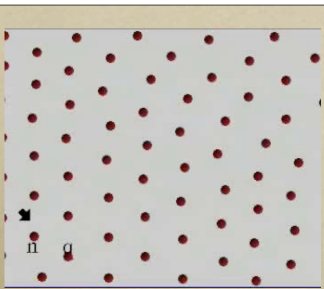
Lezione 3

Cariche in movimento

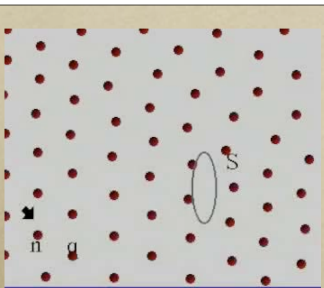
La corrente elettrica

Introduciamo ora il secondo protagonista della nostra storia: la corrente elettrica.



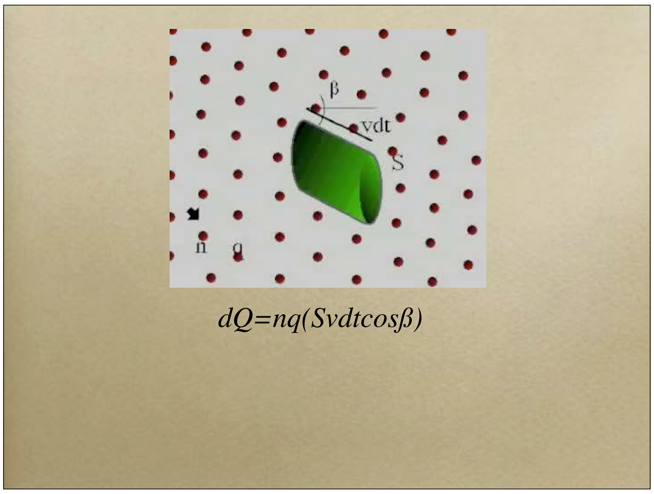
$dN = n\ dV$

Come si è detto, i portatori di cariche elettriche possono essere in movimento. Supponiamo di avere in una regione dello spazio un gran numero di tali portatori, tutti di egual carica q e tutti con la stessa velocità v. Le cariche siano tanto numerose, ed i loro portatori occupino un volume tanto piccolo – è la solita idealizzazione della carica puntiforme – da poter descrivere la loro distribuzione attraverso una funzione densità n: se dV è un volumetto elementare, i portatori contenuti in tale volume sono, per definizione, dN= ndV.

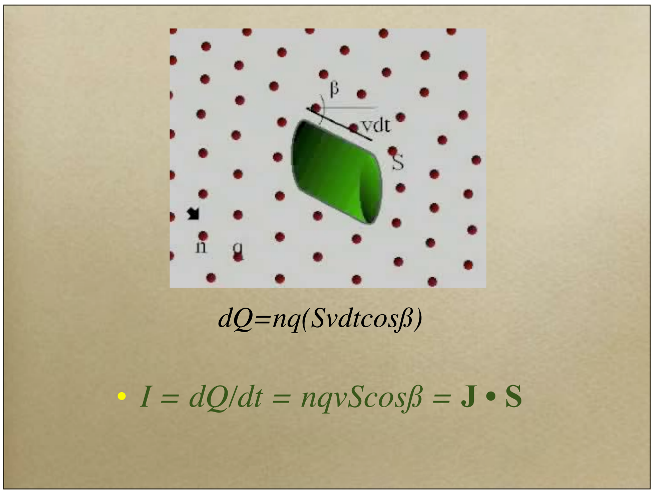


I *Intensità della corrente*

Consideriamo ora una superficie piana S attraverso la quale, nel loro moto, le cariche si trovano a passare. Vogliamo calcolare la quantità di carica che nel tempo dt attraversa detta superficie nel verso che va da sinistra a destra.

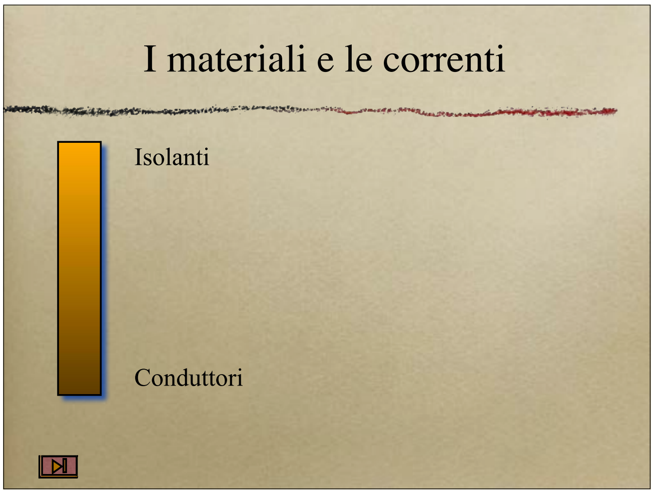


Costruiamo un cilindro con base sulla superficie S e lunghezza, nella direzione parallela a v, pari a vdt. Per costruzione tutte le particelle che, all'istante t, si trovano nel cilindro considerato, nel tempo dt, percorrendo lo spazio vdt, si troveranno a passare attraverso la superficie S, mentre tutti i portatori al di fuori del volume considerato, o "mancheranno" la superficie S, oppure percorreranno una distanza insufficiente ad incontrarla. Se ne deduce che il numero di portatori che attraverseranno la superficie S nel tempo dt è pari al numero di portatori contenuti nel cilindro di volume S vdt cos β, cioè nS vdt cos β, dove β è l'angolo fra la direzione di v e quella della normale ad S.



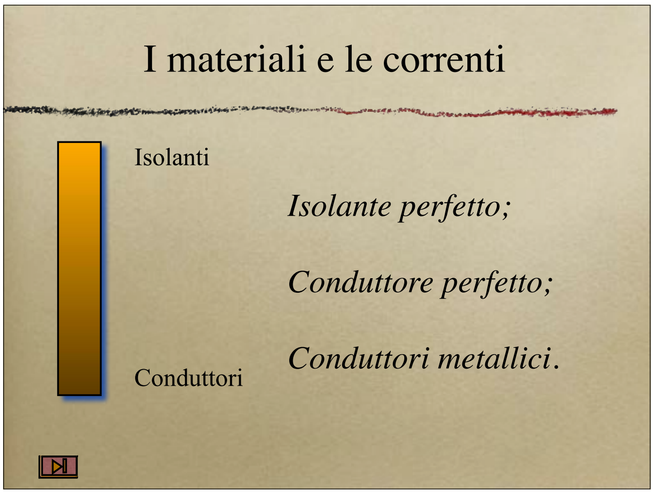
Dato che ogni portatore è dotato di carica q, la carica totale che attraversa la superficie S nel tempo dt è $dQ=nq(Svdt\cos\beta)$, e nell'unità di tempo $I=dQ/dt=nqvS\cos\beta= \mathbf{J}\cdot\mathbf{S}$. A tale grandezza viene dato il nome di intensità di corrente elettrica. Naturalmente la definizione di intensità di corrente elettrica che abbiamo illustrato in un caso semplice, può essere estesa al caso in cui i portatori siano dotati di carica diversa, non abbiamo tutti la stessa velocità, e la loro densità vari da punto a punto. Si noti che il concetto di intensità di corrente richiede, oltre ad una distribuzione di cariche in movimento, la scelta di una superficie attraverso cui si intende valutare il flusso di cariche e quella di un verso, l'orientazione della normale su S.

