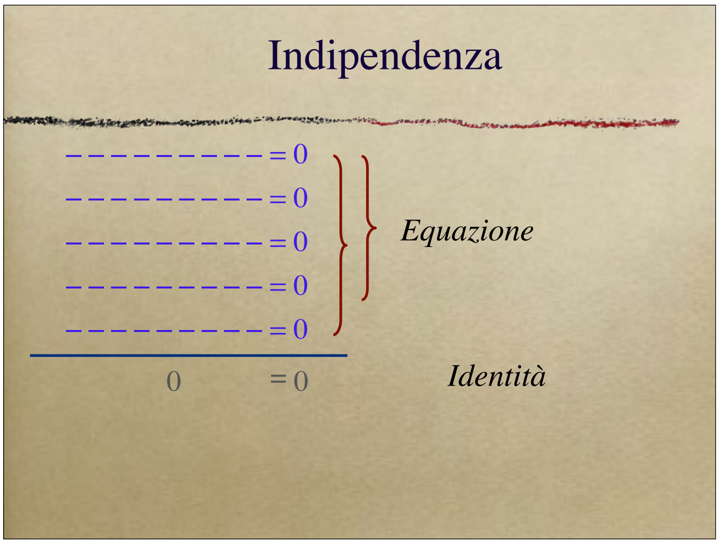
Ed in quest’altra quella del secondo.



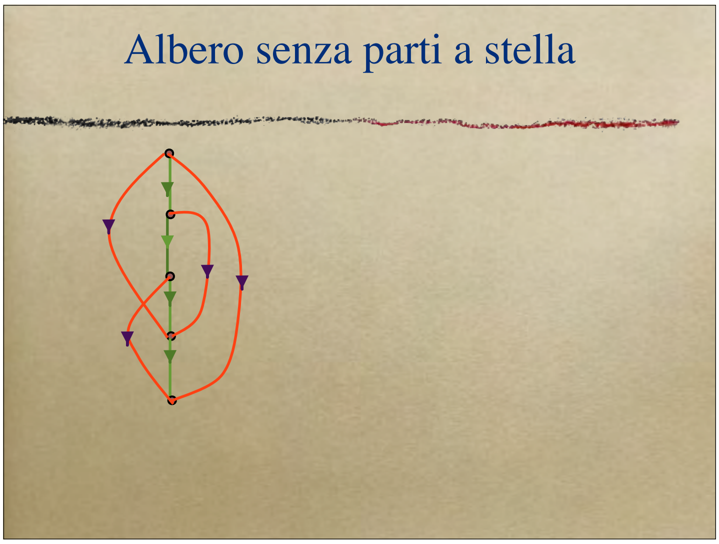
Per un grafo orientato, infatti, possiamo scrivere n equazioni ai nodi, se n sono i nodi, che derivano dall’applicazione della LKC ad ogni singolo nodo. Supponiamo di scrivere tali equazioni nella forma che esse assumono quando si sceglie di imporre l’annullamento della somma delle correnti entranti (o uscenti!). In queste condizioni nel sistema di equazioni così ottenuto ogni corrente comparirà una volta con il segno “meno” in una equazione ed una volta con il segno “più” in un’altra equazione, dato che ogni ramo collega due nodi ed uno stesso orientamento risulterà entrante per l’uno e uscente per l’altro.



