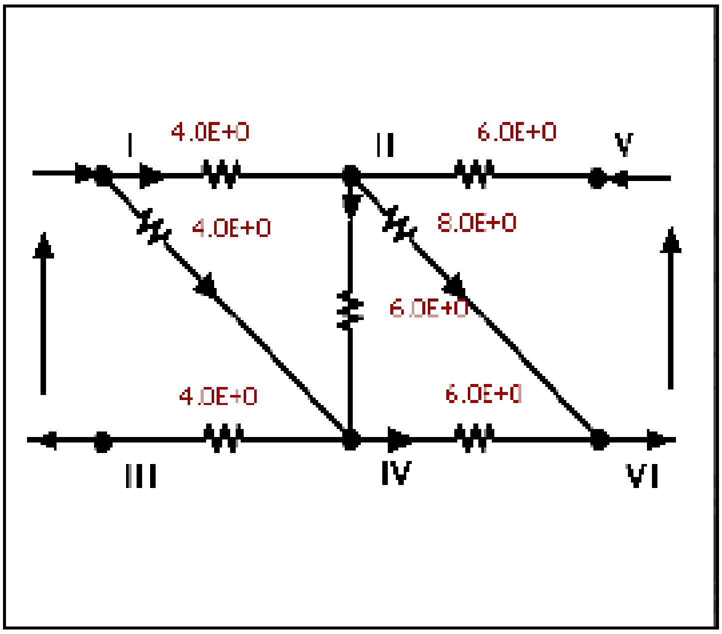
Esercitazione del 17/11/2003

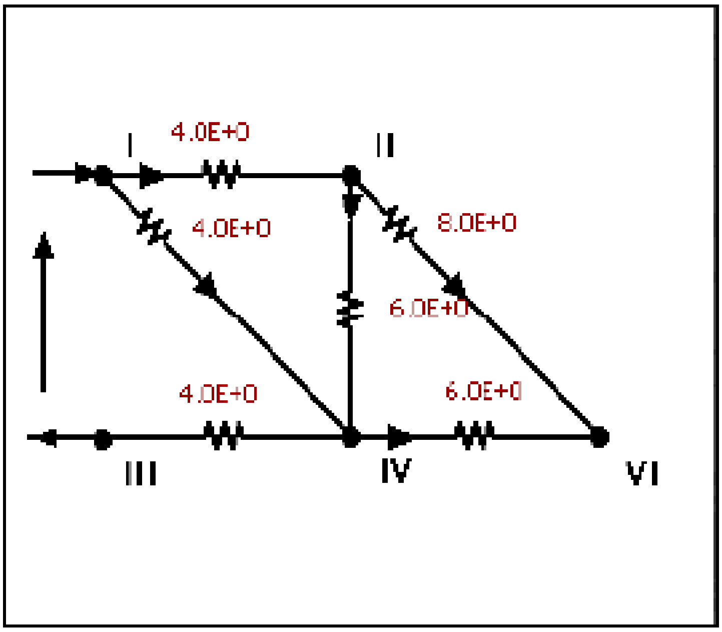
Primo esercizio



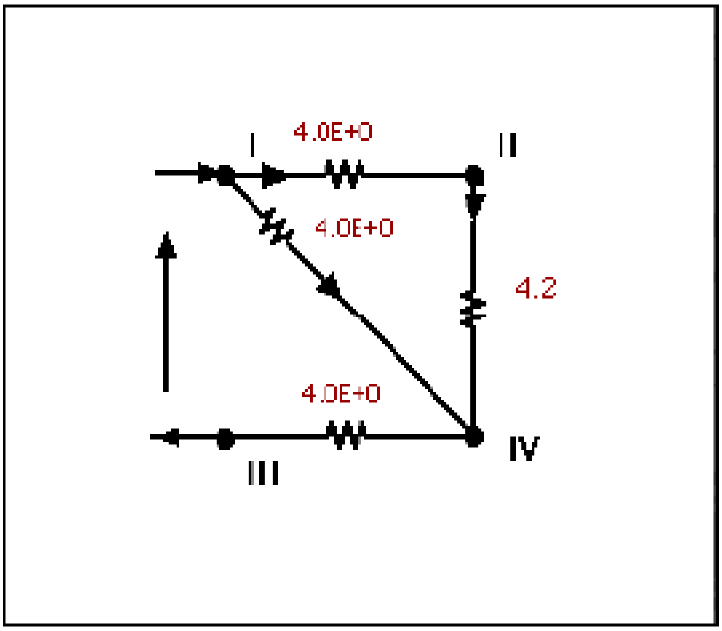
$R_{12} = R_{13} = R_{34} = 4\ \Omega$;
$R_{26} = R_{25} = R_{46} = 6\ \Omega$;
$R_{14} = 8\ \Omega$;