Nel seguito parleremo spesso di intensità di corrente senza specificare la superficie attraverso la quale intendiamo calcolarla; ciò accade perché, nei casi in questione, la superficie è implicitamente definita. È il caso in cui il moto dei portatori è obbligato a svilupparsi lungo un percorso determinato, il "conduttore" appunto. Vale la pena di sottolineare che anche il concetto di corrente presuppone la scelta di un verso: la corrente in un verso lungo il percorso stabilito. Ricordiamo infine che l'unità di misura dell'intensità di corrente elettrica nel Sistema Internazionale è l'ampere (A), pari ad un coulomb al secondo, e che lo strumento che la misura viene detto amperometro.

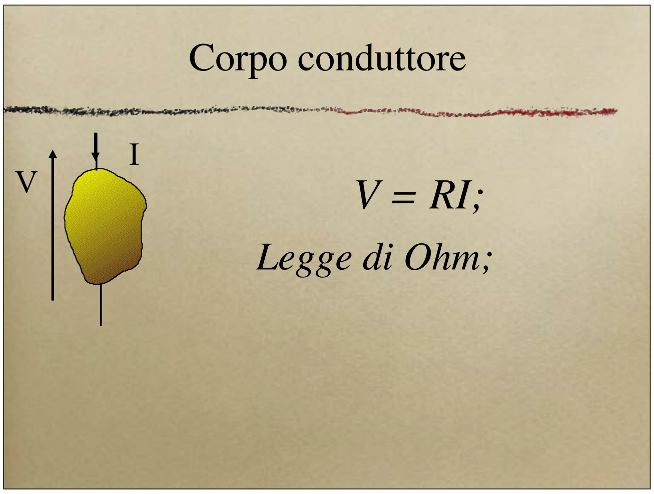


I corpi materiali si comportano in maniera differente quando ad essi viene applicata una differenza di potenziale. Come sappiamo, tra i costituenti elementari della materia vi sono portatori di cariche elettriche: elettroni e ioni. Tali portatori possono essere più o meno legati alla struttura del corpo materiale e quindi più o meno liberi di muoversi. Sotto l'azione della differenza di potenziale i portatori liberi (ma non completamente liberi, come vedremo), si muovono e danno luogo ad una corrente elettrica.

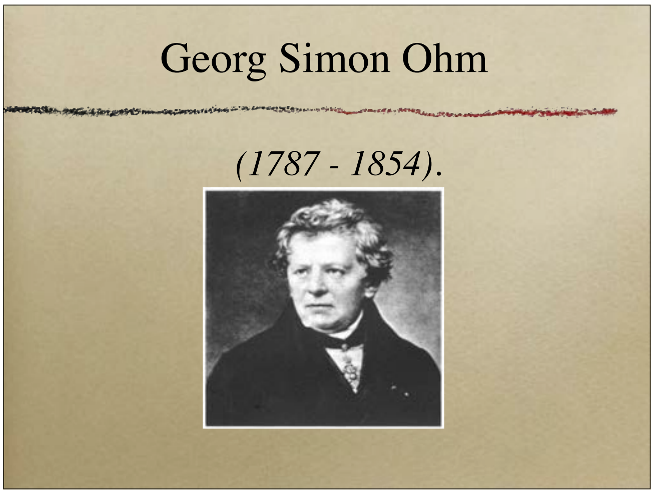
Da questo punto di vista, e con una classificazione per il momento solo grossolana, potremmo inserire ogni materiale in una scala.



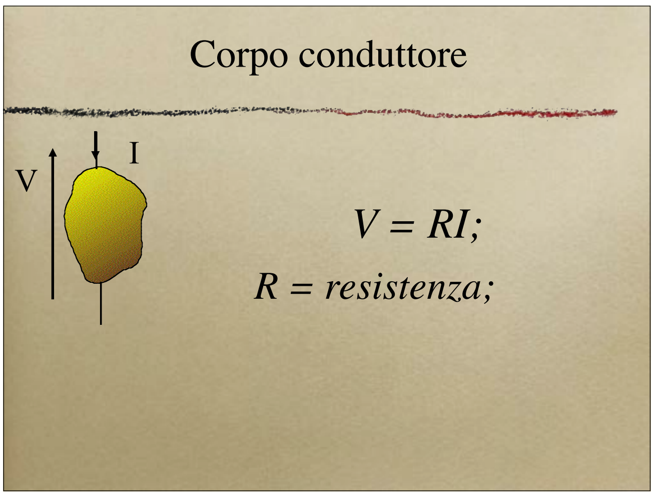
Ad un estremo avremo l'isolante perfetto – un materiale in cui i portatori di cariche o sono completamente assenti, o, se presenti, sono del tutto impediti nel loro moto – ed all'altro il conduttore perfetto in cui i portatori di cariche, sono completamente liberi di muoversi. Il vuoto perfetto, per esempio, fin tanto che rimane tale, è certamente un perfetto isolante, mentre un corpo metallico, rame per esempio, portato a bassissima temperatura può essere considerato una buona esemplificazione di un conduttore perfetto.



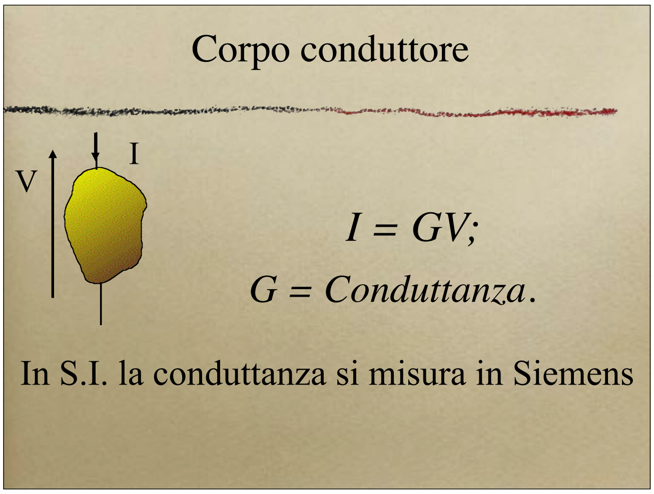
Nei materiali metallici, o conduttori di prima specie, in particolare, i portatori di carica responsabili della corrente sono gli elettroni periferici degli atomi che costituiscono, con il loro reticolo, la struttura del materiale stesso. Tali elettroni, debolmente legati ai rispettivi atomi, formano in effetti una sorta di nube elettronica che, sotto l'azione di una forza prodotta dall'applicazione di una differenza di potenziale, si mette in moto e produce una corrente. Per un gran numero di tali conduttori, e per un campo di variabilità dei parametri in gioco discretamente ampio, sussiste una relazione di proporzionalità tra la d.d.p. applicata e la corrente prodotta: a tale relazione viene dato il nome di legge di Ohm.



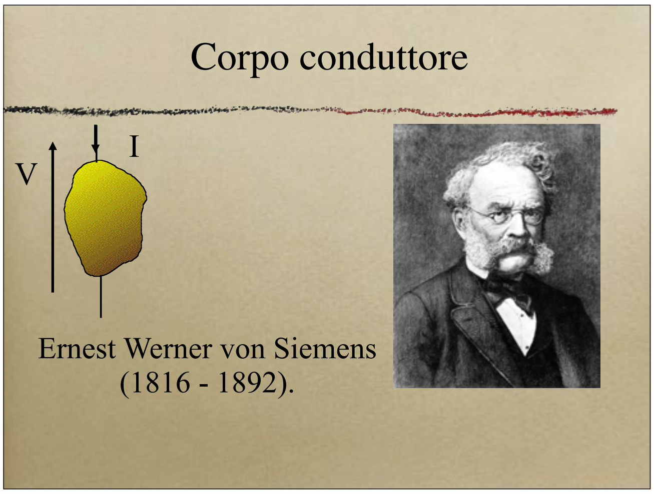
Dal nome di Georg Simon Ohm, che fu il primo a dedurla da una accurata campagna di esperimenti.
Cerchiamo di approfondire il contenuto della legge di Ohm facendo riferimento ad una configurazione ideale semplice. Supponiamo di avere un corpo materiale e di individuare sulla superficie che lo racchiude due punti ai quali immaginiamo di applicare la d.d.p. V.



