



*A chi mi ha sostenuto in questo intenso viaggio.*

*<< "O frati", dissi "che per cento milia  
perigli siete giunti a l'occidente,  
a questa tanto picciola vigilia*

*d'i nostri sensi ch'e' del rimanente  
non vogliate negar l'esperdenza,  
di retro al sol, del mondo senza gente.*

*Considerate la vostra semenza:  
fatti non foste a viver come bruti,  
ma per seguir virtute e canoscenza". >>*

*(D.Alighieri, La Divina Commedia, Inferno Canto XXVI, vv. 112 - 120)*

# Indice

---

INTRODUZIONE.....	5
-------------------	---

## CAPITOLO I : INTRODUZIONE ALLA FUSIONE TERMONUCLEARE CONTROLLATA

I.1-Il principio di fusione.....	7
I.2-Il criterio di Lawson.....	9
I.3-Il confinamento del plasma a regime di fusione .....	11
I.4-Il TOKAMAK.....	12
I.5-Aspetti generici di controllo in un TOKAMAK.....	16
I.6-Presente e futuro: JET, ITER e DEMO .....	17

## CAPITOLO II : IL CONTROLLO DI FORMA

II.1-Il modello MHD.....	21
II.2-Equilibri MHD.....	24
II.3-Perturbazioni non assialsimmetriche.....	28
II.4-Interazione plasma-parete.....	31
II.5-Calcolo delle linee di campo magnetico.....	32

## CAPITOLO III : METODI NUMERICI PER L'INTEGRAZIONE DEL CAMPO

III.1-Analisi dei metodi di integrazione.....	34
III.2-Il metodo di Eulero.....	35
III.3-Il metodo di Runge-Kutta.....	37
III.4-I metodi predictor-corrector.....	40
III.5-Algorithmo per il calcolo della frontiera del plasma.....	41

## CAPITOLO IV : CENNI SUL CALCOLO PARALLELO

IV.1-Il calcolo parallelo.....	47
IV.2-Prestazioni di un algoritmo parallelo.....	49
IV.3-Speedup ed efficienza.....	49
IV.4-La legge di Amdahl.....	50
IV.5-Scalabilità e legge di Gustafson.....	48
IV.6-Prodotto tra matrici.....	53

**CAPITOLO V : APPLICAZIONI E CONCLUSIONI**

V.1-Calcolo della frontiera del plasma con campo assialsimmetrico..... 57

V.2-Calcolo della frontiera del plasma con campo perturbato..... 62

**CONCLUSIONI..... 75**

**RIFERIMENTI..... 76**

# Introduzione

---

A valle dell'incalzante, e forse eccessivo, sviluppo tecnologico che ha investito ormai gran parte della popolazione mondiale, la società internazionale deve fare i conti con la continua ed incessante richiesta di energia, evidenziando come la vita quotidiana sia purtroppo saldamente legata alla distribuzione di materie prime come il gas o il petrolio. La consapevolezza di quanto sia fragile e sottile il confine che divide le nazioni dalla crisi energetica viene confermato da quanto sia sensibilmente influenzato lo sviluppo di una nazione dal prezzo del greggio e da come alcune di esse si diano da fare diplomaticamente e non per ottenere il monopolio o comunque un accesso sicuro e privilegiato a suddette risorse. Un altro aspetto fondamentale da tenere in considerazione è quello di uno sviluppo industriale, fortemente connesso a quello energetico, che possa essere sostenibile per l'ambiente e che miri a rispettare la terra su cui viviamo evitando di incrementare problemi che spesso passano inosservati come l'effetto serra e il riscaldamento globale. Molte sono state le soluzioni proposte, alle quali però le nazioni più industrializzate stentano ancora ad aderire, a partire da quelle del protocollo di Kyoto ad esempio. Per far fronte a queste problematiche, la comunità scientifica internazionale ha rivolto la propria attenzione alla problematica delle fonti energetiche rinnovabili, e dalla ricerca di fonti energetiche eterne e non inquinanti in grado di soddisfare al fabbisogno energetico mondiale nasce lo studio sulla fusione termonucleare controllata. Il processo di fusione nucleare, a dispetto della temuta fissione, è un procedimento pulito e sicuro in grado di fornire enormi quantità di energia. Sebbene nelle stelle il processo di fusione nucleare sia naturale, sulla terra è necessario riprodurlo in opportune macchine che creano le condizioni favorevoli all'innesco della fusione. Il TOKAMAK è la più promettente macchina a confinamento magnetico utilizzabile nell'ambito della fusione termonucleare controllata. Il plasma al suo interno, essendo costituito da particelle cariche, è sensibile alla presenza di campi magnetici, che vengono utilizzati per confinarlo in una determinata regione dello spazio, evitando la collisione con le pareti della macchina stessa, scongiurando quindi una serie di effetti indesiderati che comprometterebbero sicuramente l'innesco della reazione di fusione. Nel caso ideale la geometria del campo magnetico può essere descritta

analiticamente sfruttando i modelli messi a disposizione della magnetoidrodinamica (MHD), nata sostanzialmente dall'unione delle equazioni di Maxwell nel caso quasi stazionario e da quella della termo-fluido-dinamica. Nelle ipotesi di modello MHD ideale il campo magnetico è assialsimmetrico rispetto all'asse del TOKAMAK ed è possibile risalire alla distribuzione delle linee di campo grazie all'equazione di Grad-Shafranov. La conoscenza del contorno del plasma (LCMS) in una sola sezione poloidale è quindi sufficiente per risalire all'intera frontiera. Il modello MHD ideale si allontana comunque significativamente dalla realtà, infatti esistono diversi fattori in un TOKAMAK che possono generare significative perturbazioni del campo magnetico che minano la stabilità del plasma stesso. L'individuazione della frontiera del plasma diventa quindi più complessa, ma nello stesso tempo di fondamentale importanza ai fini del controllo automatico della posizione del plasma. In presenza di sorgenti perturbanti, il campo magnetico all'interno della macchine perde la proprietà di assisimmetria, e di conseguenza risulta necessario calcolare la frontiera in più sezioni poloidali per ottenere un'idea di dove il plasma sarà allocato all'interno del TOKAMAK. Il calcolo della frontiera del plasma sfrutta la ricostruzione delle linee di campo magnetico, ottenute integrando numericamente in MATLAB il campo a partire da opportuni punti dello spazio. Nella sua versione seriale, l'algoritmo per il tracciamento della LCMS richiede tempi di calcolo molto elevati, pertanto ripetere la procedura su un numero di sezioni poloidali sufficiente comporterebbe un onere computazionale estremamente costoso. Tramite le tecniche di parallelizzazione messe a disposizione in ambiente MATLAB è stato possibile accelerare sensibilmente il calcolo della frontiera, così da consentire un'attenta e precisa analisi del contorno del plasma in geometria tridimensionale anche in presenza di sorgenti che perturbano il campo e lo deviano dall'assialsimmetria.

# Capitolo I

---

## Introduzione alla fusione termonucleare controllata

*Il presente capitolo espone in maniera piuttosto descrittiva il principio fisico che è alla base del processo di fusione nucleare controllata, focalizzando l'attenzione sulle problematiche che si incontrano nella riproduzione di questo fenomeno che avviene comunemente nelle stelle e illustrando le soluzioni tecnologiche adottate per riuscire a ricavare energia da quest'ultimo. Per una comprensione approfondita in merito all'argomento si rimanda ai testi di letteratura specializzata.*

### I.1 Il principio di fusione

Nelle moderne centrali nucleari il principio fisico che viene utilizzato per la produzione di energia è quello della *fissione nucleare*: un atomo di uranio 235 viene scisso in due atomi di dimensioni minori a seguito dell'impatto con un neutrone. Dalla divisione, oltre ai due atomi, vengono liberati energia e neutroni che collidendo con altri atomi di uranio 235 provocano la nota reazione a catena. Nella fusione nucleare invece i nuclei di due elementi leggeri si uniscono per formare nuclei più pesanti, ad esempio il deuterio e il trizio si fondono producendo un atomo di elio più un neutrone e liberando molta energia.

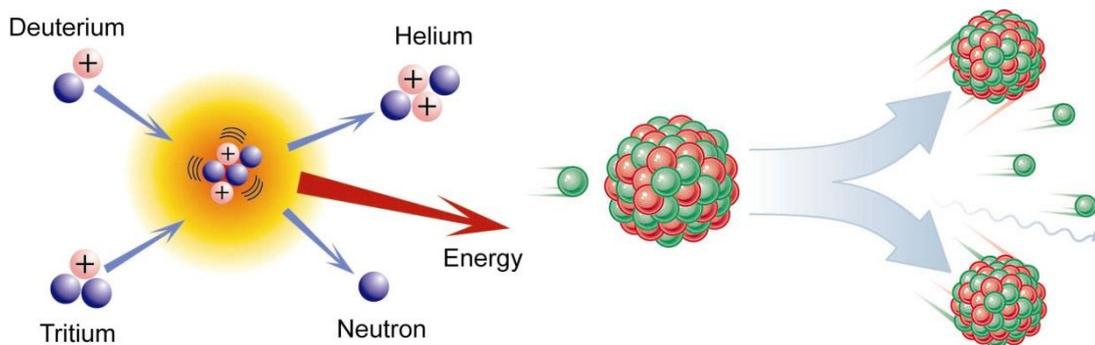


Figura 1 - Principio di fusione (a sinistra) e di fissione nucleare (a destra).

L'energia liberata in entrambe le reazioni deriva dalla differenza di massa tra la somma dei reagenti e i prodotti della reazione, in accordo con la nota legge di Einstein:

$$E = \Delta mc^2 \quad (1.1)$$

Nel Sole la reazione di fusione avviene a 15 milioni di gradi, temperatura alla quale la materia si trova sotto forma di *plasma*, indicato come quarto stato della materia. Il plasma è un gas completamente ionizzato nel quale gli atomi sono scissi e gli elettroni e i protoni sono liberi di muoversi indipendentemente gli uni dagli altri. La carica elettrica resta globalmente nulla ma le particelle cariche libere fanno sì che il plasma sia un buon conduttore di elettricità e che risponda ai campi elettromagnetici che interagiscono con esso. In natura esistono svariati tipi di plasma che si differenziano per la temperatura e la densità e trovano diverse applicazioni (ad esempio lampade o televisori al plasma). I plasmi per la fusione termonucleare controllata sono caratterizzati da elevate densità e temperatura: in un reattore per la fusione termonucleare le temperature in gioco sono dell'ordine di 100 milioni di gradi.

Per realizzare la fusione degli atomi di Deuterio e Trizio in atomi di Elio è indispensabile legare assieme i rispettivi nuclei. Poiché i nuclei hanno entrambi carica positiva, deve essere compiuto un lavoro per vincere le forze di natura elettrostatica. Sebbene per distanze infinitesime le forze di repulsione diventino

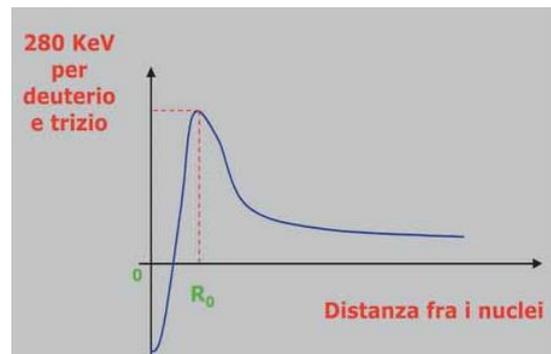


Figura 2 - Barriera di Coulomb

infinite e di conseguenza infinita l'energia necessaria a vincerle, è sperimentalmente provato che per distanze minori di  $d = 5 \cdot 10^{-15} m$  la forza di Coulomb è vinta dalle forze nucleari di attrazione che permettono di mantenere coesi i protoni in un nucleo atomico. Alla distanza  $R_0 = d$ , assunta come distanza limite, si dice che è presente la *barriera di Coulomb*, cioè il valore di energia cinetica che i reagenti devono possedere affinché collidendo possano fondersi in un nucleo solo.

Esistono diverse reazioni di fusione che si differenziano per il tipo di reagenti, per l'energia richiesta e per quella liberata:

$\text{H}_1^2 + \text{H}_1^3 \rightarrow \text{He}_2^4 + \text{n} + 17.6 \text{ MeV}$
$\text{H}_1^2 + \text{H}_1^2 \rightarrow \text{He}_1^3 + \text{He}_1^1 + 4.03 \text{ MeV}$
$\text{H}_1^2 + \text{H}_1^2 \rightarrow \text{He}_2^3 + \text{n} + 3.27 \text{ MeV}$
$\text{H}_1^2 + \text{He}_2^3 \rightarrow \text{He}_2^4 + \text{H}_1^1 + 18.34 \text{ MeV}$
$\text{H}_1^1 + \text{H}_1^1 \rightarrow \text{H}_1^2 + e^+ + 37 \text{ MeV}$

Figura 3 - Possibili reazioni di fusione

Tra le varie reazioni possibili, la più favorevole è quella che usa come combustibile il deuterio e il trizio ed è pertanto destinata ad essere utilizzata nella prima generazione di macchine per la fusione nucleare; le reazioni che si basano sul solo deuterio sono invece più complesse e saranno utilizzate solamente in futuro. Quella invece che sfrutta l'Elio 3 è penalizzata dall'estrema rarità di quest'ultimo elemento sulla terra. Possiamo confrontare dal punto di vista probabilistico le varie formulazioni a partire dal diagramma in figura 4, che riporta le distribuzioni di probabilità delle varie reazioni in funzione della temperatura. Osserviamo che tali distribuzioni sono di tipo maxwelliano e che a parità di energia fornita la più probabile è quella Deuterio-Trizio.

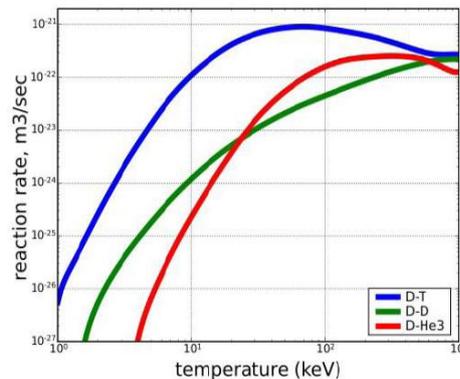


Figura 4 - Diagramma della probabilità di reazione per diversi tipi di reagenti

## I.2 Il criterio di Lawson

Come già anticipato, in un reattore per la fusione il plasma raggiunge temperature dell'ordine dei 100 milioni di gradi e deve essere mantenuto tale per il maggior tempo

possibile. La qualità dell'isolamento termico del reattore consentirà di mantenere il plasma alle temperature favorevoli al verificarsi delle reazioni; la capacità di conservare il calore come all'interno di un termos è detta *confinamento energetico*. Poiché le reazioni di fusione si basano sostanzialmente sulla collisione di atomi di deuterio e trizio, è intuibile che la probabilità che si inneschi la reazione dipende anche dalla densità dei reagenti nel plasma; la sola temperatura quindi non basta a garantire che il processo di fusione abbia effettivamente luogo. Risulta inoltre indispensabile che le reazioni avvengano in un certo tempo, che corrisponde al tempo che impiega l'energia prodotta per poter essere ceduta all'esterno. In questo contesto, il *criterio di Lawson*, in funzione dei tre parametri  $n$ ,  $T$ ,  $\tau_E$  (rispettivamente *densità*, *temperatura* e *tempo di confinamento*) stabilisce la condizione per la quale l'energia prodotta dal processo di fusione supera quella impiegata per innescare la fusione stessa. Per un plasma deuterio-trizio il criterio di Lawson prescrive che:

$$nT\tau_E \geq 10^{21} \text{keVm}^{-3}\text{s} \quad (1.2)$$

Allo stato attuale il criterio di Lawson assume un valore puramente storico poiché nei moderni reattori si utilizza invece il criterio di ignizione che prevede:

$$nT\tau_E \geq 3 \cdot 10^{21} \text{keVm}^{-3}\text{s} \quad (1.3)$$

Indichiamo come *fattore di amplificazione della potenza* il rapporto tra la potenza ricavata dalla fusione nucleare e quella spesa per produrla. Nella letteratura tecnica si parla di *pareggio* o *breakeven* quando la potenza erogata dal reattore e quella immessa al suo interno si eguagliano, quando cioè il fattore di amplificazione della potenza assume valore unitario. Si dice *ignizione* la condizione per la quale il fattore di amplificazione della potenza assume valore infinito, nella pratica quando la potenza prodotta è maggiore (di almeno un ordine di grandezza) della potenza spesa per mantenere il plasma alla temperatura termonucleare. Le definizioni di cui sopra si riferiscono ovviamente ad una condizione di regime per cui non sono portati in conto i transitori iniziali e quindi la potenza impiegata per portare il plasma alla temperatura opportuna. Per tenere in conto questi fattori occorrerebbe fare riferimento all'intero arco temporale durante il quale si sviluppa il processo di fusione, dunque bisognerebbe far riferimento al *fattore di amplificazione dell'energia* piuttosto che a quello di potenza.

### I.3 Il confinamento del Plasma a regime di fusione

Confinare il plasma all'interno di un reattore significa fare in modo da evitare che questo si espanda liberamente all'interno della camera da vuoto, andando ad impattare contro le pareti solide danneggiandole a causa dell'elevata temperatura a cui esso viene portato. Esistono diverse modalità di confinamento, alcune tecnologicamente realizzabili, altre invece naturali ma non attuabili all'interno di un reattore.

Nelle stelle, dove la reazione di fusione avviene continuamente, il confinamento del plasma avviene grazie alle forze di interazione gravitazionale che la stella esplica con il plasma stesso: si parla in questo caso di *confinamento gravitazionale*. Risulta allora evidente come una soluzione di questo genere non sia per niente perseguibile, pertanto sono state individuate altre due tecniche tecnologicamente realizzabili: il *confinamento magnetico* e il *confinamento inerziale*.

Il confinamento inerziale (fusione inerziale) si ottiene comprimendo una pasticca di combustibile, ad esempio deuterio e trizio, con raggi laser ad alta energia o con fasci di particelle cariche per tempi molto brevi (ordine dei ns). Questo bombardamento provoca l'asportazione dello strato superficiale che per reazione di compressione e riscaldamento del combustibile si trasforma in un plasma ad altissima densità, sino a 100 volte quella dei solidi, e si porta alla temperatura necessaria per sostenere la reazione. Questo principio è lo stesso utilizzato per la bomba ad idrogeno e pertanto, essendo coperto da segreto militare, non si conoscono gli sviluppi a riguardo.

Il confinamento magnetico rappresenta la tecnica più promettente ed è quella adottata nei moderni reattori. Il plasma, essendo un gas ionizzato, è sensibile alla presenza di campi magnetici che vengono sfruttati per confinarlo e mantenerlo coeso all'interno della camera da vuoto. Questa procedura consente di confinare il plasma all'interno del reattore anche per tempi abbastanza lunghi. Sostanzialmente si sfrutta il fatto che le particelle cariche immerse in un campo magnetico percorrono traiettorie che dipendono dalle linee del campo stesso. Chiudendo allora le linee di campo su sé stesse ( in una macchina toroidale) o intensificando il campo alle estremità (in una macchina lineare) è possibile intrappolare la maggior parte delle particelle e quindi confinare il plasma. Fra

le varie configurazioni magnetiche toroidali, il reattore più promettente nell'ambito della fusione termonucleare è il TOKAMAK.

## I.4 II TOKAMAK

Il TOKAMAK, acronimo di “TOroidal KAmara MAgnitic Katushka” (*camera toroidale a bobine magnetiche*), è una macchina toroidale per la fusione a confinamento magnetico ideata nel 1950 all'Istituto di Fisica Atomica di Mosca da A.Sakharov e I. Tamm.

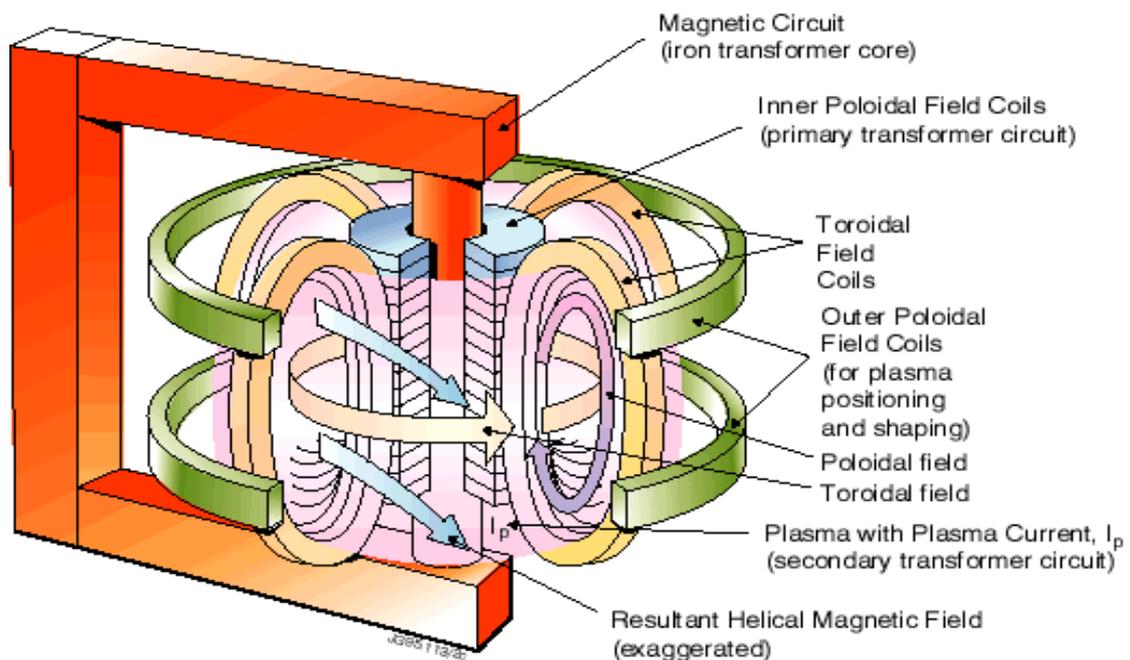
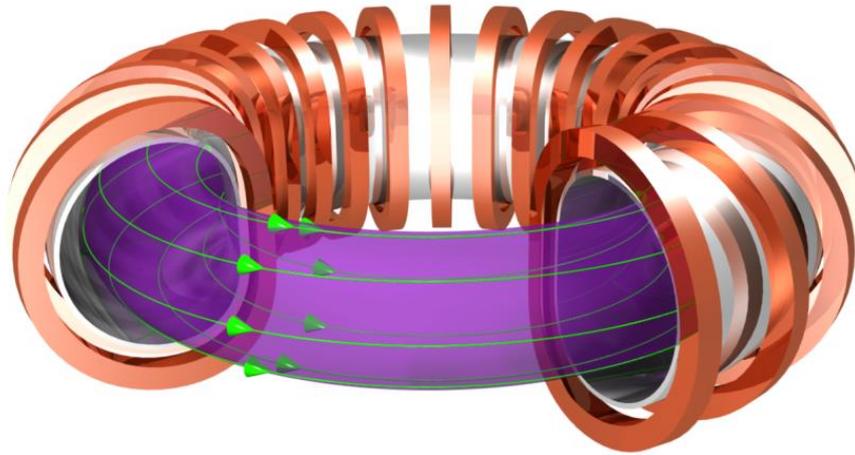


Figura 5 - Schema di principio di un Tokamak

Sebbene si tratti di una macchina estremamente complessa, dal punto di vista magnetico possiamo schematizzarla come mostrato in figura 5: una serie di avvolgimenti disposti lungo il toro e percorsi da corrente elettrica di opportuna intensità genera all'interno della macchina un campo magnetico a distribuzione circolare noto come *campo toroidale*. Il numero di magneti toroidali varia a seconda della grandezza della macchina. In generale esso è compreso tra 12 e 36 e da esso dipende la deviazione del campo dall'assissimmetria, nota come *ripple*, che per motivi di stabilità deve essere tenuta bassa. L'espressione del campo toroidale può essere banalmente ricavata a partire dalla legge della circuitazione del campo magnetico:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni \rightarrow \mathbf{B}_{tor} = \mu_0 \frac{Ni}{2\pi r} \quad (1.4)$$

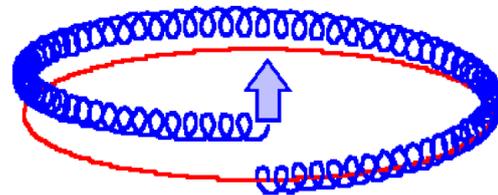


**Figura 6 - Campo di Induzione prodotto dagli avvolgimenti toroidali**

Nella realtà la disomogeneità del campo magnetico toroidale, dovuta a diversi fattori tra cui la non perfetta assialsimmetria della macchina stessa, producono dei moti di deriva delle particelle che spiraleggiano intorno alle linee di campo con la frequenza di ciclotrone. Suddette particelle andranno dunque ad impattare contro la camera da vuoto con una serie di conseguenze negative quali il raffreddamento del plasma, il riscaldamento delle pareti della macchina e l'introduzione di impurità nel plasma stesso. I moti di deriva a cui si assiste possono essere di tre tipi: il primo moto di deriva è dovuto banalmente alla forza centrifuga; il secondo moto di deriva è legato invece alla non uniformità del campo magnetico toroidale che decade come  $1/r$  all'allontanarsi dall'asse di simmetria del toro. Le cariche che si muovono lungo le linee di campo, seguono traiettorie elicoidali di raggio non

costante e dipendente dall'intensità del campo (*raggio di Larmor*  $\rho = \frac{m v_{\perp}}{qB}$ ).

