

Lezione 2

1

Equazioni di Maxwell forma differenziale e integrale

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_v}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_\gamma \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) & \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_{S_\gamma} \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_\gamma\end{aligned}$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ per il vuoto $c = 300.000 \text{ km/sec}$

Abbiamo visto, nella lezione precedente, che l'approccio più logico dovrebbe essere quello di partire dalle equazioni di Maxwell, che qui riportiamo nelle due forme possibili: locale o differenziale, cioè valide punto per punto, e integrali cioè leggi che si applicano su volumi e superfici finite.

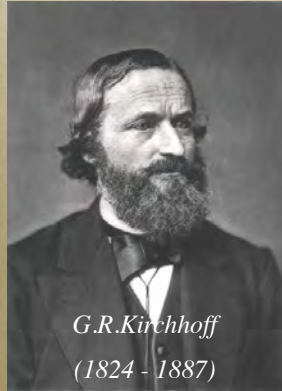
Equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned}\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_v}{\epsilon_0} & \text{Sorgenti} \\ \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_\gamma \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_{S_\gamma} \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_\gamma\end{aligned}$$

$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
Forza di Lorentz.

Notiamo ancora, senza entrare nei particolari, che i due campi \mathbf{E} e \mathbf{B} che a questo punto sono solo entità astratte - debbono ancora essere legati ai fenomeni naturali così come noi li vediamo, cioè alla dinamica. È questo il compito della legge di Lorentz che ci dice che una carica q che si trovi a passare con velocità \mathbf{v} in un punto P in cui i suddetti campi hanno i valori \mathbf{E} e \mathbf{B} appunto, sente una forza pari a $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Se la carica è libera di muoversi questa forza darà naturalmente luogo ad un'accelerazione secondo la ben nota legge di Newton.

Il Modello dei Circuiti



G.R. Kirchhoff
(1824 - 1887)

nodo $\rightarrow \sum_r I_r = 0$

maglia $\rightarrow \sum_s V_s = 0$

4

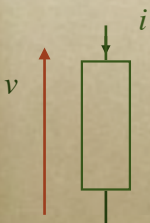
Il modello dei circuiti di G.R. Kirchhoff è basato su due equazioni: la prima detta anche legge di Kirchhoff ai nodi e la seconda detta Legge di K alle maglie.

Teoria dei Circuiti

- *Metodo assiomatico*

Proviamo a dare il modello dei circuiti e le leggi che lo caratterizzano in forma assiomatica.

Bipoli

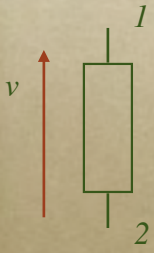


Un sistema a due morsetti ai quali è possibile definire univocamente due grandezze: la tensione v e la corrente i .

6

Definiamo a questo punto il bipolo come un oggetto che comunica con l'esterno esclusivamente attraverso due suoi punti, che diremo morsetti del bipolo, e per il quale sia possibile definire univocamente due grandezze scalari " v " tensione elettrica tra i morsetti ed " i " corrente elettrica che attraversa il bipolo.

La tensione



- Alla tensione è associato un segno
- Se v è la tensione tra 1 e 2, la tensione tra 2 e 1 è $-v$
- È implicita una scelta

7

Alla tensione v è associato un segno nel senso che essa può essere sia positiva che negativa: in particolare se v è la tensione tra il morsetto 1 e quello 2, allora la tensione tra 2 ed 1 è $-v$. Tutto questo ci obbliga ad indicare con un simbolo, la freccia in rosso in figura, quale è la tensione che indichiamo con il simbolo v . Nel nostro caso evidentemente la tensione v è tra 1 e 2.

La corrente

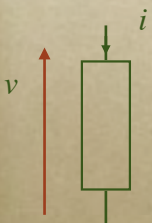


- Anche alla corrente è associato un segno
- Se i è la corrente che va da 1 a 2, la corrente che va da 2 a 1 è $-i$
- Anche qui è implicita una scelta

8

Anche alla corrente è associato un segno nel senso che se i è la corrente che attraversa il bipolo nel verso che va da 1 a 2, allora potremo dire che la corrente che lo attraversa da 2 a 1 è $-i$. Anche in questo caso, come nel precedente è implicita una scelta. Prima di parlare di tensioni e correnti in un bipolo dobbiamo aver precisato quali sono i versi delle due grandezze elettriche che stiamo indicando con v ed i , altrimenti queste grandezze non sono univocamente definite.