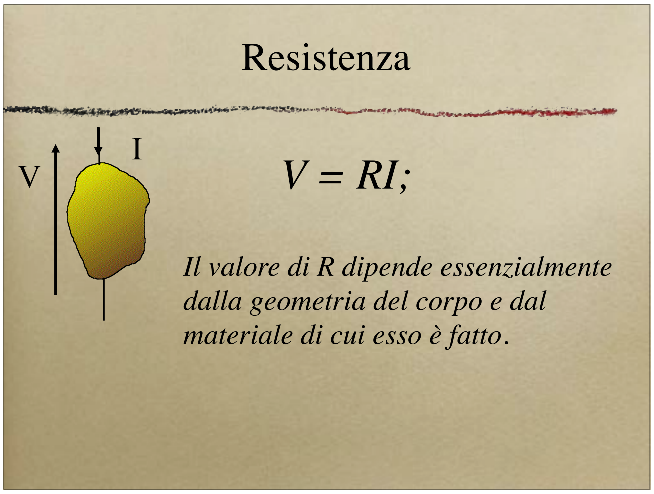
Supponiamo inoltre di essere in grado di portare ad uno dei due punti e di prelevare dall'altro, una qualsiasi corrente I; non domandiamoci, per il momento, "chi" applica la d.d.p. né "come" portiamo e preleviamo la corrente nei due punti. Una volta fissati i punti di accesso della corrente, il moto delle cariche all'interno del corpo si svilupperà in una ben precisa maniera che non è necessario specificare. Se, in queste condizioni, immaginiamo di applicare agli stessi punti, diverse differenze di potenziale, e misuriamo la corrente, verificheremo che: $V=RI$. Alla costante di proporzionalità R, che nel Sistema Internazionale si misura in ohm, viene dato il nome di resistenza del corpo in esame, quando alimentato nella maniera indicata.



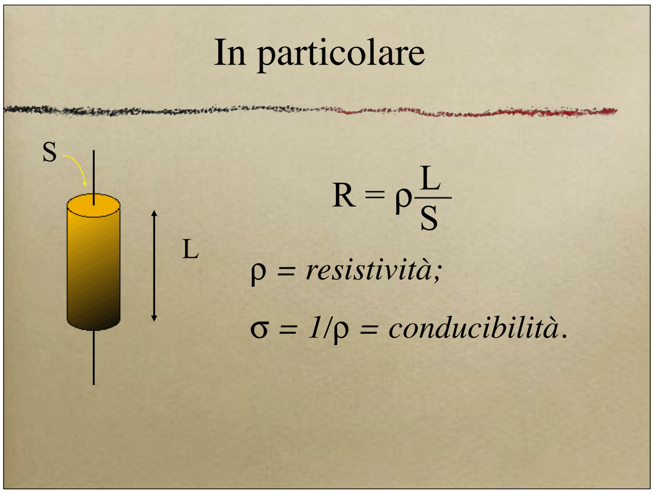
Questa precisazione è necessaria perché il valore della costante R, in generale, cambia se cambiano i due punti di applicazione della d.d.p., così come cambia ancora, se, invece di due punti ideali pensiamo a due superfici attraverso le quali la corrente viene portata e prelevata; in questo caso R dipende anche dalla forma ed estensione di tali superfici (gli elettrodi). Per questo motivo ci siamo resi indipendenti dalla forma degli elettrodi supponendoli, in una situazione ideale, addirittura puntiformi.
Naturalmente la stessa legge di proporzionalità può essere espressa nella forma: $I = G\,V$, dove $G = 1/R$ prende il nome di conduttanza ed è misurata in Siemens (S).



Dal nome di Ernest Werner von Siemens, altro illustre scienziato di un periodo di poco successivo.
È interessante approfondire l'analisi del contenuto della legge di Ohm allo scopo di cercare di distinguere in essa la parte che dipende dalla geometria del corpo da quella che invece dipende strettamente dalla natura del materiale. Per semplicità espositiva assumiamo una geometria molto semplice: un cilindro abbastanza lungo rispetto alla sua dimensione trasversale, in modo da poter ritenere che la maniera in cui viene applicata la d.d.p. non possa influenzare in modo significativo la distribuzione del moto delle cariche all'interno del cilindro.

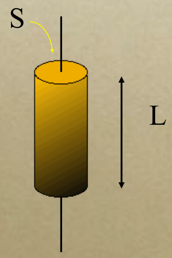


In tali ipotesi una indagine sperimentale mostra che Il valore di R dipende essenzialmente dalla geometria del corpo e dal materiale di cui esso è fatto.



Per la precisione $R = \rho\, L/S$, dove ρ prende il nome di resistività del materiale – il suo inverso σ quello di conducibilità – e dipende solo dalla sua natura e dalle condizioni fisiche in cui si trova ad operare, L è la lunghezza ed S la misura della sezione trasversale del cilindro.

Unità di misura



$$R = \rho\frac{L}{S} \Rightarrow \rho = R\frac{S}{L}$$

In S.I. la resistività si misura in Ωm o in $\Omega mm^2/m$;

La conducibilità in S/m

Nel Sistema Internazionale la resistività si misura in Ωm o in Ωmm /m, e la conducibilità in S/m.

Tipici valori di ρ $(\Omega mm^2 / m)$

- *argento* 0,015;
- *rame* 0,017;
- *alluminio* 0,028;
- *piombo* 0,80;
- *grafite* $4 \div 20$;
- *porcellana* $10^{15} \div 10^{19}$.

Nella figura sono riportati valori indicativi della resistività di alcuni materiali alla temperatura ambiente. Come si vede rame ed argento hanno una bassa resistività. Il rame costituisce il miglior compromesso – bassa resistività e basso costo – e per questo motivo è di gran lunga il materiale più usato nelle applicazioni elettriche, tanto che nel linguaggio comune rame è diventato sinonimo di conduttore elettrico.

Modello di Drude

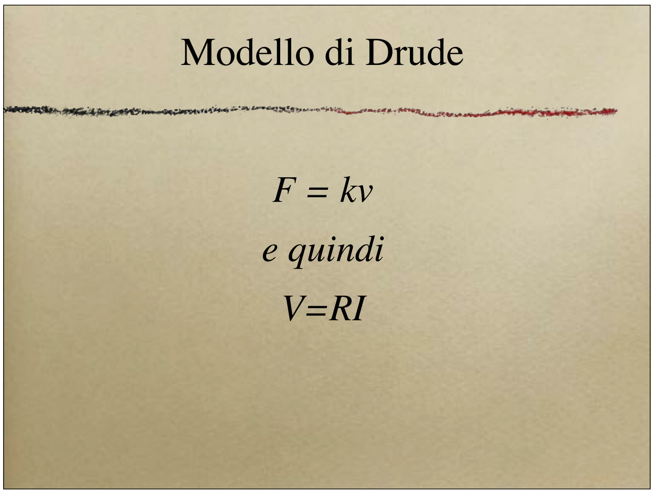
- $V = E\,L = R\,I = \propto v$;
- *forza* $\propto$ *velocità;*
- $F = m\,a$;

Il fatto che alcuni materiali – che vengono appunto detti ohmici – sottostanno alla legge di Ohm, ha un significato molto sottile che cercheremo di esaminare sia pure solo qualitativamente. Dalla definizione di intensità di corrente risulta evidente che la stessa è proporzionale alla velocità media dei portatori di carica. D’altra parte la differenza di potenziale, in quanto integrale del campo, deve essere proporzionale alla forza esercitata sui portatori stessi; il campo infatti è la forza per unità di carica. La legge di Ohm, dunque, afferma che la velocità è proporzionale alla forza, in apparente contraddizione con le leggi della dinamica che vogliono quest’ultima proporzionale all’accelerazione: F = ma.