Questa disuniformità di campo tenderà a separare le cariche elettriche che si disporranno nella parte superiore o

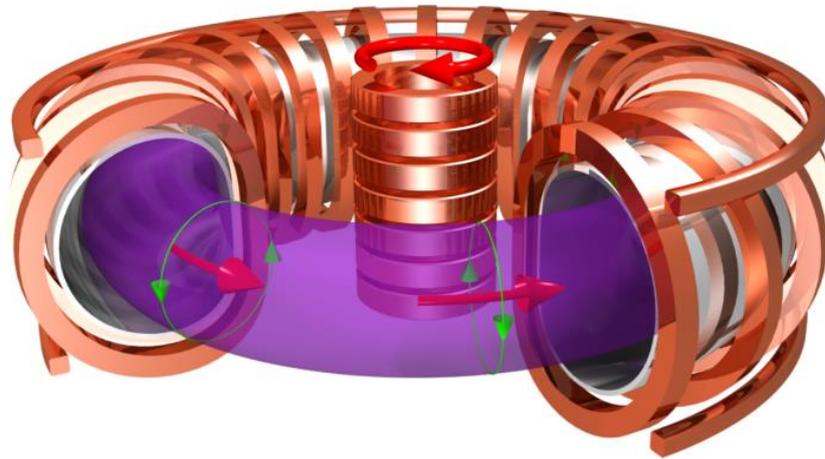


**Figura 7 - Deriva delle particelle**

inferiore del toro a seconda del segno di carica, creando così un campo elettrostatico il cui effetto complessivo è quello di far driftare tutte le cariche, indipendentemente dal loro segno, verso la parte inferiore o superiore del Tokamak. Infine un ulteriore moto di deriva delle particelle di plasma è dovuto dalla curvatura delle linee di campo

magnetico. La soluzione a questo problema consiste nell'incurvare le linee di campo toroidale ad elica con la sovrapposizione di un *campo magnetico poloidale* sostenuto da una corrente indotta nel plasma  $I_{pol}$  per effetto trasformatore. Un solenoide disposto sull'asse centrale del toro e avvolto intorno ad un nucleo di materiale ferromagnetico svolge il ruolo di circuito primario di un trasformatore, di cui il plasma è il secondario. La forza elettromotrice indotta dalla variazione del flusso trasformatore innesca all'interno del plasma una circolazione di corrente che produce il campo magnetico poloidale.

$$B_{pol} = \mu_0 \frac{I_{pol}}{2\pi r} \quad (1.5)$$

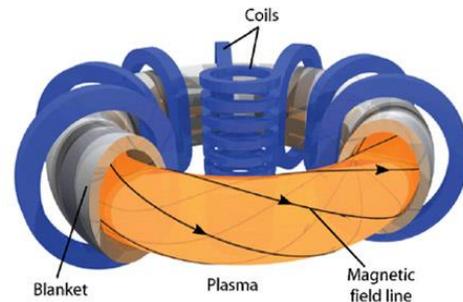


**Figura 8 - Campo di Induzione prodotto dalla corrente poloidale**

La corrente di plasma viene sfruttata anche per riscaldare il gas iniettato nella fase di avviamento all'interno della macchina. Sebbene la resistività del plasma sia molto bassa, esse è comunque maggiore di zero e pertanto il passaggio di una corrente di elevata intensità nell'anello di plasma provoca un riscaldamento per effetto Joule in grado di portare le temperature ad elevati valori. Per avere l'induzione di corrente nel plasma il TOKAMAK deve funzionare ad impulsi, infatti il solenoide centrale (primario del trasformatore) è interessato da una corrente a derivata non nulla, solitamente con andamento a rampa, che deve avere una durata piuttosto limitata. Questa tecnica di riscaldamento tuttavia non è sufficiente al raggiungimento delle temperature di fusione e di conseguenza vengono utilizzate tecniche di riscaldamento additivo come il

bombardamento neutronico o l'esposizione del plasma ad onde elettromagnetiche ad elevata frequenza tramite delle antenne a radiofrequenza.

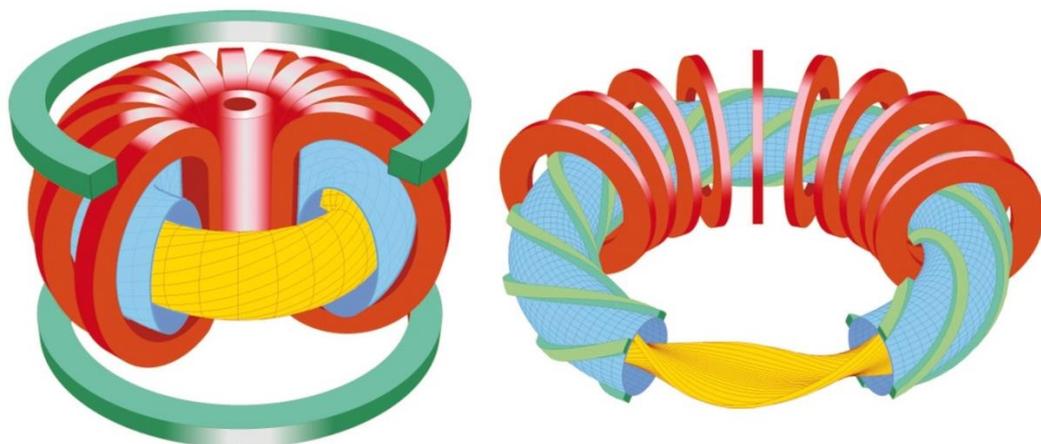
Un terzo avvolgimento disposto esternamente al toro consente di controllare la posizione del plasma all'interno nella macchina (*Outer Poloidal Field Coils* in figura 5). Quest'ulteriore avvolgimento ha anche il compito di evitare che le linee di campo magnetico prodotte dal solenoide centrale si concatenino con il toro causando circolazione di correnti indesiderate.



**Figura 9 - Campo risultante**

Il campo magnetico poloidale sovrapposto a quello toroidale fa sì che le particelle spiraleggino intorno ad una traiettoria anch'essa a spirale in modo tale che esse si trovino alternativamente nella zona con campo magnetico più intenso e meno intenso. In questo modo si riesce a compensare per un tempo maggiore i moti di deriva delle cariche e assicurare una configurazione del plasma più stabile.

Esiste un ulteriore tipo di macchina per la fusione a confinamento magnetico, nota come *Stellarator*. Il vantaggio di questo tipo di macchina è che vengono utilizzati, unitamente agli ordinari solenoidi toroidali, degli avvolgimenti elicoidali lungo il toro che evitano la presenza di elevate correnti di plasma, che invece sono necessarie nel Tokamak. Gli svantaggi di questa macchina sono la mancanza di assialsimmetria e il profilo particolarmente audace della camera da vuoto.



**Figura 10 - Configurazione Tokamak - Stellarator**

## I.5 Aspetti generici di controllo in un TOKAMAK

Affinché un TOKAMAK funzioni correttamente è necessario predisporre sistemi di controllo automatico che si occupino del monitoraggio e dell'intervento di una moltitudine di aspetti che riguardano sia la strumentazione sia una serie di fenomeni che interessano più da vicino il processo di fusione stessa. Il più importante, come precedentemente accennato e come si avrà modo di capire in seguito, è il controllo della posizione e della forma del plasma all'interno della camera da vuoto, da cui dipende l'incolumità dell'impianto e l'efficacia del confinamento energetico. Come è noto dalla teoria del controllo, affinché un regolatore possa intervenire tempestivamente, è necessaria una misura in tempo reale della grandezza da controllare. Questo presupposto tuttavia difficilmente può essere soddisfatto a causa delle elevate temperature e pressioni che hanno luogo all'interno del reattore e per questo motivo non è quasi mai possibile una misurazione diretta delle grandezze di interesse. Nelle applicazioni moderne allora si suole risalire alla posizione del plasma nel TOKAMAK a partire dalla conoscenza di un numero finito di campioni del flusso magnetico e della corrente negli avvolgimenti di eccitazione che, grazie alle equazioni della magnetoidrodinamica consentono di stimare il campo magnetico e la corrente poloidale. La risoluzione numerica delle equazioni differenziale che permette di ottenere tutto questo può avvenire a mezzo di una serie di algoritmi, alcuni che si prestano all'utilizzo in applicazioni real-time ma che peccano in accuratezza, altri invece che richiedono risorse e tempi di calcolo tali da non adattarsi al controllo in tempo reale, ma che riescono a ricostruire la frontiera del plasma in maniera piuttosto accurata e che saranno oggetto di analisi in questa tesi. Genericamente in un TOKAMAK vengono stimate le posizioni del plasma solamente in 4 punti particolari: il più basso della sezione poloidale, il più alto, quello più interno e quello più esterno. Noti tali punti e introdotti i concetti di *triangolarità* ed *elongazione*, è possibile risalire ad una stima della frontiera del plasma. In un TOKAMAK il plasma può assumere due configurazioni: quella *limiter* e quella *divertor*. Nella configurazione limiter (figura 11 a sinistra), il plasma assume una configurazione toroidale con sezione ellittica e perciò la triangolarità, che indica la somiglianza della sezione del plasma con un triangolo, perde di significato. Per questi impianti si utilizza allora l'elongazione, definita come il rapporto tra il semiasse verticale e quello orizzontale dell'ellisse. Nella configurazione divertor, utilizzata nei

moderi impianti, la separatrice si interseca con sé stessa in un punto di nullo noto come "punto a X" (*x-point*). La parte della separatrice sottostante al punto di nullo è comunemente indicato come "baffo" e serve anche ad indirizzare le particelle di elio prodotte dalla fusione fuori la camera da vuoto, attraverso una parte sottostante nota appunto come zona del divertore.

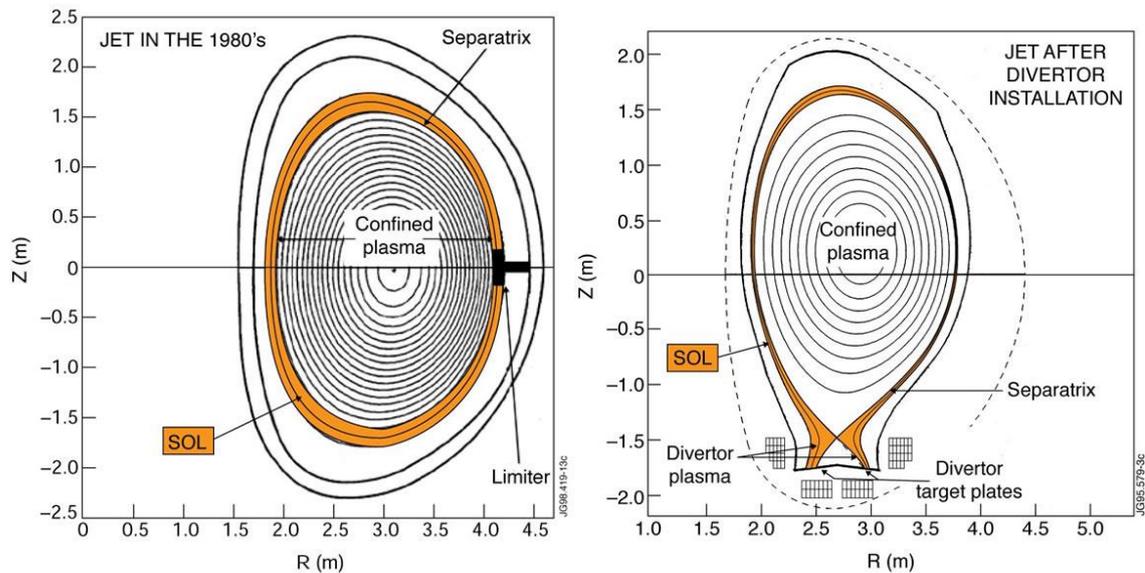


Figura 11 - Configurazione del plasma limiter e divertor in JET

## I.6 Presente e futuro: JET, ITER e DEMO

Come accennato nel paragrafo precedente, i TOKAMAK sono stati ideati intorno agli anni '50 in Russia, ma i primi risultati significativi sono stati ottenuti intorno agli anni '70. Da allora diverse soluzioni tecnologiche sono state proposte e ciascuna di esse ha contribuito in maniera sostanziale nell'ambito della ricerca sulla fusione termonucleare controllata. Esistono una serie di TOKAMAK attualmente funzionanti in Europa ( *FTU* in Italia, *Tore Supra* in

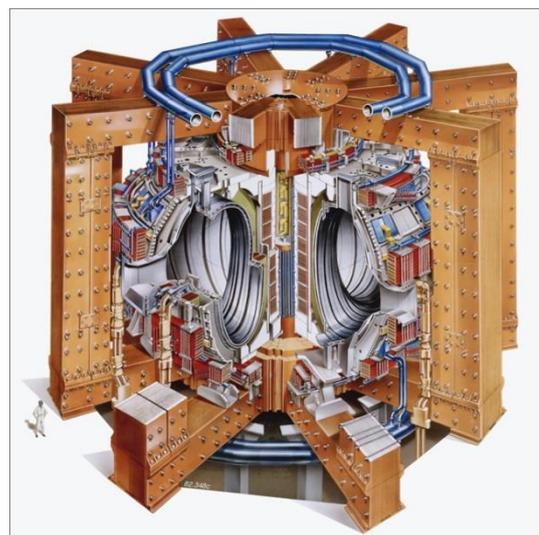


Figura 12 - Il JET

Francia, TCV in Svizzera etc. ), altri sono in via di progettazione e/o costruzione.

Sito in Culham (UK), il **JET** (*Joint European Torus*) è il più grande reattore attualmente esistente e l'unico funzionante con combustibili Deuterio-Trizio; essendo quest'ultimo radioattivo, esso è equipaggiato con strutture robotiche per interventi in remoto sulla macchina. Il JET, ultimato nel 1983, è stato progettato e realizzato per dimostrare la fattibilità della fusione termonucleare controllata, focalizzando inoltre l'attenzione sui seguenti temi:

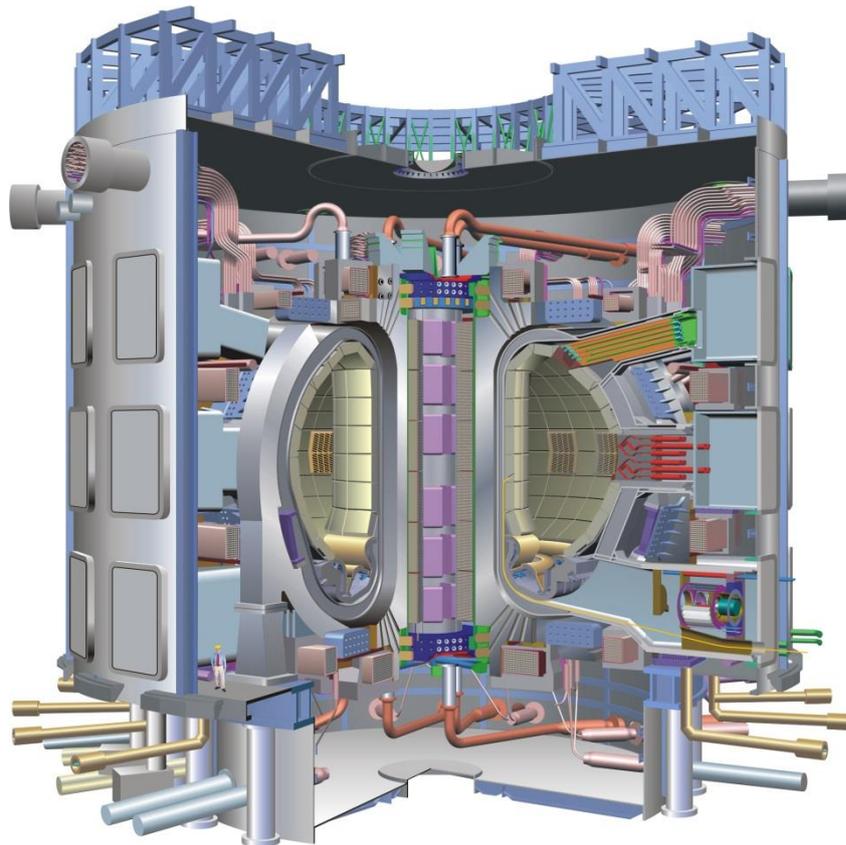
- analisi del comportamento del plasma e verifica delle leggi di scala con dimensioni e parametri di plasma prossimi a quelli di un reattore;
- analisi dei fenomeni di interazione tra plasma e strutture fisiche ad esso esposte;
- studio dell'influenza delle impurezze sulle prestazioni del plasma;
- studio dell'efficienza dei sistemi di riscaldamento addizionali;
- studio del comportamento delle particelle e degli effetti prodotti da esse sul riscaldamento del plasma.

Al 1997 sono stati ottenuti circa 16 MW di potenza utile a fronte dei 25 MW di potenza spesi per portare il plasma alle temperature di fusione (22 MW con fasci neutri e 3 MW con microonde), con un fattore di moltiplicazione della potenza  $Q$  pari a circa 0.64 (attuale record mondiale).

**ITER** (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) nasce dall'accordo di sette paesi partecipanti (UE, USA, Russia, Giappone, Corea del Sud e India) e rappresenta il passaggio tra gli studi fin ora ottenuti con TOKAMAK sperimentali e la struttura definitiva di un futuro reattore; avrà pertanto la missione di dimostrare la fattibilità tecnologica di un impianto per la fusione termonucleare controllata e quindi di raggiungere il pareggio prima e l'ignizione dopo, con un fattore di moltiplicazione della potenza che si aggirerà intorno a 10. ITER opererà con miscele di solo deuterio e in seguito con miscele deuterio-trizio e sarà in grado di produrre una potenza di 500 MW per una durata di 60 minuti.

Il sistema magnetico è costituito da quattro sottosezioni a bobine superconduttrici sottoraffreddate ad elio liquido ad una temperatura prossima allo zero assoluto. L'iniezione del combustibile nel plasma viene eseguita attraverso l'immissione di

piccolo proiettili a temperatura criogenica. ITER utilizzerà una combinazione di vari sistemi per il riscaldamento del plasma ed il sostegno della corrente di plasma basati sull'immissione diretta di fasci di atomi neutri direttamente nel plasma e sistemi a radiofrequenza (già sperimentati nel JET). Il progetto ITER, che vedrà la luce intorno al 2020, non verrà utilizzato per la produzione di energia elettrica: tale compito è riservato infatti al suo successore, DEMO.



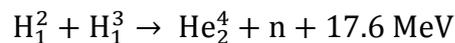
**Figura 13 - Vista in sezione di ITER**

**DEMO** (*DEMO*nstration Power Plant) è il nome del reattore a fusione attualmente studiato in Europa il cui progetto è iniziato nel 1995 e si estenderà fino al 2030. Lo scopo principale del progetto è quello di dimostrare la fattibilità commerciale della fusione termonucleare controllata, cioè la possibilità di generare energia elettrica da essa. A differenza del progetto ITER, DEMO dovrà dimostrare di essere in grado di sostenere la reazione di fusione per un tempo sufficientemente lungo (1000 s), pertanto le caratteristiche del plasma di DEMO devono essere più spinte, in particolare la reazione di fusione deve essere stabilizzata per un tempo teoricamente indeterminato. Il

consumo di trizio, evidentemente molto maggiore di quello previsto nel predecessore, richiede la presenza di un *blanket triziogeno*, cioè di una parte della macchina adibita alla produzione di trizio. Dato che nello studio di DEMO sono previsti quattro modelli diversi, le caratteristiche minime e massime previste per i vari modelli sono le seguenti:

- potenza elettrica della centrale: 1.33 - 1.55 (GW);
- potenza generata dalla reazione di fusione: 2.53 - 5.00 (GW);
- raggio al baricentro del plasma: 6.10 - 9.55 (m);
- raggio interno al plasma: 4.1 - 6.6 (m);
- raggio esterno al plasma: 8.2 - 13.1 (m);
- altezza totale del plasma: 8.6 - 12.3 (m);
- campo magnetico toroidale sull'asse: 5.6 - 7.0 (T);
- efficienza globale dell'impianto: 31 - 60%;

L'energia prodotta in DEMO è data dalla seguente reazione:



cioè ogni reazione provoca la formazione di una particella  $\alpha$  e di un neutrone. Mentre i neutroni hanno un cammino libero nella materia relativamente elevato, le particelle alfa sono fermate in spessori di pochi centimetri di acciaio. Questo significa che circa il 19% dell'energia prodotta dalla reazione (quella asportata dal plasma tramite le particelle alfa) riscalderà i primi centimetri del materiale solido che si trovano di fronte al plasma. Questa zona, dove la densità di potenza è elevatissima, è indicata come *prima parete*. In DEMO la prima parete ha uno spessore di 25 cm ed è refrigerata con elio. La prima parete è percorsa da canali orizzontali in cui fluisce l'elio con una temperatura di 300 °C all'ingresso ed esce con una temperatura di 500 °C. Questo elio viene quindi inviato ad una turbina insieme all'elio liquido che ha refrigerato anche il blanket e il divertore e viene dunque sfruttato per la produzione di energia elettrica.

# Capitolo II

---

## Il controllo di forma

*Il secondo capitolo analizza il modello MHD per la descrizione dell'evoluzione nel tempo del plasma all'interno del reattore. Si discuterà quindi del problema del controllo di forma, dell'interazione del plasma con la parete della camera da vuoto, della presenza di perturbazioni che deviano il campo dall'assisimmetria. Si affronterà infine il problema dell'identificazione tridimensionale delle linee di campo e delle soluzioni numeriche adottate per la risoluzione di quest'ultimo.*

### II.1 Il modello MHD

La magnetoidrodinamica è la disciplina che studia i fluidi elettricamente conduttori come il plasma e pertanto bisogna fare riferimento ad essa per modellare i fenomeni che avvengono all'interno di un reattore. La magnetoidrodinamica nasce dall'unione delle equazioni Maxwell nel caso quasi stazionario e delle equazioni della termo-fluidodinamica.

Le equazioni di Maxwell da considerare nel caso quasi stazionario sono:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

con le relative equazioni costitutive

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_i) \quad (2.5)$$

dove  $E$  è il campo elettrico,  $B$  quello di induzione magnetica,  $H$  il campo magnetico,  $J$  la densità di corrente. Le prime due equazioni del modello rappresentano la legge di Faraday e la legge di Ampere espresse in forma differenziale. Si osservi che nella legge di Faraday viene trascurato il contributo relativo alle correnti di spostamento (ipotesi di quasi-stazionarietà, lecita nel caso in cui il rapporto tra le dimensioni tipiche e i tempi caratteristici del sistema risulti molto minore della velocità da propagazione delle onde elettromagnetiche). Le relazioni caratteristiche rappresentano rispettivamente la caratteristica magnetica che è lineare nel vuoto e nei mezzi (lineari appunto) come l'aria o il plasma, la legge di Ohm generalizzata che tiene in conto anche della presenza di un campo di induzione magnetica e della presenza di altri campi elettrici impressi di natura non elettrostatica (ad esempio, nel plasma, il riscaldamento con radiofrequenza concorre alla formazione di una forza elettromotrice nel plasma stesso di natura non induttiva che si somma a quella indotta per effetto trasformatore).

