

**SCUOLA NAZIONALE
DOTTORANDI DI Elettrotecnica
“*FERDINANDO GASPARINI*”**

Corso Breve

***“Comportamento Dinamico di
Circuiti Non Lineari”***

Parte I
(Analisi qualitativa delle soluzioni)

Marco Gilli
Politecnico di Torino

Giovanni Miano
Università degli Studi di Napoli Federico II

TERNI, 18 GIUGNO 2003

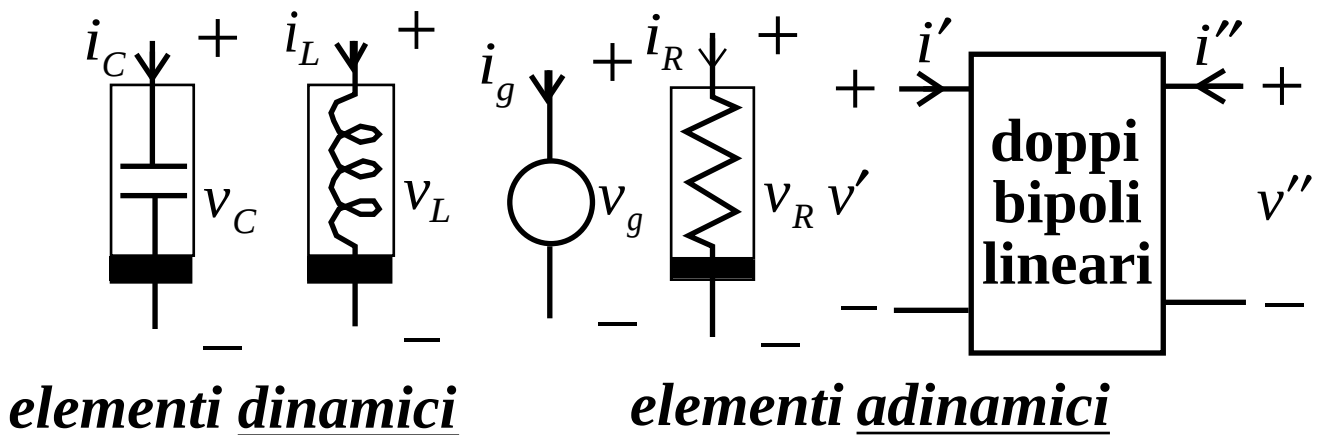
CONTENUTI DEL CORSO

- Formulazione del modello. Condizioni di esistenza e unicità.
- Soluzioni di regime stazionarie (punti di equilibrio) e periodiche (cicli limite); soluzioni quasi periodiche (tori). Concetto di attrattore e bacino di attrazione.
- Stabilità delle soluzioni. Stabilità globale.
- Stabilità strutturale e biforcazioni. Principali biforcazioni locali di punti di equilibrio e di cicli limite. Esempi di biforcazioni globali.
- Attrattori caotici.

Il modello circuitale

- **Gli elementi circuitali sono:**

- elementi “dinamici”: condensatori e induttori;
- elementi “adinamici”: generatori indipendenti, resistori e doppi bipoli lineari.



- **Le variabili circuitali sono:**

- per i condensatori

$$\mathbf{i}_C = |i_1, \dots, i_{n_C}|^T \quad \mathbf{v}_C = |v_1, \dots, v_{n_C}|^T \quad \mathbf{q} = |q_1, \dots, q_{n_C}|^T$$

- per gli induttori

$$\mathbf{i}_L = |i_{n_C+1}, \dots, i_{n_C+n_L}|^T \quad \mathbf{v}_L = |v_{n_C+1}, \dots, v_{n_C+n_L}|^T \quad \boldsymbol{\phi} = |\phi_{n_C+1}, \dots, \phi_{n_C+n_L}|^T$$

- per gli elementi adinamici

$$\mathbf{i}_A = |i_{n_C+n_L+1}, \dots, i_l|^T \quad \mathbf{v}_A = |v_{n_C+n_L+1}, \dots, v_l|^T$$

Le equazioni circuitali

- *Equazioni di Kirchhoff :*

$$\sum_h (\pm) i_h(t) = 0, \sum_h (\pm) v_h(t) = 0$$

- *Equazioni caratteristiche:*

- Elementi adinamici:

• Generatori indipendenti $v_g = e(t)$ o $i_g = j(t)$

• Resistori $h_R(v_R, i_R; t) = 0$

• Doppi bipoli lineari $H\mathbf{v}_D + K\mathbf{i}_D = \mathbf{0}$

- Elementi dinamici:

• Induttori $\begin{cases} h_L(i_L, \phi; t) = 0 \\ v_L = \frac{d\phi}{dt} \end{cases}$

• Condensatori $\begin{cases} h_C(v_C, q; t) = 0 \\ i_C = \frac{dq}{dt} \end{cases}$

+ le condizioni iniziali per le cariche dei condensatori e i flussi degli induttori.

Il sistema di equazioni circuitali è un sistema misto, costituito da equazioni algebriche e equazioni differenziali a derivate ordinarie

$$0 = F\left(\underbrace{\mathbf{v}_C, \mathbf{i}_C, \mathbf{v}_L, \mathbf{i}_L, \mathbf{v}_A, \mathbf{i}_A}_{2l}, \underbrace{\mathbf{q}, \phi}_{n_C + n_L}; t\right) \quad 2l \text{ equazioni}$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{i}_C \quad n_C \text{ equazioni}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathbf{v}_L \quad n_L \text{ equazioni}$$

Condizioni iniziali

$$\mathbf{q}(t = t_0) = \mathbf{Q}_0$$

$$\phi(t = t_0) = \Phi_0$$

$\mathbf{q}$ e ϕ (rispettivamente $\mathbf{v}_C$ e $\mathbf{i}_L$) sono le **grandezze di stato** del circuito.

Le equazioni di stato

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}\left(\mathbf{v}_C, \mathbf{i}_C, \mathbf{v}_L, \mathbf{i}_L, \mathbf{v}_A, \mathbf{i}_A, \mathbf{q}, \phi; t\right) \quad 2l \text{ equazioni}$$



$$\mathbf{i}_C = \mathbf{f}_C(\mathbf{q}, \phi; t), \mathbf{v}_L = \mathbf{f}_L(\mathbf{q}, \phi; t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \mathbf{i}_C \\ \frac{d\phi}{dt} &= \mathbf{v}_L \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{f}_C(\mathbf{q}, \phi; t) \\ \frac{d\phi}{dt} = \mathbf{f}_L(\mathbf{q}, \phi; t) \end{cases}$$

Condizioni iniziali

$$\mathbf{q}(t = t_0) = \mathbf{Q}_0$$

$$\phi(t = t_0) = \Phi_0$$

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = f_C(\mathbf{q}, \phi; t), \\ \frac{d\phi}{dt} = f_L(\mathbf{q}, \phi; t), \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{q}(t = t_0) = \mathbf{Q}_0, \\ \phi(t = t_0) = \Phi_0. \end{cases}$$

Per la corretta posizione del problema le funzioni $f_C(\mathbf{q}, \phi; t)$ e $f_L(\mathbf{q}, \phi; t)$ devono essere:

- i. definite per ogni valore di $\mathbf{q}$ e ϕ ;**
- ii. a un solo valore.**

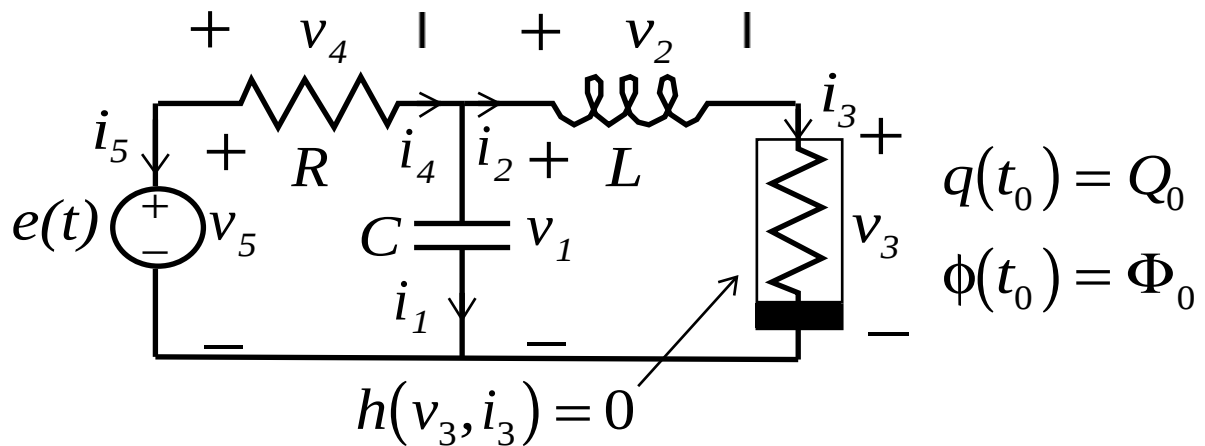
Le condizioni i. e ii. sono necessarie, ma non sufficienti, per l'esistenza e l'unicità della soluzione. Se sono verificate diciamo che le equazioni di stato sono in **forma normale.**