Determinare la matrice delle resistenze per il doppio bipolo di figura.
I morsetti I e III sono quelli d'ingresso ed i morsetti V e VI quelli d'uscita.

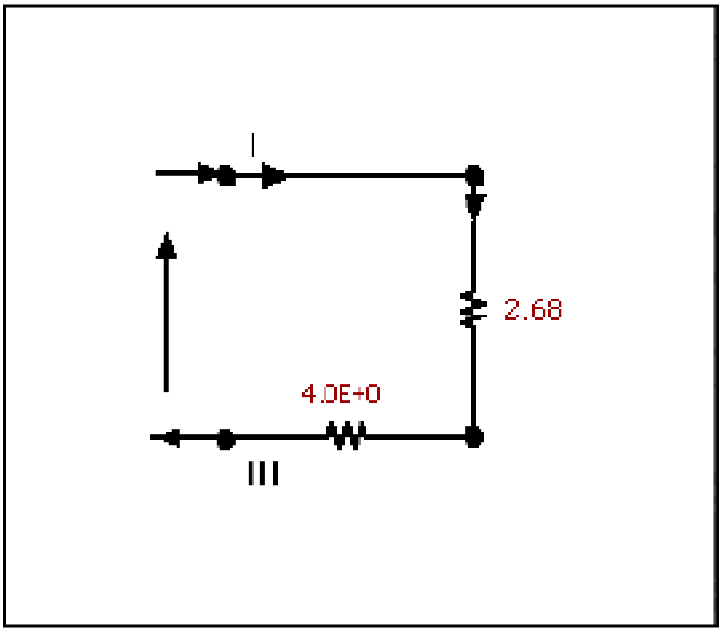
Per il calcolo di R_{11} dobbiamo aprire la porta secondaria e calcolare la resistenza vista dalla porta primaria, secondo lo schema:



In tale schema la resistenza $R_{II,VI}$ e la resistenza $R_{IV,VI}$ sono in serie e la loro serie è in parallelo con $R_{II,IV}$. Sostituendo la resistenza equivalente che è pari a 4.2 Ω, si ottiene il circuito:



In tale schema la resistenza $R_{I,II}$ e la resistenza $R_{II,IV}$ sono in serie e la loro serie è in parallelo con $R_{I,IV}$. Sostituendo la resistenza equivalente che è pari a 2.68 Ω, si ottiene il circuito:

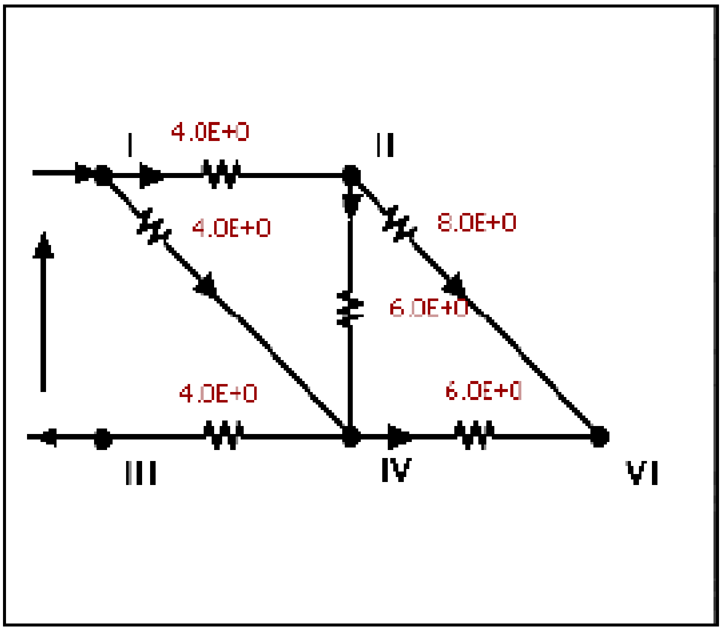


Di cui è facile calcolare la resistenza equivalente.
Si conclude che:

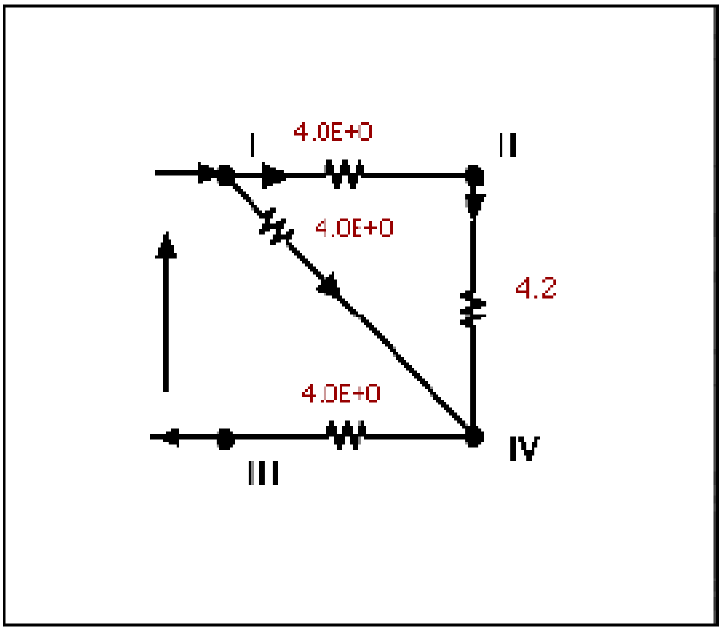
R_{11} = 6.68

Il calcolo di R_{22} si effettua in modo analogo e si ottiene:
R_{11} = 10.33

Per calcolare R_m possiamo aprire la porta 2 (I_2 = 0, quindi!) e calcolare il rapporto tra V_2 e I_1 .



Nel crcuito in figura, $R_{II,VI}$ e $R_{,VI,IV}$ sono in serie e la loro serie è in parallelo con $R_{II,IV}$. Il circuito può quindi essere ridisegnato alla maniera seguente:

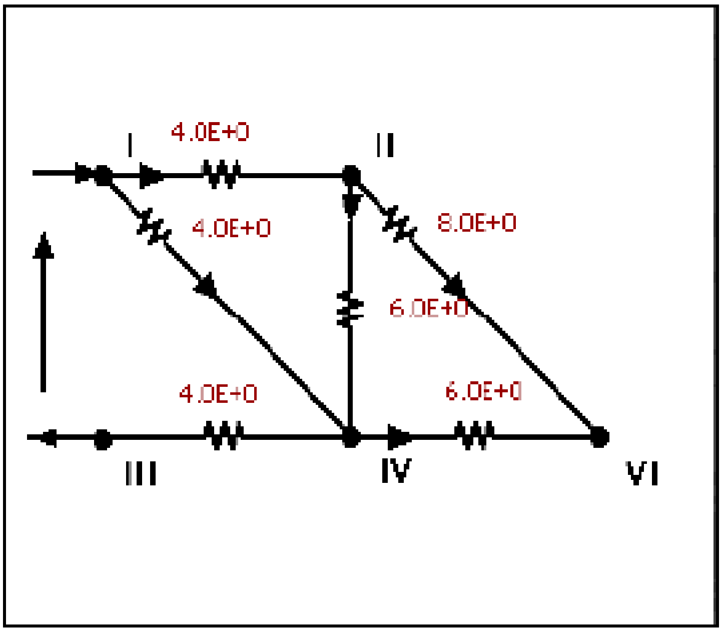


Una corrente I_1 che entra ai morsetti I e III vede $R_{I,IV}$ in parallelo con la serie di $R_{I,II}$ e la nuova resistenza di 4.2 Ω tra i morsetti II e IV. In serie a questo parallelo c'è poi la $R_{III,IV}$ che però a noi in questo caso non interessa perché ci basta calcolare la corrente nella resistenza da 4.2Ω. Tale corrente si ottiene evidentemente con la regola del partitore:

$$I_{II,IV} = I_1 \frac{4}{4+4+4.2} = I_1 \frac{4}{12.2}$$

Essa provoca una caduta di tensione tra i morsetti II e IV di:

$$V_{II,IV} = I_1 \frac{4 \cdot 4.2}{12.2}$$



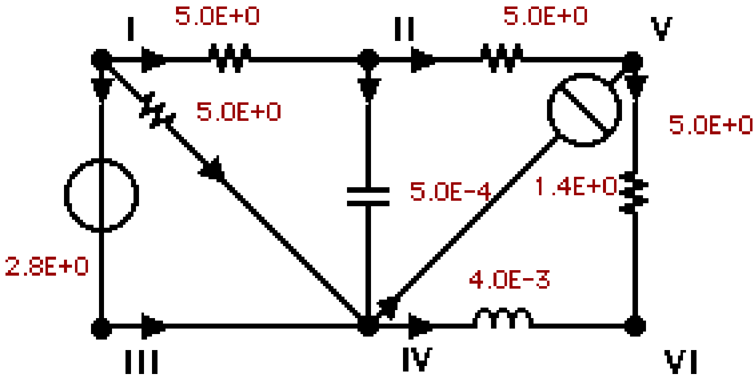
Ritornando al circuito originario si vede che tale tensione va ripartita tra la serie di $R_{II,VI}$ e $R_{VI,IV}$ per avere la tensione sul resistore $R_{II,VI}$. Tale tensione, non essendoci caduta di tensione sulla $R_{II,V}$ perché la corrente I_2 è nulla, coincide con la tensione V_2:

$$V_2 = I_1 \frac{4 \cdot 4.2}{12.2} \frac{8}{14}$$

Se ne deduce che il rapporto tra V_2 ed I_1 è:

R_m= 0.79

Secondo esercizio



L_{46} = 4 mH;
C_{24} = 500 μF;
$R_{12} = R_{14} = R_{25} = R_{56} = 5\ \Omega$;
$e_{13}(t) = 2\sqrt{2}\ \mathrm{sen}(\omega t)$ V;
$i_{45}(t) = \sqrt{2}\ \mathrm{sen}(\omega t+\pi/4)$ V;
ω = 1000 rad/s.

Determinare l'andamento della corrente $i_{24}(t)$ tra i nodi II e IV applicando il teorema del gen. equiv. di corrente e la sovrapposizione degli effetti.

In primo luogo passiamo al dominio dei fasori:

$$e_{1,3} \Rightarrow \bar{E} = 2e^{j\omega t} \Rightarrow 2;$$

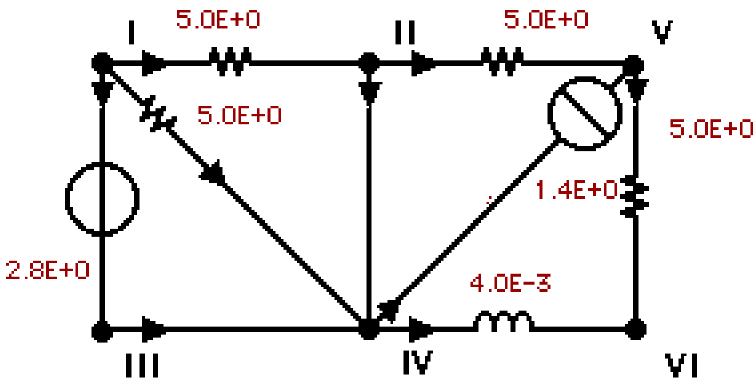
$$i_{4,5} \Rightarrow \bar{I} = e^{j(\omega t+\pi/4)} \Rightarrow e^{j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$R_{1,2} = R_{1,4} = R_{2,5} = R_{5,6} = 5\Omega;$$