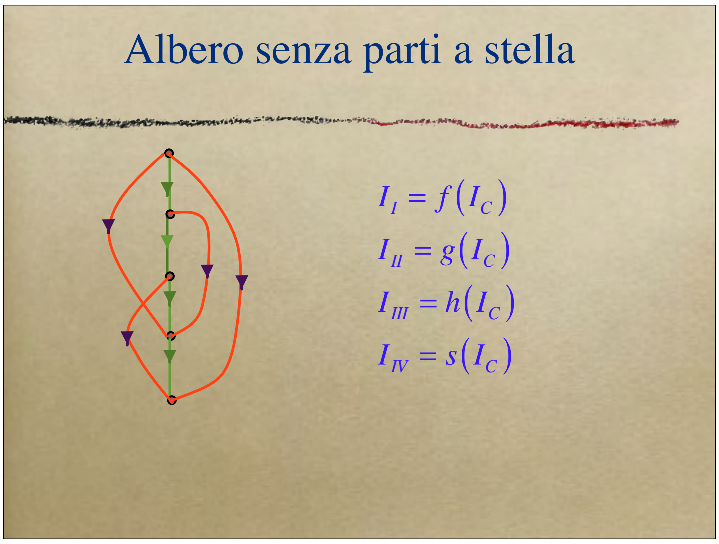
Se, a questo punto, sommiamo tutti i primi membri delle equazioni del sistema abbiamo una espressione algebrica che, per costruzione, è identicamente nulla. La stessa cosa accade per la somma dei secondi membri. Il fatto che dal nostro sistema di equazioni, sommando membro a membro, si ottiene una identità, ci dice che in realtà almeno una delle equazioni presa a caso potrebbe essere ottenuta con una opportuna combinazione lineare delle altre n-1. Le n equazioni, dunque, non sono tra di loro indipendenti, il che significa che l’informazione contenuta in una delle equazioni è già contenuta nelle altre: essa è in realtà ridondante.



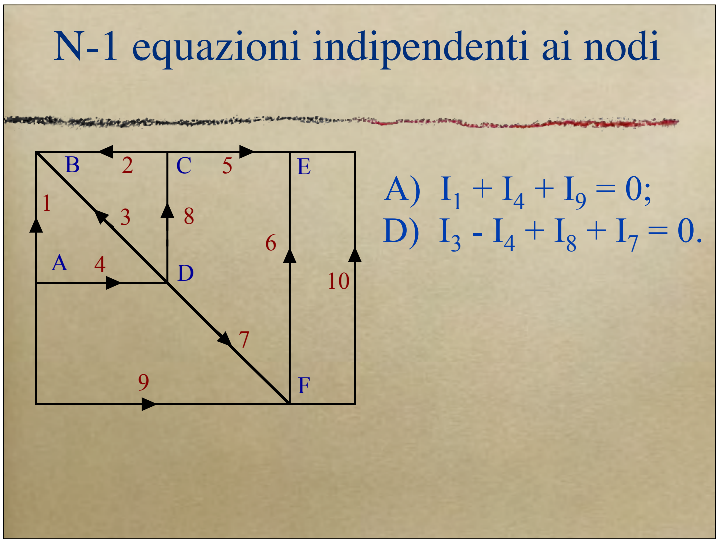
Infatti se invece di sommarne N ne sommassi N–1, evidentemente non avrei una identità ma un'equazione. Questa equazione però dovrebbe essere tale che se poi aggiungessi anche l'ennesima dovrebbe ridarmi l'identità. Ma allora tale equazione ottenuta sommando N–1 equazioni ai nodi non è nient'altro che l'ennesima cambiata di segno. Quindi l'ennesima è combinazione lineare delle rimanenti N–1.



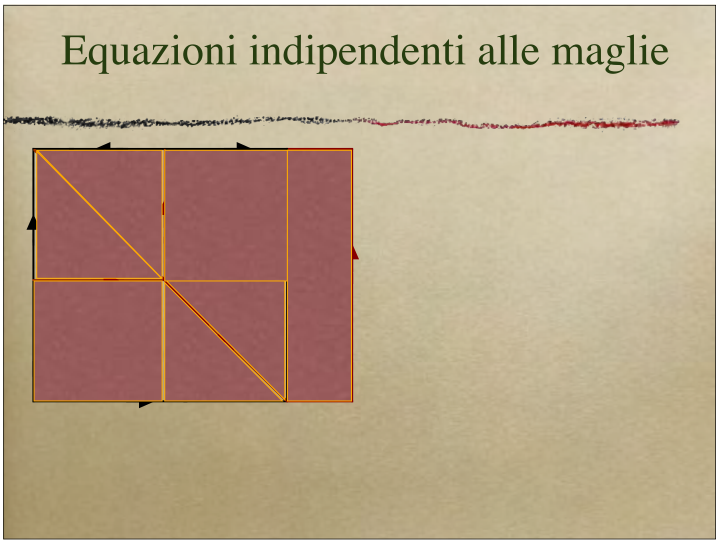
È possibile dimostrare anche che almeno N –1 sono indipendenti. Infatti immaginiamo di scegliere un albero della rete che abbia la caratteristica di non avere più di due rami che confluiscono in ogni singolo nodo. Esso sarà costituito per definizione da n –1 rami. Supponiamo di numerare i nodi del grafo in ordine progressivo così come essi vengono incontrati percorrendo l'albero prescelto. Per ognuno dei primi N –1 nodi scriviamo le equazioni che esprimono la LKC. Numeriamo anche i rami, magari con numeri romani per non creare confusione, così come vengono incontrati percorrendo l'albero della rete. Si avrà dunque che il ramo I dell'albero congiungerà i nodi 1 e 2, il ramo II i nodi 2 e 3 ecc.



