

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI**

**"FEDERICO II"**

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA**

**TESI DI LAUREA**

**DINAMICHE COMPLESSE IN**

**CONVERTITORI DI POTENZA DC/DC**

**Relatore**

**Ch. mo. Prof.**

**MASSIMILIANO de MAGISTRIS**

**Correlatore**

**Ch. mo. Prof.**

**MARIO di BERNARDO**

**Candidato**

**BARBATI MICHAEL**

**matr. 15/18889**

**ANNO ACCADEMICO 2002-2003**

<b>INTRODUZIONE</b>	<b>I</b>
<b>CAPITOLO I: CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI NON LINEARI, BIFORCAZIONI E CAOS DETERMINISTICO.</b>	<b>1</b>
<b>1. INTRODUZIONE</b>	<b>1</b>
<b>2. ANALISI QUALITATIVA DI UN SISTEMA NON LINEARE</b>	<b>5</b>
<b>2.1. Esempio di un modello matematico mal posto: circuito di polarizzazione di un diodo tunnel</b>	<b>6</b>
<b>3. NON LINEARITÀ E CAOS DETERMINISTICO</b>	<b>12</b>
<b>3.1. Caratterizzazioni derivanti dalle simulazioni numeriche</b>	<b>14</b>
3.1.1. Diagramma di biforcazione	14
3.1.2. Attrattori nei sistemi non lineari	15
<b>3.2. Caratterizzazioni analitiche dello spazio di stato</b>	<b>17</b>
3.2.1. Insiemi invarianti e Manifolds	17
3.2.2. Linearità a tratti	19
<b>4. MAPPA DI POINCARÉ E SISTEMI TEMPO DISCRETI</b>	<b>27</b>
<b>4.1. Esempi di Mappe smooth del primo ordine e biforcazioni standard</b>	<b>31</b>
<b>CAPITOLO II: COMPORTAMENTO COMPLESSO DEI CONVERTITORI DI POTENZA DC/DC</b>	<b>37</b>
<b>1. INTRODUZIONE</b>	<b>37</b>
<b>2. CONVERTITORI DC/DC</b>	<b>40</b>
<b>3. MODELLIZZAZIONI A CICLO APERTO</b>	<b>45</b>
<b>3.1. Modello tempo continuo</b>	<b>45</b>
<b>3.2. Dinamiche di stato semplificate</b>	<b>47</b>
3.2.1. Buck-converter	47
3.2.2. Boost converter	51
<b>4. STRATEGIE DI CONTROLLO – CURRENT E VOLTAGE MODE</b>	<b>53</b>
<b>5. COMPORTAMENTO COMPLESSO DI UN BUCK CONVERTER</b>	<b>57</b>

<b>5.1. Espressione analitica della soluzione relativa alle topologie circuitali base</b>	<b>60</b>
<b>5.2. Caratterizzazione geometrica dello spazio di stato</b>	<b>61</b>
<b>5.3. Modello tempo discreto e mappa di Poincarè</b>	<b>63</b>
5.3.1. Mappa in forma chiusa e biforcazioni standard	65
5.3.2. Analisi di una mappa non in forma chiusa	68
<b>5.4. Sistemi “lineari a tratti” e mappe piecewise smooth</b>	<b>70</b>
5.4.1. Analisi locale delle biforcazioni non standard	73
<b>5.5. Buck converter fornito di latch</b>	<b>75</b>
<b>CAPITOLO III: SIMULAZIONI NUMERICHE</b>	<b>77</b>
<b>1. SIMULAZIONI NUMERICHE ED APPROSSIMAZIONE.</b>	<b>77</b>
<b>2. STUDIO DELLE BIFORCAZIONI STANDARD IN MAPPE SMOOTH</b>	<b>80</b>
2.1. Buck converter del primo ordine	80
2.2. Buck converter in conduzione DCM	83
2.3. Buck converter in conduzione CCM	89
<b>APPENDICE: LISTATI MATLAB UTILIZZATI</b>	<b>95</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>101</b>

## **Introduzione**

La non linearità appare caratterizzare universalmente, anche se in diversa misura, tutti i fenomeni fisici. Le dinamiche espresse da sistemi spiccatamente non lineari ed il comportamento caotico come loro estrema conseguenza hanno ricevuto negli ultimi anni l'attenzione dei ricercatori in diversi settori grazie soprattutto alla straordinaria crescita della potenza di calcolo disponibile

Le dinamiche non lineari posseggono, di fatto, una maggiore ricchezza rispetto a quelle lineari anzitutto a causa del maggiore contenuto spettrale rispetto ai quello dei segnali di sollecitazione. A ciò va aggiunto poi che la non linearità è assolutamente indispensabile per la realizzazione di funzioni quali, moltiplicazioni e divisioni in frequenza, generazione e modulazione di segnali elettrici oscillanti assai utili in svariate applicazioni pratiche.

Accanto a queste dinamiche, non lineari ma "regolari", vanno considerate anche dinamiche cosiddette caotiche per la loro apparente irregolarità. Va comunque sottolineato che dinamiche non lineari e caos rappresentano due modalità di funzionamento relative alla stessa tipologia di sistemi il cui manifestarsi è discriminato solo dalle specifiche condizioni operative presenti.

Val la pena ricordare che una qualche correlazione fra manifestazioni irregolari e condizioni operative di un sistema non lineare fu per la prima volta riportata da Van der Pol il quale segnalò la presenza sistematica, per date condizioni operative, di un rumore irregolare in un semplice circuito oscillatore costituito da una batteria, un condensatore, un resistore e da un generatore di segnale di 1kHz realizzato per ottenerne oscillazioni sub armoniche. Prima di allora tali correlazioni erano ignorate perché la presenza di variazioni irregolari erano attribuite a non meglio specificati fenomeni rumorosi.

Parlare di caos, quindi, non è solo oggetto esclusivo della ricerca pura, tanto più se si tiene conto che esiste un'ampia gamma di circuiti di applicazione pratica, tra cui appunto i convertitori di potenza, oggetto di questa tesi, che possono esibire dinamiche non lineari e caotiche. Gli studi di tali dinamiche condotti attraverso la simulazione numerica dei modelli differenziali associati danno una descrizione del fenomeno da cui è difficile andare oltre semplici osservazioni qualitative. Risulta pertanto importante la possibilità di mettere a punto strumenti di analisi utili alla comprensione di dette fenomenologie, ma soprattutto alla individuazione degli ambiti, rispetto ad una variazione parametrica, in cui esse si manifestano.

I convertitori di potenza sono circuiti dalla topologia commutante nel tempo fra diverse configurazioni ritenibili, in prima approssimazione, lineari grazie alla presenza in esse di dispositivi a commutazione quali interruttori. Il loro modello matematico è pertanto costituito da equazioni differenziali lineari, tempo varianti, che comunque presentano una struttura matematica lineare in sottospazi dello spazio di stato. Ciò che conferisce ad essi un carattere non lineare, quindi complesso, è la tipologia di controllo in retroazione adottata per rendere le condizioni operative di funzionamento stabili rispetto a variazioni parametriche, di ingresso o di carico supportato.

Operativamente l'analisi e la sintesi di questi dispositivi avviene utilizzando metodologie approssimate la cui validità risulta utile ed efficace solo nei contesti considerati convenzionali, vale a dire con andamento periodico semplice. I suggerimenti di maggiore efficacia, per l'approdo a metodologie di più ampio respiro, provengono dalla modellizzazione tempo discreta degli stessi, già presente in verità nell'approccio tradizionale. La mediazione temporale dei comportamenti esibiti ha permesso, infatti, il recupero di un classico strumento di studio dei sistemi non lineari quali la mappa di Poincaré. La natura tempo autonoma dei sistemi tempo discreti derivanti grazie alla possibilità di esprimere analiticamente l'evoluzione temporale esibita nei tratti di linearità, rende possibile applicare ad essi gli strumenti tradizionali della

teoria delle biforcazioni. Tale teoria, che nell'ultimo decennio ha ottenuto un sufficiente consolidamento, consente l'analisi delle variazioni comportamentali esibite in presenza di variazioni parametriche del modello e l'individuazione dei valori in cui tali cambiamenti avvengono.

La validità di questa modalità di analisi è legata alla natura "smooth" del legame presentato dalla mappa rispetto alla variazione parametrica in esame, cosa che data la natura discontinua del sistema di partenza non è sempre verificata. Ne deriva la possibilità di riscontrare variazioni di comportamento non inquadrabili nei criteri formulati dalla teoria delle biforcazioni tradizionale. A riguardo esistono metodi oggetto di attuale ricerca consistenti nella generalizzazione del concetto di mappa smooth in "piecewise smooth" grazie proprio alla natura lineare a tratti dei dispositivi considerati.

Il lavoro di tesi è consistito nello studio dello stato attuale della ricerca a riguardo dei comportamenti complessi nei convertitori di potenza. Per quanto appena detto sono stati riportati nel primo capitolo gli strumenti di analisi dei sistemi non lineari a carattere generale nonché le valutazioni base della teoria delle biforcazioni. Per entrambi gli aspetti l'attenzione maggiore è stata riservata alla mappa di Poincaré. In seno al secondo capitolo l'attenzione si è spostata sulla tipologia dei convertitori di potenza dc/dc e, dopo una breve caratterizzazione generale ed un richiamo alle schematizzazioni tradizionalmente adottate nella loro analisi e sintesi, si è focalizzata l'attenzione sulle dinamiche complesse esibite da un buck converter controllato in tensione. Specificatamente ad esso sono stati evidenziati gli ambiti di utilizzabilità delle mappe discrete sia smooth che piecewise smooth per lo studio delle dinamiche esibite al variare della tensione trattata in ingresso. Infine, nel capitolo III, sono state condotte esperienze numeriche nello spirito di verificare esempi di studi condotti con alcuni degli strumenti illustrati.

# **Capitolo I:**

## **Caratterizzazione dei sistemi non lineari, biforcazioni e caos deterministico.**

### **1. INTRODUZIONE**

L'analisi di un sistema fisico parte dalla sua modellizzazione, vale a dire dall'espressione di relazioni matematiche intercorrenti fra un certo numero di attributi misurabili ritenuti significativi dei comportamenti da esso manifestati. Tra questi si distingue una particolare categoria, quella dei parametri di stato, il cui valore, in ogni istante, sintetizza l'effetto della storia passata del sistema sul suo andamento futuro.

I sistemi solitamente analizzati in elettronica ed i principi fisici da cui sono caratterizzati conducono all'espressione di legami tra la velocità di variazione delle variabili di stato con i propri valori istantanei oltre che con altri attributi su cui ci si riserva capacità di controllo esterna ritenuti segnali di sollecitazione al sistema.

Il tutto viene sintetizzato, matematicamente, in un sistema di equazioni differenziali a derivate totali:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad [\text{I. 1}]$$

dove  $\mathbf{F}$  è, in generale, un funzionale non lineare. A questa va aggiunto, per completezza, la condizione sul valore iniziale assunto dalle variabili di stato:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad [\text{I. 2}]$$

che insieme alla [I.1] costituisce matematicamente il così detto problema di Cauchy.

Geometricamente, l'evoluzione temporale esibita dal sistema è visualizzata in uno spazio di cui le variabili di stato individuano le coordinate cartesiane; a partire dal punto iniziale il movimento della traiettoria è completamente determinato dal sistema di equazioni [I.1]. Questa appare, infatti, come la definizione analitica di un campo vettoriale delle velocità di variazione delle variabili di stato ai cui la traiettoria, seguita dal sistema, risulta tangente.[rif.9]

È la forma matematica della [I.1] ad influire, più di ogni altra cosa, sulle deduzioni effettuabili in termini di comprensione e di controllabilità dei fenomeni modellizzati.

La classe dei sistemi derivabili, ad esempio, dall'ipotesi semplificativa di ritenere il funzionale  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  lineare e tempo invariante, ha permesso di sviluppare, nel corso degli anni, strumenti di analisi e sintesi dotati di grande maneggevolezza e semplicità. Si pensi alla possibilità, offerta dal Metodo Simbolico, di "tradurre" i modelli differenziali in forme polinomiali fratte, trattabili con più semplici tecniche algebriche, oppure al "Principio di Sovrapposizione degli effetti" grazie al quale è sufficiente analizzare il comportamento del sistema in rapporto ad una categoria ridotta di sollecitazioni per conoscerne la reazione ad un'ampia tipologia di segnali in ingresso.

Con ognuna di queste tecniche si arriva all'esplicitazione analitica dell'evoluzione temporale espressa dal sistema, cosa che consente di misurare quantitativamente un concetto assai importante quale quello della "stabilità" del sistema rispetto a variazioni delle così dette "condizioni nominali".

Le possibilità di manipolazione analitica della stessa consente di procedere anche in termini di sintesi offrendo la possibilità di stabilire le condizioni iniziali, il dimensionamento dei parametri fisici del sistema e l'ingresso al fine di ottenere un'uscita desiderata, in altri termini, ciò che è detta la condizione nominale di funzionamento.

Le condizioni operative causano, inevitabilmente, un discostamento da questa ultima, quindi, risulta assai preziosa la capacità di quantificare tale discostamento.

Nell'ambito dei sistemi lineari, ad esempio, è possibile riconoscere nel modello analitico associato la capacità di esibire variazioni contenute in relazione a discostamenti piccoli oppure addirittura un ritorno all'uscita desiderata cosa che va sotto il nome di "stabilità strutturale".

La modellizzazione con  $F(\mathbf{x},t)$  non lineare riveste un ampio ambito di fenomeni naturali ma, matematicamente, non consente di andare oltre valutazioni di base quali l'esistenza e l'unicità della soluzione, utili, in fase di modellizzazione, ma che non dicono nulla sulla caratterizzazione del comportamento in rapporto alla presenza di disturbi esterni o variazioni parametriche del modello, tutte cose importanti quando di un fenomeno fisico si voglia fare un'implementazione tecnica. Non è pensabile evitare le non linearità, implementando solo strutture che ne siano immuni, sia per la sua intrinseca presenza nella natura sia per l'utilità delle funzioni non lineari, le operazioni di moltiplicazione e di raddrizzamento di tensioni, solo per citarne qualcuna, sono tutte funzioni utili ma strettamente non lineari. Tale approccio, però, consente di analizzare e sintetizzare circuiti elettronici nella misura in cui è verificata la condizione di "piccolo segnale", la quale diventa un limite nelle

implementazioni in cui l'ampia variazione di segnale rappresenta una peculiarità fondamentale, come avviene ad esempio nelle circuiterie di potenza.

L'aspetto principale dei sistemi non lineari appare la varietà di comportamenti esprimibili, tanto più ricchi di quelli esibiti dai sistemi lineari da non essere inquadrabili secondo i criteri di analisi sviluppati per quest'ultimi. Una ricchezza che, come già detto, in alcuni casi ne favorisce l'utilizzazione ma che presenta anche altre peculiarità non altrettanto appetibili. Nei sistemi, le cui dinamiche coinvolgono appieno le non linearità presenti si osservano, infatti, improvvisi passaggi da dinamiche regolari a regimi irregolari, simili a fenomeni aleatori per i quali furono inizialmente scambiati, nonché una critica dipendenza da variazioni, anche piccole, della condizione iniziale. La mancanza di un'espressione analitica della soluzione esibita dal sistema rende tali manifestazioni totalmente imprevedibili. [rif.7]

Deduzioni significative iniziano ad esserci nei casi in cui il funzionale  $F(x)$  è schematizzabile attraverso una linearizzazione a tratti. La cosa rende possibile il recupero di chiavi di lettura lineari senza che però l'analisi venga scambiata come una decomposizione del problema in ambiti lineari, a partire dai quali, caratterizzare il comportamento complessivo semplicemente come "unione" di questi. La ricchezza delle dinamiche non lineari nasce dalla "iterazione" delle dinamiche presenti nei suddetti ambiti lineari, tant'è che è possibile che si verifichino comportamenti limitati in ampiezza anche dove dall'analisi dei sotto intervalli si deducono andamenti "divergenti" [rif.5] [rif.6].

Un'altra importante conseguenza di quest'approccio è la possibilità di ricorrere ad uno strumento di analisi dei sistemi differenziali costituito dalla così detta "mappa discreta". Strumento quest'ultimo, conosciuto già da tempo, che consente di associare a sistemi differenziali non lineari, tempo continui, sistemi tempo discreti non lineari ma autonomi, quindi, maggiormente trattabili da un punto di vista matematico.

Sono possibili, ad esempio, valutazioni quantitative sul comportamento tenuto dal sistema rispetto alle variazioni parametriche del modello, individuando i valori numerici del parametro variabile, per i quali il sistema presenta un brusco cambiamento di comportamento, denominato biforcazione. Tale metodo risulta un utile ausilio da affiancare alle simulazioni numeriche a cui, purtroppo, è ancora affidata la maggior parte della caratterizzazione delle dinamiche esibite da un sistema non lineare, con oneri computazionali, spesso assai onerosi, soprattutto a riguardo delle variazioni parametriche. [rif.3]

## 2. Analisi qualitativa di un sistema non lineare

Come già lasciato intendere l'interesse è focalizzato sui circuiti elettronici le cui dimensioni fisiche rendono trascurabili gli effetti propagativi. In tale contesto, se si ipotizza la sussistenza di particolari ipotesi sulle componenti il circuito, è possibile fare alcune valutazioni a carattere generale sulla forma che assumerà il modello associato. In particolare, se le caratteristiche di eventuali induttori e capacitori non lineari sono rispettivamente controllabili in flusso e carica e la rete resistiva associata presenta soluzione unica, i principi di Kirchoff, sulla cui base si costruiscono i legami quantitativi fra correnti e tensioni permettono di approdare ad un sistema di equazioni differenziali in "forma normale".[rif.4]

I testi di analisi avviano l'analisi dei sistemi differenziali proprio con una caratterizzazione qualitativa di questi nella forma normale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{array} \right. \quad [I. 3]$$

che esprime in maniera estesa la [I.1].

In particolare si sancisce l'esistenza ed unicità della soluzione nell'ipotesi in cui  $F(\mathbf{x},t)$  sia lipschitziano cioè se per  $F$ , definita su un insieme  $D$  di  $\mathbb{R}^m$ ,  $\forall x,y \in D$  risulta che  $\exists K$  tale che:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K^* \|x - y\| \quad [I. 4].$$

intendendo con la simbologia  $\|Z\|$  la norma metrica euclidea.

Tale criterio, come già detto, appare assai utile in fase di modellizzazione in quanto consente di riconoscere nella struttura matematica un eventuale problema mal posto caratterizzato, ad esempio, da punti di impasse ma presenta anche diversi limiti. Uno tra questi è senza dubbio, la possibilità che il funzionale  $F(\mathbf{x},t)$  possa essere lipschitziano solo localmente alla condizione iniziale. Una lipschitzianità locale a tale punto non è utile a caratterizzare il comportamento asintotico esibito dal sistema quando questo si allontana, nel tempo, dalla condizione iniziale. Aspetto importante visto che nell'ambito dei sistemi non lineari risulta difficile riconoscere un andamento asintotico, come si vedrà in seguito. Inoltre suddetto principio non dà alcun'informazione sull'intervallo di esistenza della soluzione.[rif.4]

### **2.1. Esempio di un modello matematico mal posto: circuito di polarizzazione di un diodo tunnel**

Il semplice circuito di polarizzazione di un diodo tunnel costituisce un esempio di come una considerazione insufficiente dei fenomeni fisici coinvolti porta ad un modello matematico inadeguato alla descrizione delle dinamiche esibite dal sistema. [rif.4]

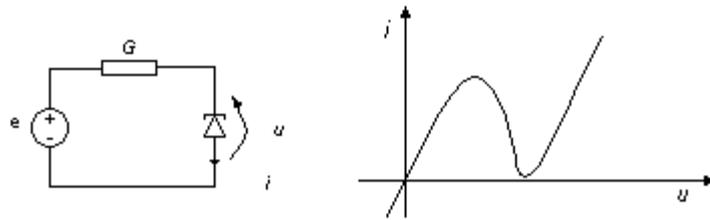


figura I. 1. Circuito di polarizzazione di un diodo tunnel e caratteristica di quest'ultimo

Il circuito illustrato è alimentato da una sorgente di tensione tempo variante la cui ampiezza è esprimibile come sovrapposizione di componente continua e componente alternata,  $e(t) = E + \tilde{e}(t)$ .

Se non consideriamo alcun parametro dinamico i principi di Kirchoff ci consentono di scrivere il seguente sistema di equazioni non lineari ordinarie:

$$\begin{cases} i = g(u) \\ i = G(e(t) - u) \end{cases} \quad [I. 5]$$

Analizzabile in maniera grafica, infatti, la sua soluzione, punto di funzionamento stazionario del sistema, è l'intersezione tra la caratteristica del diodo e la retta di carico  $i(t)=G(E-u)$ .

L'assenza di ulteriori parametri di analisi, però, comporta subito la difficoltà a trattare il caso in cui la retta di carico sia tale da presentare una terna di soluzioni.

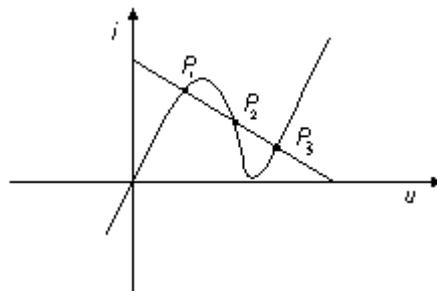


figura I. 2.Caso di triplice intersezione della retta di carico con la caratteristica del diodo tunnel.