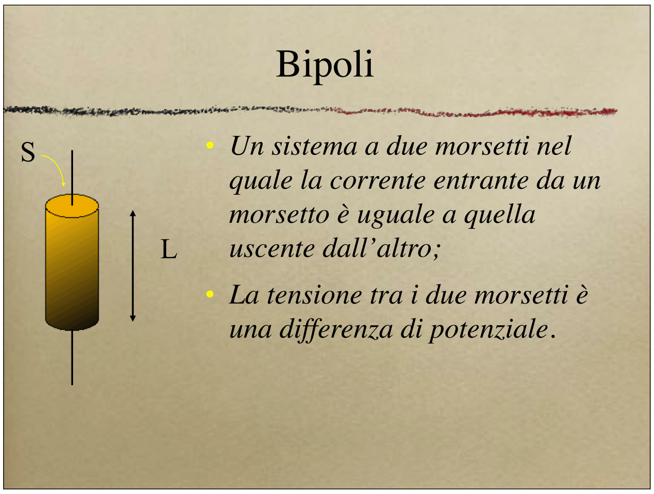
Modello di Drude

- *forza totale* $= F - kv = ma$;
- $F - kv = 0$.

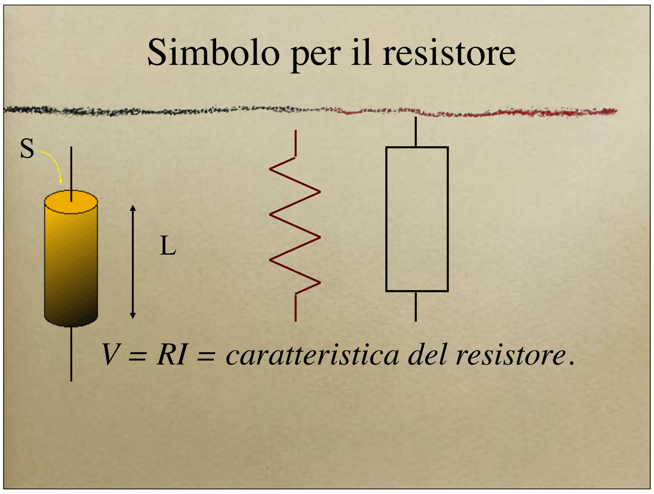
In effetti la contraddizione è solo apparente. Infatti la legge di Newton immagina il corpo completamente libero di muoversi. Evidentemente i portatori di carica in un conduttore ohmico non sono completamente liberi di muoversi! Il reticolo che costituisce il corpo materiale in cui i portatori sono costretti a muoversi offre un qualche ostacolo al moto delle cariche. La legge di Ohm, in effetti, ci consente di determinare quale tipo di ostacolo. Supponiamo infatti che l’effetto complessivo delle cariche ferme, costituenti il reticolo, sia equivalente ad un attrito e quindi proporzionale alla velocità; la forza complessiva che agisce sulle cariche sarà allora F – kv, dato che l’attrito si oppone all’azione del campo elettrico.



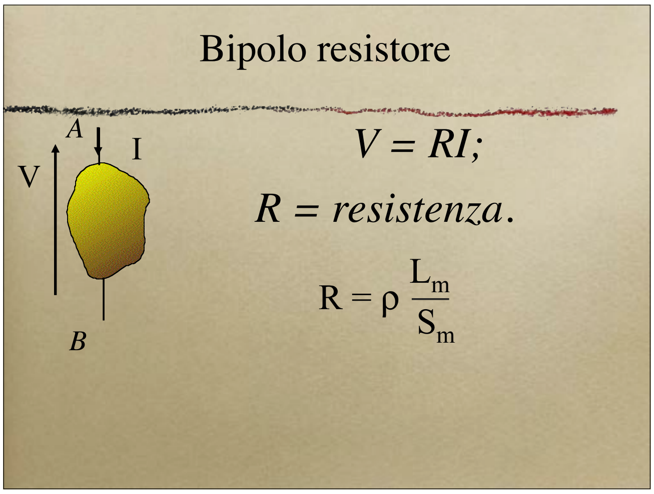
Se si raggiunge una condizione stazionaria, la velocità delle cariche sarà costante, e la loro accelerazione, quindi, nulla: $F - k v = m a = 0$, e quindi $F = kv$. Questo modello della conduzione, attribuito a Drude, che abbiamo esposto solo in maniera qualitativa, può essere approfondito anche ad un livello quantitativo. A noi interessava farne cenno soprattutto per sottolineare il fatto che la validità della legge di Ohm richiede il verificarsi di una condizione abbastanza particolare. Non stupisce quindi che tale legge non sia soddisfatta da tutti i materiali, e che gli stessi materiali ohmici siano tali solo in determinate condizioni.



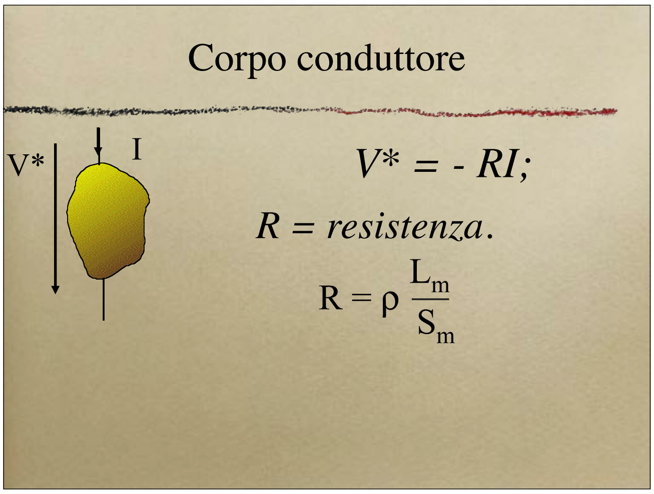
Non meno importante è il caso di quei materiali che non sottostanno alla legge di Ohm e che quindi presentano una dipendenza non lineare tra tensione e corrente.
Avrete riconosciuto nel bipolo resistore appena introdotto un primo esempio di quei bipoli che abbiamo introdotto in modo assiomatico in precedenza. Un bipolo resistore, dunque, è una “scatola” chiusa che comunica con l'esterno, dal punto di vista elettromagnetico, solo attraverso due suoi punti ben definiti (morsetti del bipolo). Esso gode delle proprietà ricordate in figura. Inoltre, per il bipolo resistore, esiste un legame di proporzionalità tra differenza di potenziale (d,d.p.) ai suoi morsetti e corrente che lo attraversa.



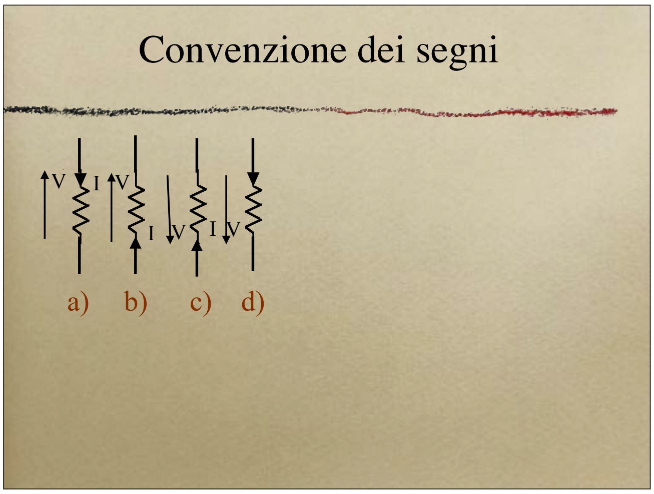
Come vedremo in seguito, per estendere il concetto di bipolo, basterà che la seconda proprietà sia verificata per ogni linea che non entri nella “scatola” che racchiude il bipolo in questione, e che tale linea non sia “comunque lunga”. La relazione $V = RI$ si dice caratteristica del bipolo. Vogliamo osservare che nello scrivere la legge di Ohm abbiamo implicitamente fatto delle scelte sui versi positivi della corrente e della tensione.



