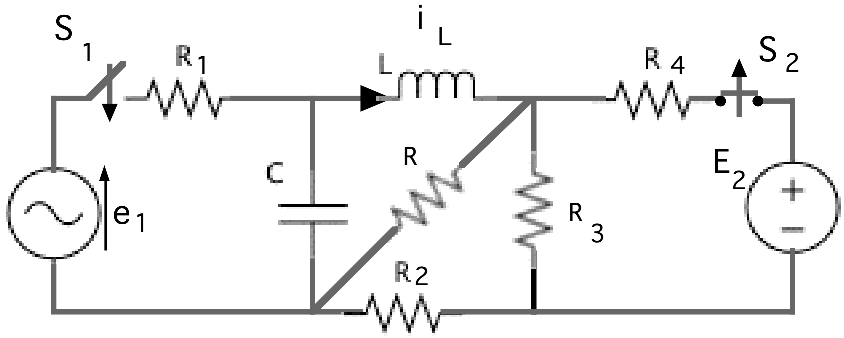
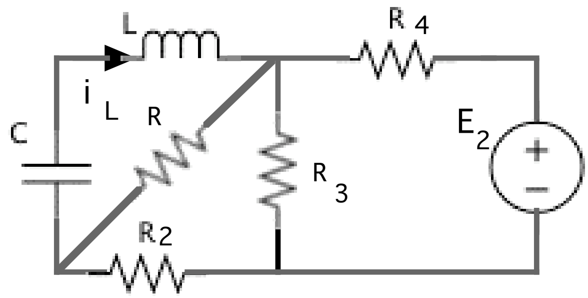
Esercizio

L'interruttore S_2 all'istante t=0 è in apertura mentre l'interruttore S_1 è in chiusura. Determinare l'andamento della corrente nell' induttore per t≥0.



$R_1 = R_2 = 10\ \Omega$;
$R = 90\ \Omega$;
$R_3 = 20\ \Omega$;
$R_4 = 50/3\ \Omega$;
C = 2/3 mF;
L = 150 mH;
$e_1 = 100sen(100t-\pi/4)V$;
$E_2 = 20V$;

Il circuito viene modificato all'istante t=0 dai due interruttori. Per t≤0 il circuito è in cc. e si riduce a quello mostrato in figura.



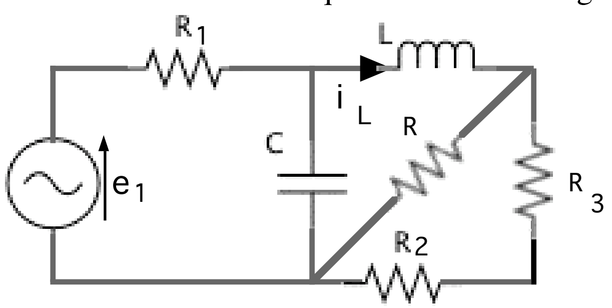
Poiché il condensatore in cc equivale ad un circuito aperto, la corrente L per t≤0 è nulla e quindi
$i_L(0_-) = 0$. In queste condizioni il generatore E_2 vede la serie di R_4 e della resistenza equivalente R_e, che è, a sua volta il parallelo di R_3 con la serie di R ed R_2:

$$R_e = \frac{2000}{120} = \frac{50}{3}\Omega$$

La tensione sul condensatore per t≤0 si ottiene quindi ripartendo la tensione del generatore sulla serie di R_4 e di R_e e, successivamente su quella di R ed R. Si ottiene quindi:

$$v_C(0_-) = (E_2/2)10/9 = 9V.$$

Per t≥0 il circuito è quello mostrato in figura.