Alle equazioni di Maxwell vanno aggiunte quelle della fluidodinamica per un gas perfettamente adiabatico:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (2.7)$$

$$\frac{D}{Dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (2.8)$$

dove  $p$  è la pressione cinetica del plasma,  $\rho$  la densità di massa e  $\gamma$  il rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costanti. La (2.6) è il bilancio di massa che è verificato nel plasma in forma approssimata sostanzialmente per due motivi: innanzitutto, in un reattore a fusione, l'energia viene prodotta sfruttando proprio il difetto di massa, dunque la massa volutamente non si deve conservare; inoltre, seppure nella realtà la schematizzazione del plasma come un singolo fluido è accettabile, all'interno esso è costituito, oltre che da ioni ed elettroni, anche da particelle di deuterio trizio ed altre impurità, per cui è possibile trovare più temperature e più densità all'interno del plasma. La (2.7) rappresenta l'equazione di bilancio della quantità di

moto mentre la (2.8) è una semplice trasformazione adiabatica valida supponendo nulli gli scambi termici e ipotizzando che i processi avvengano rapidamente con conservazione dell'entropia. L'operatore  $\frac{D}{Dt}(\cdot)$  è detto *derivata sostanziale*, ovvero una derivata che consente di trattare la variazione di una grandezza, scalare o vettoriale, che si muove con un campo di velocità dipendente sia dal tempo che dalla posizione [ ad esempio  $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dt} + v \cdot \nabla\rho$ , stante a significare che in un determinato punto la densità sta cambiando o perché essa intrinsecamente sta cambiando nel tempo o perché la particella si sta muovendo verso regioni a densità maggiore]. Se si fa riferimento alle seguenti ipotesi di modello MHD ideale:

1. conducibilità del plasma infinita ( $\sigma = \infty$ )  $\Rightarrow E + v \times B = 0$
2. condizioni stazionarie  $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
3. equilibrio statico  $\Rightarrow v = 0$

si ottiene immediatamente dalla (2.7) la condizione di equilibrio MHD che va aggiunta alle (2.2) e (2.3):

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (2.9)$$

Se la pressione cinetica è trascurabile si parla di *equilibrio MHD force free* e  $\mathbf{J}$  risulterà parallelo a  $\mathbf{B}$ . All'equilibrio ci si rende conto allora che le linee di corrente e quelle di campo magnetico di induzione devono svilupparsi lungo superfici isobare in quanto

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (2.11)$$

ovvero il gradiente della pressione cinetica è ortogonale sia a  $\mathbf{B}$  che a  $\mathbf{J}$ . Il modello MHD appena presentato costituisce purtroppo solamente una approssimazione dei fenomeni che avvengono realmente all'interno di un reattore; esso è spesso utilizzato anche laddove non può essere giustificato per studiare ad esempio geometrie troppo complicate per applicare modelli più sofisticati. Tuttavia la sua importanza è legata, come vedremo in seguito, al fatto che esso ha consentito di sviluppare e testare la validità di alcuni algoritmi che verranno poi applicati anche in configurazioni di campo magnetico più vicine e fedeli alla realtà.

## II.2 Equilibri MHD

Le grandezze fondamentali per lo studio degli equilibri MHD sono il *flusso poloidale* e la *corrente poloidale*. Nell'ipotesi di assi-simmetria del campo e considerato un sistema di riferimento in coordinate cilindriche, possiamo definire:

- il flusso poloidale  $\Psi(r, z)$  come il flusso del campo poloidale concatenato con la circonferenza ottenuta dalla rivoluzione del punto  $(r, z)$ ; si fa più spesso riferimento al flusso per radiante  $\psi(r, z) = \frac{\Psi(r, z)}{2\pi}$  per semplificare le espressioni;
- la corrente poloidale  $I_{pol}(r, z)$  concatenata, come per il flusso poloidale, alla circonferenza ottenuta dalla rotazione del generico punto  $(r, z)$ .

Da queste grandezze è possibile ricavare le componenti lungo  $z$  e lungo  $r$  del campo  $B$  e della densità di corrente poloidale  $J$ .

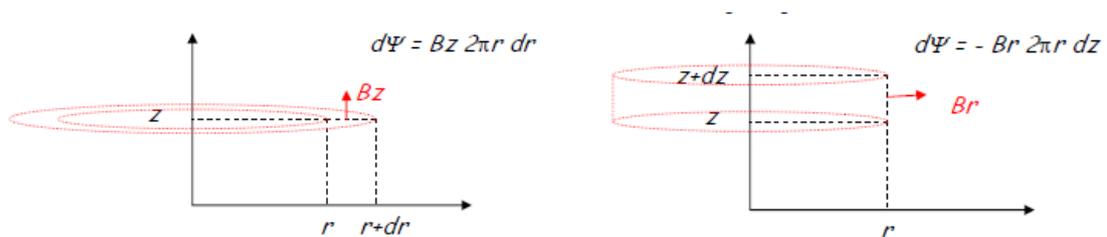


Figura 14 - Componenti del campo poloidale lungo  $z$  e  $r$

Osserviamo infatti che il flusso infinitesimo concatenato con la corona circolare di raggio interno  $r$  e raggio esterno  $r + dr$  è pari a:

$$d\Psi = B_z 2\pi r dr \quad (2.12)$$

dunque la componente lungo  $z$  del campo magnetico sarà:

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.13)$$

Sfruttando invece la solenoidalità del campo di induzione magnetica  $B$ , possiamo considerare il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro di altezza  $dz$  la cui circonferenza di base ha raggio  $r$ :

$$d\Psi = -B_r 2\pi r dz \quad (2.14)$$

da cui ricaviamo la componente lungo  $r$  del campo di induzione:

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.15)$$

Un analogo ragionamento può essere condotto nel caso della corrente poloidale. Definiamo la funzione di corrente poloidale:

$$f(r, z) = r B_\varphi(r, z) = \mu I_{pol}(r, z) / 2\pi \quad (2.16)$$

dove  $B_\varphi$  è il campo magnetico toroidale e il secondo termine dell'uguaglianza è legato alla legge di Ampere.

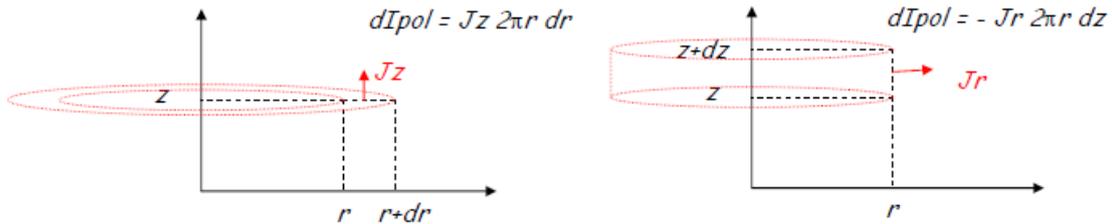


Figura 15 - Componenti della densità di corrente lungo  $z$  e  $r$

Detto allora  $J$  la densità di corrente poloidale e ricordando che essa gode delle stesse proprietà di solenoidalità del campo  $B$ , calcolando la corrente per una corona circolare infinitesima e quella uscente dalla superficie laterale del cilindro sopra definito, possiamo ricavare le componenti di  $J$  lungo  $r$  e  $z$ :

$$J_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(f/\mu)}{\partial r} \quad (2.17)$$

$$J_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial(f/\mu)}{\partial z} \quad (2.18)$$

Il campo magnetico complessivo sarà quindi dato dalla sovrapposizione di quello poloidale a quello toroidale:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{pol} + \mathbf{B}_\varphi = \frac{1}{r} \nabla \psi \times \mathbf{i}_\varphi + \frac{f}{r} \mathbf{i}_\varphi \quad (2.19)$$

dove il primo termine deriva dall'osservazione che il campo poloidale, somma delle componenti  $B_r$  e  $B_z$ , corrisponde al gradiente di  $\psi$  a meno di una rotazione di  $90^\circ$  e una divisione per  $r$ ; il secondo termine rappresenta invece il campo toroidale ricavabile dalla legge di Ampere. In analogia con i risultati appena conseguiti, possiamo individuare l'espressione della densità di corrente di plasma totale:

$$\mathbf{J} = J_{pol} + J_\varphi \quad (2.20)$$

$J_\varphi$  è la componente toroidale della densità di corrente di plasma e può essere calcolata esplicitando nella legge di Ampere il rotore:

$$J_\varphi = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (2.21)$$

Introducendo allora l'operatore di Shafranov:

$$\Delta^* \psi = r^2 \nabla \left( \frac{\nabla \psi}{\mu r^2} \right) = r \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\mu_0 r J_\varphi \quad (2.22)$$

possiamo scrivere:

$$\mathbf{J} = J_{pol} + J_\varphi = \frac{1}{r} \nabla \left( \frac{f}{\mu} \right) \times \mathbf{i}_\varphi - \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0 r} \mathbf{i}_\varphi \quad (2.23)$$

Ricordando dunque che il gradiente di  $p$  è ortogonale sia a  $\mathbf{B}$  che a  $\mathbf{J}$ , moltiplicando scalarmente la (2.19) e la (2.23) per  $\nabla p$  otteniamo:

$$\mathbf{0} = \frac{1}{r} \nabla \psi \times \mathbf{i}_\varphi \cdot \nabla p + \frac{f}{r} \mathbf{i}_\varphi \cdot \nabla p \quad (2.24)$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{r} \nabla \left( \frac{f}{\mu} \right) \times \mathbf{i}_\varphi \cdot \nabla p - \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0 r} \mathbf{i}_\varphi \cdot \nabla p \quad (2.25)$$

Poiché, stante l'ipotesi di assialsimmetria,  $\nabla p$  non ha componente toroidale ( non dipende da  $\varphi$ ), i contributi in rosso sono nulli. Esplicitando i tripli prodotti si deduce che:

$$\nabla p \times \nabla \psi = \nabla p \times \nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla f \times \nabla \psi = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

dove  $f$  e  $\psi$  sono costanti sulle superfici isobare. Se allora consideriamo l'equazione di equilibrio MHD (2.9) e ivi sostituiamo le relazioni (2.19) e (2.23) otteniamo:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p \Rightarrow -\frac{\Delta^* \psi}{\mu_0 r^2} \nabla \psi - \frac{f}{\mu_0 r^2} \nabla f = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

Osservando infine che i gradienti di  $f$ ,  $p$  e  $\psi$  sono tra di loro paralleli, possiamo scrivere che  $p = p(\psi)$  e  $f = f(\psi)$ . Pertanto sostituendo le seguenti espressioni

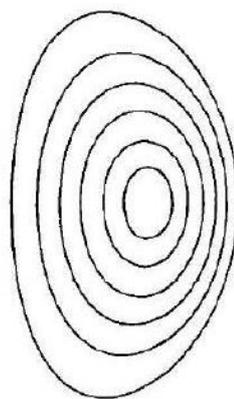
$$\nabla f = \frac{df}{d\psi} \nabla \psi \quad (2.28)$$

$$\nabla p = \frac{dp}{d\psi} \nabla \psi \quad (2.29)$$

nella (2.27) otteniamo la nota *equazione di Grad-Shafranov*:

$$\Delta^* \psi = -f \frac{df}{d\psi} - \mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} \quad (2.30)$$

Il prodotto  $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$ , ciò significa che  $\nabla \psi$  è ortogonale in tutti i punti ad una superficie magnetica, cioè  $\psi$  è costante su ogni superficie magnetica. Le superfici magnetiche sono quindi superfici isoflusso. Nei TOKAMAK, la topologia più favorevole delle superfici è quella che prevede all'interno del plasma superfici magnetiche toroidali, come mostrato in figura 16. In questa configurazione infatti le particelle di plasma tendono a muoversi a spirale intorno alle linee di campo che, risultando chiuse, scongiurano la possibilità che le particelle impattino con la prima parete interna.



**Figura 16 - Superfici magnetiche all'equilibrio**

Dalla legge di Ampere derivata in precedenza:

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r J_\varphi \quad (2.31)$$

otteniamo un'espressione per la densità di corrente toroidale nel plasma:

$$J_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{f^2}{2\mu_0}\right)}{d\psi} + r \frac{dp}{d\psi} \quad (2.32)$$

Se valgono gli equilibri MHD, la densità di corrente del plasma allora non può essere qualsiasi: possiamo avere corrente toroidale nel plasma solo se c'è una corrente poloidale o se c'è un gradiente della pressione cinetica.

L'equazione di equilibrio MHD (2.9) può essere espressa in forma conservativa come:

$$\nabla \cdot \vec{T} = 0 \quad (2.33)$$

Questo risultato va sotto il nome di *Teorema del Viriale*.  $\vec{T}$  è il  *tensore di Maxwell*  definito come:

$$\vec{T} = \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \vec{I} - \frac{BB}{\mu_0} \quad (2.34)$$

Il teorema del Viriale ci dice sostanzialmente che un plasma non può auto confinarsi. Poiché la relazione (2.33) vale sicuramente nel plasma e nel vuoto, per avere un plasma in equilibrio deve esistere una zona in cui suddetta relazione non vale: questa zona è rappresentata dai conduttori, dove  $J \times B$  (che evidentemente è una forza) viene scaricata sui supporti.

### II.3 Perturbazioni non assialsimmetriche

Nella realtà il campo magnetico all'interno di un TOKAMAK non presenta una configurazione assialsimmetrica. La deviazione dall'assisimmetria prende il nome di *ripple* e deve essere tenuta bassa per motivi di stabilità. Le perturbazioni non assialsimmetriche sono imputabili fondamentalmente a quattro sorgenti differenti che spesso agiscono in concomitanza:

- circuiti con conduttori non assialsimmetrici;
- materiali ferromagnetici non assialsimmetrici;

- correnti indotte per effetto trasformatore in strutture tridimensionali non assialsimmetriche;
- instabilità del plasma sulla scala dei tempi resistivi oppure su quella di Alfvén.

I materiali ferromagnetici non assialsimmetrici vengono intenzionalmente introdotti in un reattore con lo scopo di ridurre il ripple nel campo magnetico toroidale provocato dalla discretizzazione del solenoide principale. Come già accennato nel capitolo introduttivo, il campo magnetico toroidale è generato da una serie di solenoidi discreti (*Toroidal Field Coils*) distribuiti lungo il toro. Il numero di solenoidi dipende evidentemente dalla grandezza e dalla potenza della macchina (in genere varia tra 16 e 36). A causa della presenza del ripple che produce una perdita di simmetria up-down delle orbite a banana, una minore aliquota di particelle energetiche riesce ad essere confinata [2]. Tale perdita non solo aggrava il riscaldamento del plasma, ma può provocare seri danneggiamenti all'intero sistema. Infatti alcune particelle possono rimanere intrappolate in una definita zona del reattore provocando un inaccettabile riscaldamento sulla prima parete. Per evitare tutta questa serie di inconvenienti allora risulta necessario ridurre l'ampiezza del ripple. Tale risultato può essere ottenuto perseguendo due strade differenti: la prima consiste nel modificare la struttura originaria della macchina introducendo un numero maggiore di TF coils o aumentandone la larghezza; la seconda prevede l'installazione di inserti in materiale ferromagnetico. La prima soluzione tuttavia pone una serie di svantaggi, quali innanzitutto una riduzione dello spazio a disposizione per l'applicazione di altri dispositivi (porte, strumenti per la diagnostica, cannone di fasci neutri e antenne per il riscaldamento ausiliare del plasma e così via), poi un incremento significativo dei costi di realizzazione. L'inserimento di moduli in materiale ferromagnetico, che sicuramente non aggrava i costi o riduce l'accessibilità alla camera, pone comunque problemi di altra natura. Infatti il campo magnetico toroidale, che nel caso dei soli TF coils ha una struttura semplice (campo sinusoidale che va come  $1/R$ ), ha una forma più complessa a causa del campo prodotto dagli elementi ferromagnetici, il quale può essere fonte di errore e ledere alla stabilità MHD. Basti semplicemente

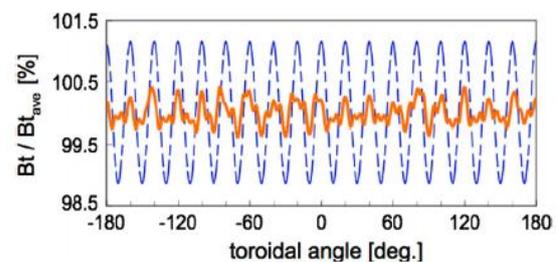
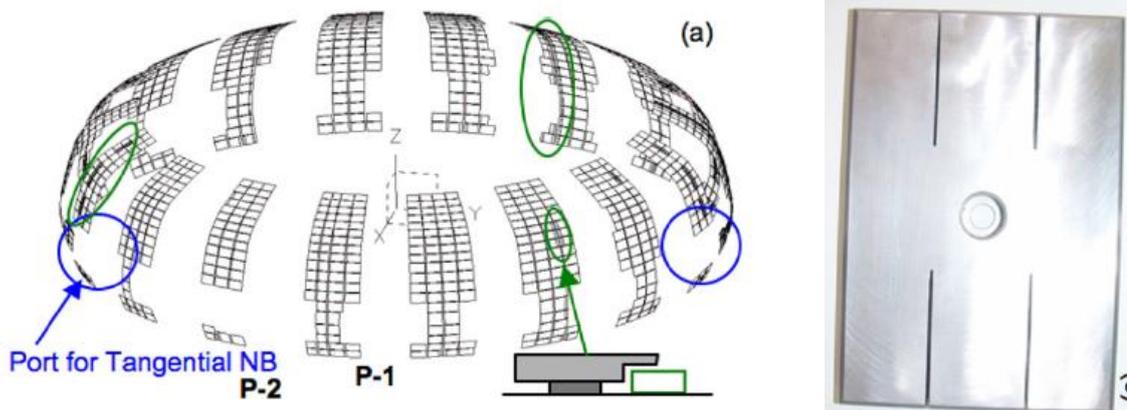


Figura 17 - Campo magnetico toroidale

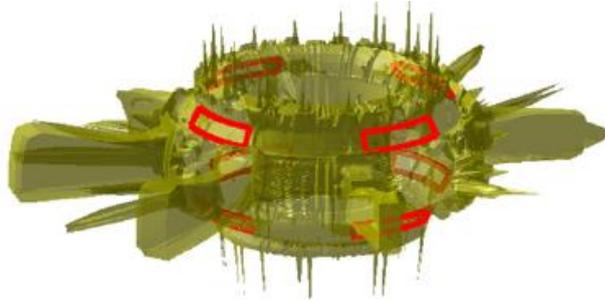
pensare al fatto che, a causa degli altri moduli presenti all'interno della camera da vuoto, le piastre di materiale ferromagnetico non possono essere distribuite in maniera simmetrica per cui, come primo effetto, il campo perde la sua periodicità. La figura 17 mostra la variazione del campo toroidale alla distanza radiale  $R=4.2\text{m}$  nel reattore **JFT-2M** (Giappone). Il tratto in blu mostra il campo in presenza del solo avvolgimento toroidale, il tratto in arancione quello in vece in presenza del materiale ferromagnetico.



**Figura 18 - Distribuzione degli inserti ferromagnetici; (A destra) Inserto ferromagnetico**

I conduttori non assialsimmetrici vengono introdotti in un TOKAMAK per la riduzione di fenomeni altrimenti pericolosi. Una **ELM** (*Edge-Localized Mode*) è una instabilità distruttiva che si manifesta nella regione di bordo del plasma in un TOKAMAK ed è dovuta al rilassamento quasi periodico di una barriera di trasporto formatasi durante la transizione  $L \rightarrow H$ . Questo tipo di instabilità può essere molto dannosa per i componenti della prima parete, in particolar modo per il divertore, a causa dell'enorme quantità di energia trasferita. Il fenomeno dell'ELM è stato osservato per la prima volta nel TOKAMAK ASDEX (Germania) nel 1981 e purtroppo ancora oggi non se ne conosce una descrizione analitica. Tuttavia è stato osservato che i suoi effetti possono essere mitigati introducendo delle perturbazioni nel campo magnetico che aumentano la frequenza delle ELMs ma ne riducono l'intensità, il tutto senza pregiudicare le prestazioni del nucleo del plasma [3]. Gli esperimenti per la riduzione delle ELMs che utilizzano le perturbazioni magnetiche sono stati condotti su diversi reattori. Le perturbazioni magnetiche sono prodotte da conduttori disposti all'interno della camera da vuoto come mostrato in figura 19 (*ELM-mitigation coils*). Facendo circolare una corrente positiva (negativa) all'interno di suddette bobine viene prodotto un campo

magnetico concentrato soprattutto nella parte esterna (interna) del TOKAMAK lungo la direzione radiale che consente la mitigazione delle ELMs.



**Figura 19 - Struttura 3D di ASDEX con bobine per la perturbazione magnetica (in rosso)**

Ulteriori sorgenti di perturbazioni possono essere individuate nelle correnti indotte nelle strutture tridimensionali della macchina stessa.

## II.4 Interazione plasma-parete

La necessità di avere un confinamento del plasma all'interno del reattore nasce dal fatto che un eventuale contatto del plasma (a temperatura di 100 milioni di gradi) comporterebbe una serie di effetti indesiderati che minerebbero alla riuscita del processo di fusione. Innanzitutto il contatto del plasma con la prima parete provocherebbe un inevitabile abbassamento della temperatura del plasma stesso, e quindi un allontanamento dalle condizioni che favoriscono l'innesco della fusione. Inoltre la parete, quando entra in contatto con il plasma incandescente, emette delle impurità che inquinano il plasma e riducono il rendimento globale della macchina. Si definisce convenzionalmente *contorno o frontiera del plasma* la superficie magnetica chiusa più esterna che non interseca pareti solide. In letteratura la frontiera del plasma è indicata come LCMS (*Last Closed Magnetic Surface*). La distanza, lungo una certa direzione, della frontiera del plasma dalla prima parete è detta GAP, ed essa viene utilizzata per il controllo di forma e di posizione.

## II.5 Calcolo delle linee di campo

Ai fini del controllo e della progettazione risulta necessario avere una stima della distribuzione delle linee di campo magnetico all'interno del TOKAMAK. La conoscenza delle ultime consente di individuare ad esempio la frontiera del plasma, quindi la distanza plasma-parete per una determinata macchina in una determinata configurazione. Per lo studio e il tracciamento delle linee di campo si considera il campo magnetico come un campo di velocità. Infatti, come nel caso della simulazione dinamica di fluidi incomprimibili è necessario preservare il volume e talvolta la solenoidalità del campo di velocità  $v$ , anche nel modello MHD c'è la necessità di adoperare integratori numerici che preservino tali caratteristiche per il tracciamento delle linee di un campo magnetico definito su una griglia (mesh). Il campo magnetico e il campo di velocità possono essere allora studiati in maniera analoga:

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t) \leftrightarrow \frac{dx}{d\tau} = B(x) \quad (2.35)$$

dove  $\tau$  non è inteso propriamente come tempo fisico. La capacità di preservare il volume è cruciale se le orbite vengono integrate per intervalli di tempo molto lunghi, perché in assenza di questa proprietà possono essere definite traiettorie che convergono in un punto fisso o danno luogo ad altri fenomeni impensabili per un campo solenoidale. Dal punto di vista matematico, la condizione di *volume-preserving* può essere espressa facendo riferimento ad una generica equazione differenziale ordinaria a divergenza nulla:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{con} \quad \nabla \cdot f = 0 \quad (2.36)$$

Definita dunque  $df = \frac{df_i}{dx_j}$  la derivata di  $f$  e  $A = \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}$  lo Jacobiano del suo flusso, in accordo con

$$\frac{dA}{dx} = dfA, \quad A(0) = Id \quad (2.37)$$

si mostra che

$$\frac{d}{dt} \det A = \text{tr}(df) \det(A) \quad (2.38)$$

Conseguentemente, se  $\nabla \cdot f = \text{tr}(df) = 0 \rightarrow \det A = 1$ ; il flusso è quindi volume-preserving (VP).

Dunque un integratore è VP se

$$\det \left( \frac{\partial \psi_{\tau,i}}{\partial x_j} \right) = 1 \quad (2.39)$$

cioè se un integratore è VP se il determinante della matrice Jacobiana è unitario. Esistono diverse tecniche di integrazione numerica: *metodo di Eulero*, *metodo di Runge-Kutta*, *metodi predictor-corrector*, etc. Poiché l'analisi delle linee di campo e quindi delle relative applicazioni verrà condotta utilizzando il software MATLAB, è opportuno focalizzare l'attenzione sugli integratori ivi presenti:

- *ode45*, utilizzato per la risoluzione di equazioni differenziali non-stiff con metodo di integrazione Runge-Kutta di ordine 4 e 5;
- *ode15s*, utilizzato per la soluzione di equazioni differenziali stiff (schema esplicito che utilizza un passo di integrazione molto piccolo per evitare instabilità nella soluzione) con un metodo multistep implicito di ordine variabile da 1 a 5, basato su formule di tipo BDF (*Backward Differentiation Formula*);
- *ode113*, utilizzato per la soluzione di equazioni differenziali non-stiff con metodo di Adams-Bashforth-Moulton di ordine variabile da 1 a 13.

Studi condotti sulla qualità dei suddetti integratori di preservare il volume mostrano che il metodo che meglio approssima tale proprietà è *ode45*, per il quale si riscontra uno scostamento del determinante della matrice Jacobiana dall'unità dell'ordine di  $10^{-2}$ , che può essere ulteriormente abbattuto riducendo la tolleranza [1]. Un'analisi più dettagliata delle tecniche di integrazione sopracitate sarà effettuata nel capito successivo.