L'introduzione del solo effetto induttivo dei collegamenti evolve il modello nella forma differenziale:

$$\begin{cases} e = Ri + L \frac{di}{dt} + u \\ i = g(u) \end{cases} \quad [I. 6]$$

esprimibile sinteticamente nell'unica equazione differenziale:

$$L \frac{d(i(t))}{dt} = e(t) - g^{-1}(i(t)) - \frac{i(t)}{G} \quad [I. 7]$$

l'impossibilità di invertire la caratteristica del bipolo è superata attraverso l'espedito matematico di derivare la caratteristica del diodo tunnel e di raccogliere il modello differenziale [I. 5] nell'equazione:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{dg/du} * [G * (e(t) - u(t)) - g(u(t))] \quad [I. 8]$$

L'analisi Dc del modello coincide con la trattazione grafica effettuata precedentemente mentre il tentativo di caratterizzare la variazione della tensione sul diodo attraverso lo studio del segno del termine di sinistra della [1.7] conduce a valutazioni contraddittorie. Formalizzando, infatti, il discorso nella seguente forma:

$$\frac{du}{dt} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} G(e - u) > g(u) & \text{ed } \frac{dg}{du} > 0 \\ \text{oppure} \\ G(e - u) < g(u) & \text{ed } \frac{dg}{du} < 0 \end{cases} \quad [I. 9]$$

Abbiamo la seguente situazione grafica:

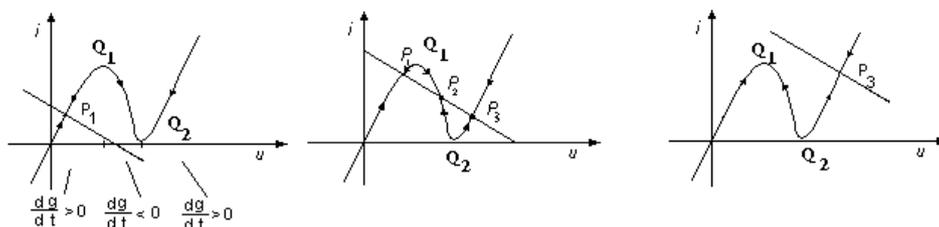


figura I. 3 .Condizioni relative a valori crescenti della componente alternata dell'ingresso

L'inadeguatezza del modello appare quando la componente alternata dell'ingresso, spostando la retta di carico da  $P_1$  a  $P_3$ , porta il punto di funzionamento oltre  $Q_1$  da cui, per le caratterizzazioni appena effettuate, non sarebbe possibile muoversi. Per risolvere l'impasse del punto  $Q_1$  è necessario introdurre nel modello l'effetto capacitivo della giunzione trasformando circuito e modello rispettivamente in:

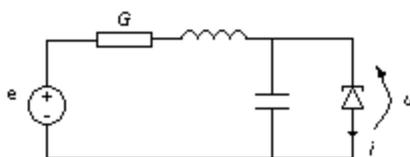


figura I. 4. Schema completo del circuito di polarizzazione del diodo tunnel

e nel sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [e - u - R * i] \\ C \frac{du}{dt} = G * (e - u) - g(u) \end{cases} \quad [I. 10]$$

La considerazione fisica che la capacità parassita di una giunzione è piccola, quindi  $i_L = i_d$ , ci permette di caratterizzare graficamente il campo vettoriale associato al modello differenziale facendo intervenire anche la caratteristica del diodo. Possiamo infatti ritenere:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} > 0 &\Leftrightarrow u < e - Ri \\ \frac{du}{dt} > 0 &\Leftrightarrow i > g(u) \end{aligned} \quad [I. 11]$$

cioè graficamente:

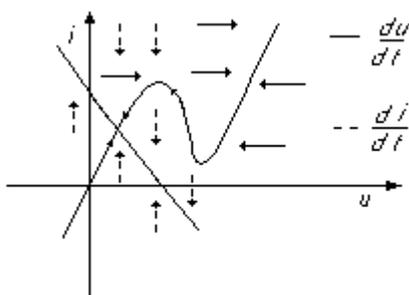


figura I. 5. Caratterizzazione geometrica del campo vettoriale delle traiettorie di stato

Il punto di impasse viene superato con un salto di discontinuità della tensione sul diodo, pertanto, la traiettoria seguita dal sistema, al variare della retta di carico con la componente alternata, è rappresentata in figura:

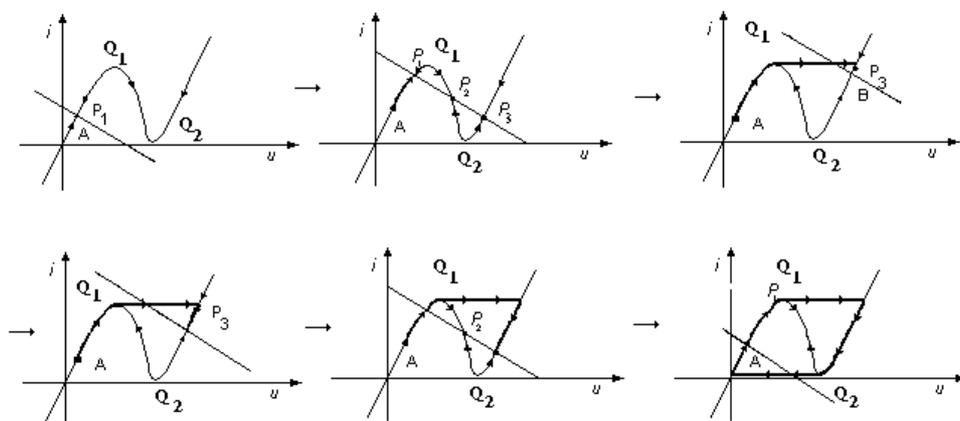


figura I. 6. Traiettorie seguita dai parametri di stato al variare della componente alternata dell'ingresso attorno al punto A di funzionamento.

La discontinuità subita dalla corrente è rilevata anche sperimentalmente.

Il nuovo modello prevede anche il comportamento oscillatorio presentato nel caso la retta di polarizzazione illustrato in figura:

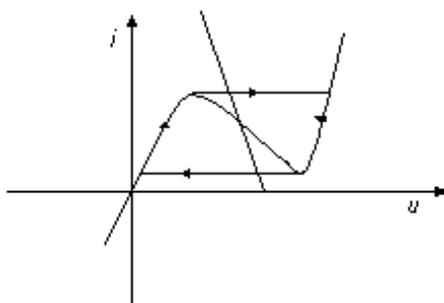


figura I. 7. Ciclo di oscillazione relativo alla retta di carico illustrata

Vale a dire una situazione di polarizzazione in cui la retta di carico presenta pendenza maggiore della caratteristica nel punto di funzionamento in continua.

### **3. Non Linearità e Caos Deterministico**

La non linearità è un aspetto imprescindibile della realtà anche nell'ambito delle implementazioni tecniche in cui è il progettista a dettare, entro certi limiti, "le regole del gioco", questo sia per il suo carattere intrinseco nella natura sia per l'utilità di alcune funzioni non lineari.

Molti dispositivi reali, infatti, basano il loro funzionamento sulle non linearità di alcune componenti in essi contenute al fine di esprimere regimi impensabili secondo le modellizzazioni lineari. Questo vale, ad esempio, per gli oscillatori elettronici dove si esprimono oscillazioni auto-sostenute avendo in ingresso sollecitazioni costanti oppure per i divisori di frequenza, utilizzati nelle comunicazioni elettriche, in cui è possibile ottenere oscillazioni sub-armoniche a partire da un'unica sollecitazione sinusoidale. In entrambi i casi citati, il diverso contenuto spettrale dei segnali in uscita, rispetto a quelli in ingresso, non è assolutamente ottenibile secondo i modelli lineari.

Come ribadito nell'introduzione, un grosso limite all'analisi quantitativa dei sistemi non lineari è stata l'impossibilità di ottenere un'espressione analitica dell'andamento temporale delle traiettorie di stato. Ciò ha impedito, per lungo tempo, di procedere oltre primordiali valutazioni base ma soprattutto non ha permesso di comprendere a fondo molte manifestazioni irregolari manifestate da tali sistemi ed imputate inizialmente a non meglio specificati fenomeni aleatori non modellizzati. Solo l'avvento degli strumenti di calcolo automatico ha permesso di notare che questi "regimi" derivano anche dalle simulazioni numeriche dei modelli matematici associati. Questo ha condotto alla formulazione del concetto di "caos deterministico", ad indicare il fatto che tali manifestazioni dal "carattere aleatorio" risultavano espresse in maniera "deterministica" dalla simulazione numerica dei modelli associati.[rif.7]

I sistemi non lineari, infatti, presentano transizioni improvvise, a seguito di variazioni parametriche nel modello, da regimi regolari armonici ad andamenti irregolari, di ampiezza limitata ma dal contenuto spettrale molto ampio, a cui si aggiunge una critica sensibilità a variazioni anche piccole della condizione iniziale, differenze sulla condizione iniziale di meno del 0.001% diventano differenze del 10% sulla traiettoria successiva come riportato da Hasler a riguardo del circuito ferrorisonante in [rif.4]. Un aspetto assai critico, quest'ultimo, se si pensa che basta un'incertezza anche minima sulla condizione iniziale per perdere in attendibilità sull'evoluzione temporale delle traiettorie calcolate dalle simulazioni numeriche, incertezza intrinseca nella operazione stessa di misura.

Inutile dire che ciò ha seriamente messo in discussione il preesistente dogma scientifico che tutti i sistemi deterministici fossero completamente prevedibili. [rif.39] I modelli non lineari appaiono, infatti, come strutture estremamente sensibili a variazioni sia dei parametri costitutivi il modello che delle condizioni iniziali.

Tale aspetto è riscontrabile, nella vita quotidiana, nel fatto che le previsioni meteorologiche, effettuate ricorrendo a modelli fortemente non lineari, risultano essere tanto più inattendibili quanto più spinte nel futuro.

Nell'analisi quantitativa del problema non lineare gli studiosi sembrano ricorrere sostanzialmente a due strumenti. Il primo è costituito dalle simulazioni numeriche, ancora lo strumento principale di esplorazione, attraverso gli strumenti di analisi numerica delle equazioni differenziali ordinarie (pacchetti ODE-Ordinary Differential Equations) presenti in tutti gli applicativi matematici. Il secondo dai primi tentativi di caratterizzazione analitica ricorrendo, ad esempio, all'approssimazione delle caratteristiche non lineari con una spezzata lineare. Questo consente di decomporre il problema in ambiti lineari a tratti, o meglio ancora ricorrendo al metodo della mappa discreta di Poincaré che permette di associare ad un sistema di equazioni

differenziali, tempo continuo, un sistema alle ricorrenze tempo discreto autonomo.

### **3.1. Caratterizzazioni derivanti dalle simulazioni numeriche**

#### **3.1.1. Diagramma di biforcazione**

L'impossibilità di esprimere analiticamente, per i sistemi non lineari, l'evoluzione temporale delle variabili di stato impedisce di analizzare quantitativamente la variazione dei comportamenti esibiti al variare di un parametro del fenomeno in considerazione. I bruschi cambiamenti, denominate biforcazioni, da essi esibiti possono, tuttavia, essere illustrati graficamente attraverso un diagramma che prende nome da esse.

La chiave di lettura su cui esso è basato parte dalle dinamiche regolari esprimibili dai sistemi non lineari vale a dire le oscillazioni periodiche auto sostenute o quelle derivanti da sollecitazioni armoniche.

In tale diagramma, infatti, si riportano sull'asse delle ordinate i valori campionati di un parametro di stato, con intervallo pari al periodo dell'armonica espressa, e sull'asse delle ascisse il valore di un parametro variabile rispetto cui tali valori vengono rilevati. In corrispondenza del regime armonico i punti campionati appaiono come sovrapposti; quando la variazione del parametro genera, ad esempio, un raddoppio di periodo con la nascita di un regime sub armonico, vi saranno due punti distinti rappresentati nel grafico da cui il nome di biforcazione. Se il regime presente è irregolare, i valori si distribuiranno con diversa uniformità sulla verticale al parametro di riferimento come si può notare dalla seguente figura.[rif.3]

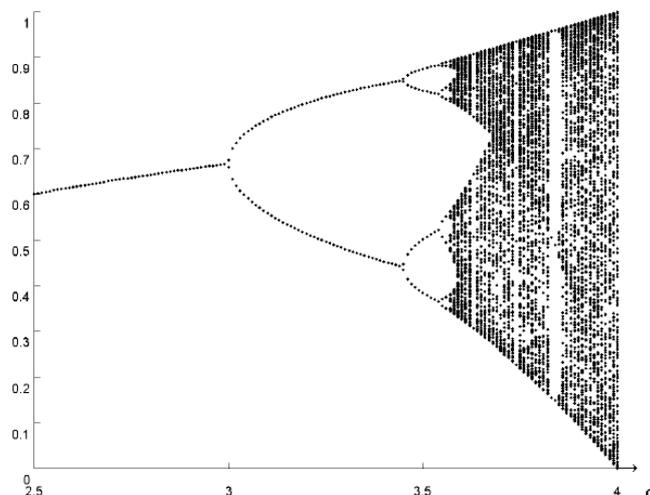


figura I. 8. Esempio di grafico di biforcazione.

### 3.1.2. Attrattori nei sistemi non lineari

Un'altra caratterizzazione riscontrabile nell'ambito lineare ma che non trova corrispondente nel contesto non lineare è quella relativa al comportamento asintotico. I sistemi lineari, infatti, sottoposti a sollecitazione armonica o polinomiale, presentano, trascorso un intervallo di tempo finito, un'evoluzione temporale riprodotte lo stesso carattere regolare dell'ingresso. Altrettanto non può dirsi per i sistemi non lineari i quali possono esprimere un andamento irregolare anche in corrispondenza di ingressi periodici. In tale contesto l'evoluzione temporale delle variabili appare diversificarsi, istante per istante, anche dopo un tempo notevole dall'inizio dell'evoluzione.

Nonostante ciò, attraverso l'utilizzo delle simulazioni numeriche, si è potuto individuare un certo grado di regolarità anche in questi andamenti. Ancora una volta la chiave di lettura parte dalle evoluzioni regolari esibite anche dai sistemi non lineari. Considerando, ad esempio, valori campionati delle variabili di stato di un sistema, caratterizzato per determinate condizioni operative da un andamento armonico di periodo  $T$ , si può notare che questi non

si distribuiscono uniformemente nello spazio di stato ma si addensano in particolari zone a costituire i così detti “attrattori strani”.

La figura I.9 è appunto relativa ad un attrattore di sistema del secondo ordine rappresentato da un buck converter in cui i campioni delle variabili di stato appaiono addensarsi maggiormente in cinque regioni dello spazio.

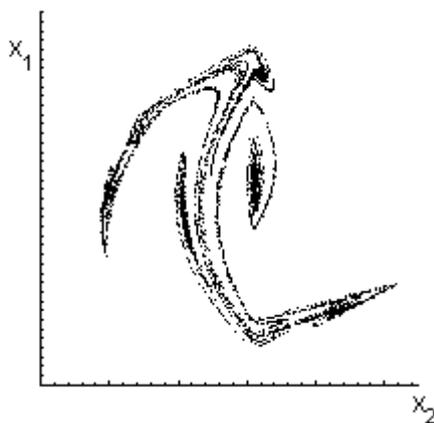


figura I. 9. Esempio di attrattore strano relativo ad un convertitore di potenza di tipo buck.

Talvolta può sussistere una coesistenza di diversi attrattori di natura caotica o regolare. Ciò è indice di un molteplicità di comportamenti del sistema rispetto alla condizioni iniziali, nel senso che il sistema può tendere verso diversi comportamenti asintotici a seconda dello stato iniziale da cui muove. In questo caso si procede ad una ripartizione dello spazio di stato in “bacini di attrazione”, uno per ciascun attrattore presente, costituiti dagli stati a partire dei quali il sistema procede verso lo specifico attrattore di riferimento [rif.3].

### 3.2. Caratterizzazioni analitiche dello spazio di stato

#### 3.2.1. Insiemi invarianti e Manifolds

Come già visto nell'esempio del circuito di polarizzazione del diodo tunnel un primordiale strumento di caratterizzazione di un sistema non lineare è la lettura del sistema di equazioni [I.1] come definizione del campo vettoriale delle velocità di variazioni delle variabili di stato.

Sono possibili anche altre caratterizzazioni generali per la categoria di sistemi di forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad [\text{I. 12}]$$

il cui carattere tempo autonomo conferisce ai punti verificanti la condizione di comportamento stazionario,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ , quando essi esistano, la connotazione di stato di equilibrio del sistema. [rif.10]

Linearizzando il sistema attorno a siffatti punti possiamo caratterizzare localmente le traiettorie del sistema in questione. In particolare possiamo classificarne gli autovalori, distinguendo quelli stabili da quelli instabili, e caratterizzare l'evoluzione temporale dei parametri di stato rispetto ai sottospazi generati dagli autovettori associati a ciascuna delle suddette categorie.

Considerando, ad esempio un sistema del secondo ordine, la teoria dei sistemi lineari permette di caratterizzare completamente i moti naturali espressi da un sistema lineare tempo autonomo. Questi sono rappresentabili nella seguente figura:

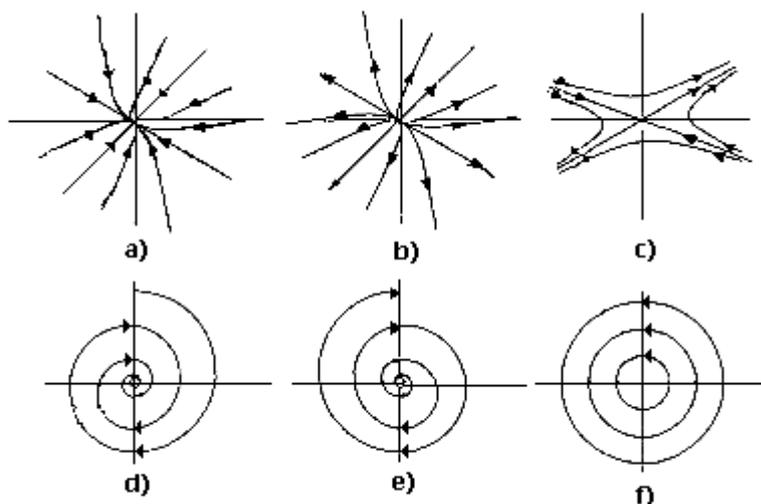


figura I. 10. Moti naturali di un sistema del secondo ordine.

Riferendoci alla figura I.10 possiamo distinguere i seguenti casi:

- a) Nodo attrattivo: entrambi gli autovalori sono reali e negativi.
- b) Nodo repulsivo: entrambi gli autovalori sono reali e positivi
- c) Nodo a sella: entrambi gli autovalori sono reali, uno risulta positivo, l'altro negativo.
- d) Nodo attrattivo a spirale: gli autovalori sono complessi coniugati con parte reale negativa.
- e) Nodo repulsivo a spirale: gli autovalori sono complessi coniugati con parte reale positiva.
- f) Centro: autovalori puramente immaginari.

Tutto questo, come già detto, caratterizza solo localmente dell'evoluzione temporale delle variabili di stato. Le loro traiettorie appaiono difficilmente caratterizzabili da un punto di vista generale. Tuttavia, talvolta, le traiettorie di stato di un modello non lineare evidenziano l'esistenza di superfici denominate in letteratura "manifolds" rispetto alle quali possono presentare comportamenti più o meno regolari come, ad esempio, un approssimazione od un allontanamento asintotico da esse.

Per alcune di esse, denominate “Invariant Manifolds” accade che la traiettoria una volta che le abbia intersecate, in un istante, continua a rimanere confinata su di essa da quel punto in poi. Quest’ultimo aspetto appare inquadrabile in una sorta di generalizzazione dei concetti di autovalore ed autovettore soprattutto per quanto riguarda la caratterizzazione degli autovalori come base dello spazio di stato. Questi ultimi in casi particolari, come si potrà vedere agevolmente nell’empio relativo al circuito di Chua, caratterizzano notevolmente la traiettoria di stato evidenziando particolari iperpiani su cui essa si porta in maniera asintotica.

### 3.2.2. Linearità a tratti

Un modo di affrontare il problema non lineare, assai semplice e diretto, è ovviamente l’approssimazione di una funzione non lineare con una spezzata lineare a tratti [rif.5-6], [rif.8], [rif.18]. Ciò vuol dire che il problema differenziale [I.1] può essere decomposto nei sistemi lineari:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), t) \quad \text{per } \mathbf{x} \in S_i \quad [\text{I. 13}]$$

dove  $S_i$  rappresentano i sottospazi in cui lo spazio di stato risulta decomposto con  $\mathbf{f}_i$  funzionale lineare [rif.2].

Tale approssimazione consente di esprimere analiticamente l’evoluzione temporale delle traiettorie in ciascuno di detti sottospazi nella forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi_i(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi_i(t - \tau)\mathbf{B}_i \mathbf{d}\tau \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad [\text{I. 14}]$$

con

$$\Phi_i(t) = e^{A_i t} \quad [I. 15]$$

funzione di transizione, espressione compatta ad indicare la serie matriciale  $e^{At} \approx I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots$  [rif.10], ma soprattutto aumenta i margini di caratterizzazione dei sistemi autonomi del tipo [I.12]. Per questa particolare tipologie di sistemi, infatti, in ciascuno dei sottospazi  $S_i$  le traiettorie seguono i moti naturali del modello lineare relativo e quindi risultano completamente caratterizzate dagli autovalori ed autovettori ricavabili.

Tale approccio offre, infine, anche un vantaggio da un punto di vista numerico, ricorrendo, infatti, all'espressione esatta dell'evoluzione temporale della traiettoria la simulazione numerica limita la sua imprecisione alla sola tolleranza con cui viene determinato il passaggio da un sottospazio di linearità ad un altro.

#### *Esempio di analisi qualitativa: Circuito di Chua*

A questo punto può essere utile rappresentare un esempio in cui l'approssimazione lineare a tratti di una caratteristica non-lineare consente di fare una serie di valutazioni caratterizzanti le dinamiche espresse: il circuito di Chua.

Tale circuito rappresenta una topologia “base” pensata e realizzata “ad hoc” per presentare un'ampia gamma di manifestazioni non lineari [rif.5-6].

Topologicamente è rappresentata dal circuito:

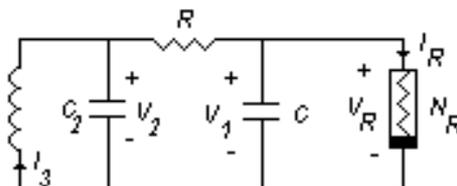


figura I. 11.schema del circuito di Chua.

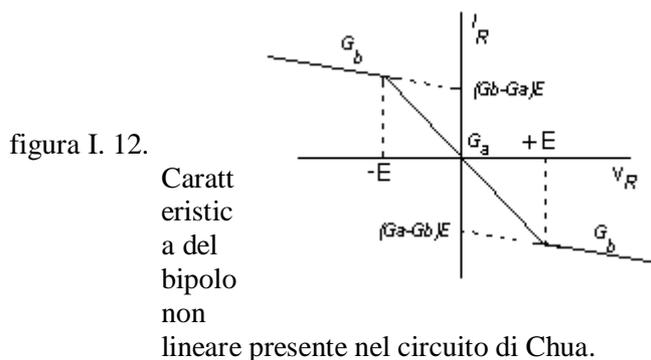
La cui modellizzazione matematica è:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{C_2} i - \frac{G}{C_2} (v_2 - v_1) \\ \frac{dv_1}{dt} = \frac{G}{C_1} (v_2 - v_1) - \frac{1}{C_1} f(v_1) \end{cases} \quad [I. 16].$$

Dove  $f(v_2)$  rappresenta la caratteristica del bipolo non lineare approssimato con una spezzata lineare a tratti di forma:

$$f(v_R) = \begin{cases} G_b v_R + (G_b - G_a) * E & \text{se } v_R < -E \\ G_a v_R & \text{se } -E < v_R < E \\ G_b v_R + (G_a - G_b) * E & \text{se } v_R > E \end{cases} \quad [I. 17]$$

graficamente rappresentabile da:



Al variare dei parametri  $G_a$  e  $G_b$  ovviamente variano le pendenze dei tratti di linearità ma la spezzata rimane sempre controllabile in  $v_R$  per la definizione [I.17].

Il primo passo per un'analisi del circuito è l'individuazione dei punti di equilibrio espressi matematicamente dall'eguaglianza vettoriale  $F(x)=0$ , con  $F(x)$  il funzionale vettoriale che raccoglie i termini di destra della [I.16]. Detti punti sono ricavabili anche graficamente dalla intersezione della caratteristica lineare a tratti del bipolo con la retta passante per l'origine ed avente pendenza  $G=-1/R$ .

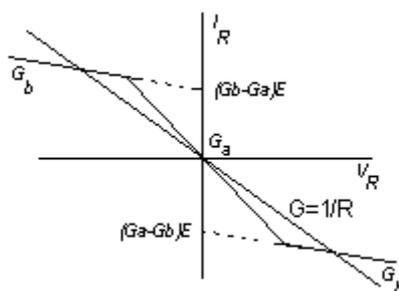


figura I. 13. Rappresentazione grafica dei punti di equilibrio del circuito di Chua.