Con riferimento alla figura, se V è l'integrale di linea del campo tra i punti A e B, nel verso che va da A a B (freccia verso l'alto), ed I è la corrente nello stesso verso scelto per calcolare la tensione, cioè da A a B, allora la legge di Ohm assume la forma espressa dalla relazione indicata, con R dato da $R=\rho L/S$, e quindi positivo per definizione.



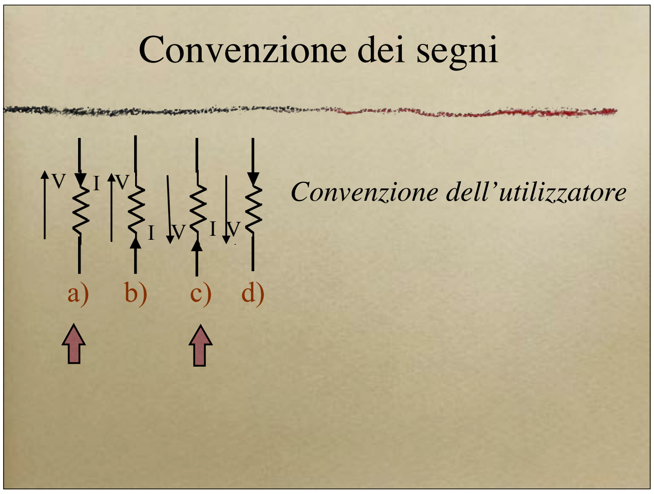
Ma erano possibili anche scelte diverse. Si supponga di non conoscere a priori quale dei due morsetti A e B sia quello effettivamente a potenziale maggiore, ma di volere comunque indicare con un simbolo, per esempio V*, per distinguerlo dal precedente, la differenza di potenziale; non si potrà, evidentemente, che scegliere arbitrariamente uno dei punti – B per esempio – e definire V* la differenza di potenziale tra B e A. Supponiamo invece di mantenere invariata la scelta per la corrente, e cioè definiamo I la corrente che entra da A ed esce da B. Per quanto detto in precedenza si avrà; V* = – RI.



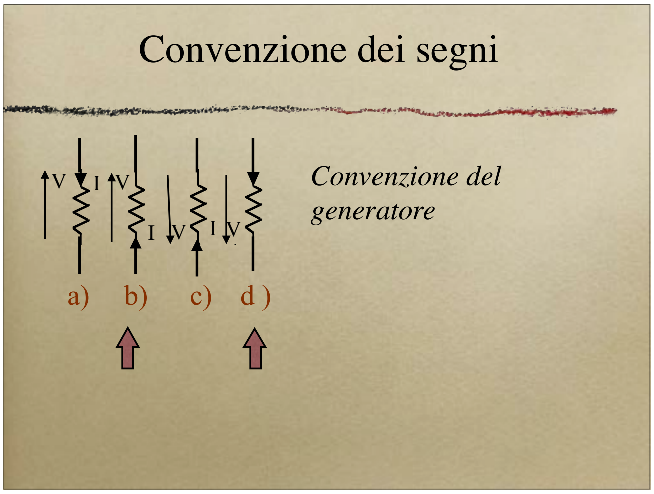
Occorre dunque precisare che un resistore ha una caratteristica del tipo V=RI, con R positivo, se i versi positivi scelti per la tensione e la corrente sono tali che la corrente è positiva quando entra nello stesso morsetto che, se a potenziale maggiore dell'altro, determina una V positiva. Questo tipo di scelta viene detta dell'utilizzatore per ragioni che saranno chiare in seguito.

In effetti le possibili scelte per i versi di V ed I sono quattro, come indicato in figura.

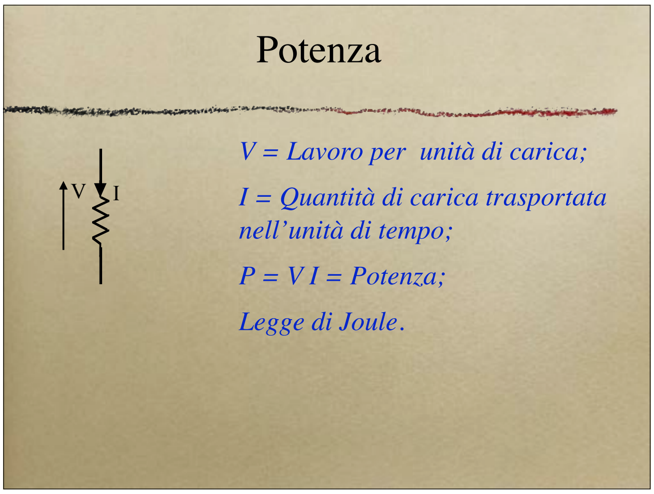
È facile convincersi che l'alternativa a) coincide con la c) (basta ruotare di 180° il disegno), mentre quella d) coincide con la b).



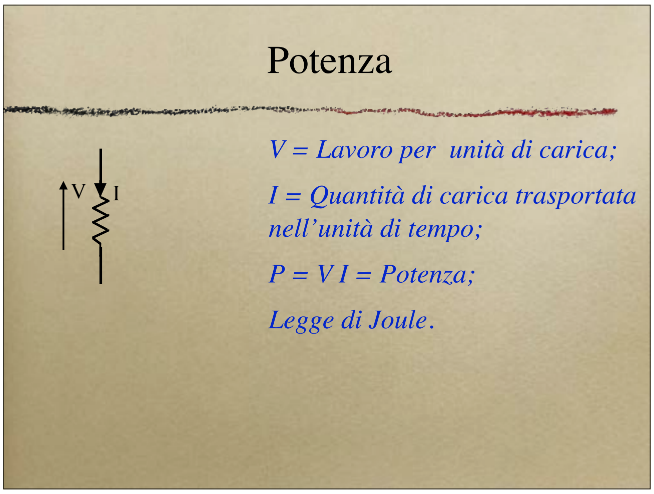
Le alternative a) e c) le abbiamo già dette dell'utilizzatore.



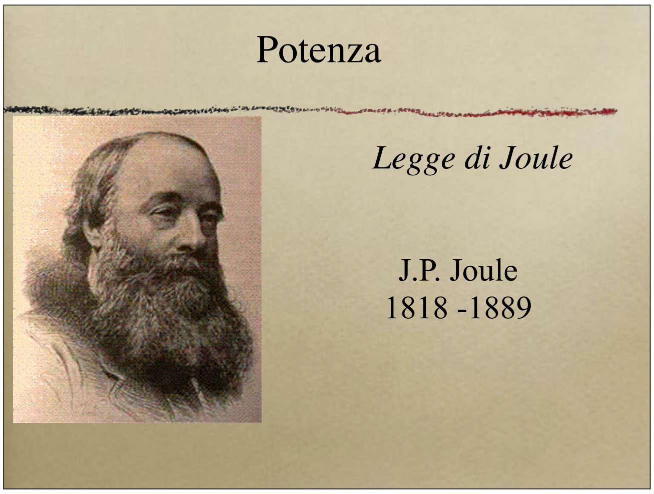
Diremo invece del generatore quelle b) e d). Vediamo perché questa terminologia.