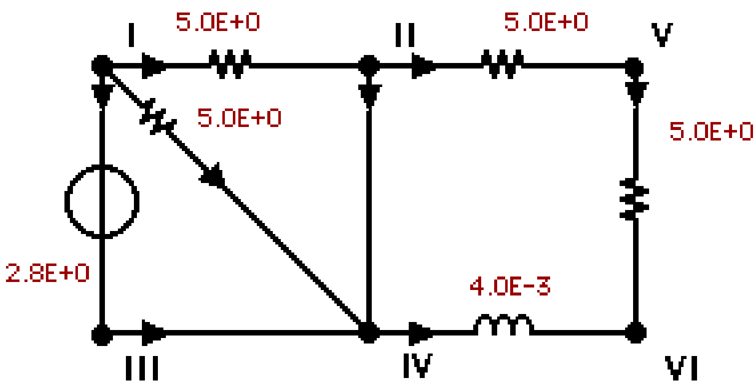
$$C \Rightarrow -j\frac{1}{0.5} = -j2;$$

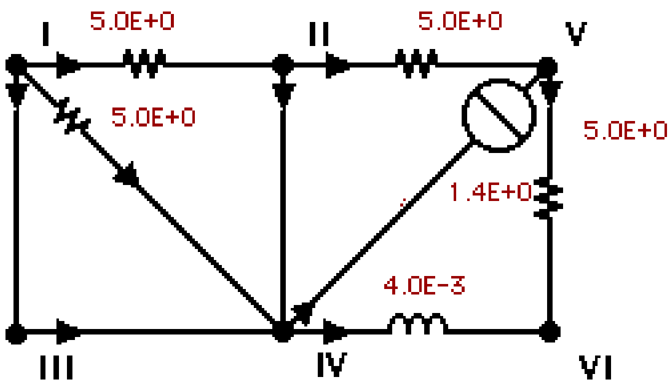
$$L \Rightarrow j4$$

Dovendo calcolare la corrente di corto circuito nel ramo II,IV, bisogna considerare il circuito seguente:



E, applicando la sovrapposizione degli effetti, i due circuiti componenti:





Nel primo, la corrente nel ramo II,IV

$$\overline{I}'_{cc} = \frac{\overline{E}}{R_{I,II}} = 0.4$$

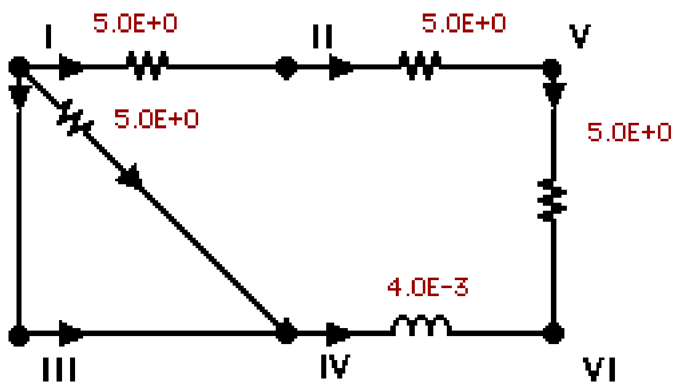
E nel secondo, la corrente è semplicemente la ripartizione della corrente del generatore tra i rami in parallelo $R_{II,V}$ e la serie di $R_{V,VI}$ e $R_{VI,IV}$:

$$\overline{I''_{cc}} = \bar{I}\,\frac{5+j4}{10+j4} = \frac{\left(1/\sqrt{2} + j1/\sqrt{2}\right)(5+j4)}{10+j4} = 0.28 + j0.52 = 0.59e^{j1.07}$$

E quindi:

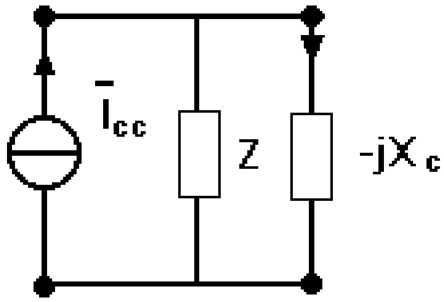
$$\overline{I''_{cc}} = 0.68 + j0.52 = 0.73e^{j0.98}$$