Al variare della conduttanza  $G$ , per  $G_b < G < G_a$ , abbiamo tre punti di intersezione, ciascuno relativo ad un sottospazio di linearità di figura I.14, mentre per  $G_a < G$ , uno solo nell'origine appartenente alla spezzata lineare,

mentre, per l'analisi successiva, vanno considerati anche i due che cadono sui prolungamenti delle rette laterali nello spazio intermedio.

I limiti di linearità della caratteristica dividono lo spazio di stato  $(v_1, v_2, i)$  in tre sottospazi  $D_1$ ,  $D_0$  e  $D_{-1}$  in ciascuno dei quali sistema risulta "localmente" lineare e quindi analizzabile come tale.

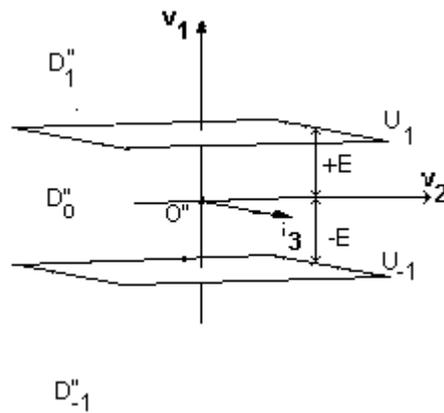


figura I. 14. Ripartizione del piano di stato  $(v_1, v_2, i)$  nei sottospazi  $D_1$ ,  $D_0$  e  $D_{-1}$ .

In ciascuno dei sottospazi evidenziati in figura I.14. la traiettoria è relativa ad un sistema lineare, tempo autonomo, pertanto caratterizzabile attraverso i moti naturali espressi dagli autovalori ed autovettori ricavabili. Volendo entrare nel dettaglio dell'evoluzione della traiettoria di stato, possiamo notare che nel caso in cui la terna di autovalori, relativa ai due sottospazi esterni, è costituita da una coppia complessa coniugata ed uno reale negativo, parte reale e parte immaginaria dell'autovettore complesso, associato alla coppia, individuano un piano in suddetti sottospazi.

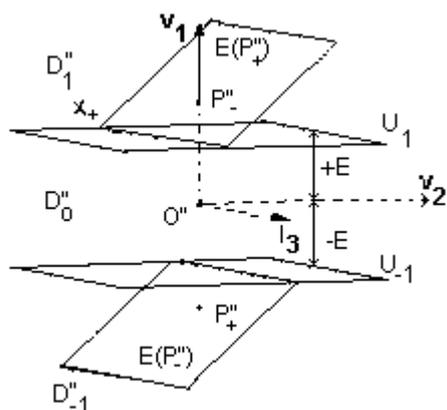


figura I. 15. Spazio di stato con evidenziati i piani generati dagli autovettori complessi.

In ciascuno dei sottospazi di linearità tali piani rappresentano gli “invariant manifolds” cui si accennava nel paragrafo precedente, infatti, a partire da qualsiasi stato iniziale la traiettoria si porta asintoticamente su uno di essi per rimanere confinata fino a che non raggiunge i confini del sottospazio di linearità di appartenenza.[rif.3]

Quanto detto ci permette di caratterizzare qualitativamente alcune tipologie di regime riscontrabili nel circuito in esame. Considerando, ad esempio, il caso di un ciclo periodico, coinvolgente l'intero spazio di stato, esso può essere visto come relativo ad una traiettoria circolare che, partendo dal sottospazio superiore, raggiunge i confini di questo senza chiudere alcuna spirale. Ritenendo lo spazio intermedio caratterizzato da autovalori reali negativi e da punti di equilibrio esterni, in esso la traiettoria prosegue verso il semispazio inferiore dove evolve, per la simmetria della spezzata come nel semispazio di partenza. Descrivendo, quindi, un nuovo semiarco e riattraversando di nuovo allo spazio intermedio, in senso opposto, la traiettoria si richiude su se stessa a costituire un ciclo periodico.

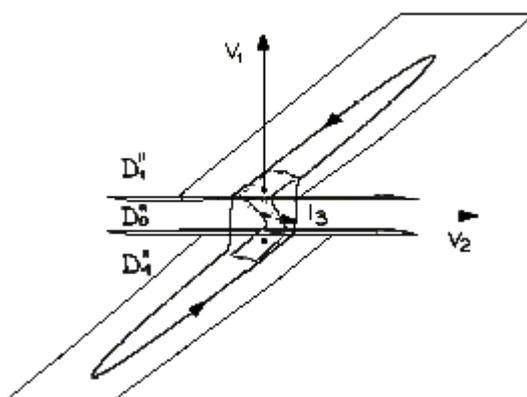


figura I. 16. Traiettoria di stato relativa ad un'orbita circolare.

Possiamo ancora caratterizzare il caso in cui la traiettoria, in uno degli spazi laterali descriva una spirale divergente. Raggiunto il limite del sottospazio, essa può essere ripiegata indietro sul piano di partenza dagli autovalori del sottospazio intermedio come appare in figura:

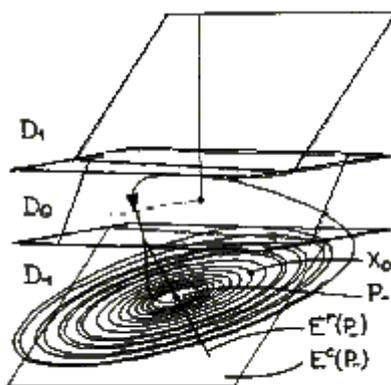


figura I. 17. Spirale divergente.

oppure proseguire, attraversando detto sottospazio intermedio, fino a raggiungere l'altro sottospazio dove ancora per simmetria, sarà caratterizzato

da moti naturali simili a quelli visti inizialmente descrivendo ancora una volta una spirale divergente. Ripercorrendo i sottospazi in verso opposto, infine si richiude su se stessa a costituire il così detto attrattore a doppia spirale di Chua.

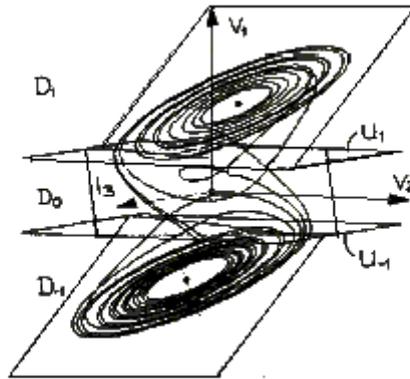


figura I. 18. Attrattore a doppia spirale di Chua”.

#### 4. Mappa di Poincaré e sistemi tempo discreti

In molte situazioni risulta conveniente analizzare le dinamiche di un sistema in istanti discreti di tempo piuttosto che sul tempo continuo soprattutto quando è possibile esplicitare un legame matematico tra detti punti successivi. Tale approccio fu, per la prima volta, assunto nell'analisi dei sistemi differenziali tempo continui, da Henri Poincaré. Esso consiste nel considerare, nello spazio di stato, una superficie denominata "sezione di Poincaré" relativamente alla quale costruire una relazione tempo discreta, denominata "mappa di Poincaré", che coinvolge i punti di intersezione che la traiettoria di stato presenta sempre rispetto ad uno stesso lato.

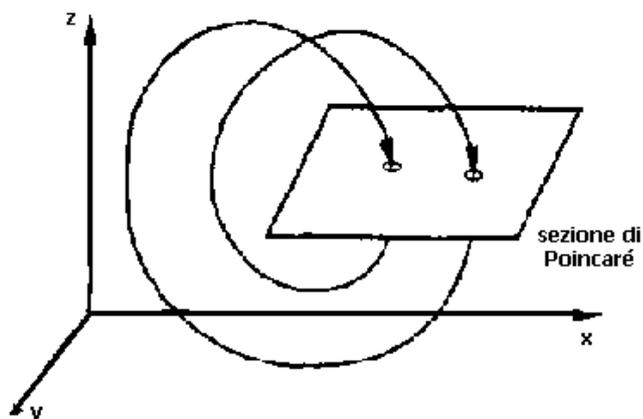


figura I. 19. Sezione di Poincaré in uno spazio di stato tridimensionale.

Quanto detto suggerisce che la forma analitica della mappa:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \quad [\text{I. 18}]$$

è un sistema tempo discreto definito su uno spazio di stato dimensionalmente minore a quello originario e ciò può essere considerato un primo vantaggio offerto da questa tecnica. anche se specifico alla sola classe di sistemi differenziali autonomi.

La mappa discreta di Poincaré offre vantaggi importanti anche nello studio dei regimi periodici presenti anche in sistemi non lineari tempo varianti sottoposti a sollecitazioni periodiche in ingresso. In questo caso la caratterizzazione dei punti, assunti nella mappa, come intersezione della traiettoria di stato con la sezione di Poincaré viene recuperata introducendo uno spazio generalizzato di forma  $(\mathbf{x},t)$ .

Nel caso di un sistema del secondo ordine, tale spazio generalizzato sarà quello tridimensionale in cui i piani di riferimento saranno quelli paralleli al piano di stato.

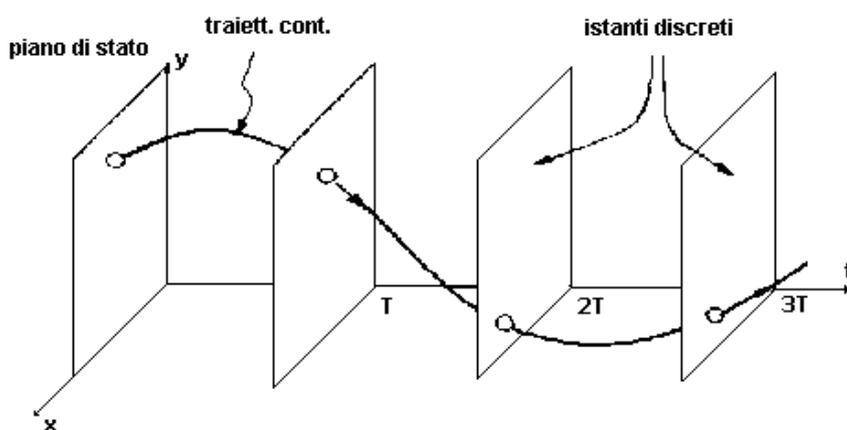


figura I. 20. Osservazioni successive per un sistema non autonomo con sollecitazione periodica di periodo T

Le intersezioni con essi appaiono come punti della traiettoria di stato colti alla luce di una lampada stroboscopica da cui l'aggettivo solitamente associato alla mappa di Poincaré. Quanto detto evidenzia come il discorso sia limitato sostanzialmente a due classi di sistemi non lineari quelli tempo

autonomi già sul tempo continuo oppure quelli sottoposti a sollecitazione periodica per i quali la considerazione della traiettoria di stato, in istanti discreti distanziati del periodo della sollecitazione in ingresso, rende il sistema discreto associato a questi tempo autonomo di forma [I.18].

È proprio questa forma che rende possibili molte deduzioni caratterizzanti le traiettorie del sistema di partenza, prima fra tutte quella relativa agli eventuali punti fissi. L'esistenza di punti verificanti l'identità  $\mathbf{x}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$ , infatti è indice dell'esistenza di cicli periodici di cui è possibile effettuare anche l'analisi della stabilità. Per quest'ultimo aspetto bisogna passare attraverso la linearizzazione del funzionale  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  attorno al punto di equilibrio di cui si vuole saggiare la stabilità.

A tale scopo si ricorre allo Jacobiano di  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{J}_F = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \dots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix} \quad [\text{I. 19}].$$

da cui possiamo ricavare gli autovalori dall'identità:

$$\det|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{J}_F| = 0 \quad [\text{I. 20}]$$

dal momento che stiamo trattando con un sistema tempo discreto, la stabilità è verificata se quest'ultimi presentano modulo minore di uno ed in presenza di piccoli discostamenti rispetto ai punti di equilibrio. Ancora più interessanti sono le deduzioni effettuabili in relazione a variazioni parametriche che possono intervenire nel modello considerato.

Indicato con  $\alpha$  il parametro variante del sistema possiamo pensare di parametrizzare in esso tutto il discorso appena fatto.

La mappa, ad esempio, assume la forma:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, \alpha) \quad [\text{I. 21}].$$

da cui risultano parametrizzati in  $\alpha$  anche i punti fissi  $\mathbf{x}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \alpha)$ , così come lo Jacobiano calcolato in essi e gli autovalori di quest'ultimo, denominati in questo contesto, "moltiplicatori di Floquet" [rif. 2].

In questo modo è possibile fare tutta una serie di valutazioni, rapportate ai valori assunti dal parametro  $\alpha$ , come ad esempio il numero di punti fissi presenti o quantificare gli ambiti di variazione di  $\alpha$  per i quali questi risultano stabili o meno. Intuitivamente possiamo pensare, infatti, che la mutazione di un punto di equilibrio da stabile ad instabile è indice di un cambio di comportamento o, in altre parole, di una biforcazione. Ciò è registrato graficamente con la fuoriuscita dallo spazio di stabilità, costituito dal cerchio di raggio unitario, di anche uno solo degli autovalori del modello linearizzato.

È possibile fare infine un appunto relativamente alla biforcazione raddoppio di periodo che viene rilevata quando un autovalore della mappa fuoriesce dal cerchio di stabilità passando per il punto  $-1$ . In corrispondenza di un autovalore pari a tale valore, infatti, la mappa presenta un andamento oscillante fra due valori, quindi, la traiettoria tempo continuo, da essa sintetizzata, presenta un andamento ciclico di periodo  $2T$ . [rif. 22]

Passando all'iterata seconda della mappa [I.21], questa presenta un punto fisso per valori del parametro  $\alpha$  maggiori di quello per cui la mappa semplice presentava un andamento oscillante, quindi, procedendo ad un'analisi parametrizzata di  $\mathbf{X}_{n+2} = \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X}_n, \alpha))$  è possibile effettuare tutte le deduzioni analitiche, effettuate precedentemente per il ciclo di periodicità singola, anche per quello a periodicità doppia.

#### 4.1. Esempi di Mappe smooth del primo ordine e biforcazioni standard

Quanto detto, in maniera generale, per lo studio delle biforcazioni esibite dalle mappe discrete vale solo per il caso in cui il legame [I.18] sia di tipo “smooth“, dove con tale nome si vuole indicare il fatto il termine di destra sia continuo e differenziabile, in ogni ordine, nelle variabili  $(x, \alpha)$  [rif.2].

Può essere utile a questo punto illustrare alcuni esempi di mappe smooth del primo ordine che consentono di applicare in maniera semplice i concetti espressi nei paragrafi precedenti, nonché, la classificazione delle biforcazioni standard.

Per ciascuna di esse si studierà la variazione dei punti fissi presentati al variare di un parametro  $\alpha$  del suo modello.

*Esempio 1: Biforcazione a forcone (Pitchfork Bifurcation).*

Una classica mappa utilizzata per illustrare la biforcazione a forcone è:

$$x_{n+1} = F(x_n, \alpha) = (1 + \alpha)x_n - x_n^3 \quad [\text{I. 22}].$$

Come illustrato, nel paragrafo introduttivo, la sua analisi inizia con l'individuazione dei punti fissi per cui dobbiamo distinguere il caso in cui  $\alpha < 0$  per il quale abbiamo un unico punto fisso:

$$x = 0 \quad [\text{I. 23}]$$

dal caso  $\alpha > 0$ , in cui si aggiunge la coppia di punti:

$$x = \pm\sqrt{\alpha} \quad [\text{I. 24}]$$

Per analizzarne la stabilità dobbiamo ricorrere alla derivata prima:

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = (1 + \alpha) - 2x \quad [\text{I. 25}]$$

rappresenta l'autovalore associato al sistema linearizzato attorno ad un generico punto  $x$ .

La stessa valutata nell'unico punto fisso presente dal caso  $\alpha < 0$ :

$$\left. \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} \right|_{x=0} = (1 + \alpha) \quad [\text{I. 26}]$$

restituisce un valore compreso nell'intervallo  $[0,1]$  per  $-1 < \alpha < 0$  intervallo in cui il punto  $x=0$  risulta, quindi stabile.

Passando all'analisi dell'intervallo  $\alpha > 0$  abbiamo una terna di punti fissi il punto  $x=0$  la [I.25] questa volta risulta instabile mentre i due punti [I.24] risultano stabili infatti l'autovalore:

$$\left. \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} \right|_{x=\pm\sqrt{\alpha}} = (1 + \alpha) - 2\alpha \quad [\text{I. 27}]$$

risulta incluso nell'intervallo  $[0,1]$  per  $0 < \alpha < 1$ .

Concludendo possiamo sintetizzare la breve analisi qui condotta nella considerazione che, per il valore  $\alpha=0$  del parametro di variazione, abbiamo registrato una biforcazione in cui un punto di equilibrio  $x=0$ , stabile fino ad esso, è divenuto instabile per lasciare il posto alla coppia  $x = \pm\sqrt{\alpha}$  di punti di equilibrio. La cosa può essere vista anche come la fuoriuscita dal cerchio di stabilità, nel punto 1, dell'autovalore relativo al punto di equilibrio  $x=0$ .

Il tutto è rappresentabile nella figura:

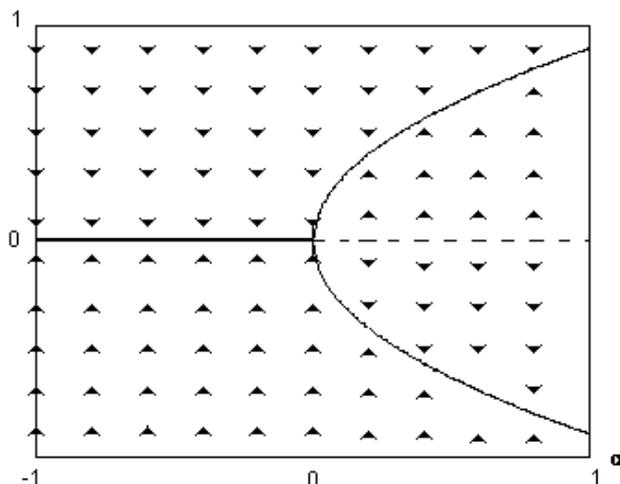


figura I. 21. Biforcazione a forcone.

in cui sono rappresentati punti fissi esibiti dalla mappa al variare del parametro  $\alpha$  e sono state evidenziate qualitativamente anche le direzioni seguite dai punti successivi della mappa verso essi. Infine dall'andamento grafico esibito si intuisce la ragione del nome attribuito a questo tipo di biforcazione.

*Esempio 2: Biforcazione a sella( Saddle-node Bifucation).*

Per questa tipologia utilizziamo la mappa:

$$x_{n+1} = \alpha + x_n - x_n^2 \quad [I. 28].$$

Anche in questo caso per determinarne i punti fissi dobbiamo distinguere il caso  $\alpha < 0$  da quello per  $\alpha > 0$ .

Nel primo caso infatti non esiste alcun punto di equilibrio mentre per il secondo abbiamo la coppia  $x = \pm\sqrt{\alpha}$ .

Passando alla derivata prima del funzionale  $F(x)$ :

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = 1 - 2x \quad [I. 29].$$

che calcolata nei punti di equilibrio ci suggerisce che per  $\alpha > 0$  il punto  $x = \sqrt{\alpha}$  risulta stabile mentre  $x = -\sqrt{\alpha}$  non lo è.

Graficamente possiamo illustrare la cosa nella seguente maniera:

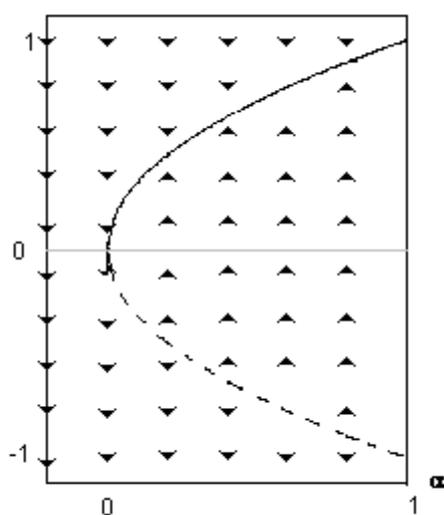


figura I. 22. Biforcazione a sella

in cui ancora una volta abbiamo evidenziato anche le direzioni seguite dai punti successivi della mappa [I.28]. A partire dal valore  $\alpha=0$ , in un sistema che non presentava punti di equilibrio, la biforcazione ne ha prodotti due uno stabile ed uno metastabile. Talvolta in letteratura questa biforcazione viene indicata anche con il nome di “fold bifurcation”

*Esempio 3: Biforcazione raddoppio di periodo (period doubling bifurcation).*

Infine un classico esempio di mappa utilizzata per illustrare la biforcazione con raddoppio di periodo è:

$$x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n) \quad [\text{I. 30}].$$

Calcolando i punti fissi

$$x = \alpha x (1 - x) \quad [\text{I. 31}].$$

abbiamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \end{cases} \quad [\text{I. 32}].$$

La cui stabilità al solito è verificata passando alla derivata prima della funzione di destra della [I.30]:

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = \alpha - 2\alpha x \quad [\text{I. 33}].$$

Da cui verifichiamo che l'autovalore associato al punto  $x=0$  risulta appartenente all'intervallo di stabilità  $[-1, 1]$  per  $-1 < \alpha < 1$ , mentre l'altro punto di equilibrio  $x=(\alpha-1)/\alpha$  risulta stabile per  $1 < \alpha < 3$ .

Nel punto  $\alpha=3$  l'autovalore associato a quest'ultimo diventa paria  $-1$  quindi la mappa di partenza presenta un andamento asintotico oscillante fra due valori distinti, indice del fatto che è occorso un raddoppio del periodo del regime armonico presentato dal sistema, di cui la [I.30] è una mappa di Poincaré. Tale andamento oscillante persiste fino ad diverso valore di  $\alpha$  dove si riscontra una nuova duplicazione di ciascuno dei punti tra cui la mappa oscilla. La cosa si potrebbe riscontrare analiticamente ripetendo l'analisi fin qui condotta per l'iterata seconda:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \alpha^2 x_n (1 - x_n) [1 - \alpha * x_n (1 - x_n)] = \\ &= \alpha^2 x_n (1 - x_n) [1 - \alpha * x_n + \alpha * x_n^2] \end{aligned} \quad [I. 34]$$

per la quale il regime oscillante della mappa [I.30] viene rilevato come un punto fisso confermando che si tratta di un regime periodico di periodo doppio. Questo tipo di biforcazione viene talvolta indicata in letteratura con il termine di “flip bifurcation” proprio in rapporto alla sua natura alternante.