# Capitolo III

---

## Metodi numerici per l'integrazione del campo

*Il capitolo terzo offre una panoramica sulla varie tecniche di integrazione numerica per la soluzione delle equazioni differenziali ordinarie (ODE), con particolare interesse verso quelle disponibili in ambiente Matlab utilizzate per il tracciamento delle linee di campo magnetico e relative applicazioni. Si rivolgerà dunque l'attenzione all'onere computazionale richiesto dai vari algoritmi e alle varie soluzioni possibili.*

### III.1 Analisi dei metodi di integrazione

I metodi di integrazione numerica costituiscono un potente strumento per la risoluzione di equazioni differenziali, lineari e non, complete o alle derivate parziali, che consentono di calcolarne la soluzione anche laddove non esista una teoria matematica che ne consenta l'integrazione. Esistono diversi metodi di integrazione, alcuni dei quali saranno esaminati in seguito, che godono di alcune proprietà che li rendono più o meno preferibili rispetto ad altri, in funzione anche del tipo di problema differenziale che si deve affrontare. Per semplicità si farà riferimento a problemi di tipo scalare, rimandando a testi specializzati il caso di problemi in più dimensioni. Consideriamo quindi il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

con  $t \in I$ , dove  $I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$  contenente il punto  $t_0$  e  $f(t, y)$  è una funzione definita nella striscia  $S = I \times (-\infty; +\infty)$  a valori reali e continua rispetto ad ambo le variabili. Come è noto, solamente un numero limitato di ODE (*ordinary differential equation*) può essere risolto in maniera analitica; inoltre, quando ciò è possibile, molto

spesso non è propriamente agevole ricavare un'espressione esplicita della stessa. I metodi numerici invece possono essere applicati a tutte le ODE, indipendentemente dalla complessità, purché questa ammettano un'unica soluzione (esistono una serie di teoremi che consentono di stabilire se una ODE ammette o meno un'unica soluzione, ad esempio i teoremi di *esistenza ed unicità in piccolo e in grande* che sfruttano la lipschitzianità del termine noto [5]). Occorre dunque considerare l'approssimazione numerica del problema di Cauchy in esame: fissato un intervallo di integrazione  $I = (t_0; t_0 + T)$  e scelto un  $h$  maggiore di 0, noto come *passo di discretizzazione*, si consideri la successione dei nodi di discretizzazione  $t_n = t_0 + nh$ , con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_h - 1$  che divide l'intervallo di integrazione  $I$  in tanti sottointervalli  $I_n = [t_n; t_{n+1}]$  di ampiezza  $h$ . Indichiamo quindi con  $u_j$  l'approssimazione nel nodo  $t_j$  della soluzione esatte  $y(t_j)$ , che di seguito per compattezza di notazione indicheremo come  $y_j$ . In maniera del tutto analoga definiamo  $f_j = f(t_j, u_j)$ . I metodi numerici di integrazione delle equazioni differenziali possono essere classificati in metodi a singolo passo o metodi a più passi (*multistep*), in accordo con la seguente definizione: un metodo numerico per l'approssimazione del problema di Cauchy (3.1) si dice *ad un passo* se  $\forall n > 0$ ,  $u_{n+1}$  dipende solamente da  $u_n$ . In caso contrario il metodo numerico si dirà *a più passi* o *multistep*.

.

### III.2 Metodo di Eulero

Il metodo di Eulero rappresenta il metodo di integrazione numerica a singolo passo più semplice e viene utilizzato anche in altre applicazioni come ad esempio la discretizzazione dei regolatori analogici. Il metodo di Eulero si presenta in due forme, una esplicita e una implicita, rispettivamente indicate come *metodo di Eulero in avanti* e *metodo di Eulero all'indietro*. Ricordiamo che un metodo si dice esplicito se  $u_{n+1}$  si ricava direttamente in funzione dei valori nei soli punti precedenti. Un metodo di contro si dirà implicito se  $u_{n+1}$  dipende implicitamente da se stesso attraverso la  $f$ . Sia il metodo implicito che quello esplicito si basano sull'approssimazione della derivata prima di  $y$  con il rapporto incrementale. Entrambe le approssimazioni alle differenze

sono quindi accurate al prim'ordine. Nel metodo di Eulero esplicito ciascun punto della soluzione viene ricavato a partire dal precedente secondo la seguente relazione:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{h}f_n \quad (3.2)$$

Nel metodo di Eulero all'indietro invece ogni punto viene calcolato in base alla legge:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{h}f_{n+1} \quad (3.3)$$

E' quindi evidente come la determinazione del punto successivo diventi più complicata e laboriosa con il metodo implicito, tuttavia in termini di *accuratezza* il risultato risulta sicuramente migliorato. Il metodo di Eulero risulta utile quando si vogliono determinare ad esempio un certo numero N di punti della soluzione esatta che poi possono essere interpolati su un grafico. E' evidente che la soluzione è tanto migliore quanto più piccolo è il passo di integrazione, in funzione anche della variabilità della soluzione stessa: il metodo di Eulero infatti determina i vari punti della soluzione muovendosi lungo la tangente al grafico della soluzione nel nodo in esame, quindi se la soluzione non ha elevata variabilità è più probabile una ricostruzione fedele di quest'ultima. Volendo generalizzare l'analisi dei metodi di integrazione a singolo passo, possiamo scrivere

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{h}\Phi(\mathbf{t}_n, \mathbf{u}_n, f_n; \mathbf{h}) \quad (3.4)$$

dove  $\Phi$  è detta *funzione di incremento*. Affinché la soluzione esatta soddisfi lo schema numerico (3.4), indicando con  $y_n$  il valore della soluzione esatta  $y$  nel nodo  $t_n$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \mathbf{h}\Phi(\mathbf{t}_n, \mathbf{y}_n, f(\mathbf{t}_n, \mathbf{y}_n); \mathbf{h}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (3.5)$$

dove  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  è il residuo che si genera nel punto  $t_{n+1}$ . Possiamo esprimere il residuo come

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \mathbf{h}\boldsymbol{\tau}_{n+1}(\mathbf{h}) \quad (3.6)$$

cioè come prodotto del passo di discretizzazione per l'*errore di troncamento locale* (LTE). Il metodo numerico scelto si dice consistente con il problema di Cauchy (3.1) se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Inoltre, uno schema *ha ordine p* se,  $\forall t \in I$ , la soluzione del problema di Cauchy soddisfa la condizione seguente:

$$\tau(h) = O(h^p) \text{ per } h \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

Uno schema di discretizzazione esplicito ad un passo è completamente descritto dalla sua funzione di incremento; ad esempio, il metodo di Eulero in avanti è un caso particolare della (3.4) quando

$$\Phi(t_n, u_n, f_n; h) = f_n \quad (3.9)$$

I vantaggi del metodo di Eulero consistono principalmente nella semplicità di implementazione dell'algoritmo, nella velocità di computazione e nel basso onere richiesto per l'esecuzione. Tuttavia, come è intuibile, essendo metodi al primo ordine, consentono di determinare soluzioni poco precise; inoltre, presentano alcuni limiti sulla velocità di convergenza che risulta lenta e sul passo di discretizzazione. La figura 19 esplicita come da ogni intervallo si estrapoli il valore successivo della funzione incognita.

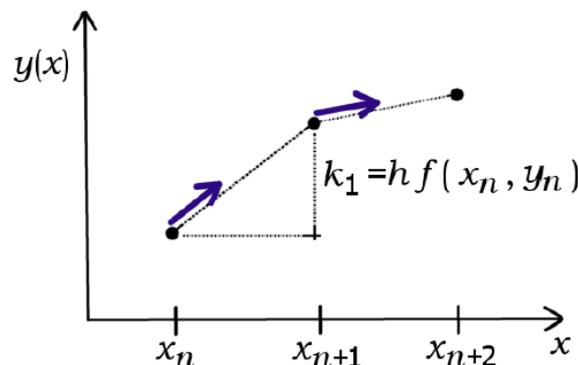


Figura 20 - Metodo di Eulero in avanti

### III.3 Il metodo di Runge-Kutta

Al contrario del metodo di Eulero, i metodi Runge-Kutta (RK) e i metodi multistep (MS) costituiscono una classe di tecniche di integrazione di ordine più elevato che si ispirano tuttavia a criteri differenti. I metodi RK, come i metodi di Eulero, sono metodi a singolo passo che tuttavia guadagnano accuratezza sacrificando la linearità rispetto ad  $u_n$  ed  $f_n$  con lo scopo di aumentare le valutazioni funzionali in ogni passo. Nella forma più generale, un metodo RK può essere scritto come:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n, h; \mathbf{f}) \quad (3.10)$$

dove  $F$  è la funzione incremento definita nel modo seguente:

$$\mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n, h; \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^s \mathbf{b}_i \mathbf{K}_i \quad (3.11)$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{f}(t_n + \mathbf{c}_i h, \mathbf{u}_n + h \sum_{j=1}^s \mathbf{a}_{ij} \mathbf{K}_j) \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (3.12)$$

dove  $s$  indica il numero di *stadi* del metodo. I coefficienti  $\{a_{ij}\}, \{b_i\}$  e  $\{c_i\}$  caratterizzano completamente un metodo RK e vengono generalmente raccolti nella cosiddetta *matrice di Butcher*

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array}$$

Supporremo inoltre che valga la seguente proprietà:

$$\mathbf{c}_i = \sum_{j=1}^s \mathbf{a}_{ij} \quad i = 1, \dots, s \quad (3.13)$$

Se i coefficienti  $a_{ij}$  sono nulli per  $j \geq i$  con  $i = 1, \dots, s$ , allora ogni  $K_i$  può essere calcolato esplicitamente in funzione dei soli  $i-1$  coefficiente  $K_1, \dots, K_{i-1}$  già calcolati in precedenza. Quando ciò accade lo schema viene detto esplicito. In caso contrario lo schema RK è implicito ed il calcolo dei coefficienti  $K_i$  richiede la risoluzione di un sistema non lineare di ordine  $s$ . Per quanto concerne gli schemi RK espliciti, vale la seguente proprietà: "Un metodo Runge-Kutta a  $s$  stadi non può avere ordine maggiore di  $s$ . Non solo, non esistono metodi RK espliciti a  $s$  stadi con ordine  $s$  se  $s$  è maggiore o uguale a 5." In particolare, per gli ordini da 1 a 8, il numero di stadi minimo per ottenere l'ordine corrispondente è riportato nella seguente tabella:

ordine	1	2	3	4	5	6	7	8
$s_{min}$	1	2	3	4	6	7	9	11

Volendo dunque esemplificare quanto esposto, il metodo RK del secondo ordine (due stadi), noto anche come *metodo Runge-Kutta midpoint*, avrà il seguente schema:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= hf_n \\
 K_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\
 y_{n+1} &= y_n + K_2 + O(h^3)
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Nel metodo RK del secondo ordine il primo incremento di prova  $K_1$  viene calcolato come nel metodo di Eulero a partire da  $x_n$  e  $u_n$ . Si otterrà quindi il valore  $u_n + K_1$  in corrispondenza del nodo  $x_{n+1}$ . Si applica poi la stessa formula di integrazione ma valutando questa volta la funzione nel punto medio  $(x_n + \frac{h}{2}; u_n + \frac{K_1}{2})$ . Si ottiene quindi il valore  $K_2$  che potrà essere considerato un incremento più accurato del precedente. Quanto appena descritto è rappresentato nella figura successiva:

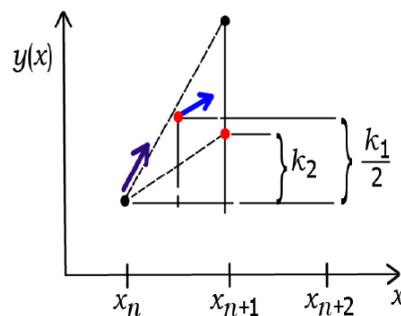


Figura 21 - Metodo Runge-Kutta di ordine 2

Il metodo Runge-Kutta più utilizzato è quello di ordine 4 (in Matlab **ode45**), noto anche come *4-stage stepping scheme*, che richiede quattro valutazioni della funzione  $f$  per ciascun passo. Lo schema del metodo RK del quarto ordine è il seguente:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= f_n \\
 K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{K_1}{2}\right) \\
 K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{K_2}{2}\right) \\
 K_4 &= f(t_{n+1}, u_n + hK_3) \\
 u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

In figura 22 è riportata un'interpretazione grafica del metodo RK del 4 ordine. La derivata numerica è valutata quattro volte, nel punto iniziale (1), nei due punti intermedi (2) e (3) e infine nel punto di prova finale (4). Dalla combinazione di tali valori si ricava dunque il valore approssimato della soluzione incognita.

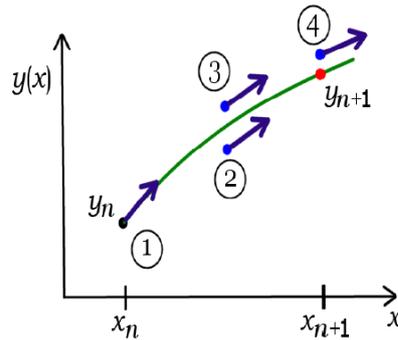


Figura 22 - Metodo RK di ordine 4

### III.4 I metodi predictor-corrector

Gli algoritmi predictor-corrector costituiscono una sottocategoria di tecniche numeriche multistep, ovvero metodi che valutano il valore approssimato della soluzione  $u_{n+1}$  utilizzando  $j$  risultati precedenti  $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-j+1}$ . Un metodo predictor-corrector (PC) consta sostanzialmente di più fasi. Nella sua versione più elementare, il valore  $u_{n+1}^{(0)}$  viene calcolato attraverso un metodo esplicito a  $\hat{p} + 1$  passi, detto *predictor*:

$$[P] \mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \sum_{j=0}^{\hat{p}} \tilde{\mathbf{a}}_j \mathbf{u}_{n-j}^{(1)} + h \sum_{j=0}^{\hat{p}} \tilde{\mathbf{b}}_j \mathbf{f}_{n-j}^{(0)} \quad (3.16)$$

dove  $f_k^{(0)}$  e  $u_k^{(1)}$  sono le soluzioni calcolate con il metodo PC al passo precedente oppure sono le condizioni iniziali del problema. Dopo la prima fase di predizione, viene valutato il valore della funzione  $f$  nel nuovo punto  $(t_{n+1}, u_{n+1}^{(0)})$  (fase di *valutazione*):

$$[E] \mathbf{f}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}^{(0)}) \quad (3.17)$$

Infine si esegue una sola iterazione del metodo del punto fisso usando uno schema multistep implicito della forma:

$$[C] \mathbf{u}_{n+1}^{(1)} = \sum_{j=0}^p \mathbf{a}_j \mathbf{u}_{n-j}^{(1)} + h \sum_{j=0}^p \mathbf{b}_j \mathbf{f}_{n-j}^{(0)} + h \mathbf{b}_{-1} \mathbf{f}_{n+1}^{(0)} \quad (3.18)$$

Quest'ultima fase è detta *corrector*. L'intera procedura viene spesso indicata in letteratura come metodo *PEC*, in cui P e C indicano un'applicazione del metodo predictor e del metodo corrector nel nodo  $t_{n+1}$ , mentre la E indica che è stata effettuata una valutazione della  $f$ . Esiste poi un'ulteriore implementazione dell'algoritmo PC,

indicato come *PECE*, che prevede una seconda valutazione della  $f$ . Le varie tecniche di integrazione predictor-corrector si differenziano per la scelta degli schemi utilizzati come predictor o come corrector. Ad esempio il *metodo di Heun* è un metodo PC in cui come predictor è utilizzato il metodo di Eulero in avanti e come corrector quello di *Crank-Nicolson*. Il più diffuso è quello che utilizza il metodo di *Adams-Bashforth* a  $k$  passi di ordine  $k$  come formula predictor e quello di *Adams-Moulton* come corrector (*ode113* in Matlab), che nella versione PECE è il seguente:

$$[P] \quad \mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_n^{(1)} + \frac{h}{2} [3\mathbf{f}_n^{(1)} - \mathbf{f}_{n-1}^{(1)}]$$

$$[E] \quad \mathbf{f}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}^{(0)})$$

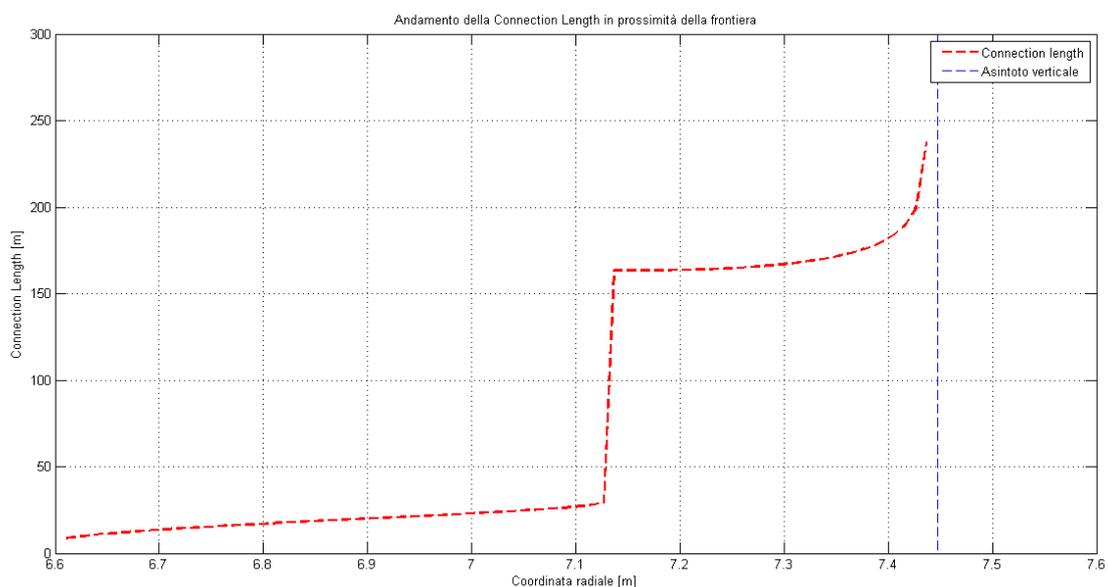
$$[C] \quad \mathbf{u}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{u}_n^{(1)} + \frac{h}{12} [5\mathbf{f}_{n+1}^{(0)} + 8\mathbf{f}_n^{(1)} - \mathbf{f}_{n-1}^{(1)}]$$

$$[E] \quad \mathbf{f}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}^{(1)})$$

### III.5 Algoritmo per il calcolo della frontiera del plasma

Come anticipato nel capitolo II, la frontiera del plasma (LCMS) è definita come l'ultima superficie chiusa che non interseca la parete solida della camera da vuoto. L'identificazione della frontiera del plasma risulta di fondamentale importanza innanzitutto per verificare l'efficacia del confinamento magnetico, e poi per il controllo della forma e della posizione del plasma all'interno del reattore. Lo studio della frontiera del plasma è stato condotto su DEMO nella fase di flat-top, cioè nella fase di funzionamento a regime. Nel caso ideale di assisimmetria le superfici magnetiche sono analiticamente definite dall'equazione di Grad-Shafranov (2.30): si tratta quindi di un problema differenziale in 2 dimensioni che può essere risolto ovviamente con metodi numerici. Poiché nella realtà il campo si discosta significativamente dall'assisimmetria, quest'analisi primaria potrebbe sembrare superflua e di scarso interesse pratico, tuttavia la conoscenza "a priori" della soluzione consente di verificare l'affidabilità del software adibito all'individuazione della LCMS, così da poter analizzare con un certo grado di sicurezza anche il caso di campo perturbato. L'algoritmo per il calcolo della frontiera

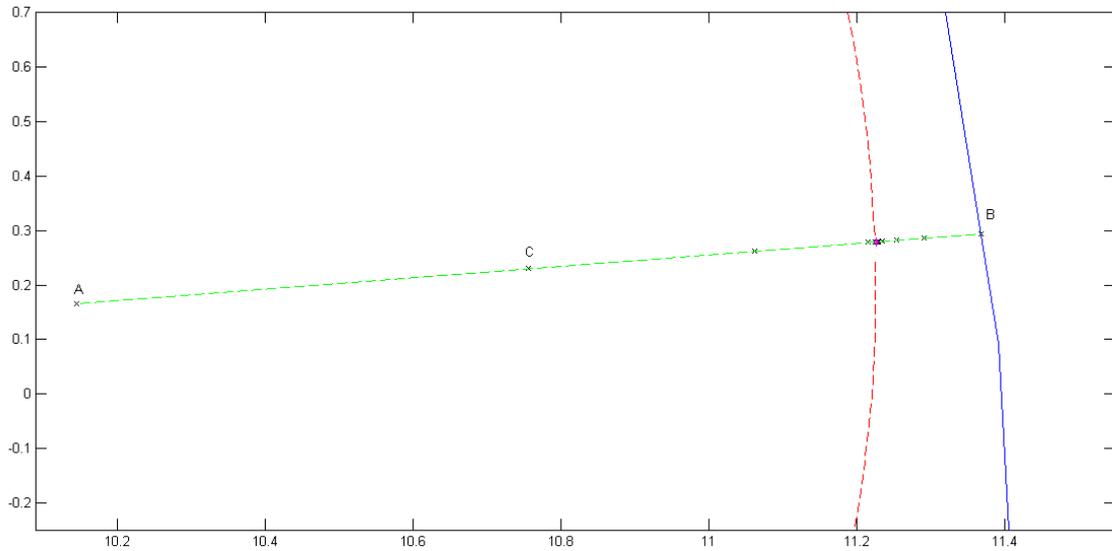
del plasma sfrutta sostanzialmente due politiche di esplorazione differenti, che si basano entrambe sull'analisi della *connection length*. Da un punto di vista puramente concettuale, la connection length può essere vista come il cammino che una particella interna al reattore percorre prima di impattare contro la prima parete. L'importanza dello studio della connection length è legato principalmente al breakdown del plasma, cioè alla fase di avviamento del TOKAMAK, in quanto è necessario che essa abbia una lunghezza minima affinché il plasma si possa portare alle condizioni di fusione. Se questa distanza è inferiore alla soglia minima, la particella, che segue la traiettoria delle linee di campo, impatterà contro la first wall prima di poter indurre il breakdown. In prossimità della frontiera, la connection length ha l'andamento riportato in figura 23.



**Figura 23 - Andamento della connection length a quota  $z = -3.4388$**

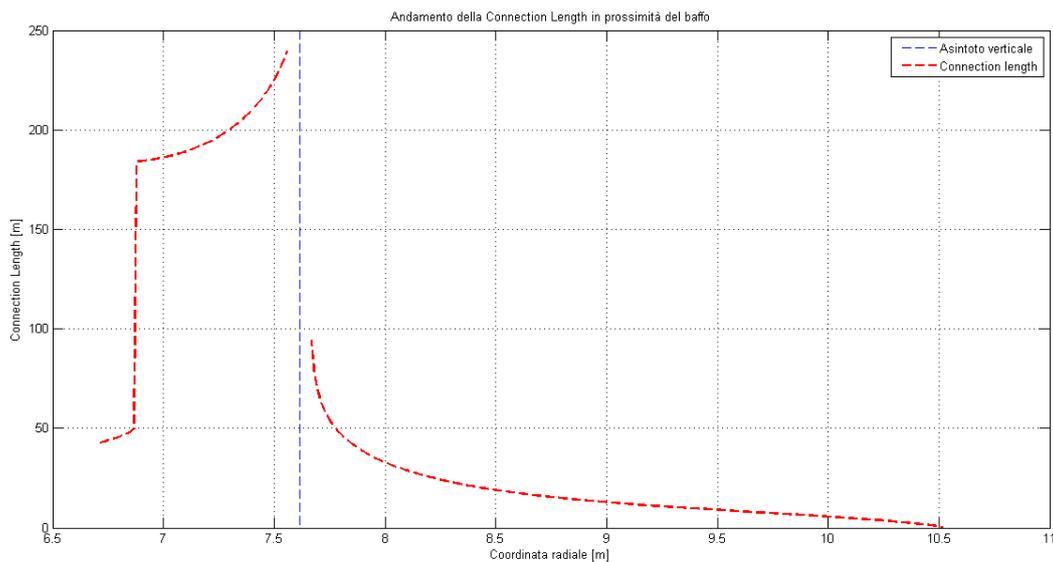
Ovviamente, all'interno della frontiera del plasma, dove per definizione le linee di campo non impattano mai contro la first wall, la connection length è infinita; si può quindi sfruttare questa informazione per definire un algoritmo a bisezione che individui la posizione della frontiera del plasma. Si scelga secondo un certo criterio una direttrice di esplorazione e due punti estremi, il punto A all'interno del plasma e il punto B sulla first wall. Si consideri dunque il punto medio C e ivi si calcoli la lunghezza della linea di campo. Se tale lunghezza risulta infinita, la frontiera del plasma sarà compresa tra C e B, mentre nel caso contrario sarà sul segmento AC. Iterando questo procedimento si riesce quindi ad individuare la posizione della frontiera del plasma sulla direttrice di

esplorazione scelta, con tolleranze che possono essere arbitrariamente fissate. Si osservi che in questo modo la lunghezza del segmento di esplorazione si riduce come  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ , dunque la convergenza dell'algoritmo dipende dalla tolleranza fissata. La figura 24 mostra quanto appena descritto.



