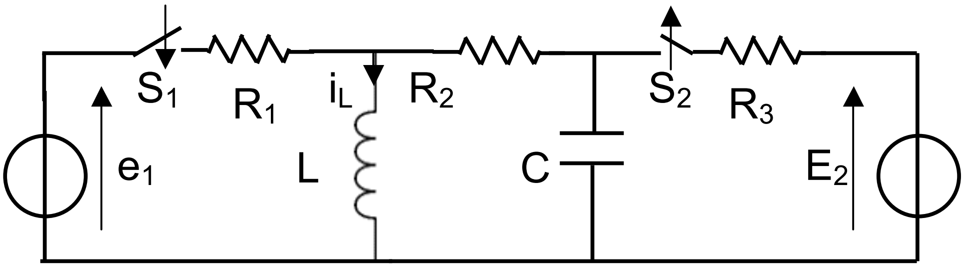
Prova in classe del 2/12/15

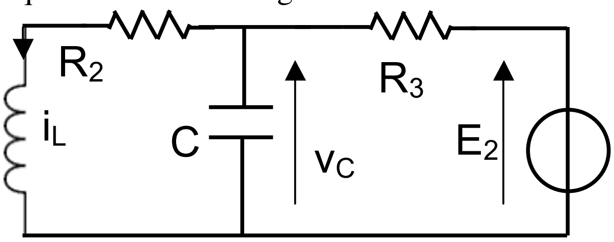
L'interruttore S_2 all'istante t=0 è in apertura mentre l'interruttore S_1 è in chiusura. Determinare l'andamento della corrente i_L nell'induttore L per t≥0.



$R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 7\ \Omega$, C = 10/3 mF, L = 300 mH

$e_1 = 100$ sen(40 t - π/4)V, $E_2 = 20$V.

Il circuito viene modificato all'istante t=0 dai due interruttori. Per t≤0 il circuito è in cc. e si riduce a quello mostrato in figura.

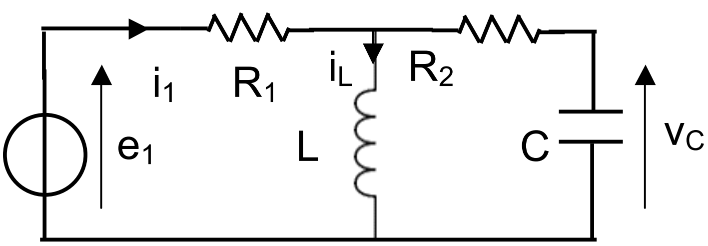


Poiché il condensatore in c.c. equivale ad un circuito aperto, la corrente in L per t≤0 è quella che circola in R_2 e quindi quella erogata dal generatore. In queste condizioni il generatore E_2 vede la serie di R_3 e di R_2 e quindi: $i_L\left(0^-\right) = \dfrac{E_2}{R_3 + R_2} = 2A$.

La tensione sul condensatore per t≤ 0 si ottiene quindi ripartendo la tensione del generatore sulla serie di R_3 e di R_2:

$$v_c\left(0^-\right) = \frac{E_2}{R_3 + R_2} R_2 = 6V\ (0_-)$$

Per t≥0 il circuito è quello mostrato in figura.



Le equazioni che reggono il circuito sono:

$$e_1 = R_1 i_1 + v_L \qquad v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$v_L = R_2 i_C + v_C \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$i_1 = i_C + i_L$$

Eliminando i_1 utilizzando l' equazione ai nodi ed i_C utilizzando la caratteristica del condensatore ed v_L utilizzando quella delll'induttore, si ottiene:

$$e_1 = R_1\left(C\frac{dv_C}{dt} + i_L\right) + L\frac{di_L}{dt}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = R_2 C\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

Eliminando $C\frac{dv_C}{dt}$ dalla seconda e sostituendola nella prima si ottiene:

$$e_1 = R_1\left(\frac{1}{R_2}\left(L\frac{di_L}{dt} - v_C\right) + i_L\right) + L\frac{di_L}{dt}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = R_2 C\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

E ricavando v_C dalla prima:

$$v_C = L\frac{di_L}{dt} - R_2\left(\frac{1}{R_1}\left(e_1 - L\frac{di_L}{dt}\right) - i_L\right) \tag{3}$$

e quindi anche, derivando:

$$\frac{dv_C}{dt} = L\frac{d^2 i_L}{dt^2} - R_2\left(\frac{1}{R_1}\left(\frac{de_1}{dt} - L\frac{d^2 i_L}{dt^2}\right) - \frac{di_L}{dt}\right)$$

Sostituendo ora i valori trovati di v_C e della sua derivata nella seconda delle (2) si ottiene l'equazione cercata:

$$L\frac{di_L}{dt} = R_2 C\left[L\frac{d^2 i_L}{dt^2} - R_2\left(\frac{1}{R_1}\left(\frac{de_1}{dt} - L\frac{d^2 i_L}{dt^2}\right) - \frac{di_L}{dt}\right)\right] + L\frac{di_L}{dt} - R_2\left(\frac{1}{R_1}\left(e_1 - L\frac{di_L}{dt}\right) - i_L\right)$$