Le equazioni che reggono il circuito sono:

$$e_1 = R_1 i_1 + v_C \qquad v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$v_C = L\frac{di_L}{dt} + Ri \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$Ri = (R_3 + R_2)i_2$$

$$i_1 = i_L + i_C$$

$$i_L = i + i_2$$

Eliminando i_1 e i_2 utilizzando le equazioni ai nodi, si ottiene:

$$e_1 = R_1(i_L + i_C) + v_C$$

$$v_C = L\frac{di_L}{dt} + Ri \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$Ri = (R_3 + R_2)(i_L - i)$$

Eliminando ancora i dalla terza ed i_C dalla caratteristica del condensatore, si ottiene:

$$e_1 = R_1(i_L + C\frac{dv_C}{dt}) + v_C$$

$$v_C = L\frac{di_L}{dt} + R\frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)}i_L$$

Nella prima equazione compaiono sia v_C che la sua derivata, che possono entrambe essere ottenute dalla seconda equazione e dalla sua derivata.

$$\frac{dv_C}{dt} = L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R\frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)}\frac{di_L}{dt}$$

In conclusione

$$e_1 = R_1\left[i_L + C(L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R\frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)}\frac{di_L}{dt})\right] + L\frac{di_L}{dt} + R\frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)}i_L$$

E riordinando:

€

$$R_1 CL\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left[R_1 RC\frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} + L\right]\frac{di_L}{dt} + \left(\frac{R(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} + R_1\right)i_L = e_1$$

Si noti che tutti i termini sommati nell'equazione hanno le dimensioni di una tensione, il ché ci conforta sulla correttezza del risultato.

€

Infine, dividendo per il coefficiente della derivata di ordine superiore si ottiene l'equazione in forma canonica:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left[\frac{R}{L}\frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} + \frac{1}{R_1 C}\right]\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{R_1 CL}\left(\frac{R(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} + R_1\right)i_L = \frac{e_1}{R_1 CL}$$

Che porta all'equazione omogenea:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 300\frac{di_L}{dt} + 32500 i_L = 0$$

Le cui radici sono $-150 \pm j100$. L'integrale generale dell'omogenea ha, dunque, la forma:

$$i_{L0}(t) = Ae^{-150t}\left(sen100t + \varphi\right)$$

E' possibile arrivare più rapidamente al risultato apportando preliminarmente una semplificazione al circuito. Quale?

Per calcolare le costanti A e φ abbiamo bisogno ancora della soluzione di regime.

Passando ai fasori si vede immediatamente che la corrente erogata dal generatore e_1 a regime è data da

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z} = \frac{\bar{E}_1}{R_1 + \frac{-jX_C\left(jX_L + R_0\right)}{jX_L + R_0 - jX_C}} \quad con \quad R_0 = \frac{R(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} = \frac{90}{4}$$

E quindi la corrente di regime nell'induttore si ottiene ripartendo nei due rami:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}_1}{R_1 + \dfrac{-jX_C(jX_L + R_0)}{jX_L + R_0 - jX_C}} \frac{-jX_C}{jX_L + R_0 - jX_C}$$

E inserendo i valori numerici:

$$\bar{I}_L = \frac{40}{9\sqrt{2}} \frac{e^{-j3\pi/4}}{\left(\frac{4}{3} - j\right)} = \frac{8}{3\sqrt{2}} e^{-j1.72}$$

e quindi:

$$i_L(t) = 2.66 sen(100t - 1.72)$$

La prima condizione iniziale è direttamente sulla corrente nell'induttore e quindi di facile utilizzo:

$$A sen\varphi - 2.66 sen(1.72) = 0$$

Per determinare la condizione sulla derivata della corrente occorre riandare alle equazioni di Kirchhoff valutate all'istante 0; si ottiene facilmente:

$$v_C(o) = L \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} + R \frac{(R_3 + R_2)}{(R + R_3 + R_2)} i_L(0)$$

Da cui:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = \frac{v_C(o)}{L} = 60$$

E quindi:

$$A sen\varphi = 2.66 sen(1.72)$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = 266\cos(1.72) - 150 A sen\varphi + 100 A\cos\varphi = 60$$

Ricavando Acosφ dalla seconda e tenendo conto della prima si ottiene:

$$A sen\varphi = 2.66 sen(1.72)$$

$$A\cos\varphi = 0.6 - 2.66\cos(1.72) + 3.99 sen(1.72)$$

E quindi:

$$\tan\varphi = \frac{2.66 sen(1.72)}{0.6 - 2.66\cos(1.72) + 3.99 sen(1.72)} = 0.53$$

$$A = \frac{2.66 sen(1.72)}{sen\varphi} = 5.60$$

Per cui la soluzione cercata è:

$$i_L(t) = 5.60 e^{-150t} sen(100t + 0.49) + 2.66 sen(100t - 1.72)$$