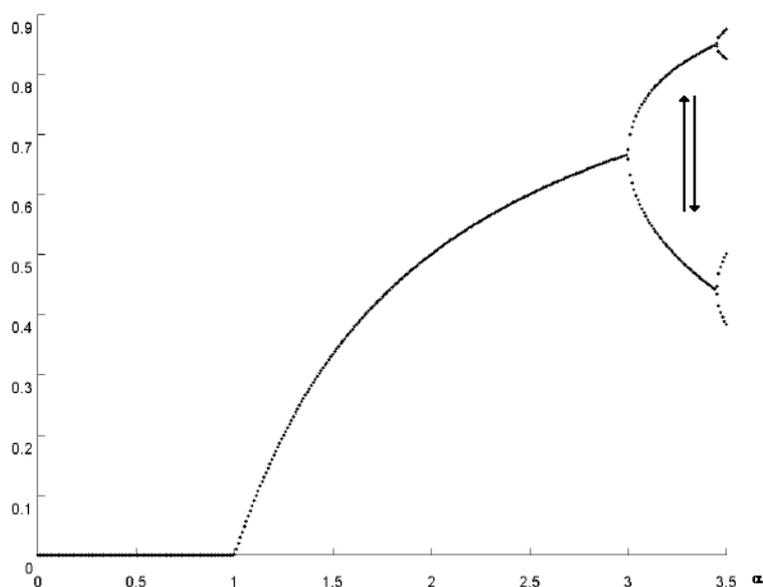


figura I. 23. Andamento dei punti di equilibrio per la mappa [I.30].

Da notare, infine, che sia la figura [I.8] che [I.23] sono state tracciate ricorrendo alla mappa [I.30] la quale esibisce all’aumentare del parametro  $\alpha$  una serie di biforcazioni del tipo raddoppio di periodo che si ripetono fino a che il comportamento non appare caotico come risulta evidente dal diagramma di biforcazione di figura I.8.

## **Capitolo II:**

# **Comportamento complesso dei convertitori di potenza Dc/Dc**

### **1. Introduzione**

L'elettronica di potenza si distingue da quella tradizionale giacché procede al trattamento dell'energia elettrica anziché operare sui segnali elettrici utilizzati come veicolo di trasmissione e manipolazione delle informazioni. Essa interviene, quindi, in un contesto tradizionalmente oggetto della teoria delle macchine e degli impianti elettrici apportandovi le tecniche e la flessibilità dell'elettronica tradizionale.

I dispositivi prodotti dall'elettronica di potenza non sono a se stanti ma sono frapposti tra la rete di distribuzione elettrica e le utenze di questa. Il loro scopo è di procedere al trattamento della sorgente elettrica fornita dai primi, solitamente in forma alternata e stabilizzata entro determinati limiti, al fine di farle assumere le proprietà richieste dai secondi. Si parla, infatti, in elettronica di potenza, di processori di energia, classificati in relazione alle forme assunte da ingresso ed uscita quindi operanti conversioni ac/dc, dc/dc oppure dc/ac.

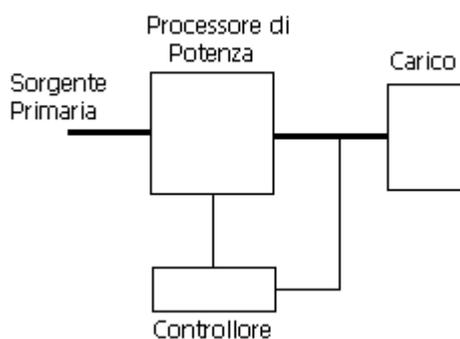


figura II. 1. Schema a blocchi di un processore di potenza.

In tutti i casi la conversione viene realizzata controllando il flusso dell'energia elettrica della sorgente primaria attraverso l'interposizione, fra questa e l'utilizzatore, di dispositivi dalla conducibilità modulabile quali quelli allo stato solido, utilizzati come interruttori. Questi, unitamente a serbatoi di energia quali condensatori ed induttori, determinano un'erogazione pulsata e ciclica dell'energia della sorgente primaria in un modo di operare che risulta comune a tutte le tipologie di conversione. Ciò, infatti, consente di ottenere legami semplici e diretti fra le quantità, caratterizzanti l'operazione di conversione, mediate sull'intervallo di periodicità e viene, pertanto, ritenuto convenzionale.

Le funzionalità dell'elettronica classica, con la chiusura sul processore di un ciclo di controllo, consentono di manipolare e stabilizzare la forma assunta dal riferimento elettrico in uscita con l'implementazione di applicazioni assai utili tra le quali possiamo citare: [rif.1]

- Disponibilità di sorgenti elettriche non soggette ad interruzioni di alimentazione.
- Conservazione e trasporto dell'energia elettrica a grandi distanze e con basse dissipazioni.
- Controllo dei processi ed automazione industriale grazie all'estrema flessibilità e stabilità delle alimentazioni fornite.

Il tutto, unitamente al continuo miglioramento dei dispositivi allo stato solido con un più ampio volume di energie trattabili, è alla base di una crescente richiesta di circuiterie di potenza. A questa crescente importanza non corrisponde, però, una soddisfacente modellizzazione dei circuiti implementati. Le rilevanti potenze trattate e l'entità delle dinamiche espresse impongono seri limiti all'approssimazione di piccolo segnale alla base delle tradizionali tecniche dell'elettronica tradizionale. I modelli, solitamente utilizzati per l'analisi e la sintesi, sono strettamente legati alle dinamiche convenzionali, e sono spesso formulati con criteri semi euristici.

Le inevitabili variazioni delle condizioni operative portano, assai facilmente, le realizzazioni circuitali lontano dalle condizioni nominali di funzionamento ed i comportamenti, che ne derivano, non sono assolutamente inquadrabili dai modelli appena citati. Ciò, in particolare, è maggiormente rilevabile per la categoria dei convertitori dc/dc dove tali comportamenti appaiono essere quelli tipici dei sistemi non lineari; quali ad esempio le oscillazioni sub-armoniche e comportamenti irregolari considerati caotici.

Tale potenzialità caotica era stata individuata, già da tempo, dagli studiosi ed attribuita a non meglio specificati effetti aleatori. Strettamente bandita nelle condizioni operative è divenuta, da qualche anno, oggetto di rinnovato interesse proprio a seguito del ritorno allo studio dei sistemi non lineari e del carattere caotico delle loro dinamiche.

Infine, la natura "lineare a tratti" dei circuiti, caratterizza i comportamenti da essi esibiti con nuove tipologie di biforcazioni non sperimentate né analizzate nei sistemi non lineari così detti "smooth". Accanto alle tradizionali biforcazioni, quali il raddoppio di periodo, vengono manifestate, infatti, improvvise transizioni da regimi armonici verso andamenti irregolari la cui causa è individuata nell'iterazione fra le traiettorie e particolari bordi dello spazio di stato.

Anche per questo contesto la tecnica delle mappe discrete risulta assai utile come strumento di analisi seppure con le dovute modifiche rispetto alla

forme viste nel primo capitolo e contribuendo alla conoscenza dei comportamenti irregolari esibiti ed alla individuazione degli ambiti per i quali questi si manifestano [rif.17].

## 2. Convertitori DC/DC

Una prima forma di schematizzazione dei convertitori dc/dc può essere quella di un blocco funzionale che preveda in ingresso la forma raddrizzata della tensione di rete resa continua da un semplice filtro capacitivo [rif.1].

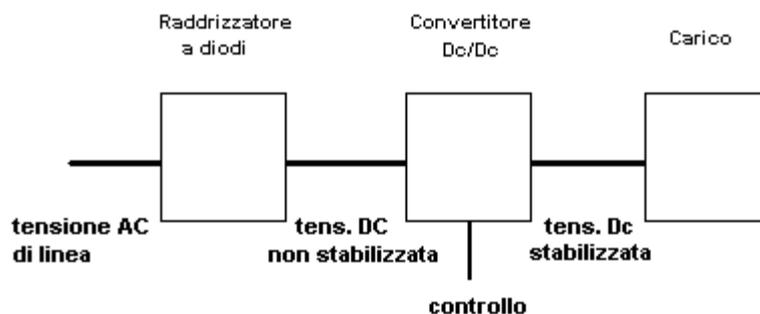


figura II. 2 Schema a blocchi di una conversione Ac/Dc.

Il carattere “passivo” del filtro utilizzato rende chiaramente la tensione di rete raddrizzata ancora piuttosto irregolare e non stabile quindi inadatta a carichi continui sensibili ai ripple sovrapposti.

La loro funzione è, come già accennato, quella di controllare il flusso di energia, messo a disposizione dalla sorgente primaria, al fine di ridurla nella forma più confacente al carico e ciò viene effettuato attraverso l’interposizione fra i due di un interruttore pilotato secondo la tecnica PWM (pulse width modulation). Tale tecnica, mutuata dalle comunicazioni elettriche, consiste nella suddivisione del riferimento temporale in intervalli regolari di periodo  $T$ ; durante un sotto intervallo  $t_{on}$  di questo, è consentita l’erogazione della sorgente in ingresso, mentre durante il rimanente tempo  $T-t_{on}$ , questa viene interdetta.

Solitamente si preferisce riportare il tempo  $t_{on}$  all'intero intervallo di periodicità introducendo il rapporto:

$$d = \frac{t_{ON}}{T} \quad [II. 1]$$

denominato duty cycle.

La commutazione è affidata a dispositivi a semiconduttori utilizzati soltanto in due distinte modalità operative: interdizione o piena conduzione. Questi dal punto di vista del modello, in prima approssimazione, sono ritenuti ideali vale a dire presentanti caduta ohmica nulla in conduzione, corrente nulla in interdizione e commutazione fra uno stato e l'altro in tempi infinitesimi. Nelle topologie circuitali, inoltre, sono trascurati gli effetti parassiti di componenti e collegamenti; ciò è importante per considerare solo gli effetti di non linearità derivanti della topologia stessa e dalle metodiche di controllo, i modelli fisici completi dei dispositivi allo stato solido e dei bipoli presenti nei circuiti apporterebbero ulteriori effetti di non linearità parassite.

In generale si possono individuare due tipologie base lo step-down e lo step-up, detti anche rispettivamente buck e boost converter; la prima è utilizzata quando si voglia avere un riferimento di tensione secondario più basso di quello primario, la seconda, al contrario, quando si voglia avere un riferimento più alto [rif.1].

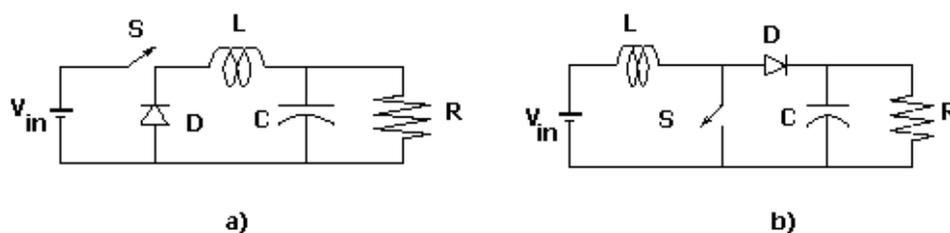


figura II. 3.Schemi circuitali di a) Buck converter e b) di Boost converter.

Osservando la loro topologia circuitale si può notare come la disposizione relativa di interruttore e diodo è tale da consentire l'intervento di uno solo di essi, in altre parole se conduce l'interruttore il diodo è interdetto e viceversa, e ciò da un primo suggerimento sulla natura lineare a tratti dei convertitori, e su quali possono essere i modelli a cui ci si può rifare nell'analisi del loro funzionamento.

Riferendosi, in dettaglio, allo schema circuitale del Buck-converter durante l'intervallo di tempo in cui l'interruttore risulta chiuso la tensione in ingresso contro polarizza il diodo; la sorgente primaria rifornisce il carico oltre che caricare induttore e condensatore, quindi, la topologia che modella questo intervallo è:

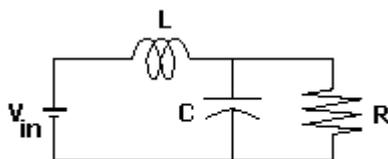


figura II. 4. Schema equivalente buck converter con interruttore in posizione on.

Quando all'interruttore viene dato il comando di chiusura, alla corrente presente nell'induttore deve essere offerta una maglia di percorrenza alternativa a quella vista fino a quell'istante, al fine di evitare impulsi di tensione ai suoi capi. Tale via di "libera circolazione" è rappresentata dal diodo che, non essendo più contro polarizzato dalla tensione  $V_{in}$ , consente l'attraversamento della corrente con caduta di tensione nulla. La topologia circuitale di riferimento per questa fase è rappresentata dalla figura:

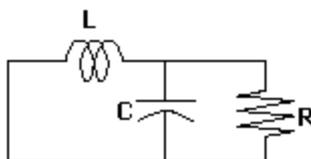


figura II. 5. Schema equivalente di un buck converter con interruttore in posizione e corrente di induttore non nulla.

Infine può sussistere anche il caso in cui la corrente di induttore si annulla prima che sia trascorso l'intervallo di periodicità e venga riacceso l'interruttore, quindi, non potendosi invertire per la presenza del diodo il carico viene rifornito dalla sola energia presente nel condensatore. La topologia di riferimento per quest'intervallo è data da:

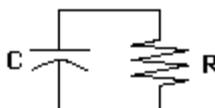


figura II. 6. Schema equivalente di un buck converter con interruttore in posizione e corrente di induttore nulla.

Nel caso del boost converter lo stato dell'interruttore stabilisce l'alternarsi delle seguenti topologie circuitali

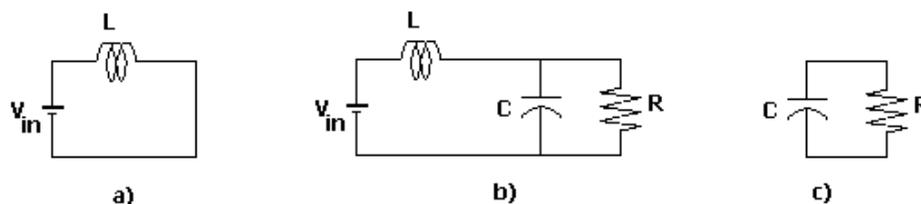


figura II. 7. Le topologie circuitali che si susseguono nel funzionamento convezionale del Boost converter.

Con l'interruttore in stato on l'induttore viene caricato per poi rifornire il carico insieme alla sorgente primaria si ottiene così in uscita un valore maggiore di tensione.

In entrambi i casi citati il funzionamento convenzionale è pensato come una sequenza di configurazioni circuitali, idealmente lineari, che vengono fatte susseguirsi in maniera ciclica nell'ambito di un intervallo di tempo  $T$ . Tale approccio risulta utile al fine di ottenere legami analitici semplici e diretti tra le quantità caratterizzanti la conversione attraverso la loro media temporale sull'intervallo  $T$ . Pertanto volendo fare una schematizzazione analitica possiamo pensare di raccogliere i modelli lineari di ciascuna di dette configurazioni circuitali:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_{in} & \text{per } 0 < t < d_1 T \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{V}_{in} & \text{per } d_1 T < t < (d_1 + d_2) T \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_3 \mathbf{V}_{in} & \text{per } (d_1 + d_2) T < t < T \end{cases} \quad [\text{II. 2}].$$

nella formulazione della [II.2] si è tenuto conto del caso generale in cui la corrente di induttore si annulli prima che venga richiuso l'interruttore cosa che stabilisce l'alternarsi di tre topologie circuitali in un regime conduttivo che viene denominato DCM (Discontinuous Conduction Mode).

Nel caso in cui ciò non avvenisse le topologie circuitali che si susseguono sono solo due che per i casi citati sono quelli relativi alle figure I.4 ed I.5 per il Buck ed alle prime due topologie della figura I.6 per il boost. Tale regime conduttivo che viene denominato CCM (Continuous Conduction Mode).

Per quanto riguarda gli intervalli di tempo  $d_1$ - $d_2$ - $d_3$ , determinati dallo stato dell'interruttore, bisogna notare che, riferendosi al caso generale di conduzione DCM, il valore di  $d_1$  è determinato dal pilotaggio dell'interruttore mentre il valore di  $d_2$  è determinabile attraverso l'equazione integrale:

$$\delta i_{L,on} = \frac{1}{L} \int_0^{d_1 T} v_{L,on}(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{d_1 T}^{(d_1+d_2)T} v_{L,off}(\tau) d\tau = \delta i_{L,off} \quad [\text{II. 3}]$$

relativa alla variazione della corrente nell'induttore in fase di carica e scarica. Il rimanente  $d_3$  è determinabile per differenza  $d_3=1-(d_1+d_2)$  [rif.1] e [rif.22].

### 3. Modellizzazioni a ciclo aperto

Come già accennato il carattere periodico del regime di funzionamento voluto per i convertitori Dc/Dc rende il comportamento esibito riassumibile in maniera naturale attraverso medie temporali dei parametri di stato sull'intervallo di periodicità. Ciò è alla base dei modelli attualmente utilizzati sia per l'analisi che la sintesi dei convertitori in regime di funzionamento convenzionale.

#### 3.1. Modello tempo continuo

Perché il ricorso alla media temporale risulti effettivamente utile alla formulazione di legami semplici fra gli attributi caratterizzanti la conversione è necessario imporre un'ipotesi semplificativa sulla dinamica delle variabili di stato. Ritenendo, infatti queste lente rispetto alla frequenza di switching, è possibile semplificare la media temporale, sul periodo  $T$ , della schematizzazione [I.2] [rif.1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t) = & \int_t^{t+d_1 T} (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}_1(\tau) V_{in} d\tau + \\ & + \int_{t+d_1 T}^{t+(d_1+d_2)T} (\mathbf{A}_2 \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}_2(\tau) V_{in} d\tau + \int_{t+(d_1+d_2)T}^{t+(d_1+d_2+d_3)T} (\mathbf{A}_3 \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}_3(\tau) V_{in} d\tau \end{aligned} \quad [\text{II. 4}]$$

nella forma compatta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t) &= (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 V_{in}) d_1 T + \\ &+ (\mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 V_{in}) d_2 T + (\mathbf{A}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_3 V_{in}) d_3 T \end{aligned} \quad [\text{II.5}]$$

Passando, infine, al limite del rapporto incrementale della variabile  $x$  di stato:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} = \dot{\mathbf{x}}(t) \quad [\text{II. 6}].$$

in tal modo sintetizziamo il problema differenziale lineare a tratti [I.2] in un unico sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_m V_{in} \quad [\text{II. 7}]$$

in cui abbiamo raccolto nelle matrici

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m &= \sum_{i=1}^3 d_i \mathbf{A}_i \\ \mathbf{B}_m &= \sum_{i=1}^3 d_i \mathbf{B}_i \end{aligned} \quad [\text{II. 8}]$$

le somme pesate delle matrici dei sistemi lineari costitutivi, pesate secondo i coefficienti  $d_1..d_3$  esprimenti le durate temporali delle rispettive topologie lineari, normalizzate al periodo  $T$  di funzionamento ciclico.

### **3.2. Dinamiche di stato semplificate**

La modellizzazione [II.5] è a carattere generale ma matematicamente poco agevole da trattare al fine di ottenere legami diretti fra i parametri significativi della conversione quali tensioni in ingresso, parametri di stato e duty cycle dell'interruttore. Nell'ambito di un funzionamento convenzionale è possibile ipotizzare la sussistenza di ulteriori ipotesi semplificative che permettono di ottenere legami funzionali fra suddetti parametri le componenti circuitali assai sintetiche ed immediate. Esse sono di ritenere costanti, in prima approssimazione, sia la tensione in uscita che quella relativa alla sorgente di tensione in ingresso [rif.1]. Questo permette di ridurre sia l'ordine di complessità del sistema, non più del secondo ordine ritenendo costante una delle variabili di stato, che la dinamica dell'altra variabile che assume conseguentemente un andamento lineare. La validità di tali ipotesi è garantita sufficientemente in condizioni di funzionamento standard e dal dimensionamento opportuno del filtro RC in uscita.

È il caso, a questo punto, di illustrare quanto detto per le tipologie base indicate precedentemente.

#### **3.2.1. Buck-converter**

Il buck converter esprime topologicamente in maniera più intuitiva l'effetto di parzializzazione a cui la sorgente primaria di tensione viene sottoposta attraverso l'interposizione dell'interruttore.

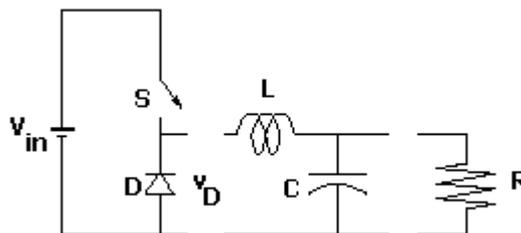


figura II. 8. Schematizzazione dei blocchi in serie di un buck converter

Questi infatti conferisce alla sorgente primaria, rispetto al carico collegato, un andamento schematizzabile, nel tempo, ad un segnale treno d'onda quadra.

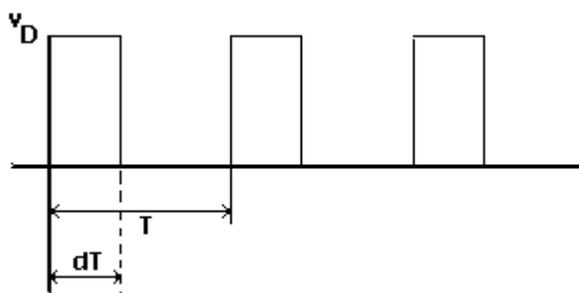


figura II. 9. Evoluzione temporale assunta dalla sorgente primaria ad opera dell'interruttore.

Se di questa forma d'onda si effettua una media temporale, ritenuta la sorgente primaria costante nel tempo, si ottiene un rapporto di proporzionalità fra duty-cycle dell'interruttore e tensione primaria.

$$V_o = \int_0^T v_o(t)dt = \int_0^{dT} v_o(t)dt + \int_{dT}^T v_o(t)dt = dV_{in} \quad [\text{II. 9}]$$

l'estrazione della componente continua avviene ad opera del filtro LC, passa basso, interposto fra interruttore e carico. La presenza del diodo è necessario

alla libera circolazione della corrente nell'induttore per l'intervallo in cui l'interruttore viene aperto. La corrente di induttore risultante presenterà una variazione lineare con pendenza  $(V_a - V_o)/L$  nella fase in cui lo switch è nello stato on e pendenza  $V_o/L$  nella fase in cui lo switch è nello stato off costituendo un segnale con forma d'onda triangolare il cui valor medio viene fornito al carico.

Dalle ipotesi di partenza, infatti, avendo ritenuto la tensione di uscita costante il carico assorbirà una corrente costante che non può che essere coincidente con la componente continua della corrente di induttore mentre la componente alternata è assorbita dal condensatore. Tale fatto suggerisce un criterio per distinguere il passaggio fra le due tipologie di conduzione CCM e DCM. Una diminuzione eccessiva del carico, in termini di corrente assorbita da esso, determina un abbassamento della componente continua della corrente di induttore la quale, al di sotto di un certo valore, si annulla per intervalli non nulli di tempo, non potendosi invertire per la presenza del diodo.

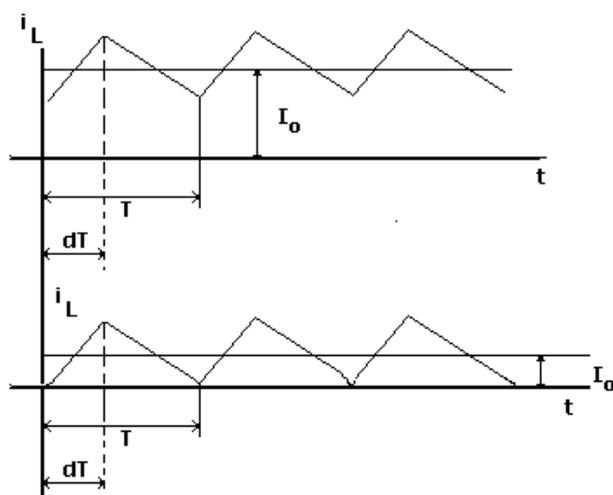


figura II. 10. Variazione della corrente di induttore in presenza di un aumento della resistenza di carico.