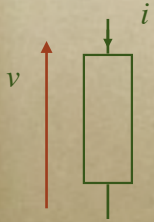
Unità di misura



- La tensione si misura in volt
- La corrente si misura in amper

9

Le caratteristiche

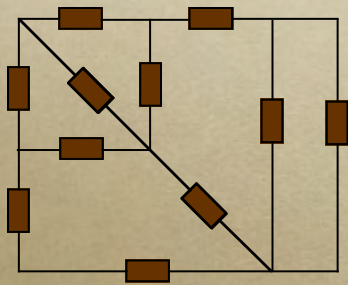


- In un bipolo, v ed i non sono indipendenti.
- Il loro legame si dice caratteristica del bipolo
- Tale legame può essere di diverso tipo: algebrico (lineare o non), differenziale, ecc.
- Il più semplice legame è quello algebrico e lineare (v ed i in figura) $v = Ri$

10

In un bipolo v ed i non sono indipendenti tra di loro. Il loro legame viene detto caratteristica del bipolo. Esso può essere di varia natura: algebrico (lineare o non), differenziale, ecc.. Evidentemente il più semplice legame che possiamo immaginare è quello lineare del tipo $v=Ri$, dove il coefficiente di proporzionalità R viene detto resistenza del bipolo.

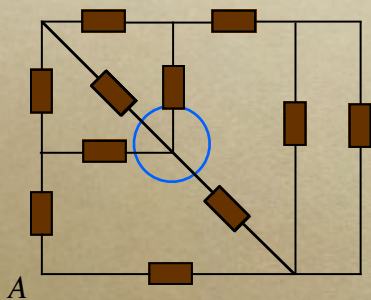
Circuito o rete elettrica



11

Dicesi rete elettrica o circuito elettrico (per ora consideriamo le due dizioni perfettamente equivalenti) un insieme di bipoli collegati attraverso i rispettivi morsetti, come per esempio rappresentato in figura.

Circuito: i nodi

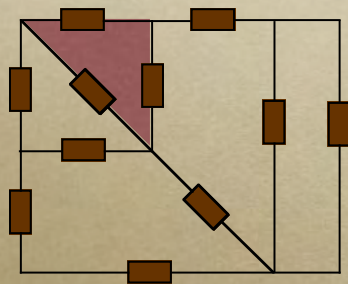


Nodi

12

Diciamo nodo di una rete un punto in cui convergono più di due morsetti di bipoli distinti, come mostrato in figura. Potremmo naturalmente ritenere nodo anche il punto A mostrato in figura. Ma come vedremo ciò è inutile e produrrebbe complicazioni non necessarie. Quindi per fare un nodo ci vogliono più di due morsetti confluenti.

Circuito: le maglie

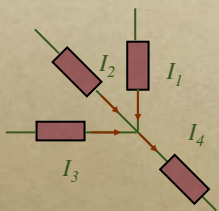


Maglie

13

Diciamo maglia di una rete un percorso chiuso che partendo da un nodo vi ritorna passando per diversi bipoli, così come mostrato in figura.

Prima legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le correnti (L.K.C.).

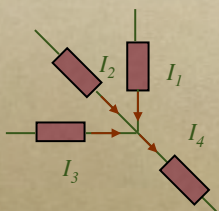


In ogni nodo la somma algebrica delle correnti entranti o uscenti dal nodo stesso è identicamente nulla.

14

Adesso possiamo enunciare la prima legge di Kirchhoff, o legge di Kirchhoff alle correnti (L.K.C.): In ogni nodo la somma algebrica delle correnti entranti o uscenti dal nodo stesso è identicamente nulla. Il significato di quel "entranti o uscenti" è implicitamente chiaro dall'esempio mostrato nella successiva slide.

Prima legge di Kirchhoff



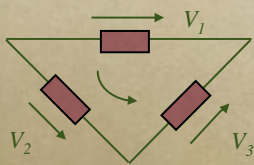
In ogni nodo la somma algebrica delle correnti entranti o uscenti dal nodo stesso è identicamente nulla.