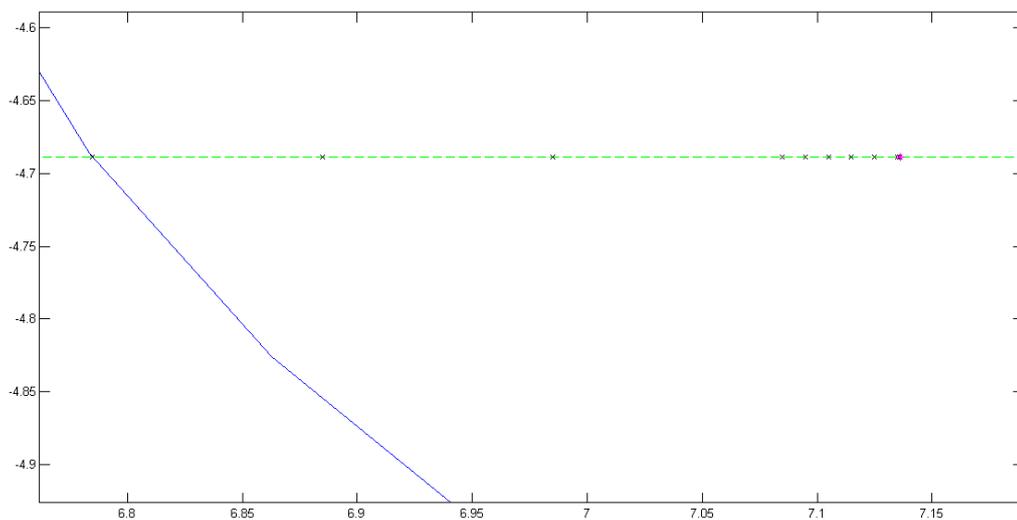
**Figura 24 - Schema di bisezione**

In prossimità del “baffo” l'algoritmo di bisezione perde di validità poiché sia a destra che a sinistra della frontiera le linee di campo hanno lunghezza finita.



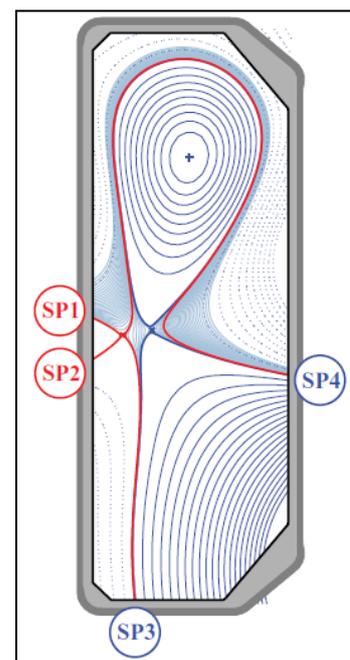
**Figura 25 - Andamento della connection length in prossimità del baffo**

Per individuare dunque il punto della frontiera occorre un algoritmo che individui il salto della connection length prima e dopo il punto del baffo (figura 25). L'algoritmo in questione parte da un punto della prima parete e, scelta una retta orizzontale di esplorazione, calcola la lunghezza della linea di campo a partire da punti sulla retta fissata distanti dal precedente di un certo passo. Se nell' $n$ -esimo punto la lunghezza della connection length risulta minore di quella nell' $(n-1)$ -esimo, l'algoritmo ritorna nel punto  $n-1$  e riparte riducendo il passo di esplorazione di un ordine di grandezza. In questo modo, dopo un certo numero di interazioni, si riesce ad individuare il punto del baffo.



**Figura 26 - Schema per l'individuazione di un punto del baffo**

L'algoritmo presentato per l'identificazione del baffo potrebbe però in verità incontrare delle problematiche nel caso di configurazioni magnetiche avanzate, come quelle studiate attualmente nel reattore svizzero TCV. La configurazione a cui si allude è quella cosiddetta a "fiocco di neve" (*Snowflake configuration*), mostrata in figura 27. Scelta infatti una direttrice di esplorazione, in questa configurazione potremmo trovare più discontinuità nell'andamento della connection length o addirittura, sfortunatamente, non accorgerci di aver saltato il punto della separatrice perché le due linee di campo a destra e



**Figura 27 - SF Configuration**

sinistra potrebbero avere la stessa lunghezza.

In figura 28 è riportata la frontiera del plasma calcolata nel caso assialsimmetrico con gli algoritmi descritti, con una tolleranza di 1 mm. La curva tratteggiata in rosso rappresenta la LCMS determinata a partire dalla risoluzione dell'equazione di Grad-Shafranov. Trattandosi di un caso assialsimmetrico, la curva individuata sarà la stessa per ciascun piano poloidale. È comunque necessario fare una importante puntualizzazione: nel caso di campo assialsimmetrico, la frontiera viene individuata con algoritmi basati sulle superfici di livello a flusso poloidale costante, dunque quello che utilizza le linee di campo viene utilizzato solamente come un benchmark. La figura 29 infine riporta la frontiera calcolata nel caso di una traslazione verticale del campo, allo scopo di verificare la consistenza del software.

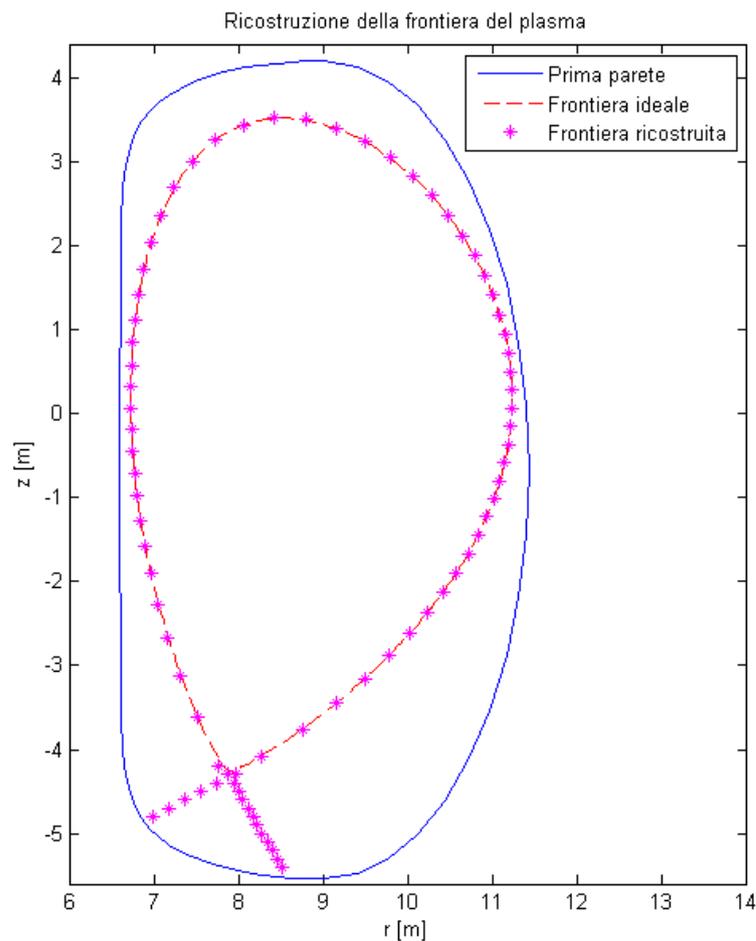
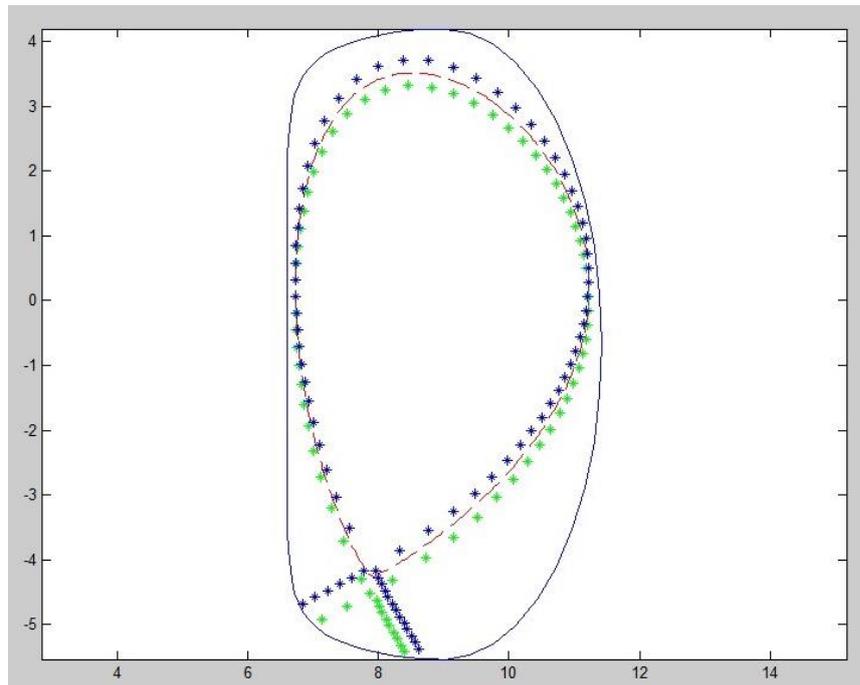


Figura 28 - Frontiera del plasma in DEMO nel caso assialsimmetrico



**Figura 29 - Contorno nel plasma con campo traslato lungo z verso l'alto (in blu) e verso il basso (in verde)**

# Capitolo IV

---

## Cenni sul calcolo parallelo

*Il capitolo quarto di questo elaborato introduce le nozioni fondamentali del calcolo distribuito, indispensabili per una buona comprensione dei vantaggi che un algoritmo parallelo presenta rispetto ad uno seriale. In particolare si farà riferimento ai parametri di speedup ed efficienza che permettono di quantificare in maniera numerica la bontà di un algoritmo parallelo. Si accennerà quindi ai modelli di Amdahl e Gustafson per l'analisi delle prestazioni di un algoritmo parallelo in funzione dei processori utilizzati, della complessità del problema e della struttura dell'algoritmo da parallelizzare.*

### IV.1 Il Calcolo parallelo

Il calcolo parallelo rappresenta una naturale evoluzione del calcolo seriale e presuppone l'utilizzazione simultanea di più computer ( o processori ) per la risoluzione di un unico problema computazionale. Affinchè un algoritmo possa essere eseguito in parallelo su più processori è necessaria una divisione in parti discrete che possono essere elaborate concorrentemente, cioè porzioni di codice non interdipendenti tra le quali è assente un qualunque scambio di informazioni. Sebbene il continuo sviluppo tecnologico abbia condotto ad architetture hardware estremamente performanti, spesso l'esecuzione di algoritmi complessi ed articolati comporta costi di esecuzione non sostenibili in termini di memoria occupata, velocità di trasmissione dei dati, velocità di esecuzione dell'algoritmo stesso. Il calcolo parallelo, che può essere organizzato in modalità differenti, rappresenta la soluzioni a suddetti limiti. Esso può essere utilizzato adoperando computer multiprocessore, collegando in rete diversi calcolatori o addirittura sfruttando la combinazione delle due circostanze. Ovviamente non tutti gli

algoritmi possono essere eseguiti in parallelo e non tutti i calcolatori possono servirsi di tale strumento: l'hardware a disposizione deve essere in grado di eseguire una parallelizzazione e il software deve essere in grado di effettuare la ripartizione delle operazioni da assegnare alle diverse cpu. Le principali applicazioni in cui questa tecnologia si è dimostrata fondamentale sono quelle di simulazione numerica di sistemi complessi, noti come “*Grand Challenge Problems*”:

- modellazione del clima globale;
- simulazioni di reazioni chimiche e nucleari;
- studio del genoma umano;
- studio delle proprietà di materiali complessi;
- simulazione di attività geologica e sismica;
- progettazione di veicoli più efficienti e sicuri.

L'esempio più evidente di un problema in cui il calcolo parallelo costituisce la soluzione ad hoc è rappresentato da quelle applicazioni che coinvolgono diverse sezioni di un codice, parte del quale si ripete identicamente su dati diversi ed indipendenti tra di loro. Basti ad esempio pensare ad un algoritmo in cui è presenti un ciclo for che esegue un numero estremamente elevato di iterazioni. Sebbene di per sé ciascuna iterazione venga eseguita in un tempo ragionevole, nel complesso la prestazione del software è seriamente compromessa dalla durata dell'intero ciclo. Risulta dunque evidente come il calcolo parallelo sia indispensabile per la determinazione della frontiera del plasma in un TOKAMAK in geometria tridimensionale e campo perturbato. MATLAB consente di eseguire un algoritmo parallelizzato sia su una rete di più calcolatori sia su un solo calcolatore multiprocessore. Nel caso della parallelizzazione dell'algoritmo in esame è stata utilizzata quest'ultima soluzione. La comunicazione tra i vari workers MATLAB è gestita dal client principale che ripartisce il codice tra i vari processori e si occupa anche di ricostruire il risultato finale. La soluzione del calcolo parallelo migliora significativamente l'onere computazionale richiesto per l'individuazione della frontiera del plasma, anche se il tempo di calcolo non risulta effettivamente inversamente proporzionale al numero di processori, dovendo portare in conto anche i tempi di comunicazione tra client e workers.

## IV.2 Prestazioni di un algoritmo parallelo

L'obiettivo principale di un algoritmo parallelo è quello di risolvere problemi che richiedono una certa complessità computazionale in tempi ragionevolmente brevi. Al conseguimento di questo risultato concorrono una serie di fattori, che dipendono innanzitutto dal tipo di hardware e dal tipo di software che viene utilizzato, dal grado di parallelizzabilità dell'algoritmo in esame e dal modello utilizzato per la parallelizzazione dell'algoritmo seriale originario. L'analisi qualitativa della bontà di un algoritmo parallelo risulta pertanto complessa perché appunto funzione di tutta questa serie di parametri che spesso dipendono anche gli uni dagli altri. Per semplificare dunque la valutazione delle prestazioni di un algoritmo parallelo si introducono alcuni parametri "semplificati" che consentono in maniera immediata di quantificare l'effettivo aumento di prestazioni sia confrontandole con quelle ottenute con l'algoritmo originale sia analizzando il comportamento dell'algoritmo al variare del numero di processi e/o *thread* impiegati. A tal proposito è anche stata sviluppata una notevole letteratura con l'obiettivo di prevedere i miglioramenti massimi attesi dalla parallelizzazione di un algoritmo sequenziale. Come sarà mostrato nei successivi paragrafi, le leggi di Amdahl e Gustafson si orientano esattamente in questo contesto.

## IV.3 Speedup ed efficienza

Lo *speedup* è un parametro che nasce dal confronto delle prestazioni dell'algoritmo originale con quello scritto in forma parallela, eventualmente riproposto in una forma tale da sfruttare al meglio la possibilità di una parallelizzazione. Dal punto di vista numerico, lo speedup è definito come segue:

$$S_p(n) = \frac{t_s(n)}{t_p(n)} \quad (4.1)$$

in cui, assegnato un numero  $p$  di processori e fissata la dimensione del problema  $n$ ,  $t_s(n)$  è il tempo di calcolo richiesto dalla migliore versione dell'algoritmo sequenziale che risolve il problema e  $t_p(n)$  è il tempo di esecuzione in parallelo.

Come è intuibile, il massimo valore di speedup ottenibile non può essere superiore al numero di processori utilizzati. Se ciò dovesse accadere, infatti, cadrebbe l'ipotesi iniziale di migliore algoritmo sequenziale che risolve il problema, che potrebbe essere risolto con prestazioni migliori utilizzando un algoritmo seriale più efficiente. Per ovviare a questa eventualità banalmente, nel calcolo dello speedup, si può utilizzare come algoritmo sequenziale di riferimento una versione seriale dell'implementazione parallela. Ciononostante potrebbe accadere che pur ricorrendo a questo accorgimento lo speedup osservato risulti superlineare (cioè  $S_p(n) > p$ ). Una possibile causa di questo comportamento è individuabile nel cosiddetto “*effetto cache*”, legato ai tempi di accesso alla memoria da parte dei vari processori: nei moderni calcolatori paralleli, all'aumentare del numero di processori aumenta anche la quantità totale di dati accumulati nelle cache dei vari processori; i tempi di accesso alla memoria si riducono drasticamente, a punto che talvolta è possibile osservare uno speedup superlineare.

Parallelamente al concetto di speedup è utilizzato quello di *efficienza*, praticamente ad esso analogo. L'efficienza indica quanto efficacemente siano utilizzati i  $p$  processori per eseguire l'algoritmo, al netto quindi dei tempi di comunicazione e sincronizzazione tra i differenti processi. Dal punto di vista matematico, l'efficienza è definita come:

$$E_p(n) = \frac{t_s(n)}{p \cdot t_p(n)} = \frac{S_p(n)}{p} \quad (4.2)$$

Ovviamente ad uno speedup lineare corrisponde un'efficienza unitaria.

#### IV.4 La legge di Amdahl

Come accennato nel secondo paragrafo, ogni algoritmo possiede intrinsecamente un certo grado di parallelismo che non è possibile modificare. Ciò equivale a dire che esiste, piccola o grande che sia, una parte di codice che deve essere eseguita sequenzialmente. La *legge di Amdahl* razionalizza proprio questo concetto e fornisce un'espressione qualitativa del massimo speedup ottenibile in funzione della parte di codice da eseguire in funzione della parte non parallelizzabile e del numero di processori adoperati. Definita di fatto la frazione  $f$  di codice non parallelizzabile e il

numero di processori a disposizione  $p$ , il tempo totale di esecuzione è dato dalla somma della razione di tempo utilizzata per eseguire la parte sequenziale, pari a  $f \cdot t_s(n)$ , e di quella necessaria per la parte parallela, pari invece a  $\frac{1-f}{p} \cdot t_s(n)$ , nell'ipotesi che questa porzione di codice sia parallelizzata con efficienza unitaria. Pertanto lo speedup massimo raggiungibile diventa:

$$S_{p,max}(n) = \frac{1}{f + \frac{1-f}{p}} \quad (4.3)$$

che tende ad  $\frac{1}{f}$  al tendere all'infinito del numero di processori utilizzati. L'andamento dello speedup è mostrato in figura 30 in funzione di diversi valori di  $f$ .

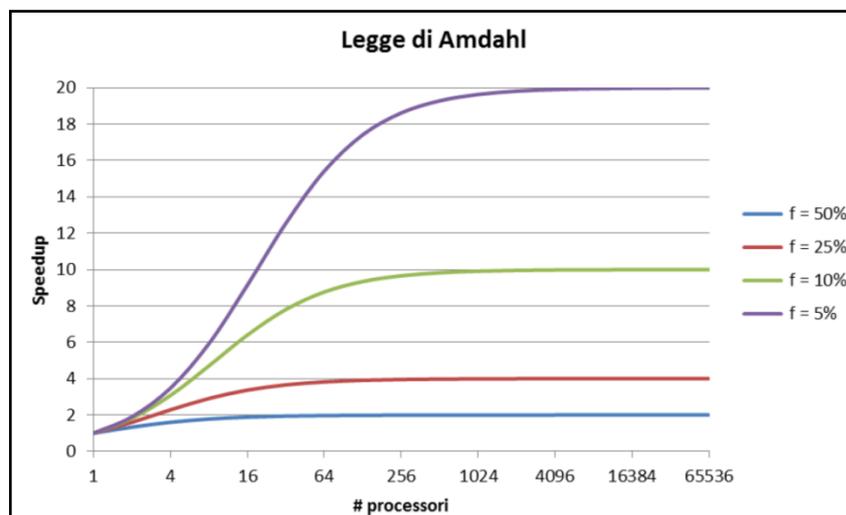


Figura 30 - Speedup previsto dalla legge di Amdahl in funzione della frazione di codice non parallelizzabile

Come osservabile dal grafico, la parte non parallelizzabile diventa determinante al crescere del numero di processori; esse deve essere quindi minimizzata all'interno del codice onde evitare che la parallelizzazione della parte restante del programma risulti inutile.

## IV.5 Scalabilità e legge di Gustafson

L'analisi del comportamento di un algoritmo parallelo al variare del numero di processori impiegati va sotto il nome di analisi di scalabilità. In particolare, un

algoritmo parallelo si dice scalabile se un incremento delle risorse hardware dà luogo ad un aumento proporzionale dell'efficienza dell'algoritmo, ossia dello speedup. Generalmente si osserva che, fissate le dimensioni del problema, un aumento dei processori oltre un certo limite non comporta più benefici significativi, e lo speedup raggiunge il suo valore asintotico. Aumentando tuttavia le dimensioni del problema si osserva un incremento dello speedup massimo ottenibile, col valore asintotico che si sposta verso un numero più elevato di processori. Variando quindi di pari passo il numero di processori e la dimensione del problema l'efficienza dell'algoritmo può essere mantenuta costante, e in linea teorica problemi di dimensione elevata possono essere risolti nello stesso tempo di problemi più modesti, allorquando si utilizzzi un numero maggiore di processori.

Come nel caso della legge di Amdahl, questo comportamento è analiticamente descritto da una legge di validità generale (sotto opportune ipotesi), che va sotto il nome di *legge di Gustafson*. Essa considera la scalabilità di un sistema avente una parte sequenziale il cui tempo di esecuzione  $\tau_s$  è indipendente dalle dimensioni del problema, e la parte restante perfettamente parallelizzabile, che viene eseguita in un tempo  $\tau_p$  inversamente proporzionale al numero di processori. Il relativo speedup è allora pari a:

$$S_p(n) = \frac{\tau_s + \tau_p(n,1)}{\tau_s + \tau_p(n,p)} \quad (4.4)$$

Con l'ipotesi di perfetta parallelizzabilità della parte non sequenziale, il suo tempo di esecuzione sarà uguale a  $\tau_p(n,p) = (t_s(n) - \tau_s)/p$ , con  $t_s(n)$  tempo totale di esecuzione dell'intero algoritmo sequenziale. L'espressione di cui sopra si riduce a:

$$S_p(n) = \frac{\frac{\tau_s}{t_s(n) - \tau_s} + 1}{\frac{\tau_s}{t_s(n) - \tau_s} + \frac{1}{p}} \quad (4.5)$$

Se, come è logico attendersi,  $t_s(n)$  aumenta monotonamente all'aumentare delle dimensioni del problema, tale rapporto tende a  $p$  per  $n$  che tende ad infinito.

Si osservi che l'andamento previsto dalla legge di Gustafson sembra contraddittorio rispetto al modello previsto da Amdahl. Tra le due leggi tuttavia intercorre

un'importante differenza di fondo: Gustafson assume infatti che la frazione di tempo impiegata per eseguire la parte sequenziale non sia più costante al variare delle dimensioni del problema, ma diminuisce all'aumentare di queste, in quanto il suo tempo di esecuzione viene posto costante e quindi indipendente da  $n$ . Ciò risulta per esempio vero, o quantomeno verosimile, in un prodotto tra matrici: trascurando infatti i costi di comunicazione, il numero di operazioni che viene parallelizzato in questo caso è proporzionale a  $n^3$ , mentre le operazioni non parallelizzabili come l'allocazione di memoria iniziale e il riempimento delle matrici richiedono uno sforzo computazionale che cresce molto più lentamente all'aumentare delle dimensioni del problema, e che quindi diventa sempre meno importante all'aumentare di  $n$ .

## IV.6 Prodotto tra matrici

Prima di affrontare un problema complesso come quello del calcolo della frontiera del plasma in presenza di un campo magnetico perturbato, per esemplificare quanto appena esposto, è opportuno analizzare un semplice caso di esempio come il prodotto tra matrici. Un semplice algoritmo di calcolo può essere facilmente dedotto dalla definizione stessa di prodotto matriciale: date due matrici  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , il loro prodotto è una matrice  $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$  il cui generico elemento  $c_{i,j}$  è pari a:

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^n a_{i,r} b_{r,j} \quad (4.6)$$

Un algoritmo per il calcolo del prodotto tra due matrici potrebbe allora essere il seguente:

```
m = 2000;  
n = 2000;  
p = 2000;  
  
A = randn(m,n);  
B = randn(n,p);  
C = zeros(m,p);  
  
for i = 1 : m  
    for j = 1 : p  
        C(i,j) = A(i,:) * B(:,j);  
    end  
end
```

La parallelizzazione dell'algorithm in ambiente MATLAB risulta alquanto banale, basta infatti sostituire al primo costrutto *for* il suo corrispettivo parallelo, detto *parfor*.