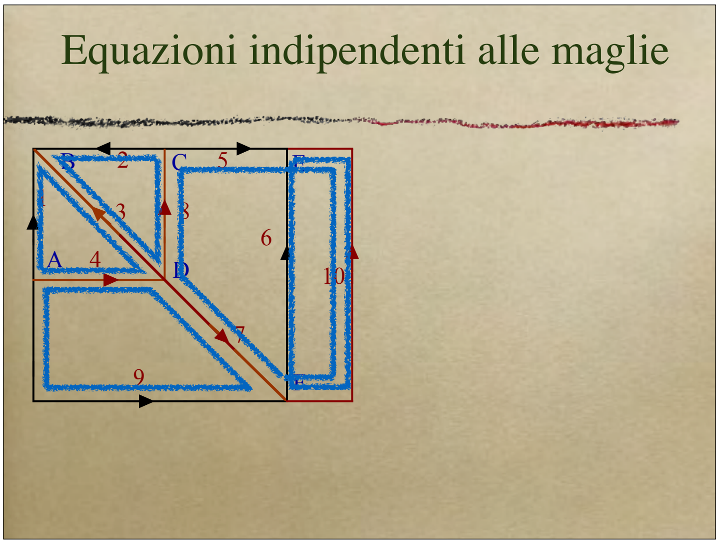
Nella figura sono mostrati anche, i rami del coalbero. Orbene dalla equazione che esprime la LKC al primo nodo possiamo ricavare l'incognita i_I in funzione delle correnti in altri rami non appartenenti all'albero, cioè del coalbero. Nella equazione relativa al secondo nodo compariranno le correnti i_I ed i_{II}, ma utilizzando la prima equazione si potrà ottenere una equazione in cui i_{II} comparirà in funzione di tutte correnti del coalbero. L'operazione può essere evidentemente ripetuta per tutte le n–1 correnti dei rami dell'albero. Abbiamo così ottenuto un sistema nel quale in ogni equazione compare in esclusiva una corrente di un ramo dell'albero e quindi di equazioni indipendenti



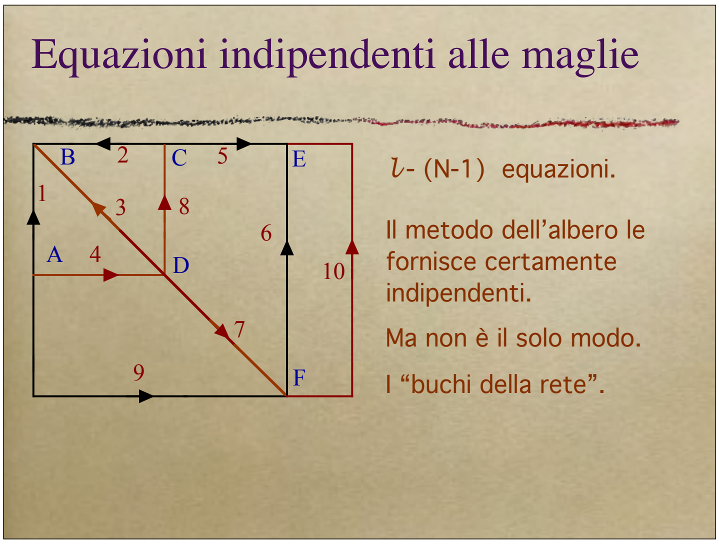
Abbiamo, dunque mostrato che la LKC consente di scrivere N −1 equazioni indipendenti per le correnti della rete. Dimostreremo ora che le LKT consentono invece di scrivere l – (N – 1) equazioni indipendenti tra le tensioni di lato.