Per analizzare quantitativamente tale possibilità, si ricava l'espressione della induttanza rispetto alle condizioni operative presenti nella condizione confine tra le due tipologie di conduzione

$$L_{\text{critico}} = \frac{T_s V_o}{2I_o} (1-d) \quad [\text{II. 10}]$$

Questa viene indicata come induttanza critica poiché rappresenta il valore dell'induttanza per la quale, in condizioni operative limite, una minima diminuzione della corrente di carico causa il passaggio dalla conduzione CCM a quella DCM. Tale passaggio non è tollerato operativamente poiché i due regimi presentano legami funzionali diversi tra loro.

Il regime CCM ad esempio presenta un legame fra duty-cycle e condizioni operative diverso dalla [II.9] in quanto coinvolge anche le correnti di carico:

$$d = \frac{V_o}{V_d} \sqrt{\frac{I_o / I_{\text{LB,max}}}{1 - V_o / V_{\text{in}}}} \quad [\text{II. 11}]$$

dove abbiamo

$$I_{\text{LB,max}} = \frac{TV_o}{2L} \quad [\text{II. 12}]$$

Le valutazioni effettuate fin qui rappresentano i legami funzionali attraverso cui vengono ricavate valutazioni indicative nella sintesi di un convertitore stepdown. A riguardo le specifiche progettuali solitamente imposte, oltre alla stabilità della tensione in uscita, sono:

- collegamento a monte con una sorgente primaria oscillante fra due valori estremi:  $V_{o,MAX}$  e  $V_{o,min}$ ,
- un carico oscillante fra due valori estremi  $R_{MAX}$  ed  $R_{min}$ ,
- regime di conduzione CCM per tutti i valori di carico e di tensione in ingresso previsti
- Ripple in uscita rapportato all'ingresso  $\Delta V_o/V_o$  ed espresso in percentuale.

Prima di tutto è evidente come gli estremi di variazione presentati dal duty-cycle sono ricavabili dal legame [II.9], applicato alle condizioni estreme previste per la sorgente primaria. L'induttanza viene dimensionata in modo tale da essere sufficientemente grande da presentare un ripple di corrente che non annulli, per alcun intervallo di tempo, la corrente di induttore anche nelle condizioni di minima corrente erogata al carico. Ciò è garantito imponendo che l'induttanza scelta sia più grande della maggiore induttanza critica relativa alle diverse condizioni operative previste dalle variazioni estreme di carico e sorgente primaria. Queste per la [II.10] sono rappresentate da quelle che vedono il duty cycle e la corrente di carico minimi. Il dimensionamento del condensatore di uscita, infine, viene effettuato imponendo che il ripple di tensione, su esso presente e dovuto dalla componente alternata di  $i_L$ , sia minore di una specificata percentuale  $\Delta V_o/V_o$  della tensione espressa in uscita.

$$C = \frac{1}{8} T^2 \frac{1-d}{L(\Delta V_o/V_o)} \quad [\text{II. 13}]$$

### 3.2.2. Boost converter

Il Boost-converter o stepup presenta finalità opposte dal momento, come lascia intendere il nome, esso restituisce tensioni in uscita maggiori della sorgente primaria. Topologicamente è costruito nella seguente forma:

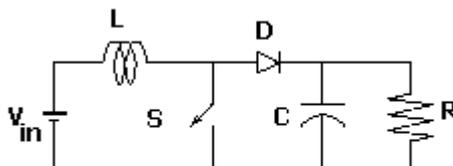


figura II. 11 . Schema circuitale del Boost converter.

Ipotizzando anche per questo convertitore le medesime ipotesi semplificative viste precedentemente possiamo ricavare legami funzionali altrettanto sintetici di quelli visti precedentemente. In regime CCM, il legame fra tensioni in ingresso ed uscita e duty cycle assume la forma, :

$$V_o = \frac{V_d}{1-d} \quad [\text{II. 14}]$$

Mentre le pendenze lineari presentate dalla corrente di induttore sono  $V_d/L$  per la fase con interruttore acceso e  $(V_o-V_d)/L$  per quella con interruttore spento. Anche per il Boost è possibile una modalità di conduzione DCM per la quale, analogamente a quanto visto per il Buck converter, esiste un diverso legame tra duty cycle e tensioni di riferimento:

$$d = \frac{V_o}{V_d} \sqrt{\frac{4V_o}{27V_d} \left(\frac{V_o}{V_d} - 1\right) \frac{I_o}{I_{oB,Max}}} \quad [\text{II. 15}]$$

dove abbiamo

$$I_{oB,max} = \frac{2TV_o}{27L} \quad [\text{II. 16}].$$

Analizzando, infine, la condizione confine fra i regimi DCM-CCM abbiamo la seguente induttanza critica:

$$L_{\text{critico}} = \frac{T_s V_o}{2I_o} d(1-d)^2 \quad [\text{II. 17}]$$

Nelle implementazioni convenzionali il boost converter viene solitamente utilizzato in regime DCM giacché ciò consente una semplificazione delle dinamiche presentate dal sistema. Nel regime DCM, infatti, annullando, in ogni ciclo di periodicità la corrente di induttore si riduce l'ordine della dinamica del secondo ordine del filtro LC consentendo una più semplice azione di controllo. Per ottenere che tale tipologia di regime sia sempre garantito bisogna dimensionare l'induttanza minore della più piccola induttanza critica ricavabile delle condizioni operative estreme previste.

#### **4. Strategie di controllo – current e voltage mode**

I legami precedentemente calcolati sono assai semplici e si prestano ad essere implementati assai semplicemente in due strategie di controllo il **voltage mode control** ed il **current mode control** tradizionalmente adottate nelle realizzazioni [rif.1]. I loro schemi sono:

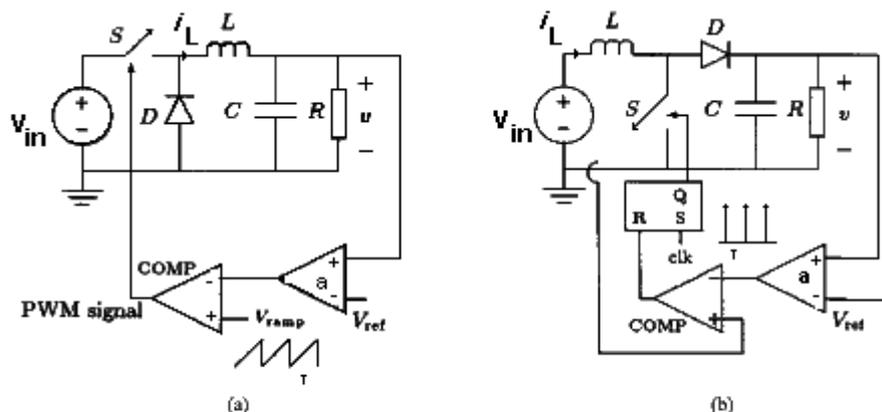


figura II. 12 . principali strategie di controllo adottate per i convertitori dc/dc

Nello schema di figura II.12a), l'azione correttiva del controllore è determinata da un segnale di errore, costituito dalla deviazione della tensione d'uscita rispetto ad un livello di riferimento, proporzionalmente ad esso, infatti, il controllore effettua la modulazione PWM dell'intervallo di chiusura dell'interruttore. Tale controllore è, di fatto, costituito dal comparatore, presente nello schema, il quale fornisce il segnale di comando alla circuiteria di pilotaggio dell'interruttore. A seguito della comparazione tra un segnale a dente di sega asimmetrica, di frequenza  $f=1/T$ , ed il suddetto segnale di errore il comparatore restituisce un livello alto quando questi è minore della rampa triangolare, uno basso altrove.

Quando sussistono le condizioni di regime ideali, vale a dire tensione in uscita pari al segnale di riferimento, esso fornisce al circuito di pilotaggio un onda quadra con duty cycle costante, determinato dalle relazioni [II.9] ed [II.14] in rapporto alle condizioni nominali desiderate quando, ad esempio, si vogliono condizioni di conduzione CCM. Nel caso in cui l'uscita sia diversa dal valore di riferimento il suo discostamento determina un aumento del duty cycle se è minore, una diminuzione in caso contrario.

Per quanto riguarda la seconda topologia, l'azione correttiva non è direttamente leggibile nella implementazione circuitale ma è necessaria l'analisi complessiva dello schema di controllo attraverso il modello tempo continuo [II.7]. Questo modello è quello solitamente utilizzato nell'analisi degli schemi di controllo raffigurati in figura II.12 e nel caso di un regime di conduzione CCM si riduce alla forma [rif.1]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A}_1 d + \mathbf{A}_2 (1-d)] \mathbf{x} + [\mathbf{B}_1 d + \mathbf{B}_2 (1-d)] V_{in} = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, d) \end{aligned} \quad \text{[II. 18 ]}$$

dove si è messo in evidenza la dipendenza funzionale dal solo duty cycle avendo ritenuto per semplicità  $V_{in}$  costante.

Possiamo, a questo punto considerare, uno schema a blocchi che sintetizzi entrambe le topologie di figura II.12 nella forma:

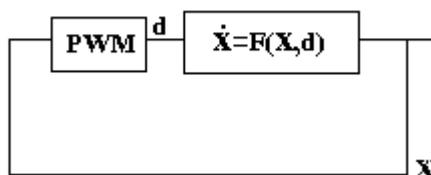


figura II. 13 . Schema a blocchi di un ciclo di controllo applicato ad un convertitore dc/dc.

Individuato in  $(\mathbf{X}, \mathbf{D})$ , lo stato di equilibrio del sistema complessivo a ciclo chiuso di figura II.13, possiamo pensare di linearizzare attorno ad esso i vari blocchi funzionali rappresentati in figura II.13.

Il sistema di equazioni differenziali [II.18], rappresentativo del convertitore, assume ad esempio la forma:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A}_1 D + \mathbf{A}_2 (1 - D)] \delta\mathbf{x} + \\ &+ [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \mathbf{X} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) V_{in}] \delta d \end{aligned} \quad [\text{II. 19}]$$

Dove ovviamente si è indicato con  $\delta\mathbf{x}$  e  $\delta d$  le variazioni delle variabili di stato e del duty cycle rispetto alla condizioni di equilibrio.

Per quanto riguarda il modulatore PWM la sua azione, in generale per entrambi i casi di controllo citati, può essere sintetizzata dall'espressione, non differenziale [rif.2], [rif.19], [rif.27]:

$$\begin{aligned} G^T \mathbf{x} &= g_v v_c(t) + g_i i_L(t) = \\ &= \alpha + \beta(t \bmod T) = \alpha + \beta T d \end{aligned} \quad [\text{II. 20}]$$

Con questo approccio, ricorrendo alle forme linearizzate dei blocchi presenti nello schema di figura II.13, si recuperano tutti gli strumenti analitici sviluppati per i sistemi lineari, compresi i criteri di stabilizzazione attraverso la sintesi di un controllore ottimo. La sua validità, tuttavia, rimane confinata al regime convenzionale di funzionamento del convertitore caratterizzato cioè da un'unica commutazione per intervallo di periodicità in base al quale è stato possibile sintetizzarne l'evoluzione nella forma [II.18] per non contare l'ipotesi di piccolo segnale necessaria alla linearizzazione [II.19].

## 5. Comportamento complesso di un buck converter

A questo punto per entrare nello specifico dei comportamenti complessi esibiti dai convertitori dc/dc, si puntualizzerà il discorso per un particolare tipo di convertitore vale a dire il Buck converter fornito di un ciclo di controllo in modalità voltage mode [rif. 2], [rif.3].

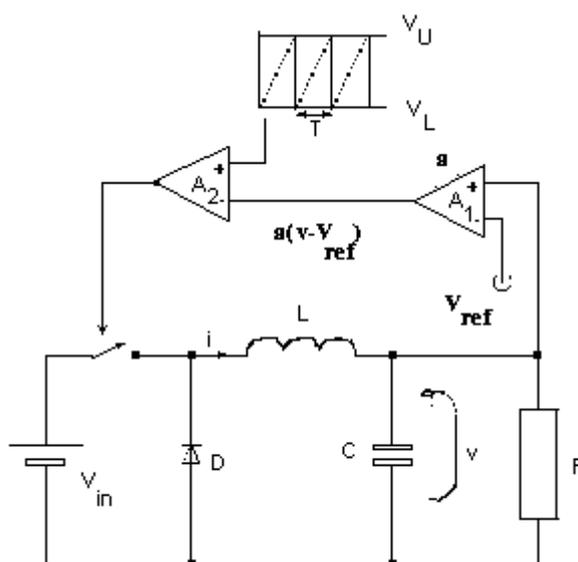


figura II. 14. Schema di un buck converter fornito di ciclo di controllo voltage mode.

A riguardo si assume che le condizioni operative di carico e le componenti il circuito siano tali da garantire un regime di conduzione CCM, nel qual caso le topologie che si alternano ciclicamente durante il funzionamento sono soltanto due.

La prima di queste, relativa all'interruttore chiuso, presenta il seguente modello differenziale [rif.17]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V_{in}}{L} \end{pmatrix} \quad [\text{II. 21}]$$

Mentre la seconda, ad interruttore aperto, ha la seguente struttura:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} \quad [\text{II. 22}]$$

Per la tipologia di controllo assunta la condizione di commutazione [II.20] si particolarizza nella forma:

$$\begin{aligned} g_i &= 0, g_v = 1 \\ \alpha &= v_1, \beta = \frac{v_u - v_l}{T} \end{aligned} \quad [\text{II. 23}]$$

in cui ancora, in riferimento allo schema di figura II.14, abbiamo i seguenti legami con i parametri caratterizzanti il segnale triangolare di riferimento  $v_l = V_{ref} + V_L/a$  e  $v_u = V_{ref} + V_U/a$ .

Di questo convertitore, infine, si studierà il comportamento in relazione alla variazione dell'ampiezza del riferimento di tensione primario.

Nonostante lo schema implementativo illustrato sia pensato per garantire al convertitore un regime periodico convenzionale, con una singola commutazione per intervallo di periodicità del riferimento triangolare, esso presenta, a seguito di variazioni parametriche, una serie di comportamenti non analizzabili secondo le modellizzazioni tradizionali illustrate nel paragrafo precedente. Tali tipologie di comportamento irregolare sono costituite da oscillazioni subarmoniche, regimi quasi periodici ed improvvisi salti da regimi regolari ad irregolari, caratterizzati da ampi spettri armonici. Ciò dimostra che

il Buck converter, così come anche gli altri convertitori dc/dc di potenza, sono caratterizzati da evidenti dinamiche non lineari. In presenza di variazioni parametriche, infatti, essi evidenziano tutta la serie di biforcazioni viste per i sistemi non lineari smooth; quali, ad esempio, il raddoppio di periodicità dei regimi armonici. La loro natura “lineare a tratti” conferisce ai modelli un carattere non smooth nel senso che i termini di destra delle equazioni differenziali è causa di nuove particolari transizioni di comportamento. In detti convertitori possono, infatti, intervenire improvvise transizioni da andamenti periodici a quelli caotici. Per rintracciare la natura di tali fenomeni si individuano, nello spazio di stato, i bordi che delimitano gli spazi di validità dei modelli elementari che costituiscono i tratti di linearità del modello complessivo [rif.2], [rif.34].

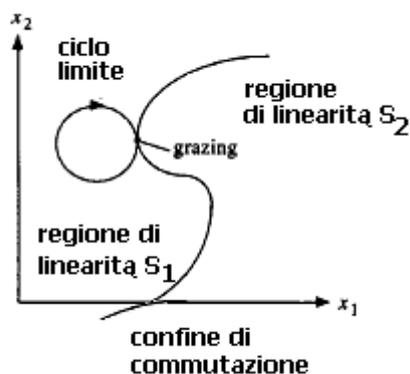


figura II. 15 . Schematizzazione grafica di una iterazione grazing tra traiezioni e confine di commutazione.

In questo modo le nuove tipologie di biforcazioni cui si accennava sopra, ossia l'alternarsi improvviso di andamenti regolari e caotici, vengono associate all'interazione fra le traiettorie di stato e detti bordi come quando, ad esempio, a seguito di una variazione parametrica, la traiettoria di stato diviene tangente ad essi.

### 5.1. **Espressione analitica della soluzione relativa alle topologie circuitali base**

Prima di entrare nel dettaglio dello studio delle dinamiche esibite dal convertitore in esame, si possono fare delle valutazioni generali sulla forma analitica della soluzione espressa da ciascuna delle topologie lineari base. Entrambe sono del secondo ordine e presentano matrice dinamica comune, quindi, possiamo scrivere la [I.14] nella forma :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{-1}[\Phi(t - t_0) - \mathbf{I}]\mathbf{B}V_{in} \quad [\text{II. 24}]$$

in cui abbiamo indicato con:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad [\text{II. 25}]$$

la funzione di transizione e le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{II. 26}]$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ L \end{bmatrix} \quad [\text{II. 27}]$$

relative ai sistemi lineari [II.21] ed [II.22].

## 5.2. **Caratterizzazione geometrica dello spazio di stato**

La natura “lineare a tratti” del modello consente una caratterizzazione generale delle traiettorie del sistema nello spazio di stato. Infatti è possibile individuare, attraverso l’espressione  $\mathbf{X} = -(\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ , i punti di equilibrio di ciascuna delle topologie base, essi sono  $(\mathbf{V}_{in}, \mathbf{V}_{in}/\mathbf{R})$  per la topologia ad interruttore chiuso e l’origine  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  per quella ad interruttore aperto [rif.17].

Ciascuno dei sistemi [II.21] ed [II.22] si porta ad operare nel rispettivo punto di equilibrio con oscillazioni smorzate calcolandone gli autovalori, avendo matrice dinamica comune ed essendo del secondo ordine, il loro polinomio caratteristico è espresso da [rif.19]:

$$\lambda^2 - \text{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0 \quad \text{[II. 28]}$$

le cui radici sono:

$$\lambda = k \pm j\omega \quad \text{[II. 29]}$$

in cui si è assunta la seguente simbologia:

$$k = \frac{\text{trace}(\mathbf{A})}{2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} = -\frac{1}{2RC} \quad \text{[II. 30]}$$

$$\omega = \sqrt{\det(\mathbf{A}) - k^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - k^2}$$

e si ritiene sempre valida la diseuguaglianza:

$$\frac{1}{LC} - \frac{1}{(2RC)^2} > 0. \quad \text{[II. 31]}$$

Importante è, anche, la caratterizzazione grafica che si può dare per l'azione commutativa determinata dal controllo voltage mode. L'espressione del segnale triangolare,  $v_r(t)=v_l+(v_u-v_l)(t \bmod T)/T$ , è rappresentabile, infatti, con una retta parallela all'asse della corrente di induttore, con ascissa  $v_r(t)$  quindi oscillante fra i valori estremi  $v_u$  e  $v_l$ .

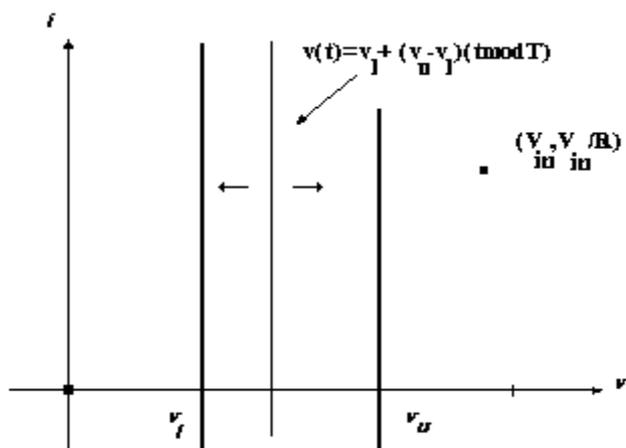


figura II. 16 .Bordi limite dell'azione commutativa nello spazio di stato.

Dall'intersezione di tale retta con la traiettoria di stato viene stabilita la commutazione dell'interruttore presente nello schema circuitale.

Quando l'interruttore è acceso la traiettoria di stato relativa alla topologia risultante tende al punto di equilibrio  $(V_{in}, V_{in}/R)$  portandosi sopra il riferimento triangolare da sinistra a destra della retta di commutazione. Ciò determina, nella logica del controllo, lo spegnimento dello stesso, la topologia risultante tende al punto  $(0,0)$  riportando la traiettoria di stato indietro verso la retta di commutazione e causando, quindi, il ripetersi ciclico delle commutazioni.

Le rette aventi ascissa  $v_u$  e  $v_l$ , illustrate in figura, rappresentano i confini estremi dell'azione commutativa del controllore. Quando, a causa della variazione parametrica, la traiettoria del sistema si porta ad essere tangente alla retta di commutazione proprio in corrispondenza di una di tali rette confine si

riscontrano bruschi cambiamenti nel comportamento asintotico esibito. Pertanto, tali rette sono assunte come confine di una partizione dello spazio di stato in tre regioni:  $M_1=[-\infty, v_l]$ ,  $M_2=[v_l, v_u]$  e  $M_3=[v_u, \infty]$ .

### 5.3. *Modello tempo discreto e mappa di Poincaré*

Accanto al modello tempo continuo [II.18] ed [II.19] è possibile associare anche un tempo discreto alla modellizzazione lineare a tratti costituita dai modelli [II.21] ed [II.22] e dalla condizione di commutazione [II.23]. Per formulazione di quest'ultimo, è necessario ancora una volta riferirsi ad uno stato funzionamento convenzionale caratterizzato da una sequenza ciclica delle topologie elementari con una singola commutazione per intervallo  $T$ .

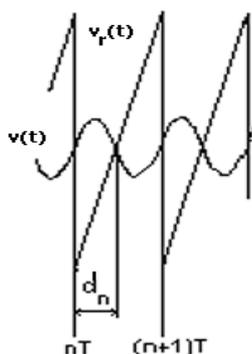


figura II. 17. Segnale triangolare e tensione di uscita in regime convenzionale

In un generico intervallo  $[nT, (n+1)T]$  di andamento asintotico, possiamo pensare di ricavare un legame tra i valori dei parametri di stato ai suoi estremi attraverso la composizione della soluzione esplicita [II.24] dei sistemi lineari [II.21] ed [II.22] secondo l'ordine con cui essi si susseguono. Nella esplicitazione si preferisce considerare la seguente matrice

$$\mathbf{N}(d) = \Phi(dT) = e^{\mathbf{A}dT} = e^{k d T} [\mathbf{I} \cos(\omega d T) + \mathbf{H} \sin(\omega d T)] \quad [\text{II. 32}]$$

al posto della tradizionale funzione di transizione [II.25], [rif.17]. Le variabili in essa presenti sono definite nella [II.30] mentre la variabile  $\mathbf{H}$  definisce la matrice:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\omega} & \frac{1}{C\omega} \\ -\frac{1}{L\omega} & -\frac{k}{\omega} \end{pmatrix} \quad [\text{II. 33}]$$

Relativamente al primo intervallo  $[nT, nT+d_nT]$  l'interruttore risulta aperto, quindi, la topologia circuitale risultante è rappresentata dal modello [II.22] la cui soluzione [II.24] permette di legare i valori assunti agli estremi dell'intervallo nella forma [rif.]:

$$\mathbf{x}(nT + d_n T) = \mathbf{N}(d_n) \mathbf{x}_n \quad [\text{II. 34}]$$

Nell'istante  $nT+d_nT$  per la logica del controllo avviene la commutazione l'interruttore nello stato on fino al successivo istante  $(1+n)T$ . La soluzione esplicita al problema [II.21] consente di esprimere anche in questo caso un legame fra le variabili di stato agli estremi dell'intervallo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((n+1)T) &= \mathbf{x}_{n+1} = \\ &= \mathbf{N}(1-d_n) \mathbf{x}((d_n + n)T) + \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{N}(1-d_n) - \mathbf{I}] \mathbf{B} \mathbf{V}_{in} \end{aligned} \quad [\text{II. 35}]$$

dall'istante  $(n+1)T$  l'evoluzione torna a ripetersi in maniera ciclica.