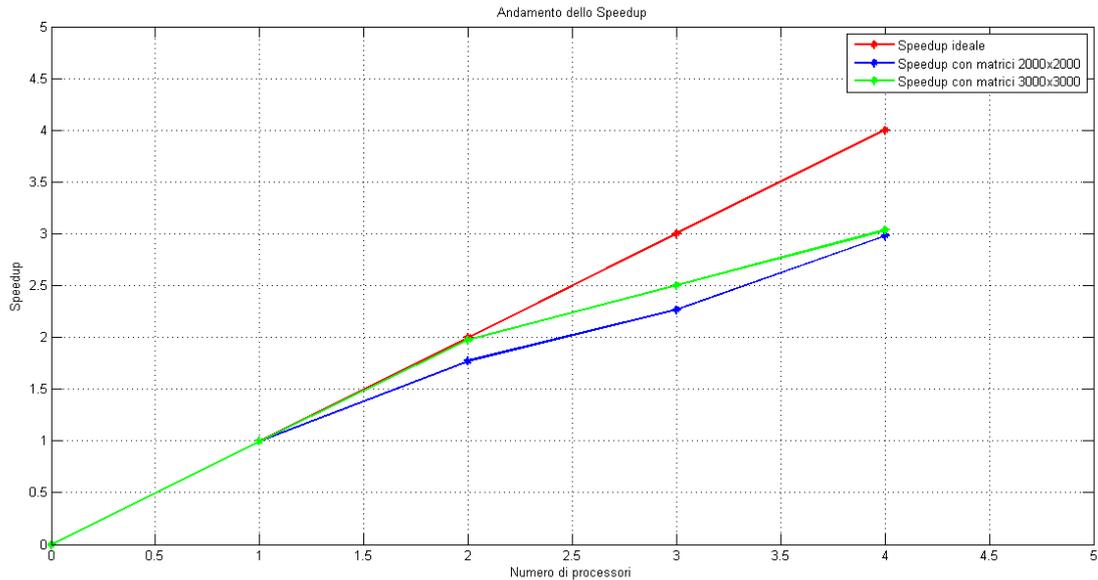
```
m = 3000;  
n = 3000;  
p = 3000;  
  
A = randn(m,n);  
B = randn(n,p);  
C = zeros(m,p);  
  
matlabpool open 4  
  
tic  
  
parfor i = 1 : m  
    for j = 1 : p  
        C(i,j) = A(i,:)*B(:,j);  
    end  
end  
  
toc  
  
matlabpool close
```

Il comando *matlabpool open* consente di richiamare un numero di worker MATLAB per il calcolo parallelo che dipende dalle caratteristiche del calcolatore in utilizzo. Per l'analisi dell'algorithm è stato utilizzato un processore Intel® Core™ M330 @ 2.13 GHz. La seguente tabella riporta i dati ottenuti dall'elaborazione del prodotto tra due matrici quadrate di dimensioni 2000 per 2000 e 3000 per 3000.

# Processori	Matrici 2000 x 2000			Matrici 3000 x 3000		
	Tempo [s]	Speedup	Efficienza	Tempo [s]	Speedup	Efficienza
1	146.28	1	100.00	650.50	1.00	100.00
2	82.51	1.77	88.65	329.02	1.98	98.85
3	64.47	2.67	75.63	259.78	2.50	83.47
4	49.09	2.98	74.50	214.27	3.04	75.90

La figura 30 riporta l'andamento dello speedup in funzione del numero di processori utilizzati, confrontando i risultati ottenuti nei due casi presi in esame con quello ideale (lineare) in rosso. Come è evidente, l'andamento dello speedup reale si allontana sempre

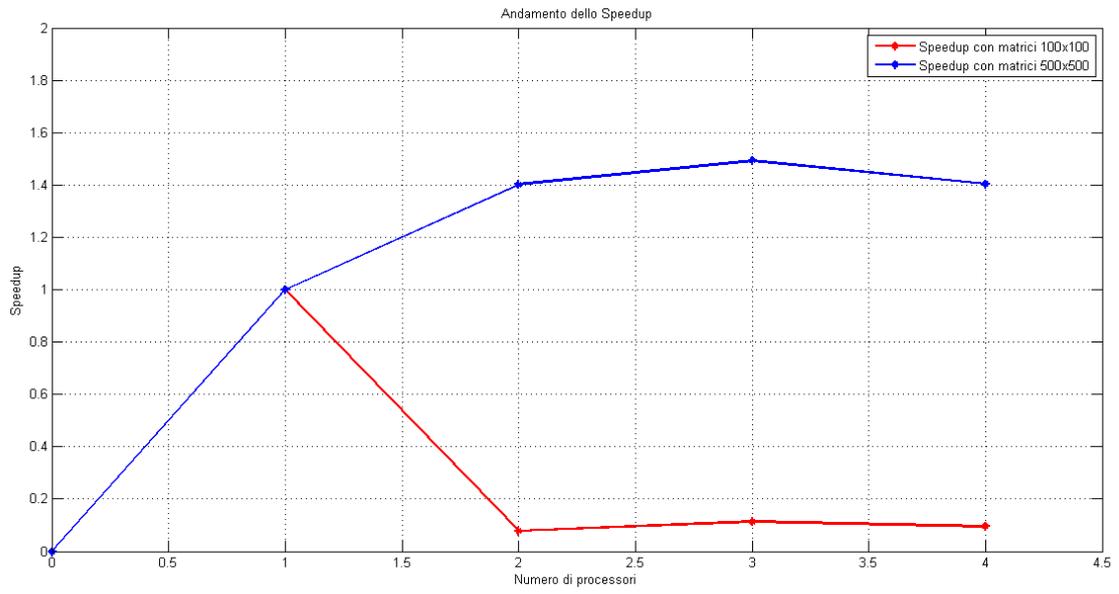
più da quello ideale al crescere del numero di processori. Bisogna comunque tenere presente che nell'analisi condotta il processore utilizzato è un dual core e dunque i quattro processori sono virtuali e non fisici.



**Figura 31 - Andamento dello speedup nella parallelizzazione dell'algoritmo per il calcolo del prodotto tra due matrici**

Si osservi che al crescere delle dimensioni delle matrici lo speedup migliora avvicinandosi a quello ideale. Un tale comportamento può essere giustificato dal fatto che, al crescere della grandezza del problema, l'aliquota di tempo impiegata per lo scambio dei dati tra il processore master e quelli slave pesa di meno sul tempo complessivo di elaborazione. A conferma di quanto appena affermato, la figura 31 riporta l'andamento dello speedup nel caso di prodotto di matrici di dimensioni minori.

# Processori	Matrici 100 x 100			Matrici 500 x 500		
	Tempo [s]	Speedup	Efficienza	Tempo [s]	Speedup	Efficienza
<b>1</b>	<b>0.03</b>	<b>1</b>	<b>100.00</b>	<b>2.23</b>	<b>1.00</b>	<b>100.00</b>
<b>2</b>	<b>0.44</b>	<b>0.08</b>	<b>3.94</b>	<b>1.59</b>	<b>1.40</b>	<b>70.00</b>
<b>3</b>	<b>0.30</b>	<b>0.11</b>	<b>3.78</b>	<b>1.49</b>	<b>1.49</b>	<b>49.67</b>
<b>4</b>	<b>0.36</b>	<b>0.10</b>	<b>2.39</b>	<b>1.59</b>	<b>1.40</b>	<b>35.00</b>



**Figura 32 - Andamento dello speedup nel caso di matrici di dimensioni minori**

# Capitolo V

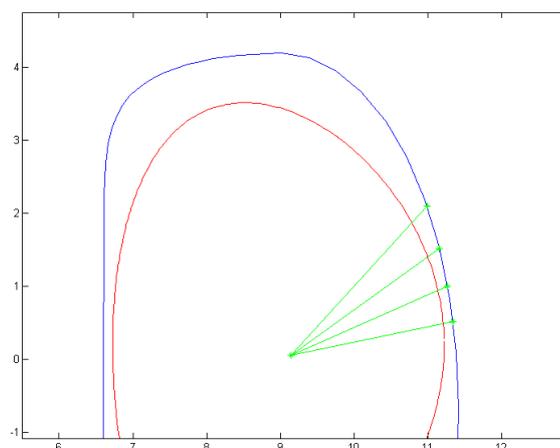
---

## Applicazioni e risultati

*Il capitolo conclusivo di questa tesi di primo livello espone i risultati conseguiti nel calcolo della frontiera del plasma in geometria tridimensionale in presenza di un campo magnetico perturbato, evidenziando i vantaggi ottenuti ricorrendo alla parallelizzazione del software.*

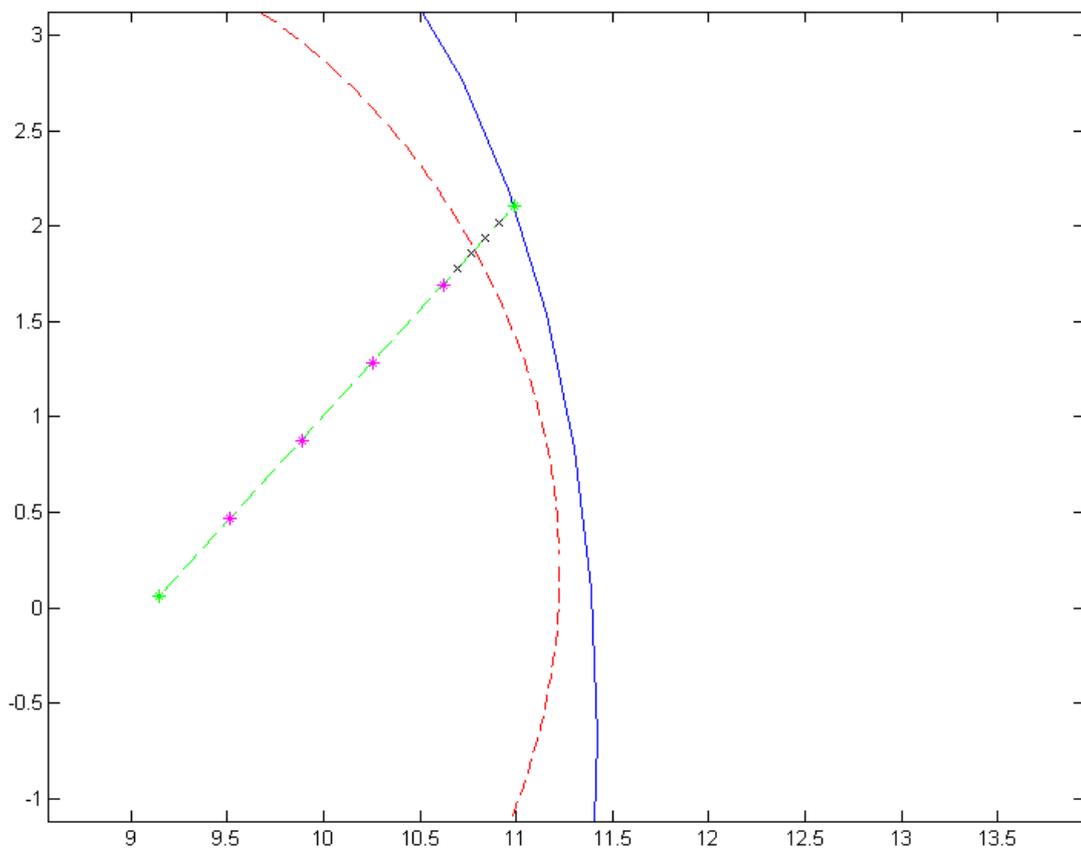
### V.1 Calcolo della frontiera del plasma con campo assialsimmetrico

Il tracciamento della frontiera del plasma è stato già affrontato nel capitolo III accennando solamente al problema dell'onere computazionale richiesto. La parallelizzazione dell'algoritmo può avvenire con soluzioni differenti. La prima presa in considerazione è quella che sfrutta la parallelizzazione assegnando a ciascun processore una direttrice differente lungo cui esplorare le linee di campo e determinare il punto della frontiera. L'algoritmo utilizzato è quello di bisezione descritto nel paragrafo III.5.



**Figura 33 - Esempio di alcune direttrici di esplorazione**

Un'altra soluzione consiste invece nel dividere il segmento di esplorazione in 5 parti e calcolare in parallelo la lunghezza delle linee di campo a partire dai 4 punti intermedi individuati. Una volta terminata l'integrazione è possibile stabilire i due nuovi estremi, uno esterno ed uno interno alla frontiera, che definiscono il nuovo sub-segmento su cui ripetere iterativamente lo stesso procedimento. Con la quadrisezione la distanza tra il punto esterno e il punto interno alla frontiera decade come  $\left(\frac{1}{5}\right)^n$  piuttosto che  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ , per cui il punto della plasma-wall gap dovrebbe essere calcolato più rapidamente.



**Figura 34 - Schema di quadrisezione**

La figura 34 mostra lo schema di quadrisezione adoperato. I punti in viola rappresentano i punti determinati nella prima iterazione: poiché le linee di campo che partono da tali punti hanno tutte lunghezza infinita, il nuovo segmento di esplorazione è quello che ha per estremi il punto in verde e quello in viola più esterno. Nella seconda iterazione i punti individuati sono quelli in nero: procedendo in questo modo si riesce quindi ad individuare il punto della frontiera con una tolleranza assegnata.

Infine, un altro possibile approccio al problema, che risulta però inutile nel caso di campo assialsimmetrico, è quello di assegnare a ciascun processore un piano poloidale su cui determinare la frontiera del plasma.

Nel caso di campo assialsimmetrico il risultato del calcolo della frontiera è mostrata nelle figure 35-36-37, dove è stata tracciata anche una linea di campo interna alla frontiera che si osserva non impatta mai contro la prima parete.

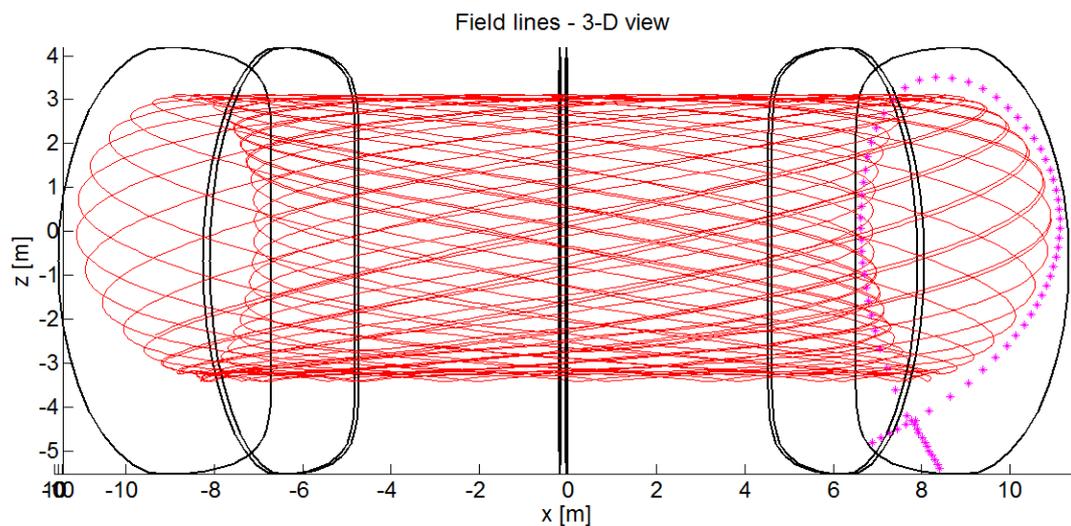


Figura 35 - Frontiera del plasma e tracciamento di una linea di campo interne alla frontiera

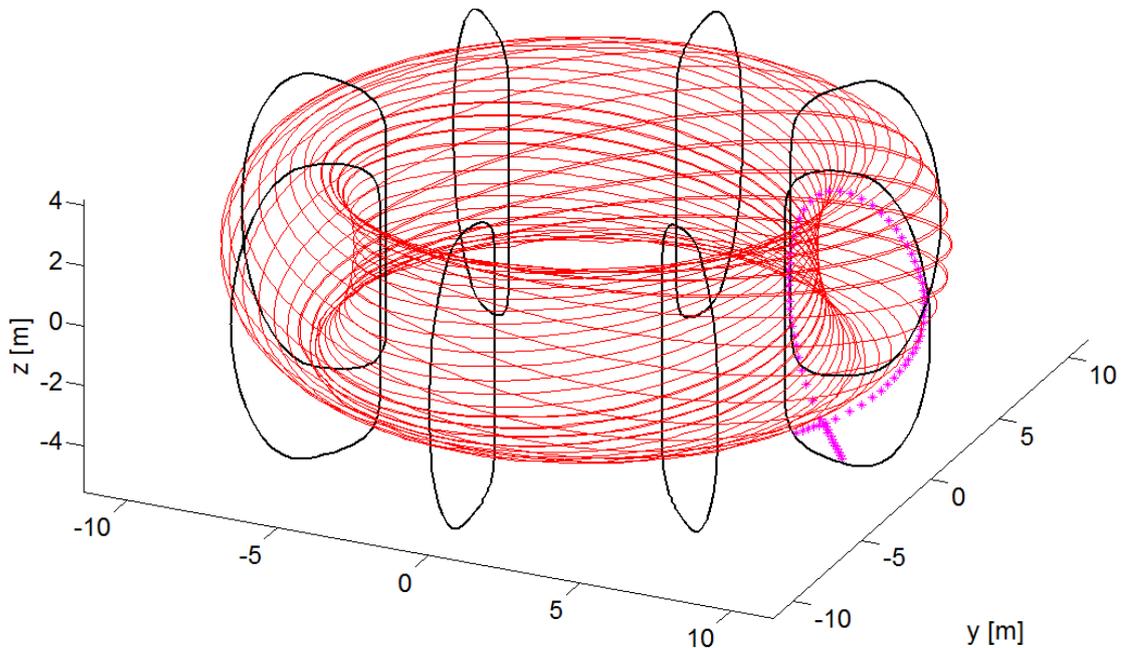


Figura 36 - Frontiera del plasma e linea di campo, vista prospettica

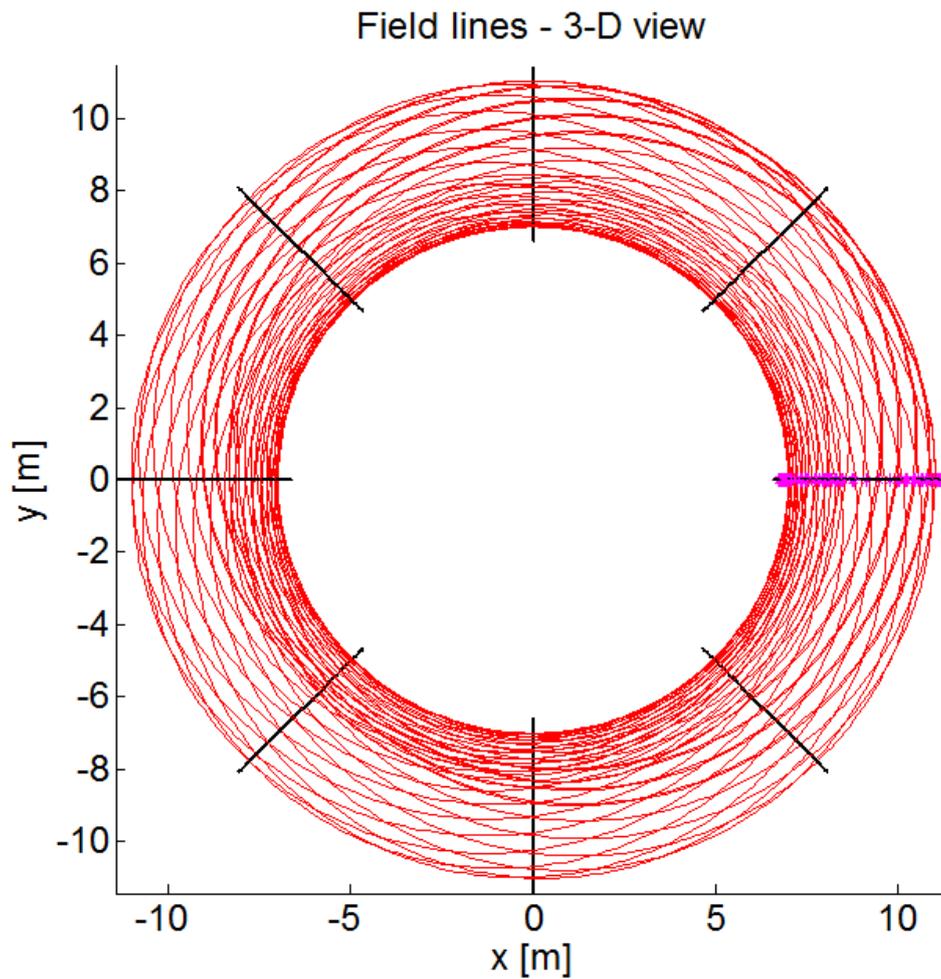
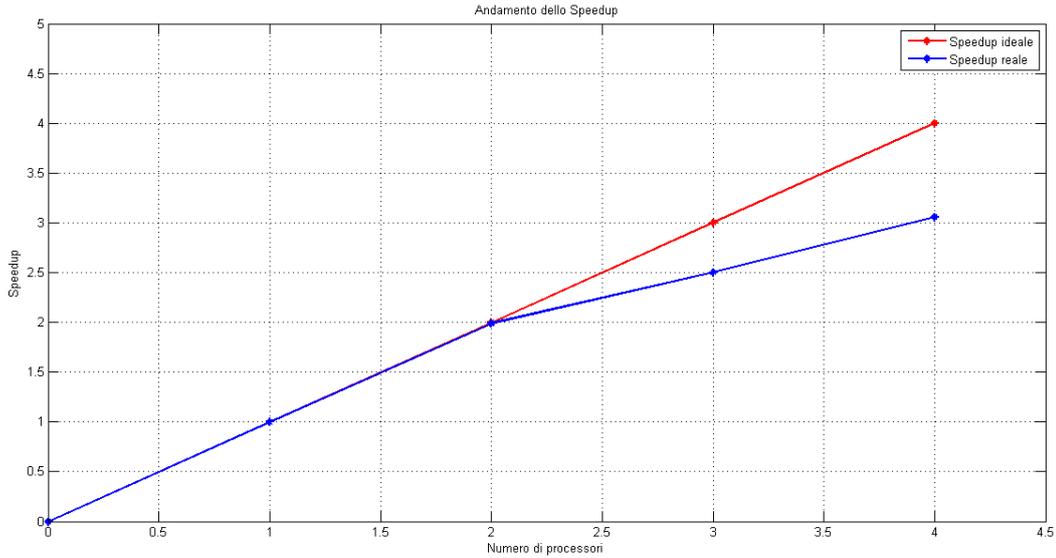


Figura 37 - Frontiera del plasma e linea di campo, vista dall'alto

Possiamo quindi finalmente esaminare le prestazioni ottenute con la parallelizzazione ricorrendo alle strategie prima descritte.

# Processori	Direttrici			Quadrisezione		
	Tempo [s]	Speedup	Efficienza	Tempo [s]	Speedup	Efficienza
1	13653.63	1.00	100.00	32435.27	1.00	100.00
2	6853.44	1.99	99.62	<i>Configurazione non esaminata</i>		
3	5458.76	2.50	83.37	<i>Configurazione non esaminata</i>		
4	4449.10	3.06	76.72	12062.05	2.69	67.23

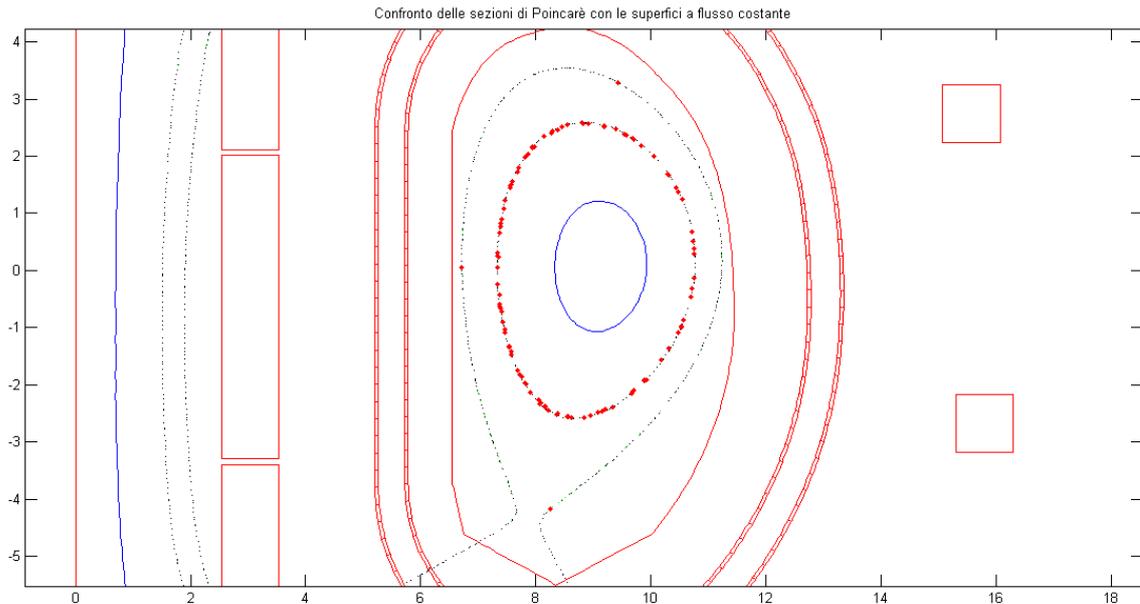


**Figura 38 - Andamento dello speedup nella parallelizzazione dell'algoritmo a direttrici**

Nel caso di campo assialsimmetrico, le superfici magnetiche sono superfici a flusso costante, infatti è banale verificare, applicando la (2.13) e la (2.15), che il campo di induzione magnetica è ortogonale al gradiente del flusso:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \cdot \nabla \psi &= B_r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + B_z \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + B_\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \\
 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mathbf{0} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \mathbf{0} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Noto allora il flusso nel piano poloidale, è possibile ricavare tramite una griglia le superfici a flusso costante e quindi quelle magnetiche. La figura 39 mostra questa importante proprietà del campo assialsimmetrico. Considerati due punti del piano poloidale, uno interno ed uno esterno alla frontiera, è immediato osservare come i diagrammi di Poincarè (costituiti dall'insieme dei punti di intersezione della linea di campo con un piano poloidale qualsiasi) si sviluppino sulle superfici a flusso costante che passano per i punti da cui partono le linee di campo.