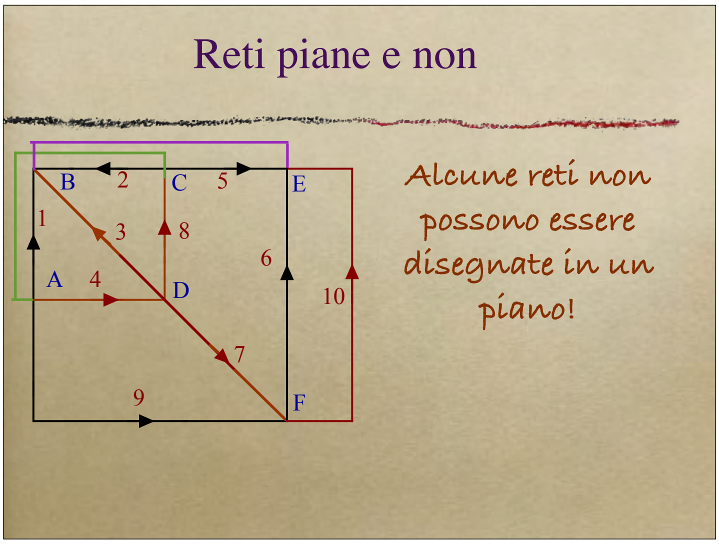
Per una rete di l lati non è in generale possibile dire, senza specificare meglio la rete, quante sono le maglie chiuse che in essa si possono formare. E ciò è evidente se si pensa che alcuni nodi possono non essere collegati tra di loro direttamente. Anche in questo caso possiamo però dimostrare che un sottoinsieme di tutte le equazioni che si possono scrivere alle maglie è in realtà costituito da equazioni linearmente indipendenti: per la precisione un numero di l– (N – 1) equazioni. Costruiamo, infatti, un sistema di l –(N – 1) maglie chiuse aggiungendo, di volta in volta, ai rami dell'albero uno ramo del coalbero, che è composto appunto da l– (N – 1) rami.



Che questa operazione porti alla costruzione di maglie chiuse discende in maniera evidente dalla definizione di albero. Esso, infatti, congiunge tutti i nodi della rete. L'aggiunta di un altro ramo, che collega due nodi a caso, dovrà necessariamente chiudere una maglia – eventualmente con qualche appendice che converremo di non prendere in considerazione. Orbene le equazioni che si ottengono dalla LKT per tali maglie sono necessariamente indipendenti, in quanto in ognuna di esse comparirà una incognita in esclusiva: la tensione del particolare ramo del coalbero che ha contribuito a formare la maglia.



In conclusione, possiamo sempre scrivere *l*-(N−1) equazioni indipendenti alle maglie. Il metodo dell'albero e del coalbero non è l'unico metodo che ci consente di determinarle.



Prima di tutto osserviamo che non tutte le reti possono essere disegnate in un piano senza che due o più rami si accavallino. Diremo piane le reti che godono di questa proprietà.

In una rete piana sono immediatamente identificabili delle maglie chiuse che, per intenderci, diremo "i buchi della rete". È facile dimostrare che tali "buchi" sono proprio l−(N−1). Orbene le equazioni che si possono scrivere a tali maglie sono indipendenti!
Si noti che nel nostro caso le maglie individuate in precedenza mediante l'albero composta dai rami 3,4,8,7 e 10, non sono i "buchi" della rete, così come è disegnata. Tali buchi potrebbero essere ottenuti da un'altro albero, quello composto dai rami 3,4,8,7 e 6.