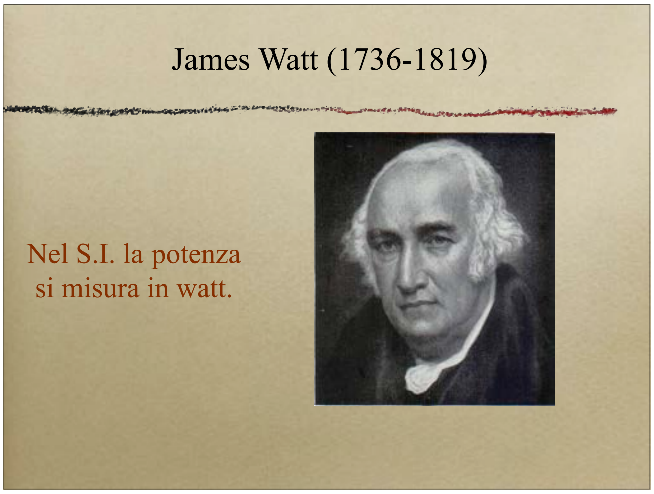
Come è noto, la tensione tra due punti può anche essere vista come il lavoro compiuto per portare una carica unitaria da un punto all'altro. Basta rifarsi alla definizione di tensione e ricordare che F = q E. Se nell'unità di tempo vengono portate I cariche da un punto all'altro, tra i quali esiste la differenza di potenziale V, si compirà, dunque, un lavoro per unità di tempo VI, cioè il resistore sarà interessato da una potenza VI. Con le posizioni fatte, è chiaro a questo punto che il prodotto VI, cioè la potenza ai morsetti del resistore, risulterà positivo solo se è stata scelta una convenzione dell'utilizzatore per la coppia tensione-corrente. Per l'altra convenzione tale prodotto, sempre nel caso del resistore, risulterà negativo.

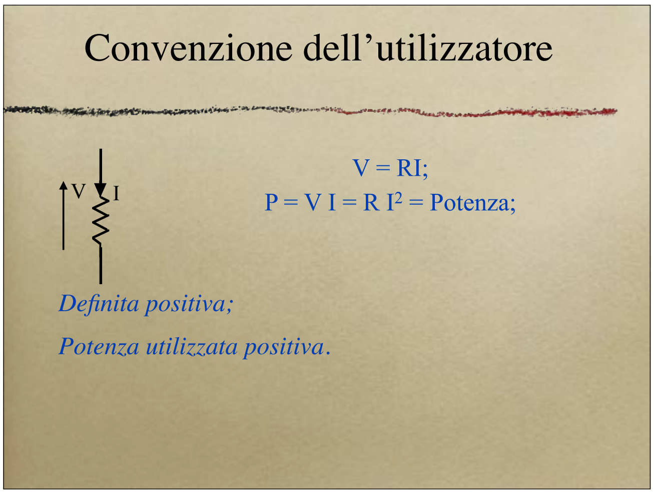


Consideriamo infatti la convenzione a: per definizione V è positivo se il punto indicato con il segno + è a potenziale maggiore dell'altro. Ma in tali condizioni il campo E farà muovere le cariche positive nel verso che va dal punto contrassegnato con il + all'altro, e quindi I risulterà positiva. D'altra parte, come è noto, l'energia associata alla potenza VI interessante un resistore, viene "dissipata", o meglio trasformata in un altro tipo di energia: calore. Infatti per un tempo dt si ha: dW = Pdt= VIdt=RI dt, che è, appunto, la ben nota legge di Joule.

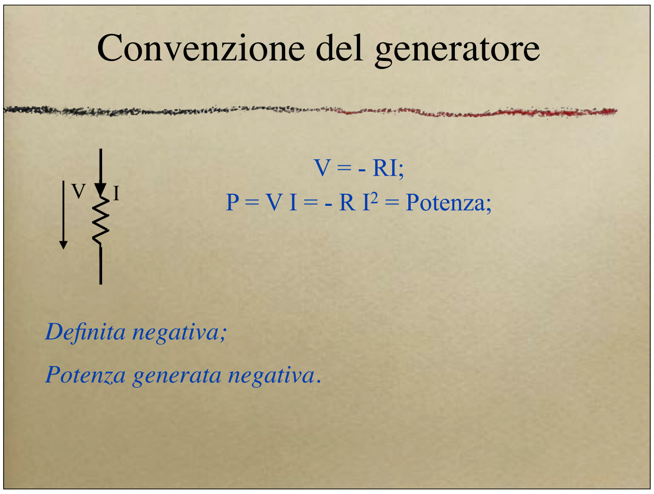


Appare quindi naturale parlare di energia e potenza "assorbita" ed "utilizzata" dal bipolo resistore e definire convenzione dell'utilizzatore quella convenzione che fa sì che tale potenza risulti positiva.

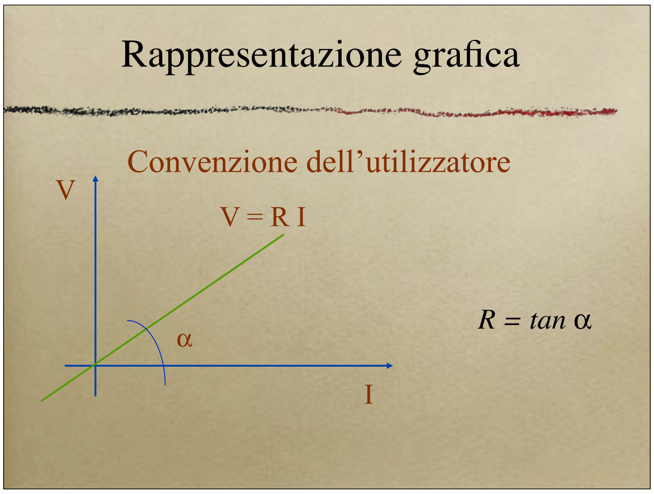




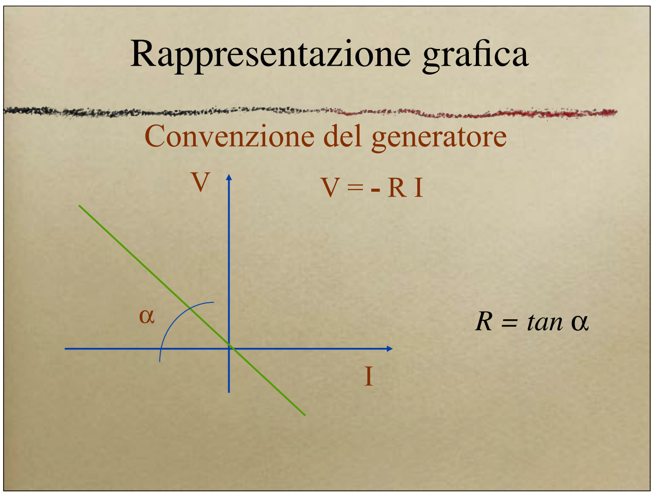
Se, dunque, su di un resistore si è fatta la convenzione dell'utilizzatore, la potenza assorbita risulterà sempre positiva.



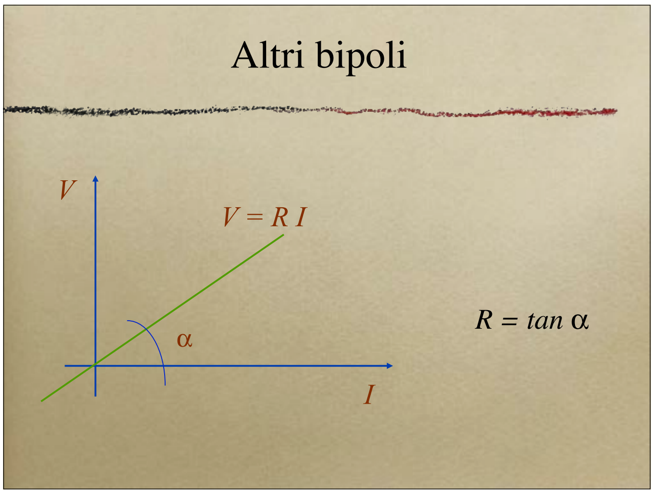
È vero anche l'opposto: se si fa per un resistore la convenzione del generatore, la potenza, che converrà a questo punto chiamare potenza generata, risulterà sempre negativa.