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

15

i_1 , i_2 e i_3 sono stati sommati nell'equazione perché le relative correnti sono entranti ed i_4 è stata sottratta perché uscente dal nodo. Naturalmente l'equazione non cambierebbe significato se cambiassimo di segno tutti i termini, il che corrisponderebbe a considerare negative le correnti entranti e positive quelle uscenti.

Seconda legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le tensioni (L.K.T).

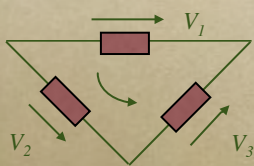


In ogni maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto, a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza prescelto, è identicamente nulla.

16

Possiamo ora enunciare la seconda legge di Kirchhoff: In ogni maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto, a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza prescelto, è identicamente nulla. Anche in questo caso la diapositiva seguente chiarisce con un esempio l'uso dei segni.

Seconda legge di Kirchhoff.



In ogni maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto, a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza prescelto, è identicamente nulla.

$$-V_1 + V_2 + V_3 = 0.$$

17

Evidentemente, avendo scelto di percorrere la maglia indicata nel verso antiorario (freccia nel triangolo), incontriamo nello stesso verso v_2 e v_3 e in verso opposto v_1 .

Si potrebbe far vedere che con queste due leggi e con la conoscenza delle caratteristiche dei bipoli presenti nella rete è possibile risolvere il problema fondamentale dei circuiti elettrici, e cioè trovare i valori delle v su tutti i bipoli e delle i attraverso gli stessi.

Campi e circuiti

In regime stazionario il modello circuitale discende in modo diretto da quello dei campi.

In regime dinamico, invece, tale modello è soltanto un'approssimazione, molto buona in determinate condizioni, di quello dei campi.

$$\text{Il parametro } \beta = L/cT$$

18

Ma quale è il legame tra queste leggi, queste grandezze e le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo? Si può far vedere che in regime stazionario, quando cioè le grandezze v ed i non variano nel tempo, il modello circuitale discende in modo diretto da quello dei campi. In regime dinamico, invece, tale modello è soltanto un'approssimazione, molto buona in determinate condizioni, di quello dei campi. In particolare l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è il parametro β indicato nella slide. Dove L è la dimensione geometrica media dei bipoli, T è il tempo caratteristico della dinamica in esame e c la velocità della luce nel vuoto.

Equazioni di Maxwell forma differenziale e integrale

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_v}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_\gamma \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) & \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_{S_\gamma} \left(\mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_\gamma \end{aligned}$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ per il vuoto $c = 300.000 \text{ km/sec}$

Ritorniamo ora alle equazioni di Maxwell che qui riportiamo nelle due forme: locale o differenziale, valide punto per punto nello spazio di interesse, e Integrali, valide su ogni curva, superficie o volume.

Equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_v}{\epsilon_0} & \text{Sorgenti} \\ \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_\gamma \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_{S_\gamma} \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_\gamma \end{aligned}$$

$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
Forza di Lorentz

Naturalmente dobbiamo in qualche modo collegare i campi E e B ai fenomeni macroscopici che effettivamente vediamo nella realtà. Questo compito è svolto dalla così detta legge di Lorentz che stabilisce che una particella carica q che si trovi a passare per un punto P in cui i valori dei campi sono E e B risentirebbe una forza F data dalla formula indicata: la così detta forza di Lorentz.

Generalmente Q e J sono considerate le sorgenti (assegnate!) del campo, rispettivamente carica e densità di corrente. Ma, come sapete, le cose possono essere anche più complesse. Ma andiamo con ordine e ripartiamo dall'inizio.

I fenomeni

Se volessimo introdurre i fenomeni elettromagnetici in modo molto sintetico e riepilogativo, potremmo cominciare con dire: i corpi materiali possono presentare proprietà particolari che danno luogo alle cosiddette interazioni elettriche e magnetiche.

Sintesi dei fenomeni.

- Una proprietà dei corpi: carica elettrica;
- Attrazione ma anche repulsione
- Quindi due tipi di cariche;

Elemento chiave di tali interazioni è la carica elettrica, una proprietà individuata da una grandezza scalare q che prende il nome, appunto, di carica elettrica. Per inciso, questa proprietà è “quantizzabile”, nel senso che esiste una carica minima pari ad e , tutte le altre essendo multiple di questa. Le cariche elettriche interagiscono tra di loro esercitando forze le une sulle altre. In particolare esistono due diverse “qualità” di cariche: cariche dello stesso tipo si respingono e cariche di tipo opposto si attraggono.