Equazioni indipendenti

N-1 equazioni indipendenti ai nodi;

l - (N-1) equazioni indipendenti alle maglie;

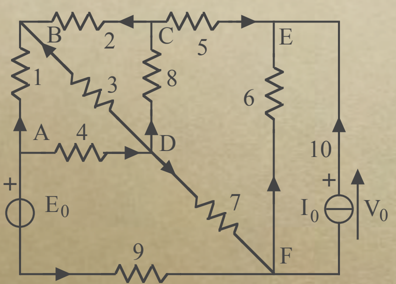
l caratteristiche dei bipoli;

Per un totale di 2 l equazioni;

2 l incognite correnti e tensioni nei rami.

In conclusione, dunque, la LKT ci consente di scrivere un numero di l – (N – 1) relazioni lineari tra le tensioni sui rami della rete. Nel complesso, dunque, attraverso l'applicazione della LKC e della LKT si possono scrivere l relazioni lineari indipendenti tra le l correnti di lato e le l tensioni di lato. D'altra parte le caratteristiche dei bipoli ci forniscono ancora l relazioni – questa volta non necessariamente lineari – tra le tensioni e le correnti, per cui nel complesso avremo $2l$ equazioni in $2l$ incognite. Se la rete è costituita da generatori indipendenti e da bipoli con caratteristiche lineari, allora le $2l$ equazioni sono anch'esse tutte lineari e forniscono certamente una ed una sola soluzione del problema: le tensioni e le correnti nei rami.

Un esempio!

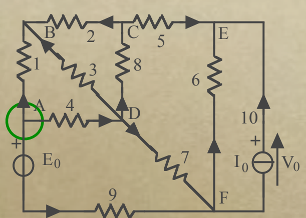


N = 6;

l = 10.

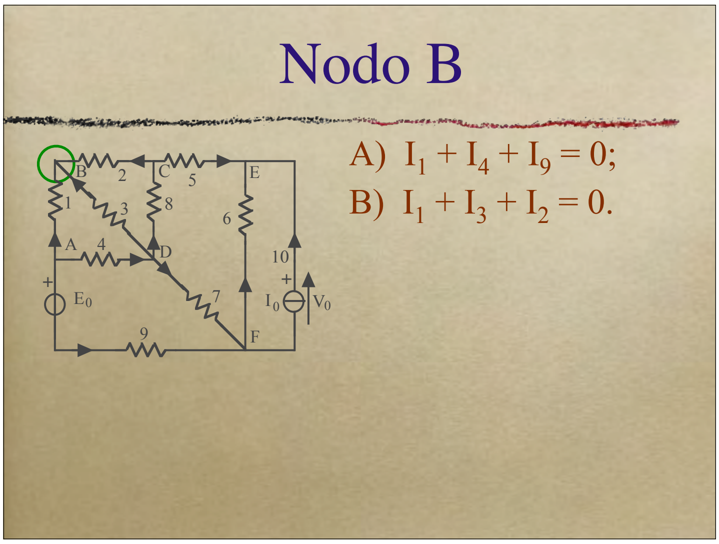
Ecco un esempio con lo stesso grafo di quello precedente e con particolari bipoli tra i rami.