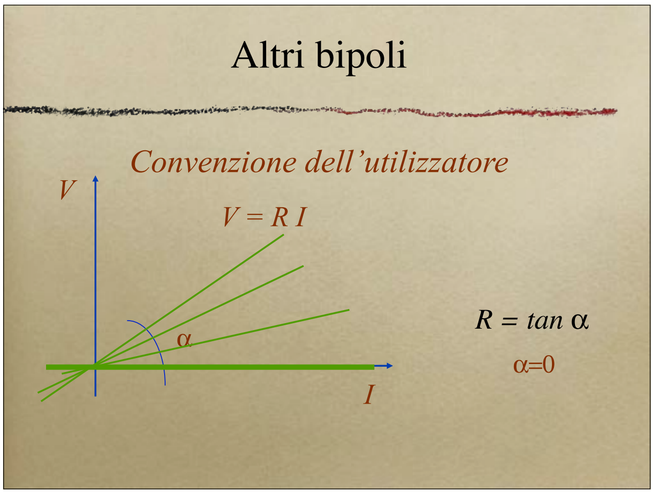
La caratteristica di un bipolo, almeno di quelli che intendiamo introdurre in questa prima fase, può essere utilmente rappresentata nel piano (I,V). Per un bipolo resistore, tale rappresentazione è, evidentemente, una retta passante per l'origine degli assi. Nel caso di una convenzione dell'utilizzatore, l'inclinazione a della retta, rispetto all'asse delle correnti, è tale che tga = R.



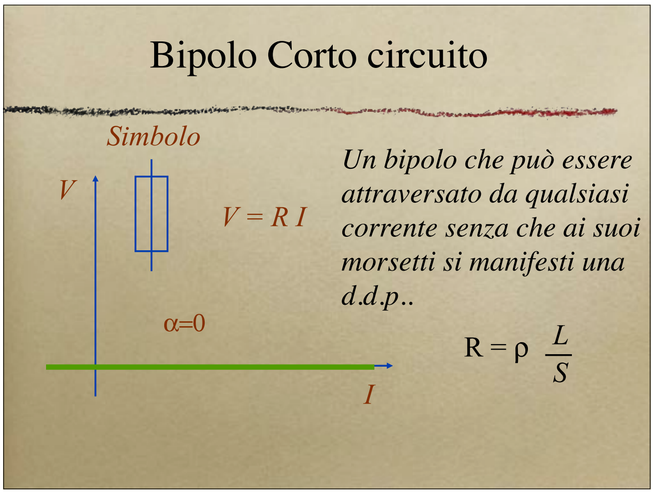
Si noti la diversa rappresentazione a seconda della convenzione scelta.



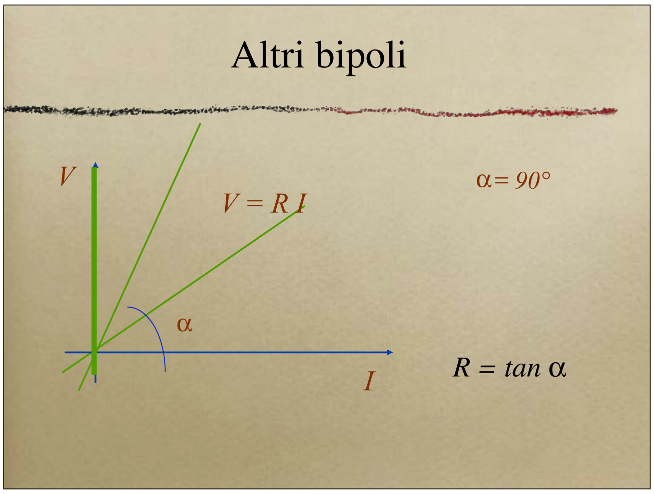
Come abbiamo visto, nel piano (I,V) la caratteristica V=RI di un resistore è una retta che passa per l'origine, con inclinazione tgα = R. Al variare di R, quindi, la retta sarà più o meno inclinata sull'asse delle I. Si noti che il fatto che la potenza assorbita da un resistore è in ogni caso positiva si riflette nel fatto che la caratteristica dello stesso si trova sempre nel primo e nel terzo quadrante del piano (I,V). Ciò accade, naturalmente, se la convenzione scelta è quella dell'utilizzatore.



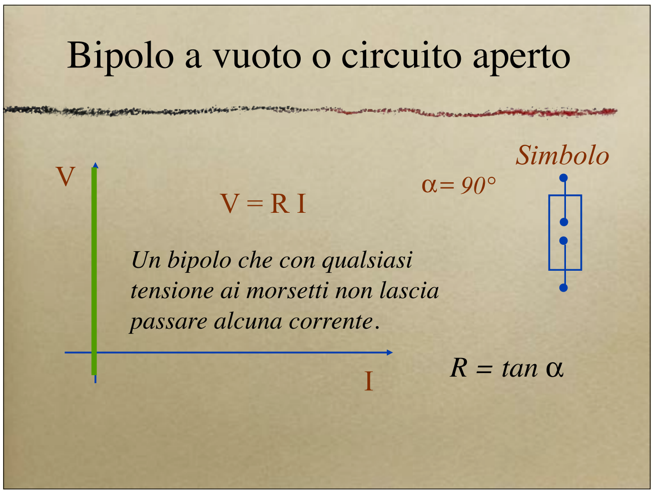
Si pongono in evidenza immediatamente due casi speciali: il caso in cui l'angolo α è nullo e quello in cui esso è pari a 90°.



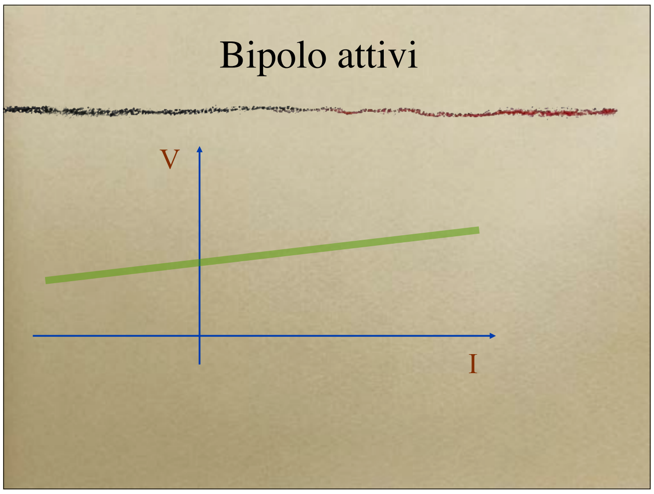
Nel primo caso si ha R = 0 e la caratteristica si sovrappone all'asse delle I. Un tale bipolo, per qualsiasi valore della corrente che lo attraversa, presenta sempre una differenza di potenziale nulla ai suoi morsetti. Esso prende il nome di bipolo corto circuito e può essere in teoria realizzato con un ideale conduttore perfetto. In un tale conduttore infatti, caratterizzato da una resistività ρ nulla, per qualsiasi valore della corrente si ha sempre una d.d.p. ai morsetti nulla. Naturalmente un buon conduttore reale può al più approssimare tale comportamento, e l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più "corto" sarà il tratto di conduttore: da ciò il nome "corto circuito".