Sintesi dei fenomeni.

- Quantità di carica;
- La carica è quantizzata: $e = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;

Ciò porta a dare a q un segno, negativo o positivo, per distinguere le due possibili alternative. In particolare l’elettrone, uno dei componenti dell’atomo, ha carica negativa pari a $-e$, mentre nel nucleo dell’atomo sono presenti altri elementi, i protoni, che presentano una carica positiva pari a $+e$. Il valore $e = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ indicato in figura è in Coulomb che è appunto l’unità di misura della carica elettrica nel Sistema Internazionale (S.I.), al quale faremo sempre riferimento anche in seguito. Daremo per implicito che per ogni grandezza che introduciamo si possa immaginare di costruire uno strumento in grado di misurarla.

La legge di Coulomb

Charles Augustin Coulomb (1736 - 1806)

Nel 1784, usando una bilancia di torsione, dimostrò la validità della legge a cui fu dato poi il suo nome



Charles Augustin Coulomb
(1736 - 1806)

L’interazione elettrica tra i corpi materiali può essere ricondotta ad una legge elementare che prende il nome di legge di Coulomb. Questa legge immagina una situazione ideale in cui i corpi materiali portatori delle cariche si riducano a punti geometrici. Introduciamo così il concetto di carica puntiforme: un corpuscolo che occupa un volume idealmente nullo intorno ad un punto, ma con massa non nulla, e che è portatore di una carica elettrica q (positiva o negativa).

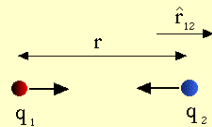
La carica puntiforme

- L'idealizzazione della carica puntiforme;
- Raggio atomo idrogeno: $a = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$;

25

Si tratta certamente di una idealizzazione, ma non del tutto priva di fondamento fisico, se si pensa che i "volumi occupati" dai naturali portatori elementari di cariche, protoni ed elettroni, sono generalmente molto piccoli rispetto alle dimensioni che caratterizzano il fenomeno particolare che si vuole studiare; gli esperimenti ci dicono che, per esempio, la carica di un protone si può immaginare concentrata in una sfera di 10^{-13} cm di raggio.

La legge di Coulomb



$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

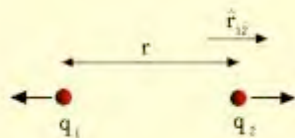
Nel Sistema Internazionale (S.I.)
 $k = 1/4\pi\epsilon_0$, con $\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

26

Legge di Coulomb : attrazione

Orbene, la legge di Coulomb afferma che se due cariche puntiformi, fossero poste (ferme) alla distanza r , su ognuna delle cariche agirebbe una forza; in particolare, quella esercitata dalla carica 1 sulla carica 2 è espressa dalla formula indicata. La forza F_{12} è dunque diretta lungo la congiungente tra le due cariche, è proporzionale al prodotto delle stesse, inversamente proporzionale al quadrato della distanza che le separa ed è diretta nel verso che va da q_1 a q_2 , se entrambe le cariche hanno lo stesso segno.

La legge di Coulomb



$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

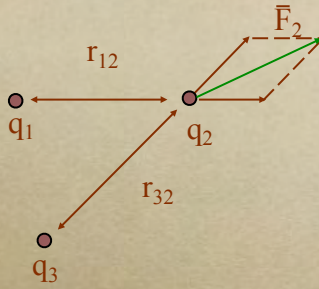
Nel Sistema Internazionale (S.I.)
 $k = 1/4\pi\epsilon_0$, con $\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

27

Legge di Coulomb : repulsione

Tale forza è, dunque, attrattiva se le cariche q_1 e q_2 hanno segno opposto, e repulsiva se esse invece hanno lo stesso segno. Sulla carica q_1 agisce una forza eguale ed opposta. Se le cariche sono libere di muoversi, tali forze producono movimento, secondo le ben note leggi della dinamica newtoniana.