Nodo A

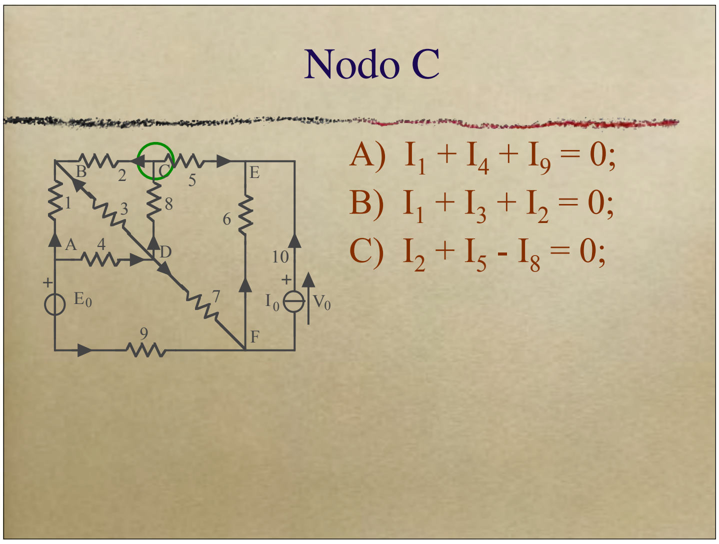


A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0.$

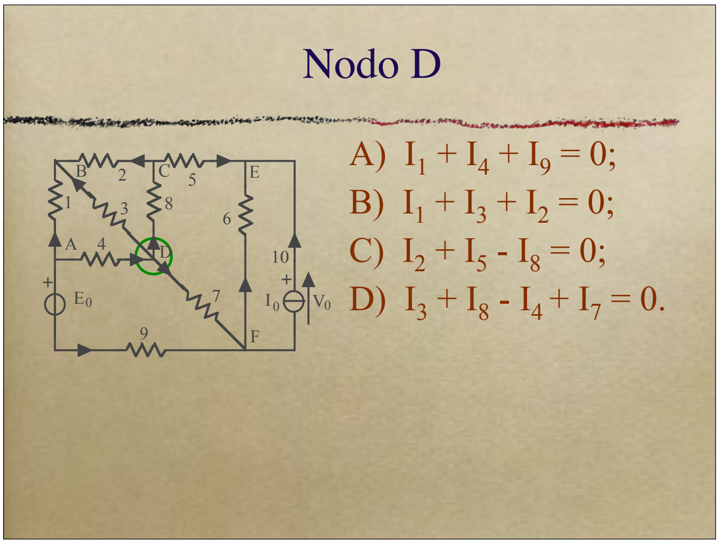
Equazione al nodo A.



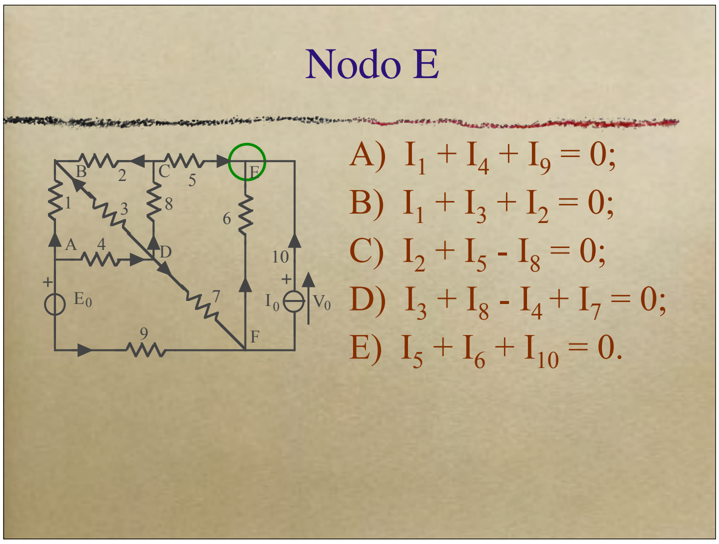
Equazione al nodo B.



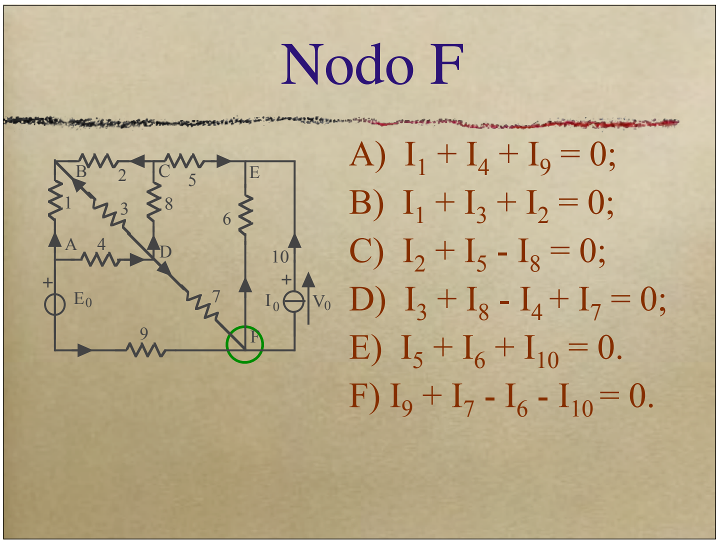
Equazione al nodo C.