Componendo le soluzioni [II.34] e [II.35] relative ai due tratti otteniamo l'espressione della mappa discreta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{N}(1-d_n)\mathbf{N}(d_n)\mathbf{X}_n + \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{N}(1-d_n) - \mathbf{I}]\mathbf{B}V_{in} = \\ &= \mathbf{N}(\mathbf{1})\mathbf{x}_n + \mathbf{V}_{in}[\mathbf{I} - \mathbf{N}(1-d_n)]\mathbf{B}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, d_n) \end{aligned} \quad \text{[II. 36]}$$

in cui abbiamo sfruttato le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(0) &= \mathbf{I} \\ \mathbf{N}(\alpha + \beta) &= \mathbf{N}(\alpha)\mathbf{N}(\beta) \\ \det(\mathbf{N}(\alpha)) &= e^{-2kT\alpha} \end{aligned} \quad \text{[II. 37]}$$

relative alla matrice  $\mathbf{N}$  ed abbiamo indicato con  $\mathbf{B}'$  la matrice:

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad \text{[II. 38]}$$

prima di procedere oltre bisogna notare che la [II.36] non è ancora nella forma chiusa di mappa discreta

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \quad \text{[II. 39]}$$

### 5.3.1. Mappa in forma chiusa e biforcazioni standard

Al fine di giungere ad una siffatta forma chiusa è necessario esplicitare l'espressione del duty cycle, stabilito dal controllore. Sostituendo l'espressione della traiettoria [II.34] nella condizione di commutazione [II.20], applicata alla tipologia di controllo considerata, otteniamo:

$$[1 \ 0]\mathbf{N}(d_n)\mathbf{x}_n = \alpha + \beta(t \bmod T) = v_1 + (v_u - v_l)d_n \quad [\text{II. 40}]$$

che è, in generale, in forma trascendente.

La possibilità di chiudere l'espressione discreta [II.36] è legata alla determinazione esplicita di un legame funzionale del tipo  $\mathbf{d}_n = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$  dalla [II.40]. Tale esplicitazione può essere ottenuta utilizzando l'espressione approssimata della funzione di trasferimento [rif.19]:

$$\mathbf{N}(d) = e^{\mathbf{A}dT} \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}dT + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 (dT)^2 \quad [\text{II. 41}]$$

che pertanto assume una validità approssimata.

La disponibilità di una mappa discreta in forma chiusa è alla base dell'analisi delle biforcazioni esibite dal sistema di partenza. In relazione ad una mappa in forma [II.39] valgono, infatti, tutte le considerazioni effettuate al paragrafo 4 del primo capitolo. A queste si può aggiungere che è possibile esprimere le condizioni di biforcazione in maniera compatta; calcolato lo Jacobiano attraverso l'espressione [I.19], il polinomio caratteristico, trattandosi di un sistema del secondo ordine, è esprimibile per la [II.28] nella forma :

$$\lambda^2 - \text{trace}(\mathbf{J})\lambda + \det(\mathbf{J}) = 0 \quad [\text{II. 42}]$$

da cui le condizioni di autovalore pari a  $-1$  per la biforcazione raddoppio di periodo ed autovalore  $+1$  per quella a sella sono rispettivamente espresse da:

$$\det(\mathbf{J}) + \text{trace}(\mathbf{J}) + 1 = 0 \quad [\text{II. 43}]$$

ed

$$\det(\mathbf{J}) - \text{trace}(\mathbf{J}) + 1 = 0 \quad [\text{II.44}].$$

È indispensabile, a questo punto, notare che i margini di validità della mappa discreta, determinata nei termini della [II.36], sono legati alla tipologia di commutazione con cui essa è stata formulata ossia una singola commutazione per intervallo di periodicità del regime di funzionamento convenzionale. Ciò implica che perché la mappa sia utile allo studio delle variazioni di comportamento, derivanti dalla variazione del parametro  $V_{in}$ , tali modalità commutative si mantengano per tutti i valori di esso, cosa che non è sempre verificata [rif.38].

A partire da alcuni di  $V_{in}$ , infatti, la traiettoria della tensione di uscita, muovendosi con continuità dal regime convenzionale, interseca il riferimento triangolare in uno dei suoi vertici e procedendo oltre provoca, nella logica dello schema di controllo voltage mode, un cambiamento della sequenza commutativa. Tale evento viene riportato in letteratura [rif.30] con il nome di “grazing” ed una conseguenza di esso è, ovviamente, il fatto che decada la validità della mappa discreta [II.36]; la sua analisi può essere affrontata ricorrendo ad una nuova mappa che sintetizzi la nuova sequenza commutativa derivante dall’evento di grazing come si avrà modo di vedere nel prossimo paragrafo. La mappa discreta, costruita sullo schema commutativo standard, viene, quindi, denominata “stroboscopica” per distinguerla da queste nuove tipologie di mappe [rif.19], [rif.30].

In altre parole l’analisi delle biforcazioni secondo le modalità viste al paragrafo 4 del primo capitolo sono legate alla possibilità di poter ricavare una mappa in forma chiusa del tipo [II.39] nonché alla permanenza del punto fisso, significativo di un regime armonico, nello spazio  $M_2=[v_l, v_u]$  evidenziato in figura II.16. L’attraversamento del punto di equilibrio, al variare del parametro di biforcazione, di una mappa associata ad un modello “lineare a tratti” del

bordo di commutazione dei vari tratti di linearità viene denominato in letteratura “border collision”.

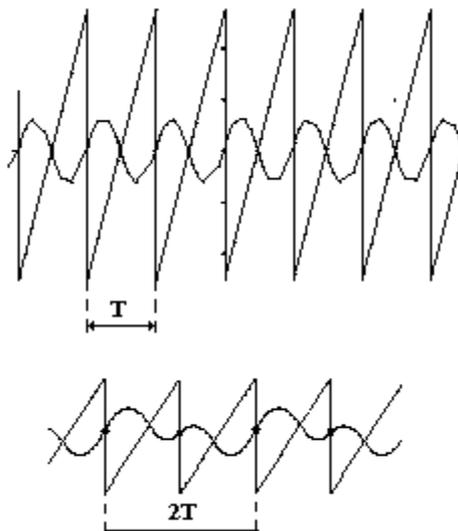


figura II. 18. Tipologie di regimi periodici T e 2T analizzabili secondo la mappa stroboscopia [II.36].

### 5.3.2. Analisi di una mappa non in forma chiusa

Prima di passare oltre è possibile delineare una procedura di analisi di alcuni degli aspetti fin qui visti [rif.38]. Si può prima di tutto individuare i punti fissi della [II.36] in funzione del duty-cycle  $d_n$ .

$$\mathbf{X}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{N}(1))^{-1} [\mathbf{V}_{in} (\mathbf{I} - \mathbf{N}(1 - d_n))] \mathbf{B}' \quad [\text{II. 45}]$$

in essa si ritiene che il valore del parametro  $V_{in}$  sia stato fissato. Sostituendo la [II.45] nella condizione di commutazione

$$[1 \quad 0] \mathbf{N}(d_n) \mathbf{X}^* = \alpha + \beta(t \bmod T) = v_1 + (v_u - v_1) d_n \quad [\text{II. 46}]$$

La quale costituisce un'equazione trascendente in forma  $\mathbf{F}(\delta_n)=\mathbf{0}$ , risolvibile numericamente, le cui soluzioni sono indicative di un regime armonico solo se comprese nell'intervallo  $[0,1]$ . I valori accettabili possono essere poi sostituiti nella [II.45] per esplicitare i punti fissi della mappa. Possiamo inoltre pensare di studiarne la stabilità ricavando lo Jacobiano in essi attraverso l'utilizzo del teorema della derivata di funzione implicita.

Riprendendo, infatti, la mappa [II.36] e la condizione di commutazione [II.20], abbiamo la seguente schematizzazione [rif.19]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, d_n) \\ \mu(\mathbf{x}_n, d_n) &= 0 \end{aligned} \quad \text{[II. 47]}$$

o in maniera più esplicita:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{N}(\mathbf{1})\mathbf{x}_n + \mathbf{V}_{in}[\mathbf{I} - \mathbf{N}(1 - d_n)]\mathbf{B}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, d_n) \\ \mathbf{G}^T \mathbf{N}(d)\mathbf{x}_n - (\alpha + \beta d) &= 0 \end{aligned} \quad \text{[II. 48]}$$

Da cui l'espressione dello jacobiano assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, d_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^*} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, d_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^*} + \\ &- \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, d_n)}{\partial d_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^*} \left( \left. \frac{\partial \mu(\mathbf{x}_n, d_n)}{\partial d_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^*} \right)^{-1} \left. \frac{\partial \mu(\mathbf{x}_n, d_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^*} \end{aligned} \quad \text{[II. 49]}$$

nel caso del buck converter per la [I.36] e la [II.40] questa, in particolare, assume la forma:

$$\mathbf{J} = \mathbf{N}(1 - V_{in} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{N}(1 - d_n)) \mathbf{B}' \quad [\text{II. 50}]$$

$$\left[ \mathbf{G}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{N}(d_n) \mathbf{X}^* - \beta \mathbf{T} \right]^{-1} (\mathbf{G}^T \mathbf{N}(d_n))$$

da cui è possibile riconoscere la stabilità del regime armonico associato al punto fisso  $\mathbf{X}^*$  e  $d_n$  i valori precedentemente calcolati.

#### 5.4. *Sistemi “lineari a tratti” e mappe piecewise smooth*

Come già notato, nel paragrafo relativo alla mappa stroboscopia, la variazione parametrica dell'ampiezza, relativa alla sorgente di tensione primaria, determina un cambiamento nel comportamento asintotico esibito dal sistema che è anche un cambio della struttura della mappa discreta utilizzata per lo studio di quest'ultimo. Gli eventi, in corrispondenza dei quali, ciò avviene sono denominati eventi di “grazing” e sono relativi al passaggio della traiettoria della tensione per uno dei vertici del riferimento triangolare associato alla tipologia di controllo [rif.30].

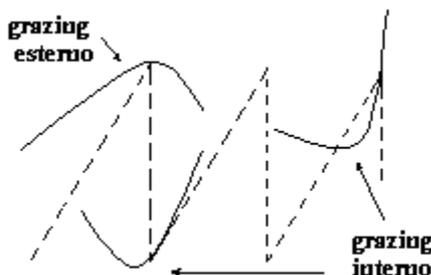


figura II. 19. Esempi di eventi di grazing della tensione in uscita rispetto al segnale triangolare di riferimento.

Tale evento, come si capirà agevolmente con un esempio, causa un cambio della sequenza di commutazioni presente la quale non può più essere ritenuta sintetizzabile dalla mappa precedentemente adottata. Da quanto visto fin ora, si può pensare di riapplicare il concetto di mappa anche alla successiva

sequenza commutativa, purché anche questa si ripeta in maniera ciclica. Tale eventualità consentirebbe di utilizzare, per il nuovo regime, tutti i metodi analitici visti precedentemente, quali ad esempio la presenza di regimi armonici e l'analisi della loro stabilità nonché eventuali biforcazioni standard almeno fino ad un successivo evento di "grazing".

A titolo di esempio consideriamo il caso in cui, all'aumentare di  $V_{in}$ , l'andamento della tensione in uscita varia da una sequenza commutativa ad un'altra, entrambe cicliche su un intervallo di durata  $3T$  come illustrato in figura.

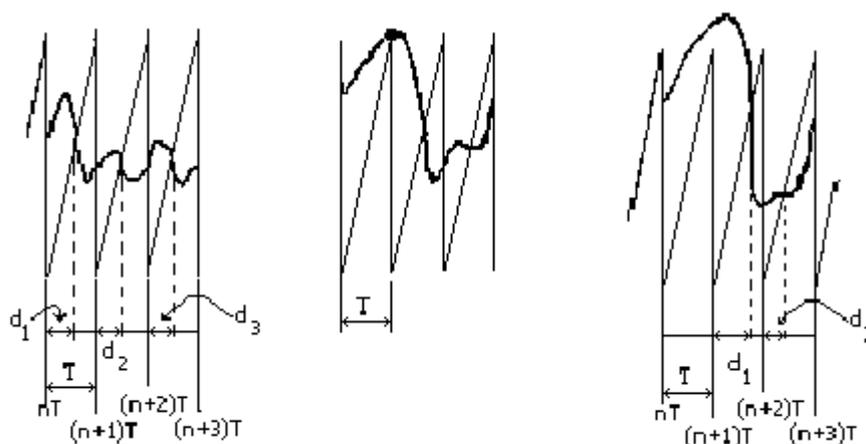


figura II. 20. Cambio di sequenza commutativa a seguito di variazione parametrica.

In essi si può notare, agevolmente, come l'aumento della tensione  $V_{in}$ , attraverso l'evento di grazing, ha causato il passaggio da un regime, analizzabile attraverso la mappa discreta in forma [II.36] ripetuta sui tre intervalli, ad uno a cui è associabile la seguente schematizzazione:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}((n+1)T) = \mathbf{N}(1)\mathbf{x}_n \quad \text{[II. 51]}$$

relativo al primo intervallo,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}((d_1)T) &= \mathbf{N}(d_1)\mathbf{x}((n+1)T) = \mathbf{x}_{n+1} \\
 \mathbf{x}_{n+2} &= \mathbf{x}((n+2)T) = \\
 &= \mathbf{N}(1-d_1)\mathbf{X}((d_1+1)T) + \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{N}(1-d_1) - \mathbf{I}]\mathbf{B}'
 \end{aligned}
 \tag{II. 52}$$

al secondo,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(d_2T) &= \mathbf{N}(d_2)\mathbf{x}_{n+2} \\
 \mathbf{x}_{n+3} &= \mathbf{x}((n+3)T) = \\
 &= \mathbf{N}(1-d_2)\mathbf{X}(d_2T) + \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{N}(1-d_2) - \mathbf{I}]\mathbf{B}'
 \end{aligned}
 \tag{II. 53}$$

per chiudere l'intervallo di comportamento ciclico. Gli istanti di commutazione sono espressi dalle condizioni:

$$\begin{aligned}
 [1 \quad 0]\mathbf{N}(d_1+1)\mathbf{x}_n &= v_1 + (v_u - v_1)d_1 \\
 [1 \quad 0]\mathbf{N}(d_2)\mathbf{x}_{n+2} &= v_1 + (v_u - v_1)d_2
 \end{aligned}
 \tag{II. 54}$$

Componendo le [II.50]-[II.52] unitamente alle [II.53], è possibile effettuare uno studio numerico del tipo illustrato al paragrafo 5.3.2 nelle variabili  $d_1$  e  $d_2$ . Al cambio di comportamento esibito è associata una nuova tipologia di biforcazioni derivanti dalla natura "lineare a tratti" dei sistemi a commutazione. Biforcazioni costituite da improvvise transizioni da regimi periodici verso il caos [rif.2], [rif.34].

Come già detto nel primo capitolo la teoria tradizionale dei sistemi non lineari ha appuntato la sua attenzione su sistemi in cui il funzionale di destra della [I.19] sia di tipo "smooth" vale a dire continuo e differenziabile, in ogni ordine, nelle variabili di stato  $x$  e nel parametro di variazione  $\alpha$  formulando per essi i criteri di analisi per le biforcazioni standard. Il carattere commutativo dei convertitori conferisce al loro modello, invece, un valore "smooth a tratti" come si può intuire per il caso del Buck converter il cui modello è costituito dai

sistemi smooth [II.21] ed [II.22] tra cui commuta in base alla condizione di commutazione.

#### 5.4.1. **Analisi locale delle biforcazioni non standard**

Delle biforcazioni non standard, citate al paragrafo precedente, è possibile effettuare una classificazione attraverso l'analisi di una coppia di mappe discrete, espresse localmente all'evento di grazing stesso [rif.34].

Possiamo rapportarci, per semplicità al caso, del buck converter in conduzione CCM. Il suo modello è lineare a tratti dove i sistemi [II.21] ed [II.22] rappresentano i tratti lineari tra cui il modello commuta sulla base della condizione di commutazione [II.20], illustrata graficamente dalla figura II.16.

Ipotizzando di prendere in considerazione un sistema lineare a tratti e di poter sintetizzare i comportamenti esibiti dal sistema, a cavallo dell'evento di grazing, attraverso una coppia di mappe discrete:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{cases} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{n+1}, \alpha) & \text{per } \alpha < \alpha^* \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_{n+1}, \alpha) & \text{per } \alpha > \alpha^* \end{cases} \quad \text{[II. 55]}$$

è possibile formulare criteri per il riconoscimento delle seguenti tipologie di biforcazione:

- a) Transizione continua da un'orbita regolare ad un'altra, ciascuna delle quali è relativa alla mappa presente in ognuno dei semispazi di riferimento.
- b) Fusione insieme delle due orbite, su citate, con la loro scomparsa.
- c) Raddoppio del periodo dell'armonica presente nella mappa di partenza rispetto alla variazione parametrica.

L'utilità di tali criteri risiede proprio nel fatto che essi sono ricavabili analizzando la struttura lineare delle mappe [II.54] localmente all'evento di grazing. Assumendo  $\alpha^*$  il valore del parametro di variazione ed  $\mathbf{x}^*$  lo stato del

sistema per i quali avviene l'evento di grazing, la forme linearizzate delle [II.54] sono:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{cases} A_1 \mathbf{x}_n + c\alpha & \text{con } \alpha < \alpha^* \\ A_2 \mathbf{x}_n + c\alpha & \text{con } \alpha > \alpha^* \end{cases} \quad [\text{II. 56}]$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} & A_2 &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \\ c &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha^*} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha^*} \end{aligned} \quad [\text{II. 57}]$$

Indicato con  $p^*(\lambda)$  il polinomio caratteristico della prima mappa e con  $p^{**}(\lambda)$  quello relativo alla seconda, i criteri di riconoscimento delle biforcazioni su citate sono:

biforcazione tipo a) se si verifica  $p^*(1)p^{**}(1) > 0$

biforcazione tipo b) se si verifica  $p^*(1)p^{**}(1) < 0$

biforcazione tipo c) se si verifica  $p^*(-1)p^{**}(-1) < 0$ .

Tali condizioni possono anche essere espressi in funzione degli autovalori associati a ciascuna delle mappe.

Indicati con  $\alpha_1 \dots \alpha_n$ , gli autovalori relativi alla prima mappa, e con  $\beta_1 \dots \beta_n$ , quelli relativi alla seconda ed indicati con

$\sigma_\alpha^+$  il numero di autovalori reali della prima mappa maggiori di 1

$\sigma_\alpha^-$  il numero di autovalori reali della prima mappa minori di -1

$\sigma_\beta^+$  il numero di autovalori reali della seconda mappa maggiori di 1

$\sigma_\beta^-$  il numero di autovalori reali della seconda mappa minori di -1

le tre biforcazioni precedentemente enunciate si riscontrano in corrispondenza delle seguenti condizioni:

biforcazione tipo a) se  $\sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$  è un numero pari.

Biforcazione tipo b) se  $\sigma_{\beta}^{+} + \sigma_{\alpha}^{+}$  è un numero dispari.

Biforcazione tipo c) se  $\sigma_{\beta}^{-} + \sigma_{\alpha}^{-}$  è un numero dispari.

### 5.5. *Buck converter fornito di latch*

Gli eventi di grazing come illustrato nei paragrafi precedenti determinano un cambio nella sequenza commutativa presente fino a quel momento. Tale cambio può produrre anche commutazioni multiple per intervallo di periodicità e venienza cui si potrebbe controbattere interponendo un latch tra ciclo di controllo e circuiteria di pilotaggio dello switch [rif.37].

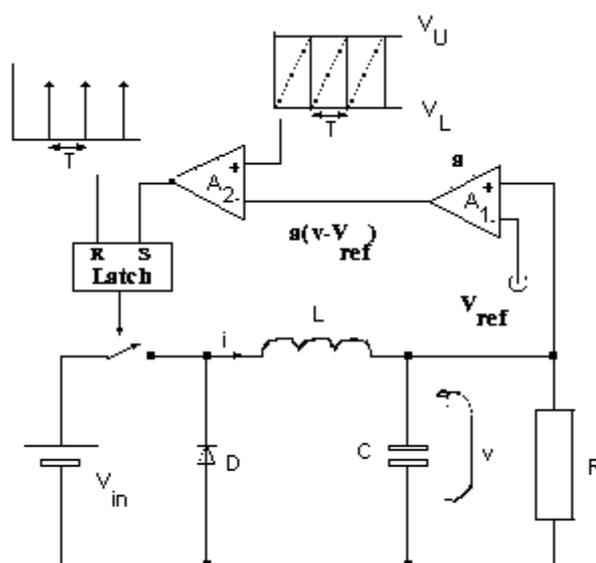


figura II. 21. Schema circuitale di un buck converter con controllo voltage mode fornito di latch.

Tale variante, infatti, impedisce che sopraggiungano ulteriori comandi di spegnimento prima del compimento dell'intervallo di periodicità. In corrispondenza degli istanti  $kT$  un segnale impulsivo sincronizzato con il

riferimento triangolare fornisce al latch il comando di reset come si può agevolmente vedere dallo schema di principio illustrato a lato.

Quanto detto, però, non impedisce che il sistema risultante continua mostrare comportamenti irregolari seppure di diversa tipologia rispetto a quelli visto per un buck sprovvisto di latch. In particolare continuano a permanere tutte le biforcazioni evidenziabili dalla mappa smooth stroboscopia, giacché, tali comportamenti, nella logica con cui è costruito il latch, non si differenziano da quelli presenti in un buck sprovvisto di latch. Il buck converter, inoltre, continua ad esibire, anche oltre, tipologie di comportamento irregolare il cui l'effetto destabilizzante è amplificato dall'aumento delle dimensioni geometriche dall'attrattore associato. Ai regimi caratterizzati da commutazioni multiple si sostituiscono, infatti, regimi che presentano variazioni della tensione di uscita assai ampie con l'assenza di commutazione anche per un numero notevole di periodi. L'inserimento del latch inoltre causa la scomparsa di alcuni dei regimi a periodicità multipla di ordine dispari presenti nella topologia di figura II.14 oltre che la comparsa di escursioni negative (ampi intervalli con interruttore chiuso) della tensione di uscita rispetto al riferimento triangolare.