Sovrapponibilità delle interazioni



$$\mathbf{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + k \frac{q_3 q_2}{r_{32}^2} \hat{r}_{32}$$

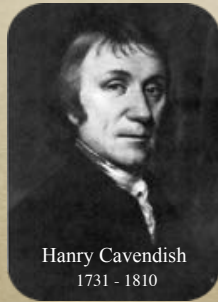
28

Se ci limitassimo a considerare solo cariche ferme ed aggiungessimo, alla legge di Coulomb, la proprietà che tali forze di interazione sono sovrapponibili - in presenza, cioè, di più cariche puntiformi, la forza agente su ognuna di esse è la somma vettoriale delle forze che ogni altra carica produrrebbe sulla stessa carica, in assenza delle altre - potremmo derivare, dalla sola legge di Coulomb, tutte le leggi della interazione elettrica. Le cose si complicano un poco quando consideriamo cariche in movimento: la legge di Coulomb va leggermente modificata, o sostituita con altre leggi ad essa equivalenti.

Henry Cavendish

1731 - 1810

Nel 1772, dimostrò la validità di una legge che, per cariche ferme, è del tutto equivalente a quella di Coulomb.



Henry Cavendish
1731 - 1810

La legge di Gauss.

29

Per esempio potremmo usare una legge che per gli altri aspetti è del tutto equivalente a quella di Coulomb e che fu enunciata da un altro grande scienziato dell'epoca, Henry Cavendish nel 1772. Tale legge è oggi universalmente nota come legge di Gauss.

Il Campo Elettrico

30

Cariche sorgenti e
cariche di prova

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}_{Qq}$$



Supponiamo di avere, in una regione dello spazio, una “distribuzione” di cariche. Non ci occuperemo delle caratteristiche di tale distribuzione, ma soltanto dell’azione che tali cariche esercitano su altre cariche. Per esempio possiamo immaginare che in realtà si tratti di una sola carica Q . Supponiamo ancora di poter disporre di una carica puntiforme, e positiva, che goda delle proprietà di non disturbare la posizione o il movimento delle altre cariche. In qualsiasi punto si venga a trovare la carica in questione, che d’ora in poi chiameremo carica di prova, essa risentirà di una forza prodotta dalle altre cariche, che d’ora in poi chiameremo cariche sorgenti.

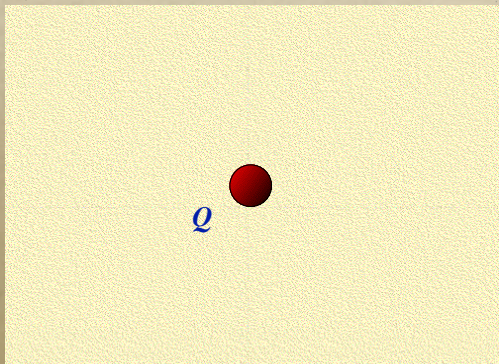
Cariche sorgenti e
cariche di prova

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}_{Qq} = q\mathbf{E}$$



Dalla formula si vede chiaramente che se raggruppiamo in un unico fattore i termini che dipendono dalla carica sorgente, l’espressione della forza può essere messa nella forma $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, dove \mathbf{E} è evidentemente un vettore. In realtà, se le cariche sorgenti sono in movimento, la forza percepita dalla carica di prova non dipende soltanto dalla posizione in cui essa si trova, ma anche dalla velocità con cui essa passa per il punto in questione. Ma per ora limitiamoci al caso in cui la carica sorgente è ferma.

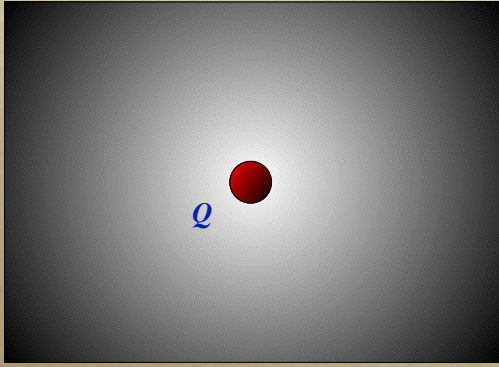
Cariche sorgenti e
cariche di prova



In effetti avremmo potuto descrivere il fenomeno in una maniera diversa. Se disponiamo una carica Q in una regione dello spazio, tale spazio si modifica.