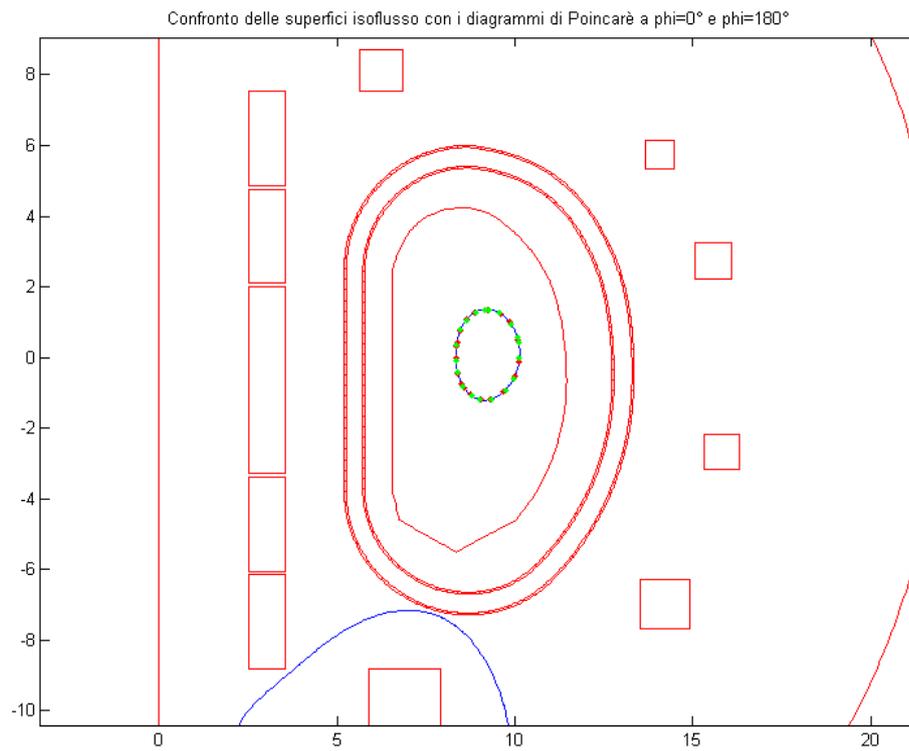


**Figura 39 - Diagrammi di Poincarè per due linee di campo (una interna ed una esterna alla frontiera) e superfici a flusso costante**

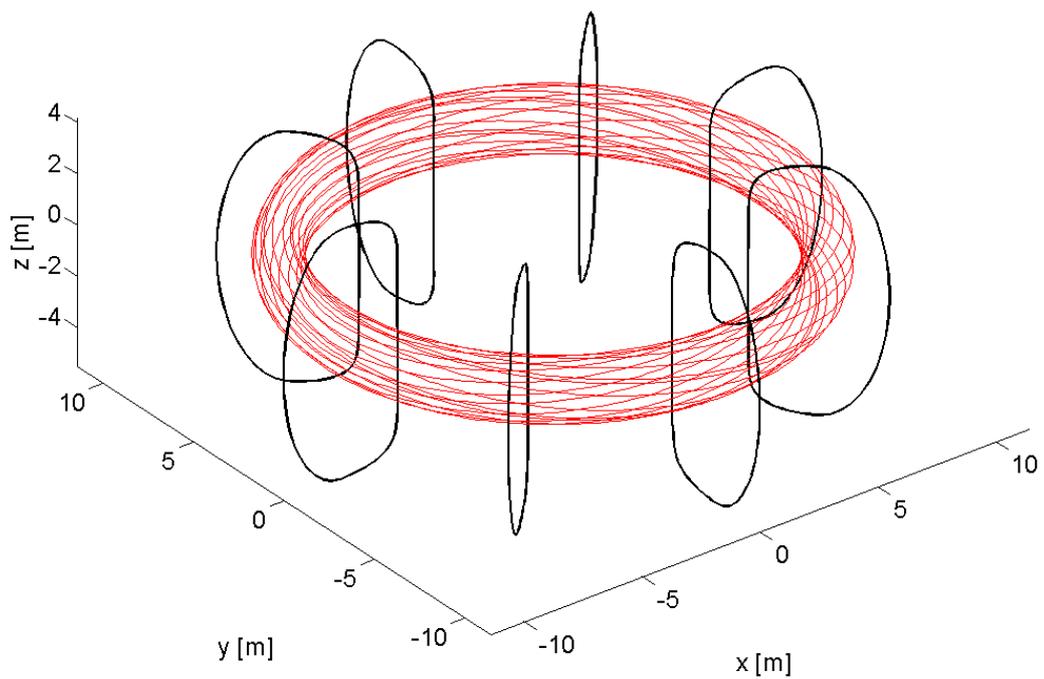
## V.2 Calcolo della frontiera del plasma con campo perturbato

Si vuole adesso esaminare la frontiera del plasma nel caso in cui il campo magnetico all'interno del TOKAMAK risulti perturbato. Proprio in questo contesto l'algoritmo presentato acquisisce un ruolo fondamentale perché non è più possibile risalire alla frontiera dalle mappe a flusso costante. Nel caso di perturbazioni non assialsimmetriche, infatti, il campo magnetico perde questa importante proprietà e il campo di induzione non risulta più ortogonale al gradiente del flusso. Se la perturbazione tuttavia lascia il campo simmetrico, il metodo delle mappe a flusso costante non perde di validità. Si consideri ad esempio una perturbazione uniforme di 100 mT rivolta in direzione dell'asse del TOKAMAK. Il campo risultante è ancora assialsimmetrico e quindi è possibile ricostruire le superfici a flusso costante.

La figura 41 e la figura 40 mostrano rispettivamente la traiettoria di una linea di campo e il relativo diagramma di Poincarè nei piani poloidali a  $\varphi = 0^\circ$  e  $\varphi = 180^\circ$ . Risulta molto semplici verificare da entrambi i grafici che le linee di campo si districano anche in questo caso su superfici a flusso costante.

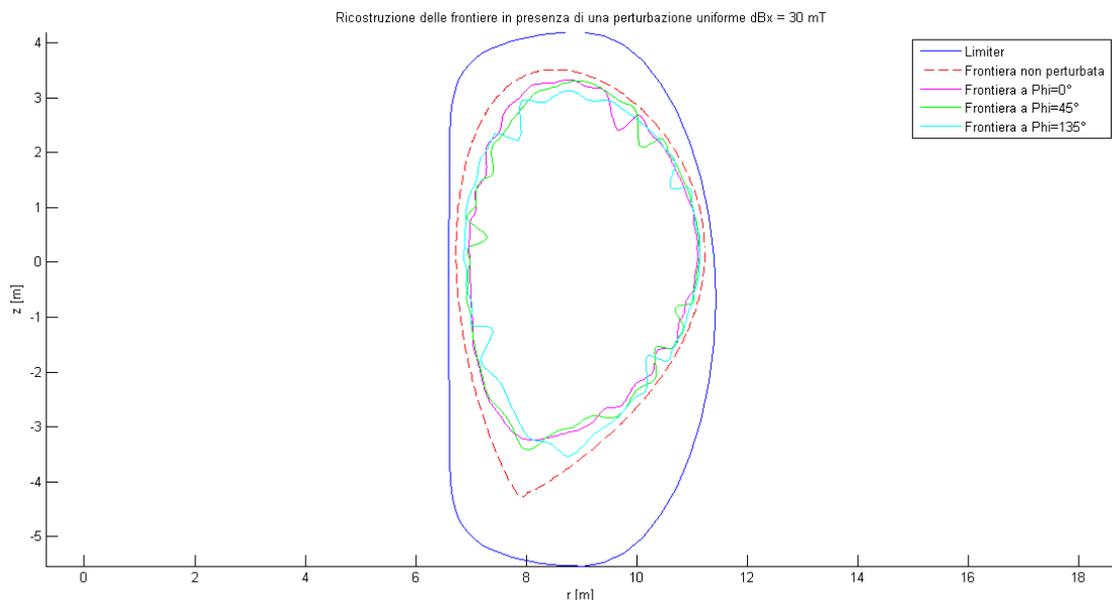


**Figura 40 - Mappe a flusso costante con perturbazione uniforme  $\delta B_z = 100$  mT e diagramma di Poincarè per una linea di campo con origine nel punto  $(8.3700; 0; 0.44)$  [Coordinate cilindriche]**



**Figura 41 - Traiettoria di una linea di campo magnetico nel caso di una perturbazione  $\delta B_z = 100$  mT**

Come perturbazione non assialsimmetrica è stato scelto molto banalmente un campo magnetico uniforme diretto lungo uno degli assi coordinanti, nel nostro caso lungo l'asse  $x$ , di intensità 30 mT. Come ampiamente anticipato, nel caso di campo non assialsimmetrico è estremamente necessaria la parallelizzazione del codice perché la frontiera deve essere calcolata per più piani poloidali. Nel caso in esame, poiché il campo perturbante è uniforme ed è sovrapposto ad uno assialsimmetrico, il campo magnetico risultante sarà simmetrico rispetto all'asse  $x$ , per cui sarà sufficiente individuare la frontiera nei soli piani poloidali che stanno nel semipiano destro o sinistro dell'asse  $x$ . I piani scelti solo quelli che hanno coordinata angolare  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 135^\circ$ .



**Figura 42 - Frontiere del plasma nel caso di una perturbazione uniforme dBx = 30 mT**

La figura 42 mostra le separatrici calcolate nel caso perturbato. L'irregolarità delle frontiere individuate tuttavia lascia alcune perplessità sulla correttezza del risultato. Le cause di tali irregolarità vanno ricercate nei criteri di classificazione di una linea di campo come interna o esterna alla regione del plasma. Nell'algoritmo utilizzato infatti, una linea di campo viene definita infinita se la sua lunghezza giunge ad un valore di riferimento prima di impattare contro il limiter. Nel caso di campo assialsimmetrico, tale parametro di riferimento è stato maggiorato di un fattore 25 rispetto al caso assialsimmetrico (la massima lunghezza di integrazione è di circa cinque chilometri e mezzo), tuttavia tale accortezza non è stata sufficiente ad identificare una frontiera

regolare. Il comportamento anomalo delle linee di campo in tale configurazione magnetica può essere meglio evidenziato dai relativi diagrammi di Poincaré.

Volendo inquadrare meglio il problema, possiamo esaminare le seguenti possibilità:

1. se, con una lunghezza di riferimento grande ma finita, la linea di campo intercetta la parete, questa linea è sicuramente al di fuori della separatrice;
2. se, con una lunghezza di riferimento grande ma finita, la linea di campo non intercetta la parete possiamo avere due casi differenti:
  - a. se, aumentando la lunghezza di riferimento la linea non intercetta comunque la parete, allora la linea di campo è interna alla frontiera;
  - b. se, aumentando la lunghezza di riferimento, la linea intercetta la parete, allora essa è esterna alla frontiera.

La distinzione tra le circostanze 2.a e 2.b è difficile poiché non si può stabilire aprioristicamente dopo quanti giri effettivi la linea di campo possa impattare contro la camera da vuoto e di conseguenza non è possibile definire una lunghezza di riferimento che consenta di etichettare definitivamente una linea di campo come interna o esterna.

Per risolvere allora il problema basta esaminare i diagrammi di Poincaré delle linee di campo, che consentono di "predire" il comportamento effettivo della linea di campo prescindendo dalla sua lunghezza, in particolare una linea di campo si può definire interna alla regione del plasma se essa risulta "chiusa" o "quasi chiusa", rispettivamente se:

- i punti del diagramma di Poincaré coprono l'intero arco poloidale (ritornando quindi su sé stessi all'aumentare del numero di giri);
- i punti del diagramma di Poincaré non coprono l'intero arco poloidale ma ritornano comunque vicini al punto iniziale, con una distanza minore della tolleranza richiesta per l'identificazione della frontiera.

Adottando dunque questo criterio è possibile individuare un settore del piano poloidale all'interno del quale la separatrice sarà confinata.

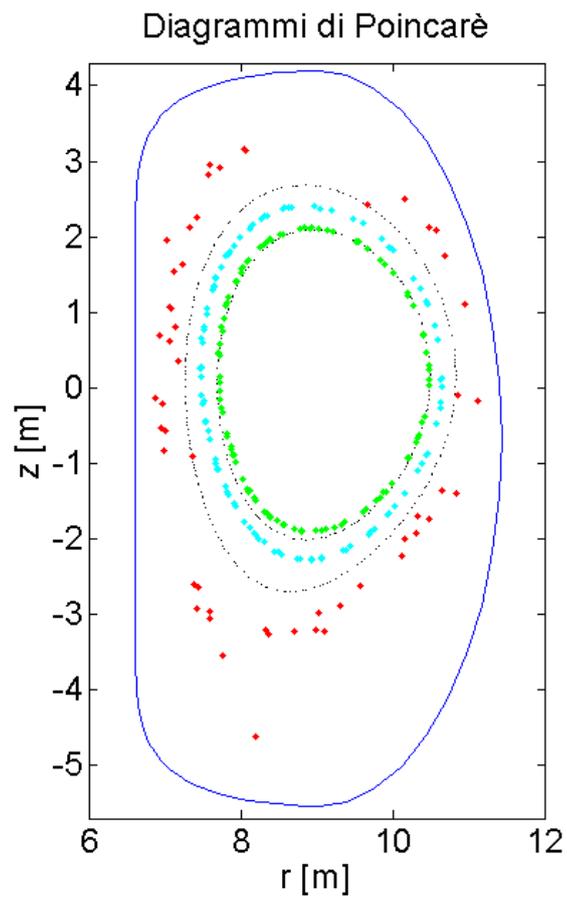


Figura 43 - Diagrammi di Poincarè delle linee di campo riportate in figure 44,45,46

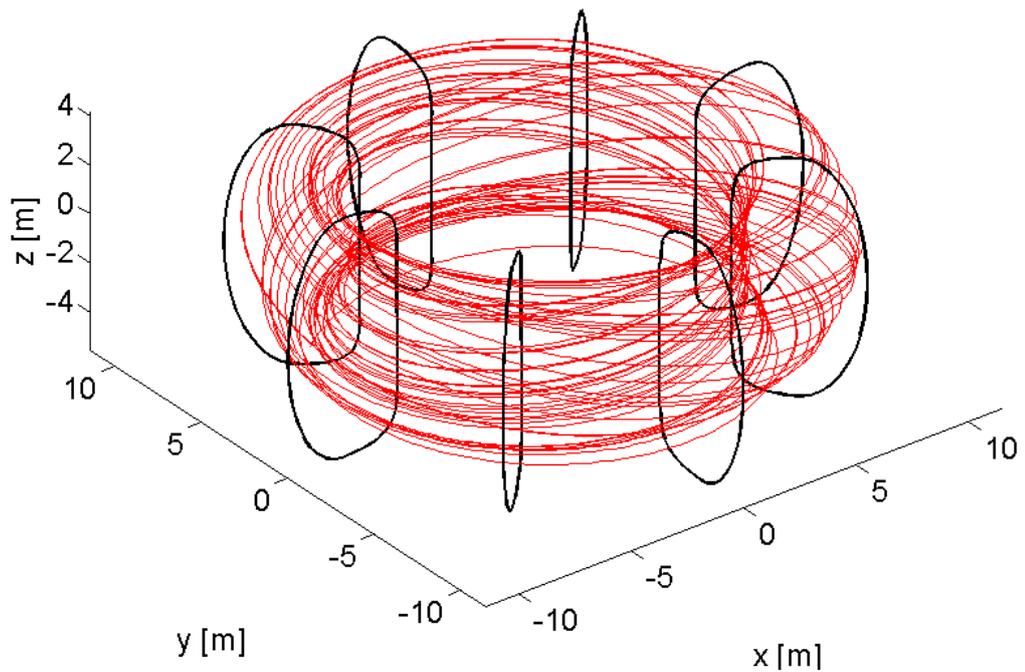


Figura 44 - Linea di campo esterna a partire dal punto in rosso in figura 47

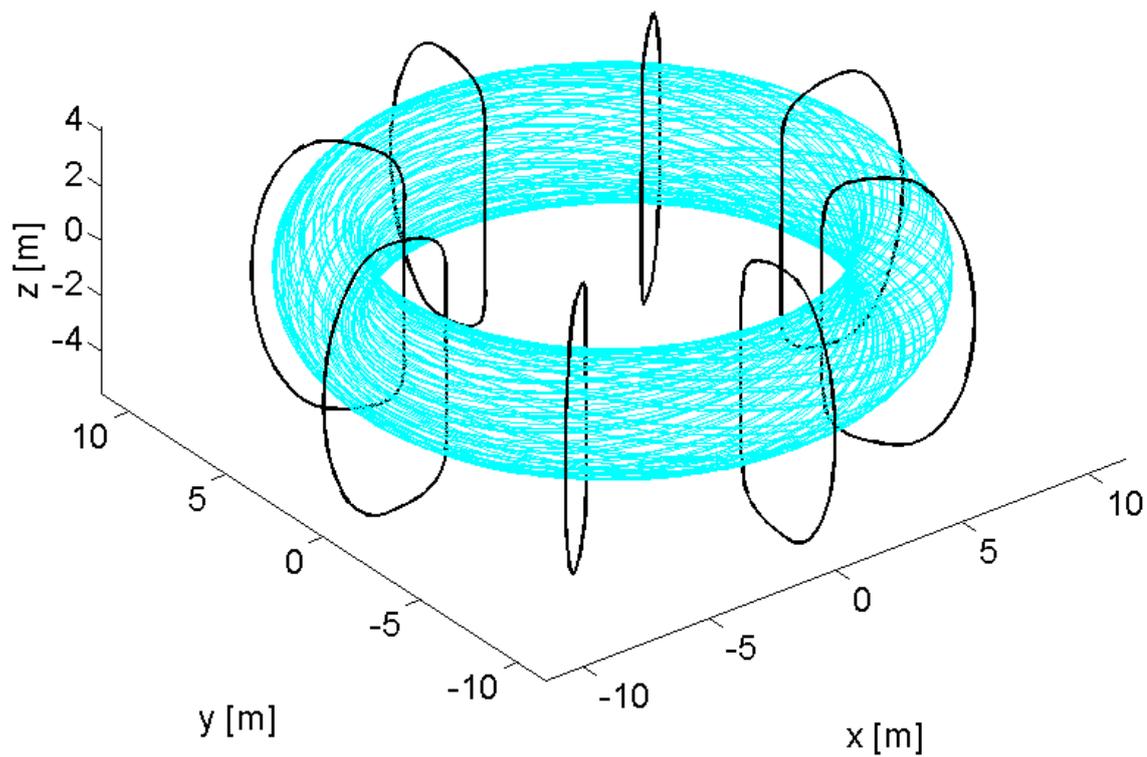


Figura 45 - Linea di campo interna a partire dal punto in azzurro in figura 47

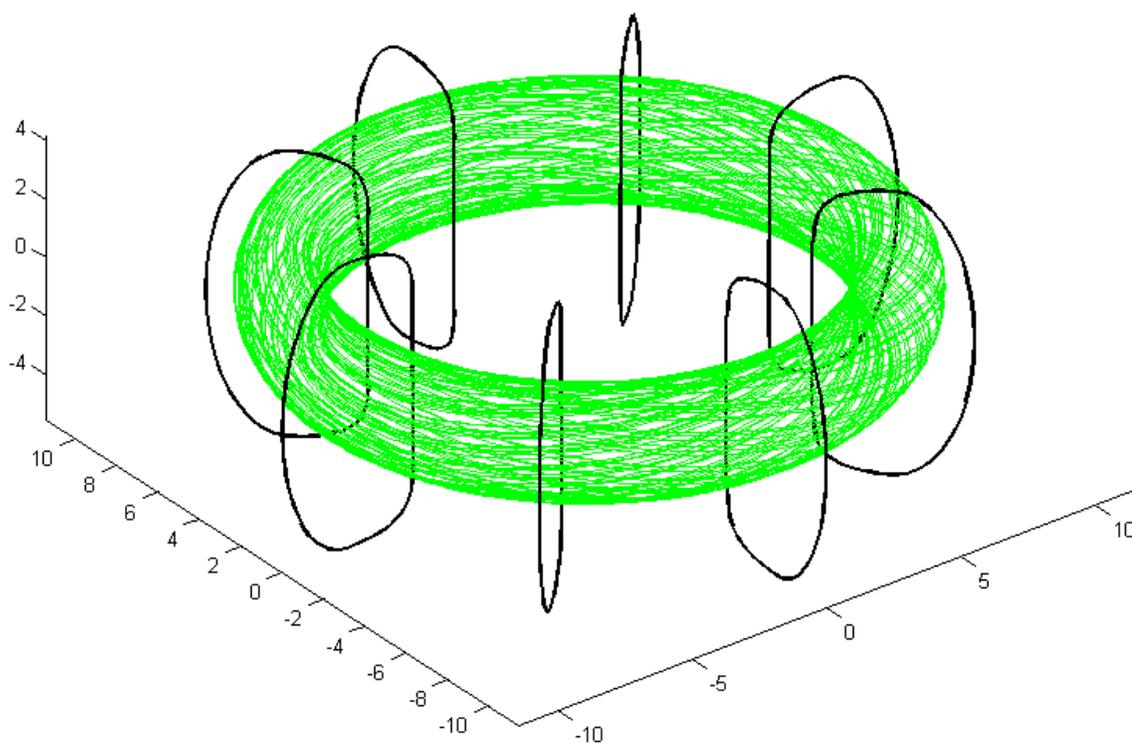
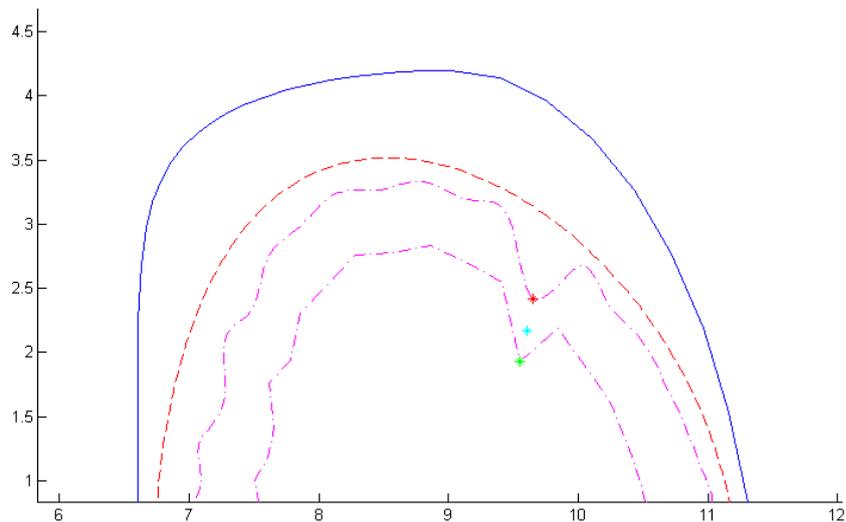


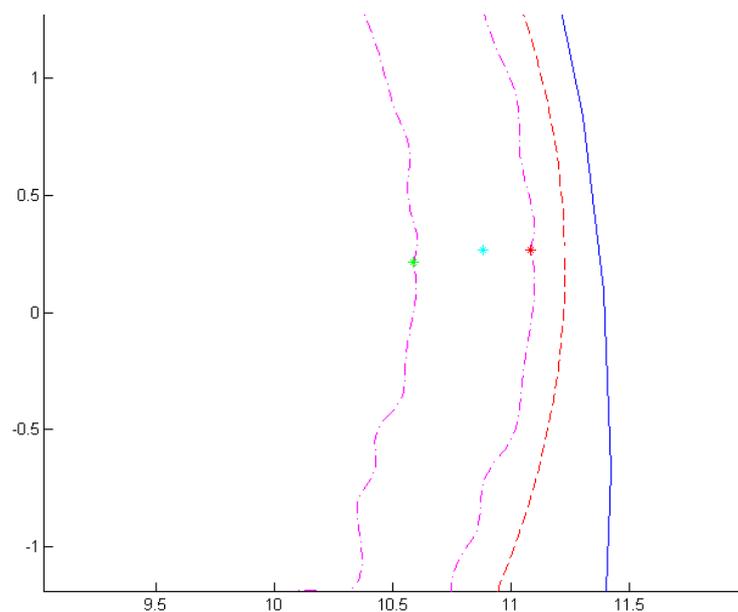
Figura 46 - Linea di campo interna a partire dal punto in verde in figura 47

La figura 47 mostra i punti da cui sono state calcolate le linee di campo nelle figure 44,45 e 46. Come si può osservare, le linee di campo interne hanno un diagramma di Poicarè che percorre un giro poloidale completo, dunque sono candidate ad essere classificate come linee di campo esterne. La linea di campo in figura 44 è invece esterna perché impatta la parete anche dopo aver percorso un numero molto elevato di giri.