L’impedenza equivalente è invece data dal parallelo tra la serie di $R_{II,V}$, $R_{V,VI}$ e $R_{VI,IV}$ ed il resistore $R_{I,II}$, dato che $R_{I,IV}$ è cortocircuitato – vedi il circuito reso passivo:



$$Z = \frac{(10+j4)5}{15+j4} = \frac{50+j20}{15+j4} = 3.44 + j0.41$$

E quindi la corrente desiderata e data da

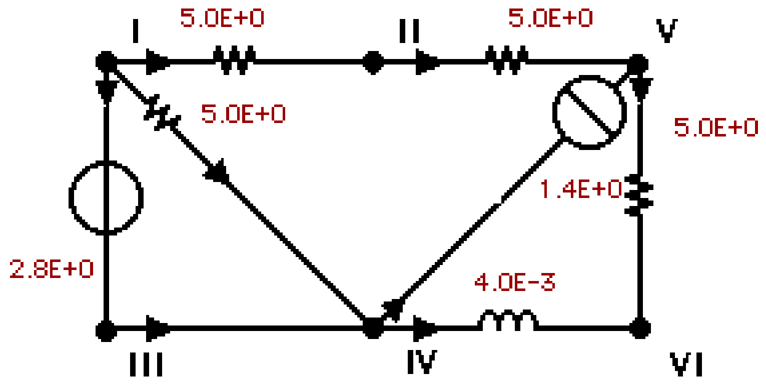


$$\bar{I}_c = \bar{I}_{cc}\,\frac{Z}{Z - jX_c} = (0.68 + j0.52)\,\frac{3.44 - j0.41}{3.44 - j1.59} = 0.28 - j0.73$$

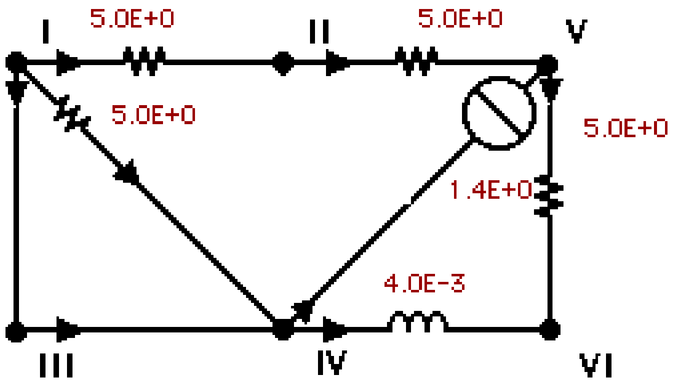
e la corrente nel tempo è espressa da:

$$i_c(t) = 1.10 sen(\omega t + 1.2).$$

Volendo applicare invece il teorema del generatore equivalente di tensione bisogna trovare la tensione a vuoto nel circuito di figura:

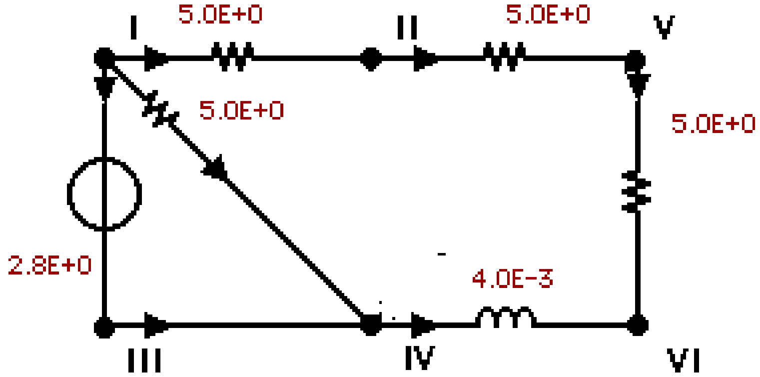


Che, applicando la sovrapposizione degli effetti, si scompone nei due contributi:



$$\overline{E_0'} = \bar{I}\frac{5(5+j4)}{15+j4} = 0.32 + j2.01$$

e



$$\overline{E_0''} = \overline{E}\frac{10 + j4}{15 + j4} = 1.38 + j0.16$$

E quindi la tensione a vuoto è

$$\overline{E}_0 = 1.70 + j2.17$$