Cariche sorgenti e cariche di prova

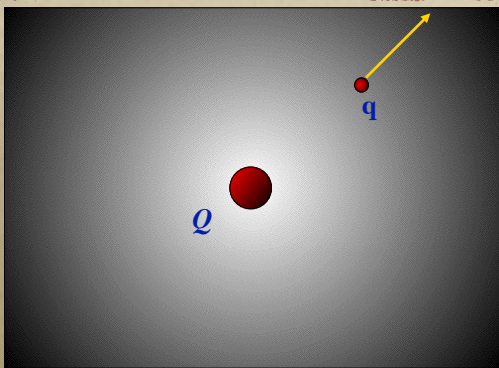
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}_{Qq}$$



Ho rappresentato questa modifica in questa slide con il cambiamento di colore dello spazio circostante alla carica Q. Notate che ho scelto un colore la cui luminosità va sfumando allontanandosi dalla carica sorgente. Forse capite perché!

Cariche sorgenti e cariche di prova

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}_{Qq} = q\mathbf{E}$$



Orbene una carica q in P risentirebbe una forza $F=qE$, dove E è il campo elettrico. È a questo punto chiaro che quel colore sfumato può essere interpretato come una rappresentazione del campo elettrico, più intenso vicino alla carica. Ed è anche evidente che la modifica dello spazio rappresentata dal campo elettrico E può essere vista come l'equivalente dello stato dinamico dell'etere di cui Maxwell era alla ricerca. Questo modo di veder le cose consente anche di separare gli effetti: le cariche sorgenti modificano lo spazio (il telone elastico di Helmholtz), cioè creano il campo, ed il campo agisce sulla carica di prova q .

Campo Elettrico: altro significato

- *Regione dello spazio in cui è definito un campo elettrico.*
- *Se si conosce il campo in una regione dello spazio, per calcolarne gli effetti su di una carica di prova, non occorre conoscere la distribuzione delle sorgenti!*

Sempre per questi motivi, si usa l'espressione "Campo Elettrico" anche per indicare la regione dello spazio in cui è definito un campo elettrico. Questa impostazione presenta anche questo non banale vantaggio: Se si conosce il campo in una regione dello spazio, per calcolarne gli effetti su di una carica di prova, non occorre conoscere la distribuzione delle sorgenti!

Definizione di campo elettrico

Forza agente su di una carica puntiforme unitaria ferma.

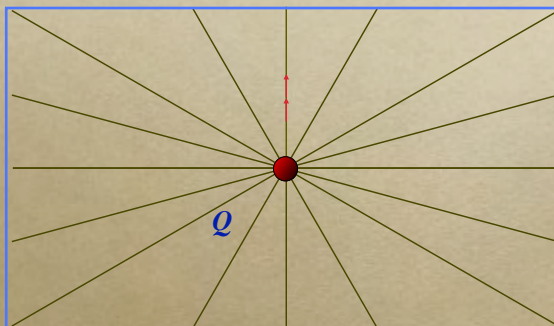
Oppure $E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q}$

Oppure $E = \frac{dF}{dq}$

$$E = \frac{F}{q}$$

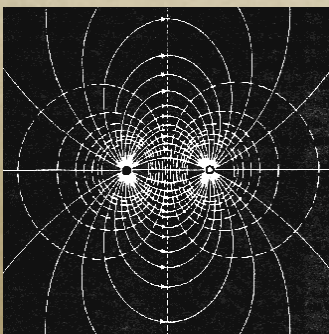
Queste sono tutte definizioni equivalenti del campo elettrico in un punto. Alla seconda si potrebbe obiettare che la carica in realtà non può andare a zero, ma al massimo al valore e , come pure alla terza, che un infinitesimo di carica dq è incompatibile con l'idea di una carica quantizzata. Ma si tratta in realtà di tutte obiezioni futili che dimostrano solo che chi le fa non ha ben chiaro il processo di limite.

Rappresentazione del campo



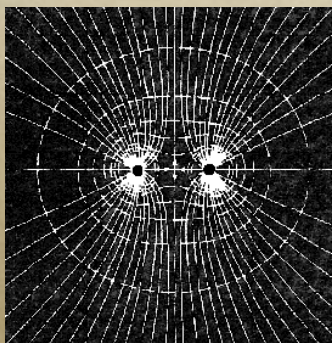
Un modo più semplice ed interessante per rappresentare “la deformazione dello spazio”, cioè il campo elettrico, prodotto da una determinata sorgente, è quello di tracciare per un certo numero di punti le linee sempre tangenti al campo nella regione in esame. Quello rappresentato è il campo, per esempio, di una carica puntiforme Q .