# Capitolo III:

## Simulazioni numeriche

### 1. Simulazioni numeriche ed approssimazione.

Come già detto in più occasioni le simulazioni numeriche rivestono un ruolo importante dello studio dei sistemi non lineari. A tale scopo tutti gli applicativi matematici offrono funzioni per il tracciamento delle traiettorie delle soluzioni di sistema di equazioni differenziali ordinarie denominati solitamente proprio ODE (ordinary differential equations). I metodi più comunemente utilizzati muovono dalle espressioni approssimate delle espansioni di Taylor o polinomiali della traiettoria di stato. A partire dall'espressione differenziale:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad [\text{III. 1}]$$

decomponendo il riferimento temporale in intervalli regolari possiamo infatti esprimere, nel caso unidimensionale, il seguente legame, basato sull'espansione di Taylor, fra gli estremi di uno di degli intervalli  $[t_i, t_{i+1}]$ :

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + \frac{1}{2}x''(t)h^2 + \dots \quad [\text{III. 2}]$$

In base alla [III.1] possiamo esprimere ciascuno dei coefficienti del termine di destra in funzione dei valori assunti dal funzionale  $\mathbf{f}$  e dalle sue derivate nello spazio di stato.

Ne risulta un'equazione ricorrente che lega un punto discreto della traiettoria di stato ad uno o più punti che lo precedono temporalmente. Alternativamente a questo si possono utilizzare anche espansioni polinomiali della traiettoria di stato.

Da quanto appena detto si evince che le simulazioni numeriche delle traiettorie di un sistema differenziale consentono solo valutazioni approssimate rispetto a quelle derivabili dall'espressione analitiche delle stesse. In altre parole possiamo immaginare che la traiettoria calcolata in ogni istante da una simulazione numerica differisca da quella reale di un determinato errore. Questo è costituito fondamentalmente da due contributi:

L'errore di algoritmo o di "troncamento".

L'errore di macchina o di "approssimazione".

Il primo deriva, come si può ben comprendere, dalle approssimazioni assunte per il calcolo del legame iterato fra i punti successivi della traiettoria di stato, nel caso illustrato dalla [III.2] esso deriva dal fatto che si considerano un numero finito di termini relativi all'espansione di Taylor. Il secondo deriva dall'ordine finito con cui l'insieme dei numeri reali viene rappresentato in un calcolatore, numero di cifre significative trattate.

Generalmente si associa a detti algoritmi iterati anche un algoritmo a passo variabile in cui viene modulato l'intervallo temporale con si distanziano i punti della traiettoria calcolati. Ciò risulta assai utile nella simulazione di sistemi che esprimano insieme dinamiche di variazione temporale assai diverse tra loro. Tale algoritmo infatti consente di diminuire il passo temporale quando le traiettorie appaiono variare con rapidità nel tempo (dinamiche veloci) e di aumentarlo quando al contrario queste appaiono variare con più lentezza.

Ciascun pacchetto applicativo fornisce, a riguardo una serie di indici su cui è possibile agire al fine di modulare la precisione cercata in rapporto alla tipologia di problema da affrontare ed ai costi computazionali voluti.

Tra questi risultano assai importanti le *tolleranze relativa ed assoluta*, in base a cui l'algoritmo a passo variabile decide di la "modulazione" del passo integrativo.

La schematizzazione "lineare a tratti", possibile per i convertitori dc/dc ideali, appare semplificare il discorso offrendo la possibilità di ricorrere ad una espressione esplicita della traiettoria di stato sui singoli intervalli di linearità. Ciò eviterebbe il ricorso a suddetti strumenti analitico - numerici inevitabili se venissero considerate, nel modello, anche tutti gli effetti parassiti delle componenti presenti nel circuito.

La cosa può rappresentare un miglioramento dei termini di precisione con cui vengono condotte le simulazioni dal momento che non interviene più l'errore di algoritmo, tuttavia, anche nella schematizzazione "lineare a tratti", bisogna considerare un grado di approssimazione del problema derivante dalla precisa determinazione dell'evento di commutazione che porta al passaggio dall'una all'altra delle traiettorie di cui si conosce esplicitamente l'evoluzione temporale. Questa stessa schematizzazione infine, nei casi in cui è possibile ottenere una esplicitazione del legame fra la durata delle diverse configurazioni lineari e lo stato presente del sistema, consente di ricorrere a modelli, le mappe discrete, le quali sono forme iterate del tipo [II.39], che consentono insieme valutazioni analitiche, utili ad esempio per l'individuazione e lo studio della stabilità di regimi armonici, e deduzioni numeriche assai rapide.

## 2. Studio delle biforcazioni standard in mappe smooth

### 2.1. Buck converter del primo ordine

Consideriamo, per semplicità, un buck converter con modellizzazione del primo ordine analizzato da Hamill e Daene nel rif.11:

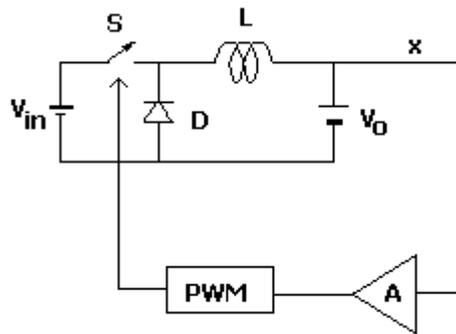


figura III. 1 schema a blocchi di un buck converter del primo ordine.

in esso si è ritenuto che la tensione di uscita sia perfettamente stabilizzata e costante pari a  $V_o$ . Questo ci consente di ritenere che la corrente vari con pendenza lineare pari a  $(V_i - V_o)/L$  durante la fase di carica con interruttore chiuso e pendenza pari a  $-V_o/L$  durante la fase di scarica con interruttore aperto. Possiamo quindi scrivere relativamente ai valori assunti dalla corrente negli istanti discreti  $nT$  il seguente legame discreto:

$$i_{n+1} = i_n + \frac{(V_{in} d_n - V_o)T}{L} \quad [III. 3]$$

che rappresenta una mappa discreta del primo ordine non in forma chiusa. Per poterla portare ad una forma chiusa del tipo [II.39] è necessario esplicitare

l'espressione del duty cycle relativo all'intervallo  $[nT, (n+1)T]$  che per la specifica tipologia di controllo illustrata in figura è espresso dalla forma:

$$e_n = A(I_{ref} - i_n) \quad [III. 4]$$

su cui però va anche tenuto conto dell'effetto saturativo del modulatore PWM nella forma

$$h(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } e_n < 0 \\ 1 & \text{se } e_n > 0 \\ e_n & \text{altrove} \end{cases} \quad [III. 5]$$

da cui sostituendo la [III.5] e la [III.4] nella [III.3] otteniamo l'espressione della mappa in forma chiusa:

$$x_{n+1} = x_n + b[h(a(1 - x_n))] - c \quad [III. 6]$$

dove abbiamo assunto le seguenti convenzioni

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{i_n}{I_{ref}} \\ a &= AI_{ref} \quad b = \frac{V_{in} T}{I_{ref} L} \\ c &= \frac{V_o T}{I_{ref} L} \end{aligned} \quad [III. 7]$$

Tale mappa è esprimibile anche in forma esplicita:

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + b - c & \text{per } x_n < \frac{a-1}{a} \\ x_n(1-ab) + ab - c & \text{per } 1 < x_n < \frac{a-1}{a} \\ x_n - c & \text{per } 1 < x_n \end{cases} \quad [\text{III. 8}]$$

la quale consente di procedere ad una caratterizzazione grafica dell'esistenza di un punto fisso attraverso quello che in letteratura viene chiamato "grafico a ragnatela".

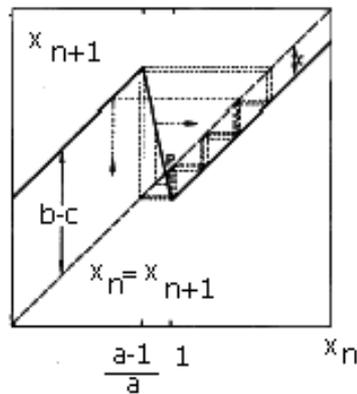


figura III. 2 Rappresentazione grafica della mappa iterata [III.8] e dell'evoluzione dei punti verso il punto fisso

Il punto fisso, rappresentato dall'intersezione fra la rappresentazione della mappa [III.8] e la bisettrice del primo e terzo quadrante cartesiano, è dato da  $x=(ab-c)/ab$  quindi possiamo verificarne la stabilità calcolando l'autovalore della mappa linearizzata associata:

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = (1 - ab) \quad [\text{III. 9}]$$

Abbiamo stabilità per  $|1-ab| < 1$  mentre per  $a=2/b$  abbiamo una biforcazione raddoppio di periodo da momento che l'autovalore assume valore pari a  $-1$ . Possiamo infine riassumere il comportamento complessivo esibito dal sistema nel seguente diagramma di biforcazione costruito sulla mappa iterata [III.8] [rif.3 Appendice].

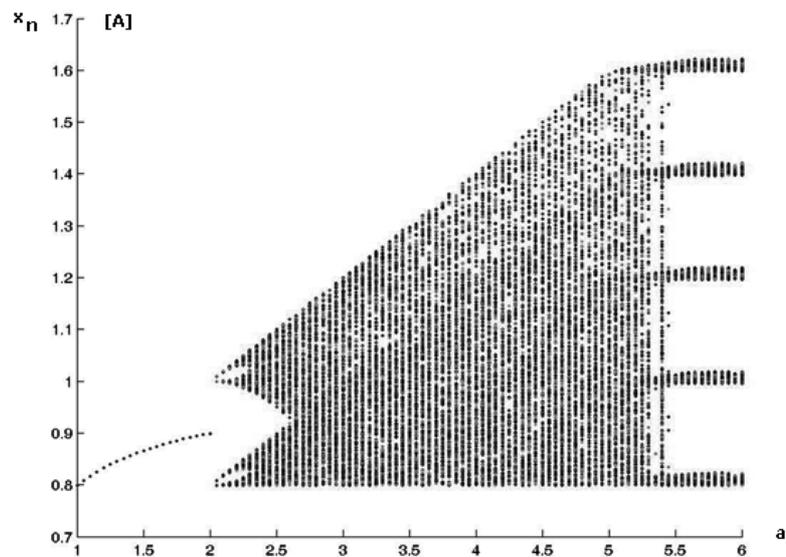


figura III. 3 . Diagramma di biforcazione relativo alla mappa [III.8]

## 2.2. *Buck converter in conduzione DCM*

Consideriamo l'esempio di un buck converter sottoposto a controllo in modalità voltage mode illustrato in figura [rif.22].

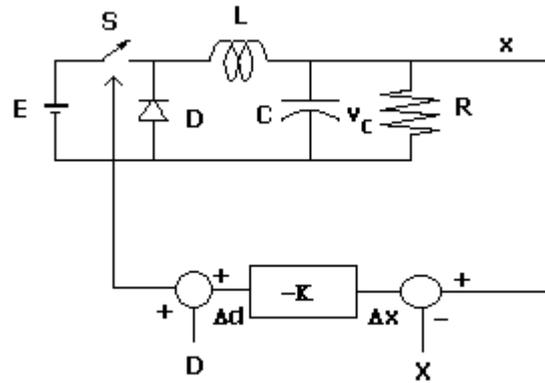


figura III. 4 . Schema a blocchi del buck converter in voltage mode control.

essa rappresenta lo schema a blocchi del dispositivo presente nella figura II.14: l'azione del comparatore è rappresentata dal blocco di guadagno  $-K$  che restituisce la deviazione  $\Delta d$  rispetto al valore di regime  $D$ . Quest'ultimo è infatti quantificabile attraverso l'equazione [II.20] del capitolo precedente. Le componenti il circuito ed il ciclo di controllo sono state dimensionate, infatti, perché sia garantito un regime di funzionamento DCM. Dello schema illustrato infine si studierà la variazione del comportamento al variare del guadagno  $K$ . Richiamando la schematizzazione [II.2], possiamo pensare di assegnare le seguenti matrici relative alle topologie illustrate anche alle figure II.4 –II.6

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad [\text{III. 10}]$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\text{III. 11}]$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{[III.]}$$

12]

Nel regime di conduzione DCM la traiettoria della corrente di induttore è schematizzabile in figura

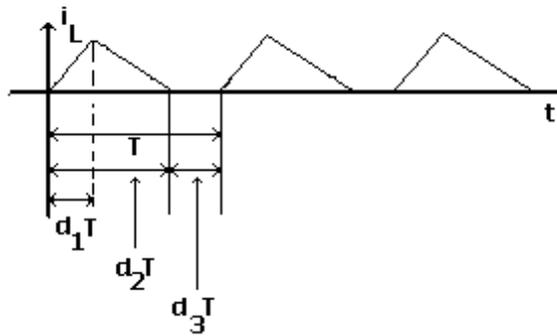


figura III. 5. Traiettoria della corrente di induttore in conduzione DCM.

in riferimento alla quale possiamo costruirci una mappa discreta che esprima il legame presente fra i valori successivi agli istanti stroboscopici  $kT$  della sola tensione in uscita essendo la corrente di induttore sempre nulla negli stessi. Componendo le espressioni lineari relative ai diversi intervalli possiamo infatti scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((n+1)T) &= \Phi_3((1-(d_{2,n} + d_{1,n}))T)\Phi_2(d_{2,n}T)\Phi_1(d_{1,n}T)\mathbf{x}_n + \\ &+ [\Phi_3((1-(d_{2,n} + d_{1,n}))T)\Phi_2(d_{2,n}T) \int_0^{d_{1,n}T} \Phi_1(\tau)\mathbf{B}_1 d\tau + \quad \text{[III. 13]} \\ &+ \Phi_3((1-(d_{2,n} + d_{1,n}))T) \int_0^{d_{2,n}T} \Phi_2(\tau)\mathbf{B}_2 d\tau + \int_0^{(1-(d_{2,n}+d_{1,n}))T} \Phi_3(\tau)\mathbf{B}_3 d\tau] \mathbf{V}_{in} \end{aligned}$$

dove si è aggiunto l'ulteriore pedice n ad indicare il fatto che ci si riferisce ad un intervallo generico  $[nT, (n+1)T]$ . L'espressione non è ancora relativa ad una mappa in forma chiusa per la quale è utile l'espressione:

$$\frac{d_{2,n}}{d_{1,n}} = \frac{E - x}{x} \quad \text{[III. 14]}$$

ricavata imponendo che la variazione della corrente di induttore lineare durante la fase di carica sia eguale a quella presente durante la fase di discesa. Sostituendo l'espressione della  $d_{2,n}$  ricavabile dalla [III.14] nella [III.13] e ricorrendo alla forma approssimata della funzione di transizione [II.41] possiamo ottenere una mappa discreta espressa in maniera compatta ma non ancora in forma chiusa:

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{bd_n^2 E(E - x_n)}{x_n} \quad \text{[III. 15]}$$

dove si sono assunte le seguenti convenzioni simboliche:

$$a = 1 - \frac{T}{CR} + \frac{T^2}{2(CR)^2} \quad \text{[III. 16]}$$

$$b = \frac{RT^2}{2LCR} \quad \text{[III. 17]}$$

dove si è indicato, ovviamente, con il parametro di stato  $x_n$  la sola tensione in uscita data la semplificazione della complessità del problema derivante dal regime di conduzione DCM che rende la corrente di induttore nulla ad ogni istante  $nT$ .

Per passare alla forma di mappa in forma chiusa bisogna esprimere il duty cycle in funzione del parametro di stato tensione in uscita e ciò è di fatto ricavabile dello schema a blocchi di figura III.4 nella forma:

$$d_n = D - K(x_n - X) \quad [III. 18 ]$$

prima di sostituire la [III.18] nella [III.15] possiamo tenere conto dell'effetto saturativo dell'amplificatore di guadagno  $-K$  introducendo la funzione

$$h(d_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } d_n < 0 \\ 1 & \text{se } d_n > 0 \\ d_n & \text{altrove} \end{cases} \quad [III. 19]$$

raccogliendo le dimensioni delle componenti il circuito nella tabella

Parametro del circuito	Valore
Periodo di commutazione	333.33 $\mu$ S
Tensione in ingresso	33V
Tensione richiesta in uscita	25V
Potenza	50W
Induttanza L	208 $\mu$ H
Capacità C	222 $\mu$ F
Resistenza di carico R	12.5 $\Omega$
Duty cycle di funzionamento stazionario D	0.4717
Uscita richiesta X	25V

Derivando la mappa [III.15] nel punto di equilibrio  $\mathbf{X}$  otteniamo l'espressione dell'autovalore associato nella espressione:

$$\alpha = \frac{\beta ED[2KX(E - X) + DE]}{X^2} \quad \text{[III. 20]}$$

sostituendo i valori raccolti in tabella otteniamo la seguente espressione

$$\lambda = 0.4220 - 11.954K \quad \text{[III. 21]}$$

da cui il valore del guadagno relativo ad una biforcazione raddoppio di periodo è data da  $K=0.1189$ . infine il comportamento complessivo previsto dalla mappa [III.15] è illustrato dal diagramma di biforcazione tracciato con l'applicativo matlab della stessa [rif. 3 Appendice].

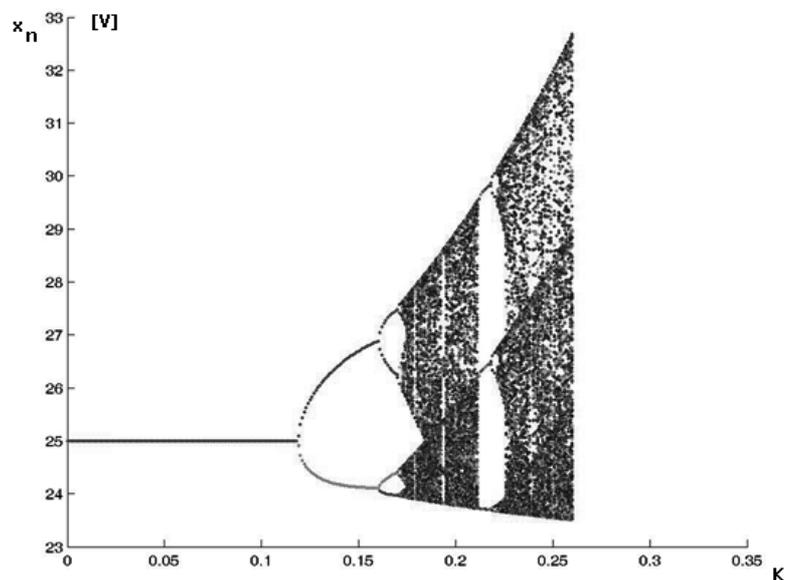


figura III. 6. Grafico di biforcazione costruito attraverso la mappa [III.15] relativo ad un buck converter in conduzione DCM.

### 2.3. Buck converter in conduzione CCM

Questo esempio è relativo ad una configurazione più volte ripresa in letteratura [rif.15-17-20] ed analizzata da Deane ed Hamill per la prima volta nel 1990 [rif.13] in una delle prime pubblicazioni in cui veniva riportata la potenzialità caotica dei convertitori dc/dc.

Lo schema è quello di un buck converter con controllo voltage mode:

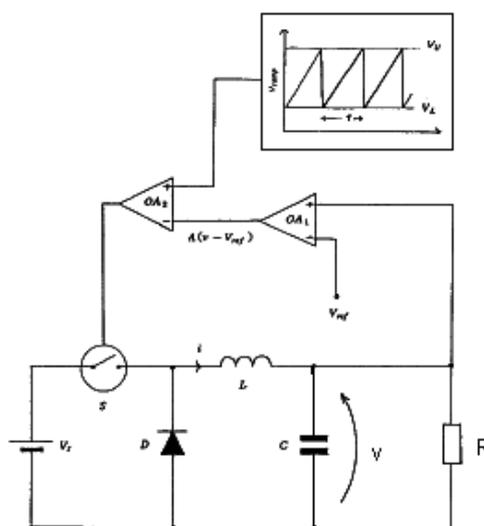


figura III. 7. Schema di un buck converter con controllo voltage mode.

I dati ad esso relativi possono essere riassunti nella seguente tabella:

Parametro del circuito	Valore
Periodo di commutazione	400 $\mu$ S
Tensione in ingresso $V_{in}$	Variabile
Tensione richiesta in uscita	25V
Induttanza L	20mH
Capacità C	47 $\mu$ F

### Cap. III. Simulazioni numeriche

Resistenza di carico R	$22\Omega$
Estremi di variazione del segnale triangolare	$V_U=8.2V$ $V_L=3.8V$
Tensione di riferimento	$V_{ref}=11.3V$

---

Ho effettuato la simulazione ricorrendo all'applicativo Matlab per il quale è stato costruito un algoritmo [rif.1 Appendice] che, sfruttando la linearità a tratti della configurazione concatenasse le espressioni esplicite delle traiettorie di stato [II.24] rilevando l'evento di commutazione con precisione attraverso il comando Fzero.

Da questo possiamo ad esempio rilevare un comportamento periodico di periodo T per valori della tensione in ingresso minori di 24V.

Per  $V_{in}=20V$  abbiamo infatti i seguenti andamenti della tensione in uscita e della corrente di induttore:

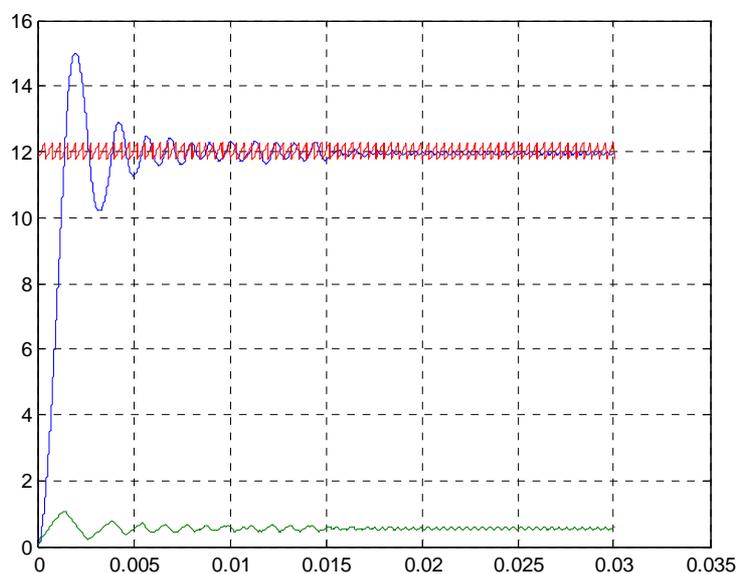


figura III. 8 traiettorie di tensione e corrente relative a  $V_{in}=20V$

osservando in dettaglio la traiettoria della tensione in uscita rispetto al riferimento triangolare possiamo notare come vi sia un'unica commutazione on-off per periodo T.