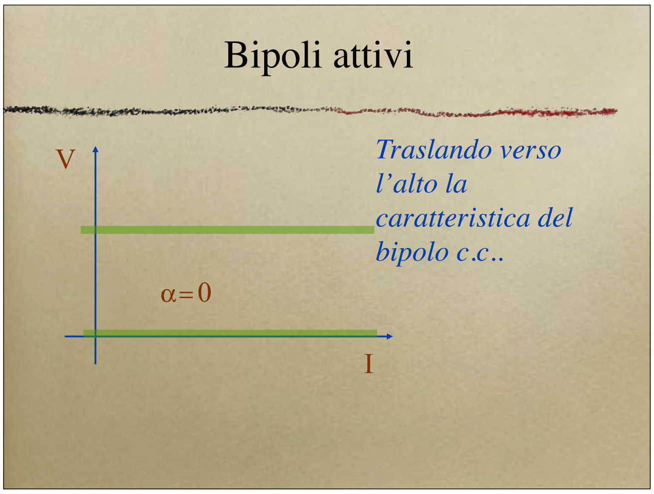
L'altro caso è quello in cui alfa è di 90°.



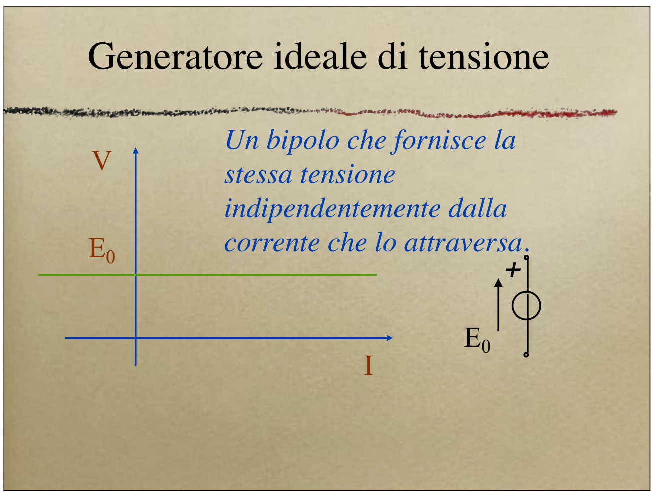
L'altro caso corrisponde a quello in cui σ = 0 (ρ = ∞). In tale evenienza si ha, al contrario, che per qualsiasi d.d.p. V ai morsetti la corrente che attraversa il bipolo è sempre nulla. Un tale bipolo si potrebbe realizzare frapponendo tra i morsetti un perfetto "non conduttore", cioè un materiale isolante. Esso prende il nome di bipolo circuito aperto o a vuoto. Le denominazioni di corto circuito, circuito aperto o circuito a vuoto sono in parte autoesplicative ed in parte saranno meglio chiarite in seguito.



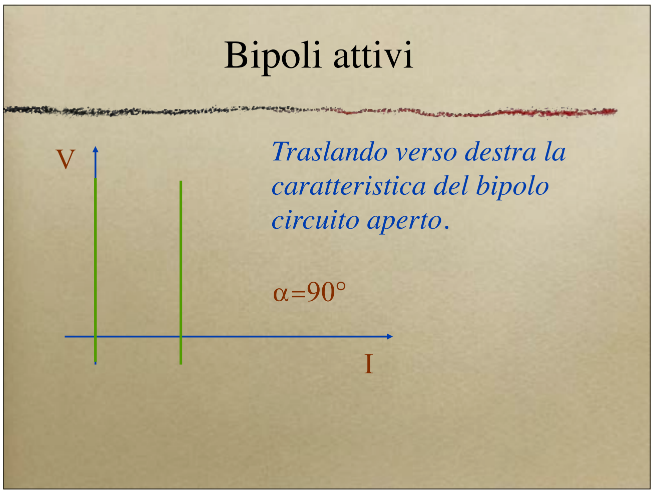
Immaginiamo ora un bipolo che sia definito da questa condizione: pur avendo fatto su di esso la convenzione dell'utilizzatore, la potenza risulta, in alcune condizioni, negativa. Cerchiamo di capire cosa distingue un tale bipolo da un resistore. Nel resistore, il moto delle cariche positive va dal punto a potenziale maggiore a quello a potenziale minore, secondo il campo. Perciò la potenza assorbita è sempre positiva. Nel bipolo che stiamo immaginando deve accadere l'opposto: le cariche devono andare dal un punto a potenziale minore ad uno maggiore, contro il campo. Ne consegue che un tale bipolo deve mettere in gioco fenomeni di natura diversa da quelli che producono il campo.



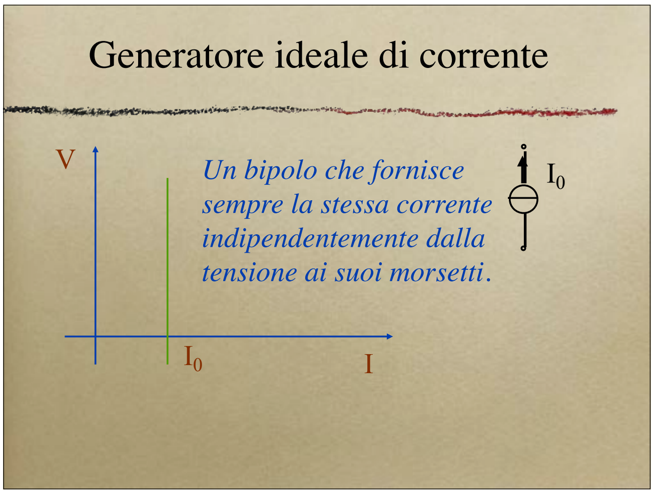
Ipotizziamo per ora l'esistenza di tali bipoli, che d'ora in poi chiameremo generatori ed esaminiamo quali forme può assumere la loro caratteristica. Se abbiamo scelto la convenzione dell'utilizzatore essa dovrà almeno in parte svolgersi nel secondo e nel quarto quadrante: solo in tali quadranti, infatti, il prodotto VI è negativo. Il caso più semplice, ma ideale, che possiamo immaginare è quello in cui un tale bipolo presenta sempre la stessa d.d.p. ai suoi morsetti, indipendentemente dalla corrente che lo interessa, o che il bipolo eroga. Un tale generatore prende il nome di generatore ideale di tensione o anche di forza elettromotrice (f.e.m.).



Conveniamo di assumere la convenzione del generatore; in tale ipotesi il bipolo in esame funziona effettivamente come generatore (VI>0) solo per il tratto della sua caratteristica che si trova nel primo quadrante. Nel tratto che interessa il secondo quadrante, esso ha VI<0 e quindi si comporta come uno strano resistore o utilizzatore. Un elemento che certamente distingue tale bipolo da un resistore normale sta nel fatto che, mentre in un resistore normale la caratteristica passa sempre per l'origine del piano (I,V) (questa proprietà viene detta inerzia del bipolo), nel bipolo generatore ideale anche per I = 0 si ha una tensione ai morsetti diversa da zero. Il simbolo generalmente utilizzato per tale generatore è rappresentato in figura.



Un caso del tutto analogo, ma opposto, è quello del bipolo che per qualsiasi valore della tensione ai morsetti eroga sempre la stessa corrente I. È naturale chiamare un tale bipolo generatore ideale di corrente. Il simbolo riservato per un tale generatore e la sua caratteristica sono mostrati in figura.



Si noti il segno che per il generatore di corrente la freccia indica il verso della corrente I fornita dal generatore stesso. I due generatori fin qui mostrati fanno parte di una più ampia classe di bipoli che per ovvie ragioni si dicono attivi. Essi sono anche generatori indipendenti in quanto la tensione o la corrente, nei due casi, da essi erogata ai morsetti non dipende da alcuna caratteristica del sistema in cui vengono inseriti. Introdurremo in seguito generatori che non godono di tale proprietà