Due cariche opposte



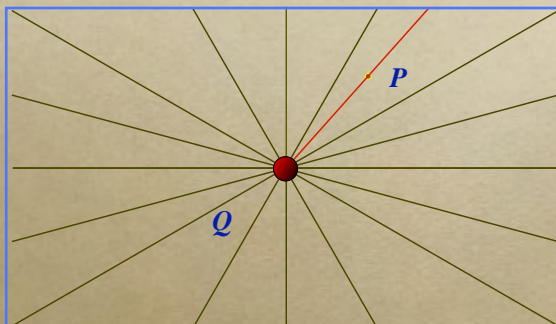
E questa è la rappresentazione del campo prodotto da due cariche di segno opposto, ad una certa distanza d .

Due cariche uguali



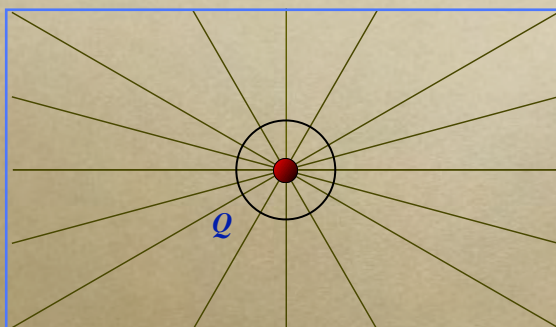
Mentre quest'ultimo è quello prodotto da due cariche dello stesso segno. Sono queste, in fondo, le linee di forza immaginate da Faraday, che tanto avevano colpito Maxwell.

Quante linee?



Si pone subito ora un problema: quante linee di forza dobbiamo disegnare? È evidente che per ogni punto - come per esempio il punto P in figura - potremmo disegnare una nuova linea del campo. Ma se lo facessimo per tutti i punti, riempiremmo lo spazio di linee e la rappresentazione perderebbe ogni significato. Si conviene dunque di disegnare un numero di linee di campo uniformemente distribuito.

Quante linee?



Per esempio, per il caso in figura, immaginiamo di considerare la superficie di una sfera centrata nel punto in cui è la carica sorgente Q e dividiamola in tante superfici di area uguale. Per il centro di ognuna di queste superfici facciamo passare una linea del campo. In questo modo abbiamo anche il vantaggio di aver trasformato la rappresentazione essenzialmente qualitativa delle linee di forza in una anche quantitativa. Infatti dove le linee del campo si addensano il campo stesso è più intenso.

$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_\gamma = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma$$

Integrale di linea

43

In ogni caso se in presenza di un campo elettrico, immaginiamo di portare una carica di prova q , da un punto A ad un punto B lungo una linea γ , la forza F che agisce sulla carica compirà un lavoro per unità di carica che potremo calcolare con l'integrale mostrato in figura.

$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_\gamma = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma$$

$$dL = F dl \cos \alpha$$

Integrale di linea

44

Nell'immagine è ricordato anche il significato dell'integrale: somma di infiniti contributi infinitesimi. A tale lavoro viene dato il nome di tensione lungo la linea γ tra i punti A e B, e si misura in volt (V). Lo strumento che la misura verrà detto voltmetro e avremo modo di parlarne nel seguito. Notare che oltre ai pedici che ricordano i punti A e B, estremi del percorso, è necessario anche indicare la particolare linea lungo la quale ci si è mossi. Si noti anche che per poter parlare di tensione tra due punti bisogna aver specificato non solo linea γ tra gli stessi, ma anche il verso in cui ci si muove sulla linea (da A a B oppure da B ad A); ciò giustifica anche il simbolo utilizzato.

$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma$$

$$T_{A\beta B} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\beta$$

$$T_{A\gamma B} \neq T_{A\beta B}$$

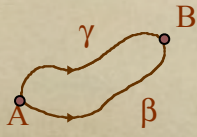
Due percorsi diversi

Tensioni diverse

45

Supponiamo ora di spostare la carica di prova lungo un'altra linea, β , tra gli stessi punti A e B, come mostrato in figura. Anche in questo caso verrà compiuto un lavoro $T_{A\beta B}$, che in generale sarà diverso dal precedente.