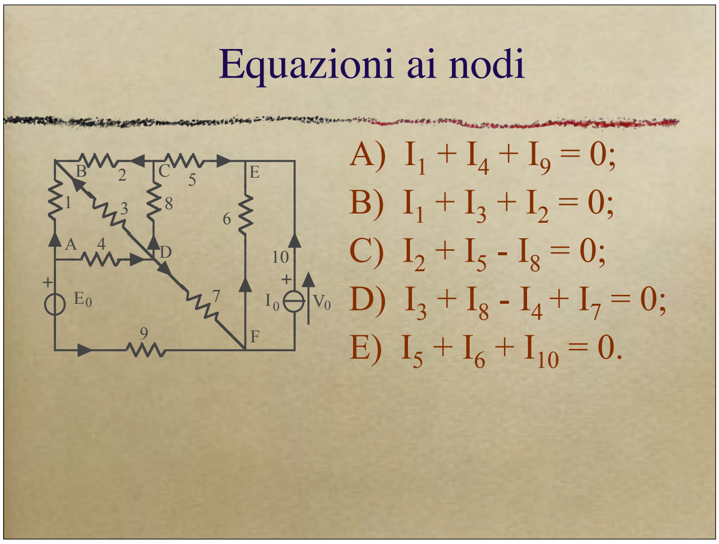
Equazione al nodo D.



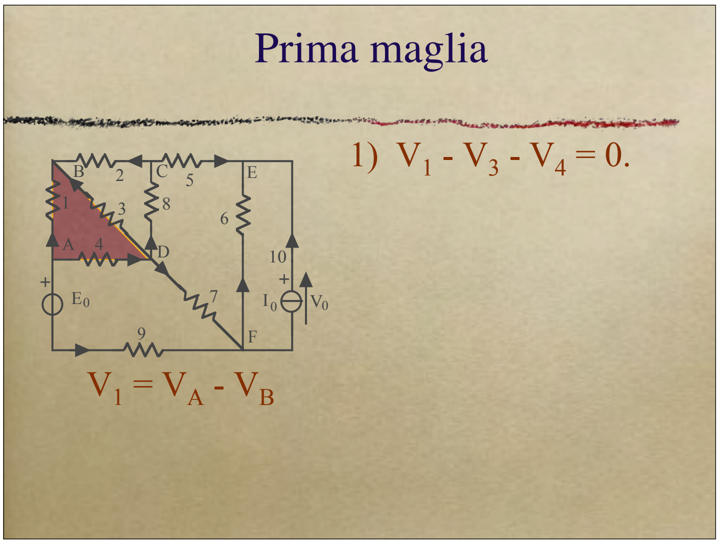
Equazione al nodo F.



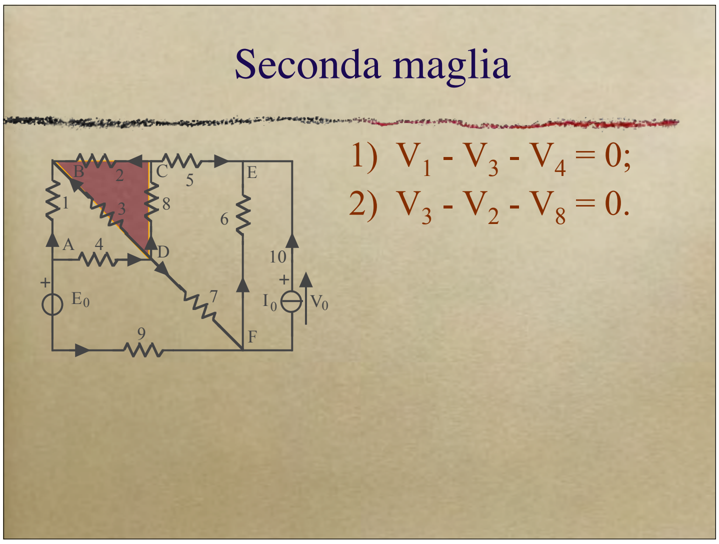
Ma una dobbiamo eliminarla perché dipendente dalle altre. Scegliamo di eliminare quella al nodo F.