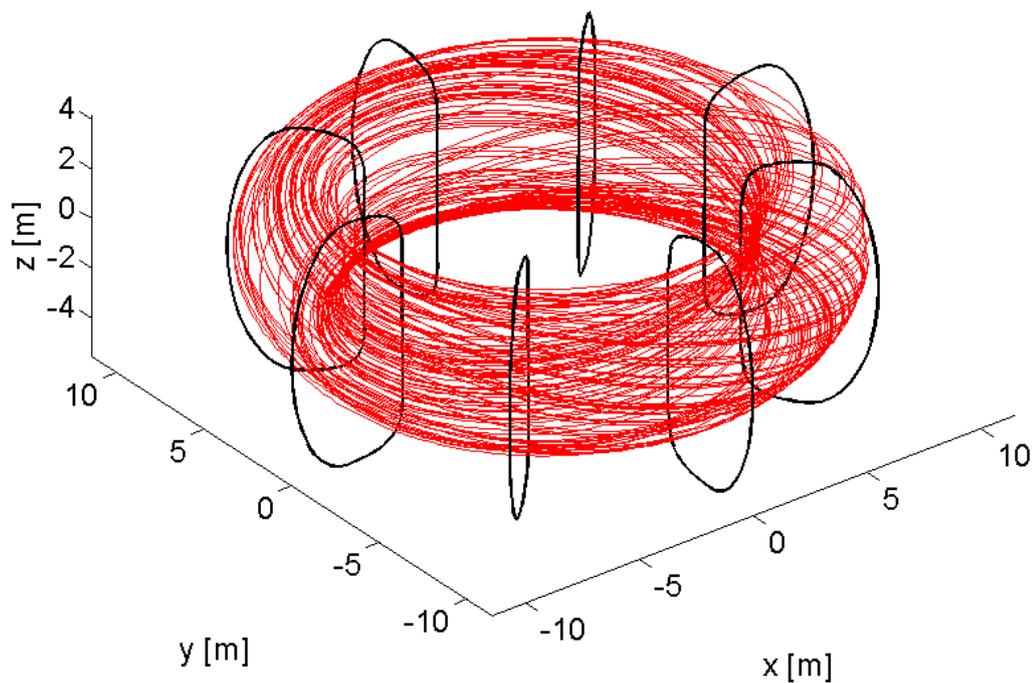


**Figura 47 - Punti dai quali partono le linee di campo nelle figure 44, 45 e 46**

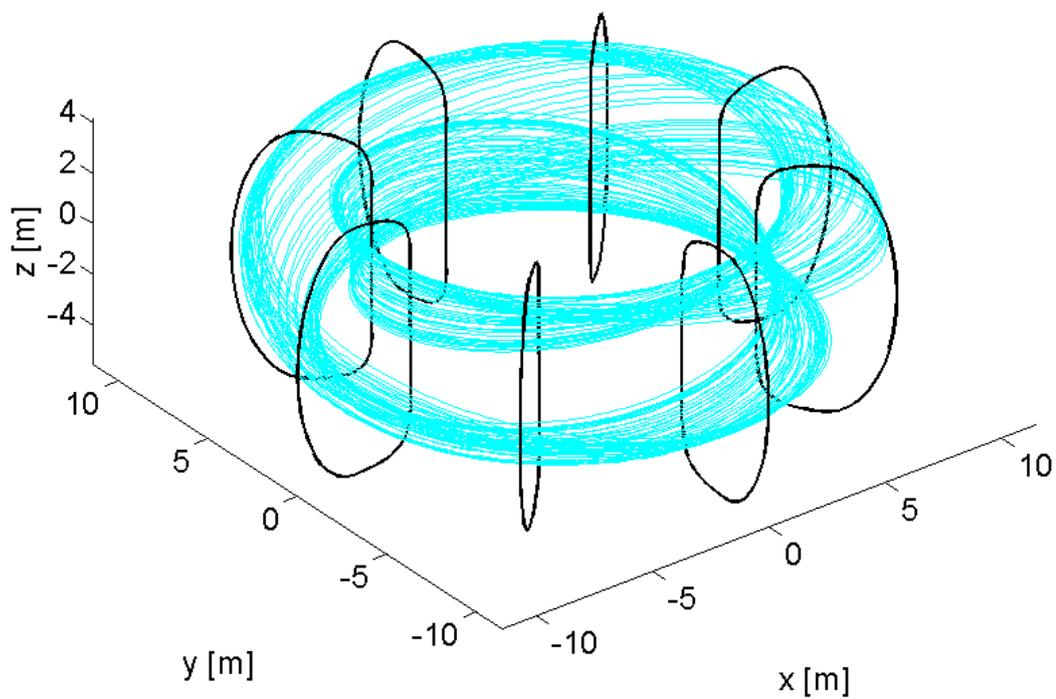
Osserviamo adesso il comportamento delle linee di campo calcolate a partire dai punti indicati in figura 48.



**Figura 48 - Punti di partenza per l'integrazione delle linee di campo in figura 49,50 e 51**



**Figura 49 - Linea di campo esterna alla regione di collocazione della frontiera**



**Figura 50 - Linea di campo intermedia alla regione di collocazione della frontiera**

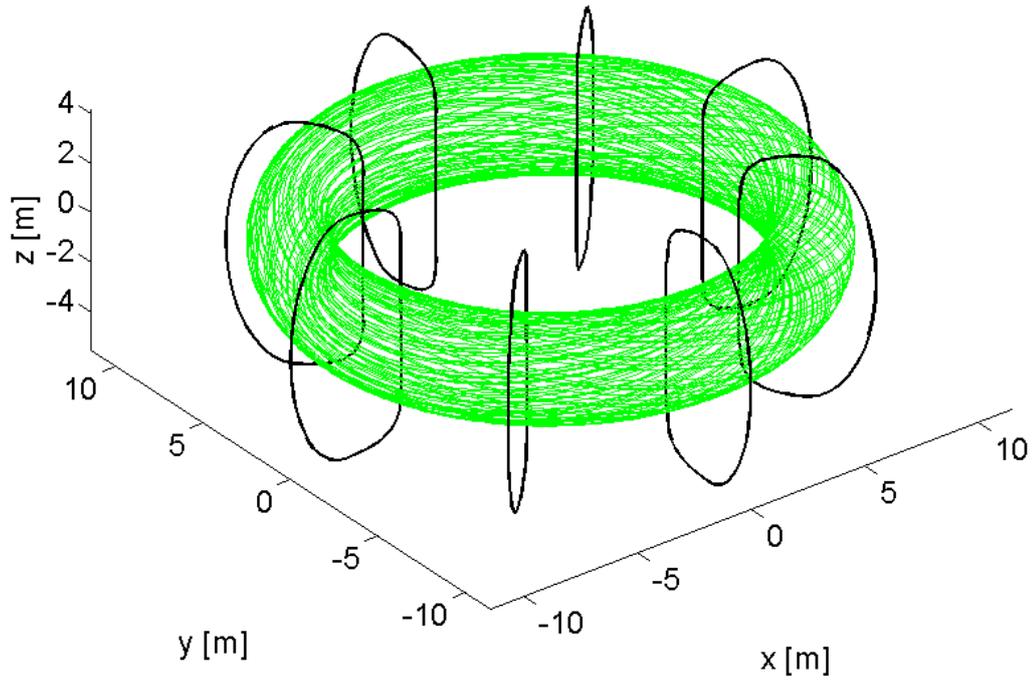


Figura 51 - Linea di campo interna alla regione di collocazione della frontiera

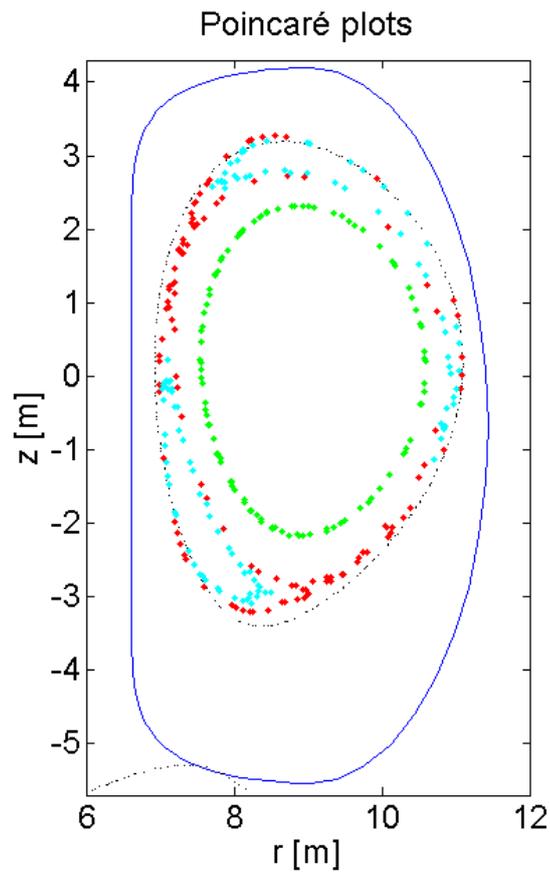
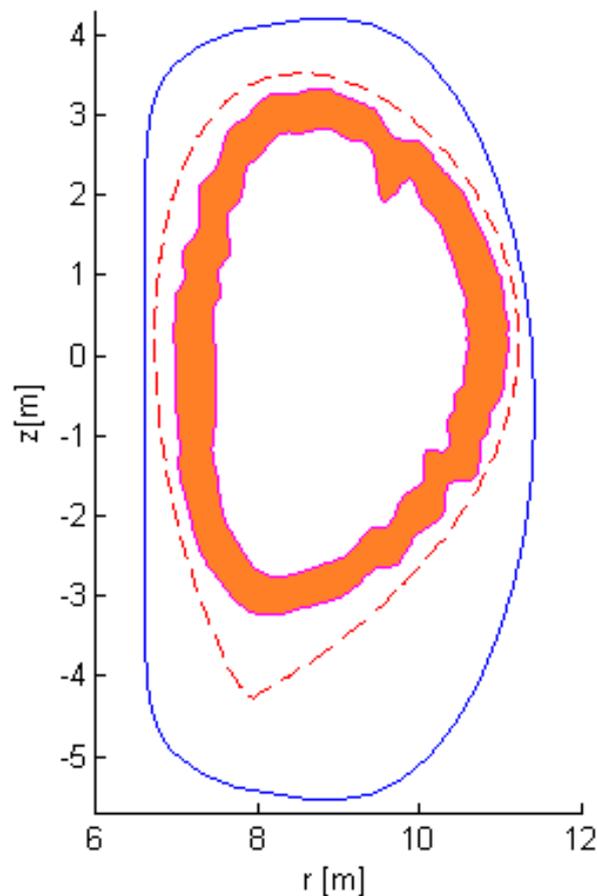


Figura 52 - Diagrammi di Poincarè per le linee di campo in figure 49,50 e 51

L'analisi dei diagrammi di Poincarè in figura 52 mostra che la linea di campo tracciata in rosso è molto probabilmente una linea di campo esterna poiché la sezione di Poincarè irregolare lascia intendere che, all'aumentare della lunghezza di integrazione, questa andrà ad impattare contro la prima parete. La linea di campo tracciata in verde è sicuramente interna in quanto il proprio diagramma di Poincarè compie un intero giro poloidale. La linea di campo in azzurro invece esibisce un comportamento più strano: la sua traiettoria non segue una superficie regolare e il relativo diagramma di Poincarè non compie un giro poloidale completo. Tuttavia i punti del diagramma ritornano molto vicini al punto iniziale, dunque se tale vicinanza fosse al di sotto della tolleranza richiesta, allora tale linea di campo sarebbe candidata ad essere considerata come linea di campo interna alla regione del plasma.

A valle di quest'analisi è quindi possibile definire un settore del piano poloidale in cui la frontiera del plasma è sicuramente contenuta.



**Figura 53 - Regione in cui è contenuta la frontiera del plasma nel piano poloidale a  $\Phi = 0^\circ$**

A dimostrazione della veridicit  del risultato conseguito   stata calcolata, utilizzando l'analisi dei diagrammi di Poincar , la posizione di un punto della frontiera su un GAP a scelta con una tolleranza di 8 mm (figura 54). In accordo con le aspettative, il punto della frontiera risulta interno al settore individuato in figura 53. Si osservi come i diagrammi di Poincar  delle linee di campo che hanno origine dai punti a destra della frontiera individuata sul gap si sviluppano tutti internamente alla regione di ubicazione della separatrice (figura 55).

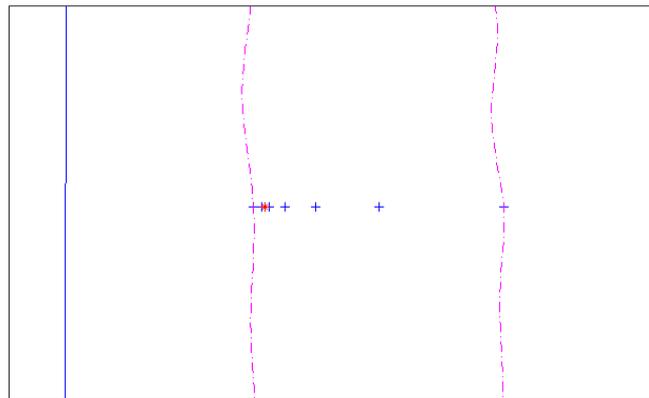


Figura 54 - Punto della frontiera individuato su un GAP con una tolleranza di 8 mm

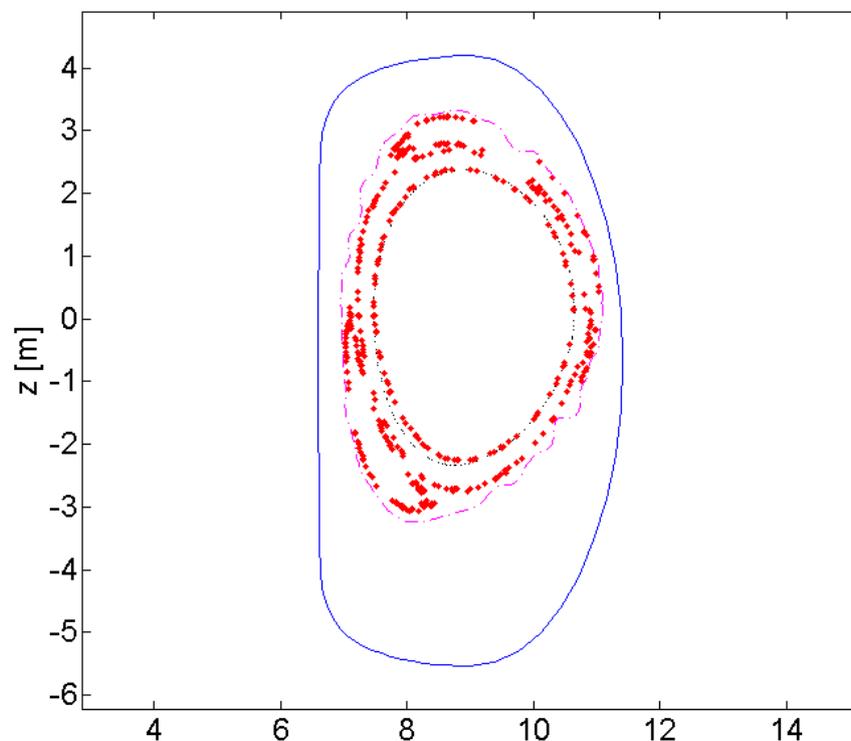
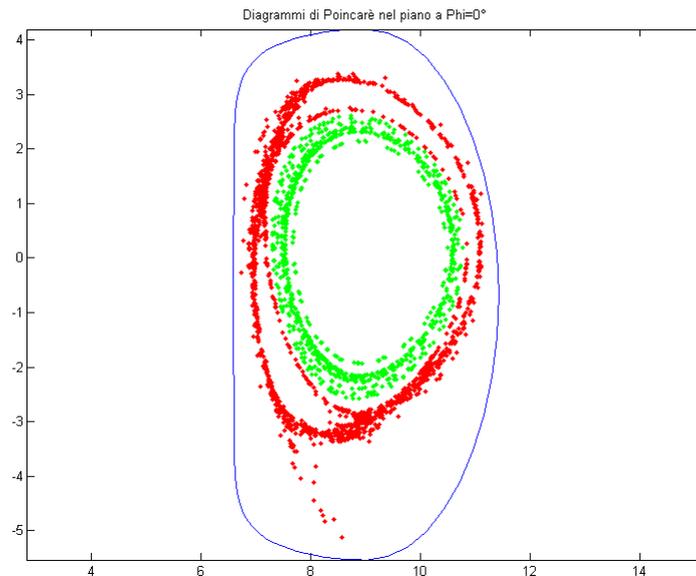
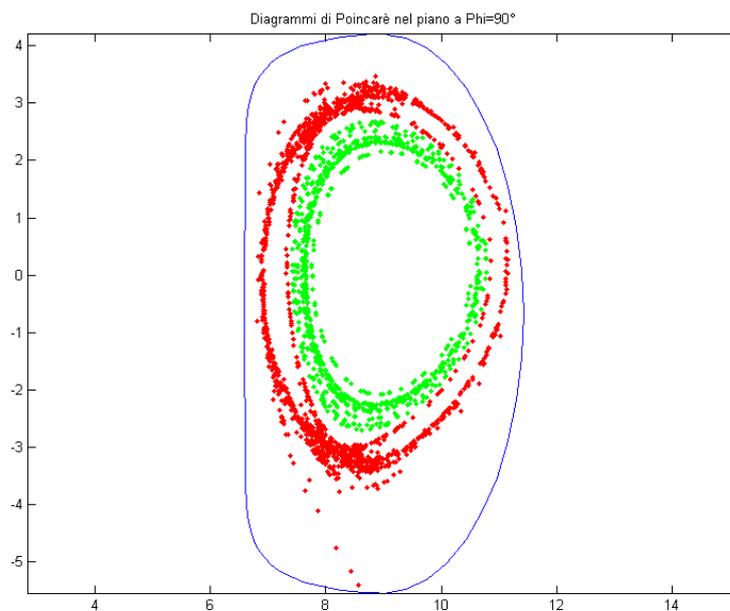


Figura 55 - Diagrammi di Poincar  per le linee di campo tracciate a partire dai punti in blu a destra di quello rosso in figura 53

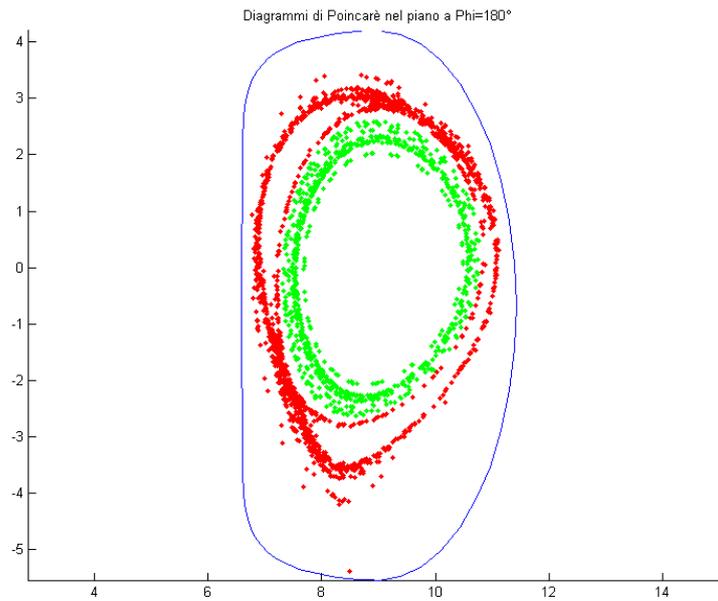
Risultato ancora più interessante è quello collegato all'analisi dei diagrammi di Poincaré delle linee di campo che partono dai punti appartenenti agli estremi del settore individuato sul piano poloidale. La frontiera del plasma sarà infatti ubicata nell'interspazio in bianco tra i punti del diagramma in rosso (appartenenti a linee di campo esterne alla frontiera) e in verde (appartenenti a linee di campo interne alla regione del plasma).



**Figura 56 - Diagramma di Poincaré a  $\Phi = 0^\circ$**



**Figura 57 - Diagramma di Poincaré a  $\Phi = 90^\circ$**



**Figura 58 - Diagramma di Poincarè a  $\Phi = 180^\circ$**

L'importanza del risultato conseguito risiede nel fatto che è possibile adesso individuare come si modifica la frontiera del plasma a fronte di perturbazioni magnetiche, correlando le armoniche del campo perturbate a quello dello spostamento della frontiera nei vari piani poloidali. Sarà quindi possibile tarare opportunamente i regolatori automatici di forma e posizione riuscendo a contenere le perturbazioni, e quindi gli spostamenti della frontiera, entro i limiti di sicurezza.

# Conclusioni

---

Al termine di questo lavoro di tesi sembra opportuna fare una ricapitolazione dei risultati conseguiti nell'ambito del tracciamento della frontiera del plasma. E' stata proposta una tecnica di individuazione della frontiera del plasma in un TOKAMAK in geometria tridimensionale che si basa sul tracciamento delle linee di campo con (integrate numericamente) e sull'analisi del comportamento in funzione della distanza plasma-parete della connection length, che risulta infinita all'interno della frontiera. La tecnica di tracciamento della plasma wall gap è stata quindi riadattata per individuare la geometria della separatrice in corrispondenza della zona del divertore, dove la connection length presenta un salto di discontinuità e un inversione di monotonia, evidenziando le problematiche nelle quali è possibile incappare nel caso di configurazioni di campo più avanzate. L'affidabilità dell'algoritmo progettato è stata quindi verificata confrontando il risultato ottenuto con quello ricavato a partire da algoritmi che sfruttano la proprietà delle linee di campo magnetico (assialsimmetrico) di svilupparsi su superfici a flusso costante (ricostruzione delle superfici isoflusso). Per far fronte ai problemi di onere computazionale richiesto dall'algoritmo in termini di tempo di elaborazione si è ricorsi alle tecniche di parallelizzazione messe a disposizione in ambiente MATLAB, che migliorano sensibilmente le prestazioni del software esibendo un notevole miglioramento dei tempi di calcolo (riduzione di oltre il 60%). Infine, rivolgendo l'attenzione a problematiche reali, la tecnica di tracciamento della frontiera è stata applicata anche al caso di una configurazione magnetica perturbata da un campo uniforme di 30 mT rivolto in direzione perpendicolare all'asse del toro lungo uno degli assi coordinanti, in maniera tale da precludere la assisimmetria del campo all'interno del reattore. Sebbene in questo caso sia stato possibile solo determinare una regione del piano poloidale in cui la frontiera può essere sicuramente compresa, automatizzando il processo di esame dei diagrammi di Poincarè e con strumenti di calcolo più potenti è possibile ricostruire la frontiera del plasma in maniera accurata anche in caso di perturbazioni magnetiche.

# Riferimenti

---

- [1] - A. Di Meo, **Tracciamento delle linee di forza del campo magnetico in un Tokamak e relative applicazioni**, *Tesi di laurea triennale in ingegneria elettronica, Università degli studi di Napoli Federico II, 2012.*
- [2] - K. Shinohara, S. Sakurai, M. Ishikawa, K. Tsuzuki, Y. Suzuki, K. Masaki, O. Naito, K. Kurihara, T. Suzuki, Y. Koide, T. Fujita, Y. Miura and the JT-60 Team1, **Ferritic insertion for reduction of toroidal magnetic field ripple on JT-60U**, *IOP PUBLISHING and INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Nucl. Fusion 47 (2007) 997–1004.*
- [3] - O. Asunta, S. Akaslompolo, T. Kurki-Suonio, T. Koskela, S. Sipila, A. Snicker, M. Garcia-Munoz and the ASDEX Upgrade team, **Simulations of fast ion wall loads in ASDEX Upgrade in the presence of magnetic perturbations due to ELM-mitigation coils**, *IOP PUBLISHING and INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Nucl. Fusion 52 (2012) 094014.*
- [4] - F. Villone, L. Barbato, S. Mastrostefano and S. Ventre, **Coupling of nonlinear axisymmetric plasma evolution with three-dimensional volumetric conductors**, *IOP PUBLISHING and INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Plasma Phys. Control. Fusion 55 (2013) 095008.*
- [5] - A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, **Matematica Numerica**, *Springer-Verlag Italia (2000).*
- [6] - **Parallel Computing Toolbox User's Guide**, *The MathWorks, Inc. (2013).*
- [7] - M. Itagaki, G. Okubo, M. Akazawa, Y. Matsumoto, K. Watanabe, R. Seki and Y. Suzuki, **Use of a twisted 3D Cauchy condition surface to reconstruct the last closed magnetic surface in a non-axisymmetric fusion plasma**, *IOP PUBLISHING and INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Plasma Phys. Control. Fusion 54 (2012) 125003.*