Riordinando si ottiene:

$$CL\frac{d^2 i_L}{dt^2}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{di_L}{dt}\left(R_2 C + \frac{L}{R_1}\right) + i_L = \frac{R_2}{R_1} C\frac{de_1}{dt} + \frac{e_1}{R_1}$$

ed in forma canonica:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}\left(\frac{R_e}{L} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}\right) + \frac{i_L}{LC}\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R_1 + R_2}\frac{1}{LC}\left(R_2 C\frac{de_1}{dt} + e_1\right)$$

dove si è posto $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

L'equazione omogenea è:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}\left(\frac{R_e}{L} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}\right) + \frac{i_L}{LC}\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0$$

Ed inserendo i valori numerici:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 40\frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}10^3 i_L = 0$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono, quindi:

$\alpha \pm j\beta = -20 \pm j16,33$

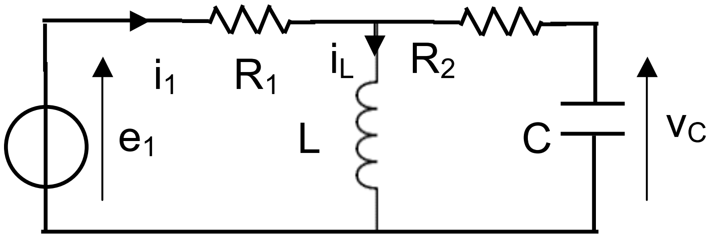
L'integrale generale dell'omogenea ha, dunque, la forma:

$i_{L0}(t) = Ae^{-20t} sen(16,33t - \varphi)$

(Notare la scelta del - φ nell'integrale generale! Qualcuno può aver scelto una forma con +φ, o +γ, o quale sia il simbolo prescelto!)

Per determinare le costanti A e φ abbiamo bisogno anche della soluzione di regime.

Passando al dominio dei fasori si ottiene facilmente l'impedenza vista dal generatore:



$$Z = R_1 + \frac{jX_L(R_2 - jX_C)}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

Con $X_L = 12\Omega$ e $X_C = 7.5\Omega$

La corrente nell'induttore L si ottiene ripartendo nei due rami:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}_1}{Z} \frac{R_2 - jX_C}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

Z = 20.77 -j10.15

Inserendo i valori numerici si ottiene (convenzione del valor efficace);

$$\bar{I}_1 = \frac{50\sqrt{2}(1-j)}{20,77 - j10,50} = \frac{5.77 \text{ -j}1.90}{\sqrt{2}} = 4,08 - j1,34$$

ed

$$\bar{I}_L = \bar{I}_1 \frac{(6 - j7,5)}{6 + j4,50} = -1.55 \text{ -j5.28} = 5,50e^{-j1.86}$$

e quindi:

$$i_{LP}(t) = 5.50\sqrt{2} sen(40t - 1,86)$$

L'integrale generale della equazione completa è dunque:

$$i_L(t) = Ae^{-20t} sen(16,33t - \varphi) + 5.50\sqrt{2} sen(40t - 1,86)$$

Bisogna ora imporre le condizioni iniziali. Poiché la corrente i_L è una variabile di stato, abbiamo già la condizione sul suo valore all'istante $0^{+:}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2A$

Bisogna calcolare la condizione iniziale sulla sua derivata.

Dalla equazione (3), valutata all'istante 0^+:

$$v_C(0^+) = L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} - R_2\left(\frac{1}{R_1}\left(e_1(0^+) - L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+}\right) - i_L(0^+)\right)$$

si ottiene facilmente il valore cercato:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\frac{1}{L}\left(v_C\left(0^+\right) + \frac{R_2}{R_1}e_1\left(0^+\right) - R_2 i_L\left(0^+\right)\right) = -\frac{1}{9}10^3$$

D'altra parte della soluzione trovata si ricava, all'istante 0^+:

$$i_L(0^+) = -Asen(\varphi) - 5.50\sqrt{2}sen(1,86) = 2A$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = +20Asen(\varphi) + 16,33A\cos(\varphi) + 40\left(5.50\sqrt{2}\cos(1,86)\right) = -\frac{1}{9}10^3$$

Imponendo queste condizioni iniziali si trova il sistema:

$$\begin{aligned} &Asen\varphi = -9,45 \\ &20Asen\varphi + 16,33A\cos\varphi = 22,38 \end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} &Asen\varphi = -9,45 \\ &A\cos\varphi = 10,20 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} &\varphi = -0,75 \\ &A = 13,90 \end{aligned}$$

In conclusione, la soluzione cercata è:

$$i_L(t) = 13,90e^{-20t}sen\left(16,33t + 0,75\right) + 5.50\sqrt{2}sen\left(40t - 1,86\right)$$