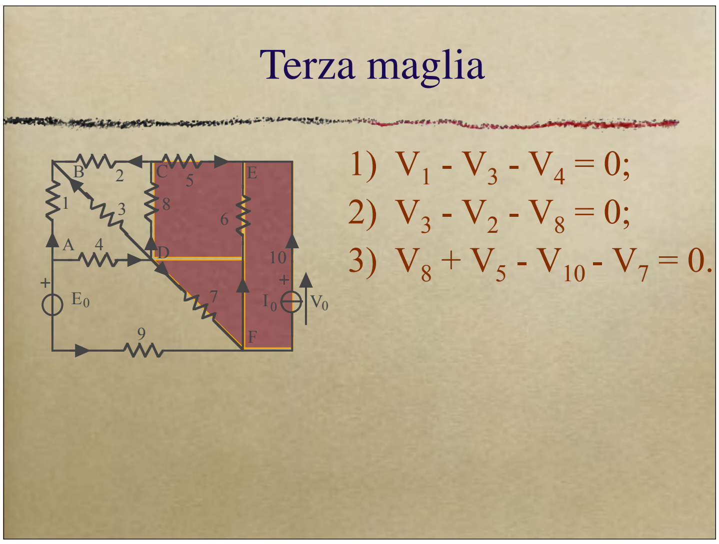
Ecco un sistema di equazioni ai nodi indipendente.



Le equazioni alle maglie, che immaginiamo di ricavare dall'albero usato in precedenza: lati 3,4,8,7 e 10.
Prima maglia.

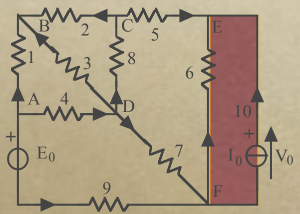


Seconda maglia.



Terza

Quarta maglia

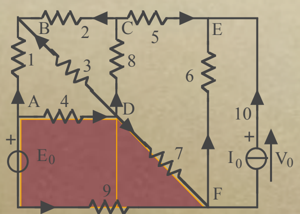


1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0;$
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0;$
4) $V_6 - V_{10} = 0.$

4) $V_6 + V_0 = 0.$

quarta...

Quinta maglia

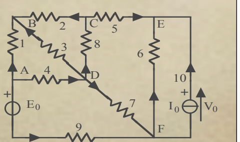


1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0;$
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0;$
4) $V_6 - V_{10} = 0;$
5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0.$

... e quinta

Equazioni alle maglie e ai nodi

1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$ A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0;$
2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0;$ B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0;$
3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0;$ C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$
4) $V_6 - V_{10} = 0;$ D) $I_3 + I_8 - I_4 + I_7 = 0;$
5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0.$ E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0.$



+ le equazioni caratteristiche che descrivono il comportamento dei singoli bipoli.

Il complesso delle equazioni risolventi, che comprende anche le caratteristiche dei rami. Il problema di come si arrivi a trovare la soluzione è a questo punto di puro carattere matematico, risolvibile con diversi metodi: dal semplice metodo di sostituzione, molto conveniente quando il numero di equazioni è ridotto, al più complesso, ma ancora di semplice applicazione, metodo detto di Cramer. Se invece le caratteristiche dei bipoli non sono tutte lineari, allora il problema di trovare una soluzione diventa più delicato; può accadere, per esempio, che esista più di una soluzione. In generale la presenza di bipoli non lineari rende difficile una trattazione generale ed ogni caso va studiato nei suoi aspetti particolari.

Riepilogo Lezione

- *I circuiti elettrici: nodi e maglie;*
- *Le leggi di Kirchhoff;*
- *Il grafo di una rete: Albero e coalbero;*
- *Equazioni ai nodi ed alle maglie.*