Differenza di potenziale



$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma$$

$$T_{A\beta B} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\beta$$

Se invece

$$T_{A\gamma B} = T_{A\beta B} \quad \text{per qualsiasi linea!} \quad \text{Allora}$$

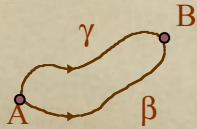
$$T_{A\gamma B} = V_{AB} = \text{differenza di potenziale tra A e B!}$$

46

In determinate situazioni accade invece che tale lavoro sia indipendente dal percorso e dipende esclusivamente dai due punti estremi. Sarebbe facile far vedere, utilizzando la legge di Coulomb, che una tale situazione si verifica se le cariche sorgenti sono tutte ferme e la carica di prova si immagina mossa lentissimamente, un processo che in fisica viene definito adiabatico.

Si parlerà in tal caso di differenza di potenziale V e potremo semplificare il simbolo indicando solo gli estremi del percorso visto che tale grandezza solo da essi dipende.

Circuitazione



$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\oint_{\gamma_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\beta$$

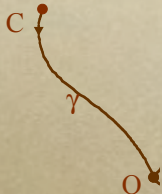
$$= \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\beta = \oint_{\gamma_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma = 0$$

Campo conservativo

47

Si osservi che in questo caso il lavoro compiuto dal campo E quando la carica di prova è mossa lungo un percorso chiuso - per esempio l'unione di γ e β , quest'ultimo orientato nel verso opposto - è identicamente nullo. Il campo delle cariche ferme è conservativo!

$V(C)$



La funzione potenziale

48

Supponiamo di essere in queste condizioni e di calcolare il lavoro che il campo compie quando la carica di prova si muove da un punto qualsiasi nello spazio ad un punto O fisso. Per ogni punto A prescelto avremo un valore di tale lavoro, indipendentemente dal percorso compiuto per andare da A a O .

$V(P) = \text{Funzione di punto}$

49

Facciamo lo stesso lavoro, per tutti i punti dello spazio in esame. Abbiamo in pratica costruito una funzione $V(P)$ dei punti dello spazio che chiameremo potenziale del punto P rispetto ad O . In particolare è evidente che la funzione V in O è nulla. Si dice che il punto O è stato scelto come punto di riferimento dei potenziali.

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma = \int_A^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\alpha - \int_B^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\beta$$

50

Se ora, per esempio, immaginiamo di voler calcolare la tensione tra A e B , essendo essa indipendente dal percorso, invece di farlo lungo il percorso γ_{AB} segnato in figura, potremmo farlo lungo il percorso che va da A a O lungo γ e da O a B lungo β . Otterremo cioè la differenza dei valori assunti dalla funzione potenziale in A e B . Da ciò il nome di differenza di potenziale.

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma = \int_A^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\alpha - \int_B^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\beta = V(A) - V(B)$$

51

Perché differenza di potenziale

Nel caso in cui, dunque, il lavoro è indipendente dal percorso esso può essere messo sotto la forma di una differenza di potenziale (d.d.p. nel seguito) tra i due punti in esame. Si noti che tale lavoro è positivo, e quindi le sorgenti compiono effettivamente lavoro sulla carica di prova, se il potenziale di A , $V(A)$, è maggiore di quello di B , $V(B)$. Non si può quindi parlare di una d.d.p. V tra due punti se non si è prima specificato il verso in cui si va tra i due punti in questione

Alessandro Volta (1745 - 1827)

Nel Sistema Internazionale (S.I.) la d.d.p. si misura in Volt



52

Nel Sistema Internazionale (S.I.) la d.d.p. si misura in Volt, dal nome del famoso scienziato italiano Alessandro Volta che ebbe il grande merito di inventare una sorgente di differenza di potenziale, di natura chimica, di grande semplicità e affidabilità: la pila di Volta. Si pensi che prima di questa invenzione per fare qualsiasi esperimento di natura elettrica si poteva fare affidamento soltanto su complicati sistemi meccanici di separazione delle cariche. Oltretutto, non essendo l'aria un isolante perfetto, tali d.d.p. avevano il difetto di non durare a lungo.

Riepilogo della Lezione 2

- *Impostazioni assiomatiche;*
- *Bipoli e reti di bipoli;*
- *Leggi di Kirchhoff ai nodi ed alle maglie;*
- *Richiami sul modello dei Campi;*
- *Legge di Coulomb e legge di Cavendish;*
- *Il campo elettrico;*
- *Tensione e differenza di potenziale*

53