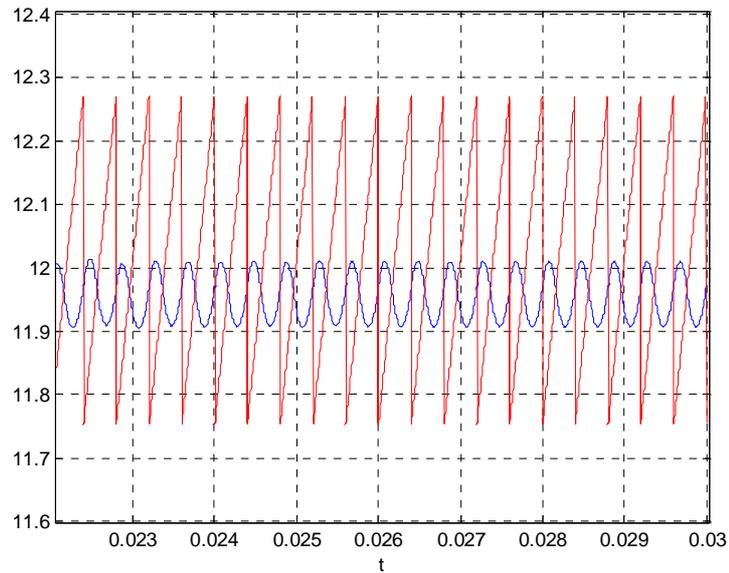


figura III. 9 Particolare della tensione in uscita e del riferimento triangolare per  $V_{in}=20$

Passando al valore  $V_{in}=25$  notiamo una periodicit  doppia della tensione in uscita.

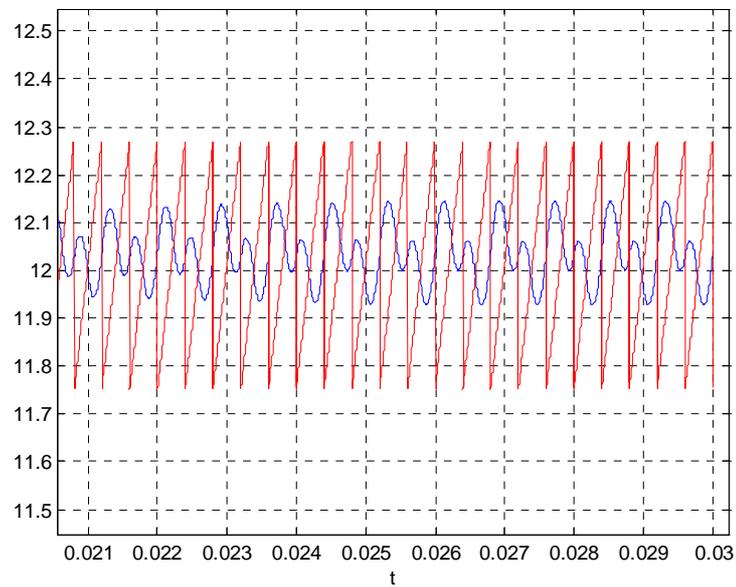


figura III. 10. Particolare del regime periodico doppio per  $V_{in}=25$ .

indice del fatto che è avvenuto un raddoppio di periodo a seguito della variazione di tensione in ingresso. Aumentando ulteriormente la tensione in ingresso arriviamo ad un regime che appare irregolare anche in tempi di osservazione lunghi come appare evidente per  $V_{in}=30$ :

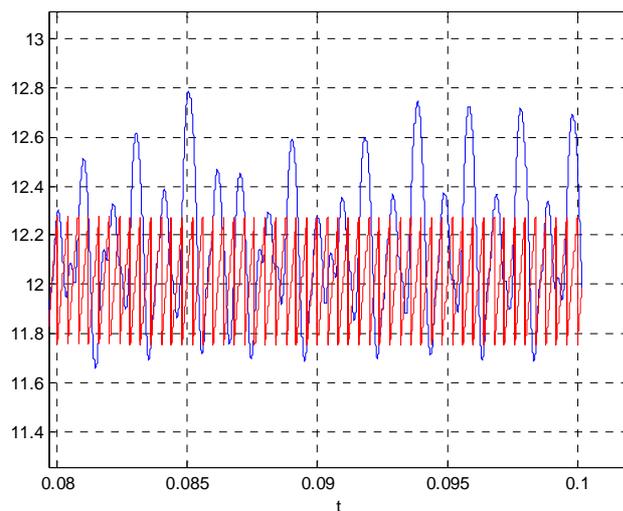


figura III. 11 Regime caotico per  $V_{in}=33$ .

L'esatta individuazione del valore per cui appare la duplicazione del periodo può essere fatta, anche senza ricorrere ad un mappa in forma chiusa, utilizzando le argomentazioni illustrate al paragrafo 5.3.2. In particolare utilizzando la [II.46] possiamo individuare i valori di duty cycle per i quali si verificano traiettorie periodiche relativamente ad un regime periodico del tipo illustrato in figura III.

Trattando numericamente [rif. 2 Appendice] l'equazione trascendente rappresentata dalla [III.46] intorno al valore  $V_{in}=24$ , per il quale abbiamo rilevato il raddoppio di periodo, si ottengono i seguenti valori al variare della tensione in ingresso  $V_{in}$ :

$V_{in}$	$D_n$
20V	0.4032
23V	0.4781
25V	0.5187

Da questi sostituendo i valori ottenuti nella [II.45] si ottengono i punti fissi della mappa vale a dire i valori discreti delle variabili di stato, relativi al regime periodico, negli istanti stroboscopici. Si è ottenuto un valore del duty cycle anche per  $V_{in}=25$  perché la condizione [II.46] è una condizione necessaria ma non sufficiente per il verificarsi di regime periodico.

I valori dei punti fissi ricavati dalla [II.45] sono utili a questo punto per lo studio degli autovalori associati attraverso l'utilizzo della [II.50] [rif.2 Appendice]. Da quest'ultima infatti si evince che gli autovalori associati ai casi presi in esame sono

$V_{in}, d_n$	$\lambda$
20V, 0.434	-0.6919±0.4477
23V, 0.4781	-0.7862±0.2471
25V, 0.5187	-0.6215, -1.0929

Attraverso diversi tentativi si ottiene che per  $V_{in}=24.516V$  abbiamo duty cycle pari a 0.5095 ed autovalori pari a  $\lambda=-0.6792, -1$  quindi questo rappresenta il punto in cui avviene la biforcazione raddoppio di periodo. Una più completa descrizione delle dinamiche esibite è deducibile attraverso il grafico di biforcazione.

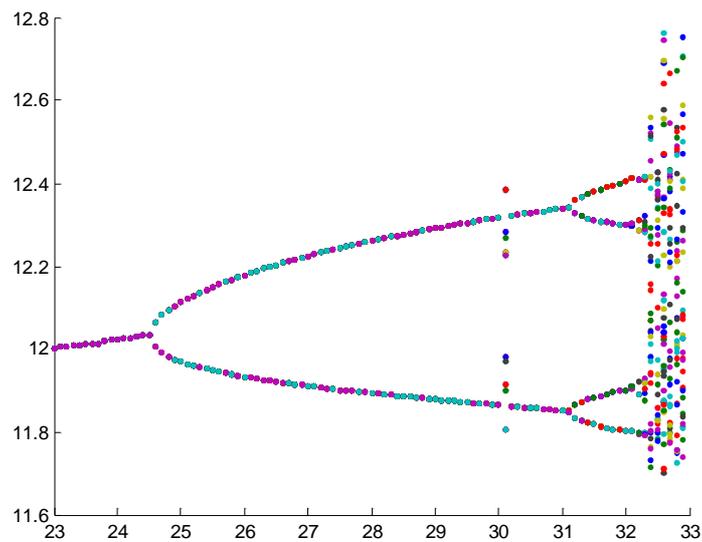


figura III. 12 Diagramma di biforcazione ottenuto da programma matlab prodotto [rif.1 Appendice]

# Appendice: Listati Matlab utilizzati

## 1 Simulazione di un sistema lineare a tratti.

Per la simulazione del comportamento esibito dal Buck converter in conduzione CCM è stato prodotto un listato Matlab che calcolasse l'evoluzione temporale delle traiettorie di stato del convertitore basandosi sull'espressione analitica delle stesse disponibile nei tratti in cui la sua configurazione circuitale si presenta lineare. Lo schema di controllo di riferimento è il voltage mode quindi lo stato dell'interruttore è individuato dalla differenza fra un segnale di riferimento, rappresentato da un segnale ad onda triangolare, e la tensione in uscita; l'evento di commutazione relativo al fronte di salita del segnale triangolare viene determinato con precisione attraverso il comando Fzero applicato a questa differenza. Nell'algoritmo si è assunto di dividere il riferimento temporale con periodo  $T/100$ ; gli stanti di commutazione vengono inseriti, in maniera asincrona, in tale tempificazione.

### *Listato Matlab*

```
function [tout,out]=rbuck(in)
global R L C T g1 g2 a b x0 t0 tfin Vd A options tssw xssw tasw xasw

%dati relativi al circuito ed al controllo
Vd=in
R=22;L=20e-3;C=47e-6;
T=400e-6;
g1=1;g2=0;a=11.75238095;b=1309.523810;
A=[-1/(R*C) 1/C ; -1/L 0];
%condizione iniziale
x0=[0 0];
t0=0;
%intervallo di osservazione
tfin=5e-2;
```

```

options=optimset('tolx',T/1e13);
out=x0;tout=t0;
tssw=t0;xssw=x0;
tasw=t0;xasw=x0;
tc=clock;
if condswitch(x0,t0)<=0
    sw=0;
elseif condswitch(x0,t0)>0
    sw=1;
end
while t0<tfin
    if sw==0
        sw=1;
        [tout,out]=stateon(tout,out);
    elseif sw==1
        sw=0;
        [tout,out]=stateoff(tout,out);
    end
end
%plot(tout,out,tout,a+b*mod(tout,T),tssw,xssw,'*')
%plot(tout,out,tout,a+b*mod(tout,T),tasw,xasw,'o')
%plot(tout,out,tout,a+b*mod(tout,T))
zoom

```

funzioni invocate dal programma principale:

### **Funzione interruttore stato on:**

```

function [tout,xout]=stateon(tin,xin)
global T sw b x0 t0 options tssw xssw tasw xasw
sw=1;
n=1;
d=length(tin);
if d>1
    t=tin(d-1);
else
    t=tin;
end
x=xin;
xout=xin;
tout=tin;
while or(fint(t)<0,n==1)
    %disp('on');
    t=t+T/100;
    x=sol(t);
    xout=cat(1,xout,x);
    tout=cat(1,tout,t);
    n=n+1;
end

```

```

n=length(tout);
%determinazione evento di commutazione
if mod(tout(n),T)-mod(tout(n-1),T)>0
    tsw=fzero('fint',[tout(n-1) tout(n)],options);
    tout(n)=tsw;xout(n,:)=sol(tsw);
    %acquisisco punto di commutazione asincrona nella tempificazione sincrona.
    tasw=cat(1,tasw,tsw);xasw=cat(1,xasw,sol(tsw));
else
    tout(n)=(tout(n)+tout(n-1))/2;xout(n,:)=sol(tout(n));
    %acquisisco punto di commutazione sincrona.
    tssw=cat(1,tssw,tout(n));xssw=cat(1,xssw,xout(n,:));
end
t0=tout(n);
x0=xout(n,:);

```

### **Funzione interruttore stato off:**

```

function [tout,xout]=stateoff(tin,xin)
global T sw x0 t0 options tssw xssw tasw xasw
sw=0;
n=1;
d=length(tin);
if d>0
    t=tin(d-1);
else
    t=tin;
end
x=xin;
xout=xin;
tout=tin;
while or(fint(t)>0,n==1)
    %disp('off')
    t=t+T/100;
    x=sol(t);
    xout=cat(1,xout,x);
    tout=cat(1,tout,t);
    n=n+1;
end
n=length(tout);
if mod(tout(n),T)-mod(tout(n-1),T)>0
    tsw=fzero('fint',[tout(n-1) tout(n)],options);
    tout(n)=tsw;xout(n,:)=sol(tsw);
    %acquisisco punto di commutazione asincrona nella tempificazione sincrona.
    tasw=cat(1,tasw,tsw);xasw=cat(1,xasw,sol(tsw));
else
    tout(n)=(tout(n)+tout(n-1))/2;xout(n,:)=sol(tout(n));
    %acquisisco punto di commutazione sincrona.
    tssw=cat(1,tssw,tout(n));xssw=cat(1,xssw,xout(n,:));
end
t0=tout(n);
x0=xout(n,:);

```

### **funzione per il calcolo della traiettoria di stato.**

```
function y=sol(t)
global x0 t0 R L C Vd A sw tstro xstro
switch sw
case 1
    B=[0;Vd/L];
case 0
    B=[0;0];
end
x=N(t-t0)*x0'+inv(A)*(N(t-t0)-eye(2,2))*B;
y=x';
%-----
function N=N(t);
global R C L
k=-1/(2*R*C);
w=sqrt((1/(L*C))-k^2);
H=[k/w 1/(C*w); -1/(L*w) -k/w];
N=exp(k*t)*(eye(2,2)*cos(w*t)+H*sin(w*t));
```

### **Funzioni per la determinazione dell'evento di commutazione.**

```
function conds=condswitch(x,t)
global T g1 g2 a b
conds=g1*x(1)+g2*x(2)-(a+b*mod(t,T));

function y=fint(t)
global T g1 g2 a b Vd L A sw t0 x0
x=sol(t);
y=g1*x(1)+g2*x(2)-(a+b*mod(t,T));
```

## **2 Funzioni definite per l'analisi del regime armonico con mappa non il forma chiusa.**

Per la determinazione del duty cycle relativo ad un regime armonico attraverso la [II.46] è stata realizzata la seguente funzione:

```
function cond=condsw(d)
global R L C
Vd=24.516;% tensione di ingresso applicata.
R=22;L=20e-3;C=47e-6;T=400e-6;
a=11.75238095;b=1309.523810;B=[1;1/R];
cond=-[1 0]*N(d*T)*(inv(eye(2,2)-N(1*T)))*Vd*(eye(2,2)-N((1-d)*T))*B+(a+b*T*d);
%-----
function N=N(t);
global R C L
```

```

k=-1/(2*R*C);
w=sqrt((1/(L*C))-k^2);
H=[k/w 1/(C*w); -1/(L*w) -k/w];
N=exp(k*t)*(eye(2,2)*cos(w*t)+H*sin(w*t));

```

I cui zeri sono stati calcolati attraverso il comando `Fzero` trattandosi di funzione in un'unica variabile.

Per il calcolo dello jacobiano associato ad una mappa non in forma chiusa [II.47]-[II.48] espresso dalla [II.50] è stata realizzata la funzione:

```

function J=J(d)
global R L C
Vd=24.516;
R=22;L=20e-3;C=47e-6;T=400e-6;
a=11.75238095;b=1309.523810;B=[1;1/R];
A=[-1/(R*C) 1/C ; -1/L 0];G=[1 0];
X=(inv(eye(2,2)-N(1*T)))*Vd*(eye(2,2)-N((1-d)*T))*B;
J=N(1*T)-Vd*A*T*N((1-d)*T)*B*inv(G*A*T*N(d*T)*X-b*T)*(G*N(d*T));

%-----
function N=N(t);
global R C L
k=-1/(2*R*C);
w=sqrt((1/(L*C))-k^2);
H=[k/w 1/(C*w); -1/(L*w) -k/w];
N=exp(k*t)*(eye(2,2)*cos(w*t)+H*sin(w*t));

```

i cui autovalori sono stati calcolati utilizzando il comando `Eig` di Matlab.

### 3 Funzioni definite per il tracciamento dei grafici di biforcazione relativi alla figura III.3

```

function x=mappaham(x,n,a);
b=1;c=0.201;
for i=1:n
    dim=length(x);
    %d=0.4717-a*(x(dim)-25);
    y=x(dim)+b*(sat(a*(1-x(dim))))-c;
    x=cat(1,x,y);
end
%-----

```

```

function y=sat(x)
if x<0
    y=0;
elseif x>=1
    y=1;
else
    y=x;
end

```

### **ed alla figura III.6**

```

function x=mappatse(x,n,a);
for i=1:n
    dim=length(x);
    d=0.4717-a*(x(dim)-25);
    y=0.8872*x(dim)+(1.2*33*(33-x(dim))*(sat(d))^2)/(x(dim));
    x=cat(1,x,y);
end
%-----
function y=sat(x)
if x<0
    y=0;
elseif x>1
    y=1;
else
    y=x;
end

```

## Bibliografia

- 1 N.Mohan, T.M.Undeland and W.P.Robbins "Power Electronics: Converters, Applications and design", *John Wiley & Sons, Inc.*
- 2 C.T.Tse and M.Di Bernardo "Complex Behavior in Switching Power Converters", *Proc.IEEE vol. n.90 2002.*
- 3 S.Banerjee e C.G.Verghese "Nonlinear Phenomena in power electronics: Bifurcations, Chaos, Control and Applications" *IEEE Press, 2001.*
- 4 M.Hasler, J.Neiryneck "Non Linear circuits" *Artec House inc. 1986.*
- 5 M.P.Kennedy "Three steps to chaos-Part I: Evolution" *IEEE trans. On circ. and systems-I fund. th. and appl. vol.40. no. 10 oct.1993.*
- 6 M.P.Kennedy: "Three steps to chaos-Part II: A Chua's circuit premier" *IEEE trans. On circ. and systems-I fund. th. and appl. vol.40. no. 10 oct.1993.*
- 7 D.J Jefferies, J.H.B Deane e G.G.Johnstone: "An introduction to Chaos" *Electron. & Commun. Engineering journal may/june 1989*
- 8 L.C.Chua, M.Hasler, J.Neiryneck e P.Verbugh "Dynamics of a piecewise-linear resonant circuit" *IEEE trans. On circ. and systems.*
- 9 J.Guckenheimer and P.J.Holmes "Non linear oscillations, *Dynamical systems and bifurcations of vector fields*" *New York: Springer-Verlang 1997.*
- 10 A.Balestrino G. Celentano "Teoria dei sistemi: III vol. I sistemi dinamici a stato vettore" *Liguori editore.*
- 11 David C. Hamill and David J Jeffries "Subharmonics and chaos in a controlled switched-mode power converter" *IEEE. Circuits and systems letters 1059-1061.*
- 12 J.H.B Deane and D.C.Hamill "Instability, subharmonics and chaos in power electronic systems" *IEEE trans. On power electronics. July 1990 260-268.*

- 13 J.H.B. Deane and D.C.Hamill "Analysis, simulation and experimental study of chaos in the buck converter" *IEEE trans.* 1990 491-498.
- 14 D.C.Hamill, J.H.B. Deane"Chaotic behaviour in current mode controlled dc-dc converter". *Electronic letters june 1991 vol.27 n.13*
- 15 D. C. Hamill, J. B. Deane, and D. J. Jefferies, "Modeling of chaotic dc–dc converters by iterated nonlinear mappings," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 7, pp. 25–36, Jan. 1992.
- 16 K. Chakrartary, G. Poddar and S. Banerjee "Bifurcation Behavior of the buck converter" *IEEE transactions on power electronics may 1996*
- 17 E. Fossas and G.Olivar "Study of chaos in the buck converter" *IEEE transactions on circuits and systems- I: fundamental theory and applications vol.42 n.1 Jan. 1996*
- 18 M. di Bernardo, K. Johansson and F.Vasca "Sliding orbits and their bifurcations in relay feedback systems". .
- 19 M. di Bernardo and F. Vasca, "Discrete-time maps for the analysis of bifurcations and chaos in dc–dc converters," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 47, pp. 130–143, Feb. 2000.
- 20 M.di Bernardo, A.R. Champneys, C.J.Budd and F. Vasca "Sliding orbits and double spiral bifurcation diagrams in power electronic dc/dc converters" *IEEE 1999*
- 21 C. K. Tse, "Flip bifurcation and chaos in a three-state boost switching regulator," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 42, pp. 16–23, Jan. 1994.
- 22 C.K Tse "Chaos from a buck switching regulator operating in discontinuous mode," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 22, no. 4, pp. 263–278, 1994.
- 23 J. H. B. Deane, "Chaos in a current-mode controlled dc–dc converter," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 39, pp. 680–683, Aug. 1992.
- 24 S. Banerjee, E. Ott, J. A. Yorke, and G. H. Yuan, "Anomalous bifurcation in dc–dc converters: Borderline collisions in piecewise smooth maps," *in Proc. IEEE Power Electronics Specialists Conf.*,1997, pp. 1337–1344.

- 25 G. H. Yuan, S. Banerjee, E. Ott, and J. A. Yorke, "Border collision bifurcation in the buck converter," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 45, pp. 707–716, July 1998.
- 26 S. Banerjee, P. Ranjan, and C. Grebogi, "Bifurcation in two-dimensional piecewise smooth maps—Theory and applications in switching circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 47, pp. 633–643, May 2000.
- 27 M. di Bernardo, F. Garofalo, L. Glielmo, and F. Vasca, "Switchings, bifurcations and chaos in dc–dc converters," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 45, pp. 133–141, Feb. 1998.
- 28 H. E. Nusse and J. A. Yorke, "Border-collision bifurcations for piecewise-smooth one-dimensional maps," *Int. J. Bifur. Chaos*, vol. 5, no. 1, pp. 189–207, Jan. 1995.
- 29 M. di Bernardo, F. Garofalo, L. Glielmo, and F. Vasca, "Quasi-periodic behaviors in dc–dc converters," in *Proc. IEEE Power Electronics Specialists Conf.*, 1996, pp. 1376–1381.
- 30 M. di Bernardo, C. J. Budd, and A. R. Champneys, "Grazing, skipping and sliding: Analysis of the non smooth dynamics of the dc–dc buck converter," *Nonlinearity*, vol. 11, no. 4, pp. 858–890, 1998.
- 31 M. di Bernardo, C. J. Budd, and A. R. Champneys, "Corner collision implies border collision," *Physica D*, vol. 154, no. 3–4, pp. 171–194, June 2001.
- 32 M. di Bernardo, C. J. Budd, and A. R. Champneys, "Grazing and border-collision in piecewise-smooth systems: A unified analytical framework," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, no. 12, pp. 2553–2556, 2000.
- 33 M. di Bernardo, F. Garofalo, L. Glielmo and F. Vasca "Analysis of chaotic Buck, boost and buck-boost converters through switching maps" *IEEE trans* 1997
- 34 M. di Bernardo, M. I. Feigin, S. J. Hogan, and M. E. Homer, "Local analysis of C-bifurcations in n -dimensional piecewise smooth dynamical systems," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 10, no. 11, pp. 1881–1908, 1999.

- 35 M. di Bernardo, C. J. Budd, and A. R. Champneys, "Normal form maps of grazing bifurcations in n-dimensional piecewise smooth systems," *Physica D*, vol. 160, no. 3–4, pp. 222–254, Dec. 2001.
- 36 S. Banerjee, M.S. Karthhink, G. Yuan and J.A. Yorke, "Bifurcations in one-dimensional piecewise smooth maps- Theory and applications in switching circuits" *IEEE trans. On circuits and systems –fundamental theory and applications*, vol.47 no.3 March 2000.
- 37 S. Myles and M. di Bernardo, "Preventing multiple switchings in power electronic circuits: Effects of the latch on the nonlinear dynamics of the dc–dc buck converter," *Int. J. Bifur. Chaos*, vol. 10, no. 2, pp. 431–442, Feb. 2000.
- 38 M.di Bernardo " Secondary bifurcations ad high periodic orbits in voltage controlled buck converter". *Int. Jour. Of bif. and chaos* vol.7 N.12 1997
- 39 <http://www.smpstech.com/chaos000.htm>
- 40 <http://chaos.eie.polyu.edu.hk>