Un modello alle differenze

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t_i + \Delta t) &\cong f_C(\mathbf{q}(t_i), \phi(t_i); t_i) \Delta t + \mathbf{q}(t_i), \\ \phi(t_i + \Delta t) &\cong f_L(\mathbf{q}(t_i), \phi(t_i); t_i) \Delta t + \phi(t_i), \end{aligned} \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

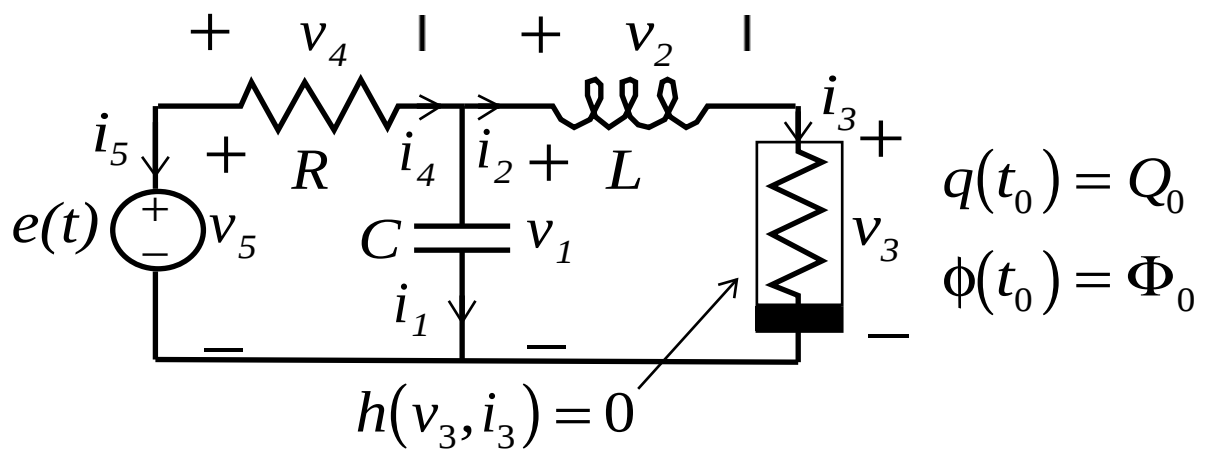
Δt è un intervallo di tempo “sufficientemente piccolo”, $t_i = i\Delta t$ e $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{Q}_0$, $\phi(t_0) = \Phi_0$.

Esempio



$$\left. \begin{array}{l}
 \begin{array}{l} i_1 + i_2 - i_4 = 0 \\ -i_2 + i_3 = 0 \\ i_4 + i_5 = 0 \end{array} \\
 \begin{array}{l} v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 + v_4 - v_5 = 0 \end{array} \\
 \begin{array}{l} q_1 - C v_1 = 0 \\ \phi_2 - L i_2 = 0 \end{array} \\
 \begin{array}{l} h(v_3, i_3) = 0 \\ v_4 - R i_4 = 0 \\ v_5 = e(t) \end{array}
 \end{array} \right\} \mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_C, \mathbf{i}_C, \mathbf{v}_L, \mathbf{i}_L, \mathbf{v}_A, \mathbf{i}_A, \mathbf{q}, \phi; t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dq_1}{dt} = i_1 \\ \frac{d\phi_2}{dt} = v_2 \end{array} \right\}$$

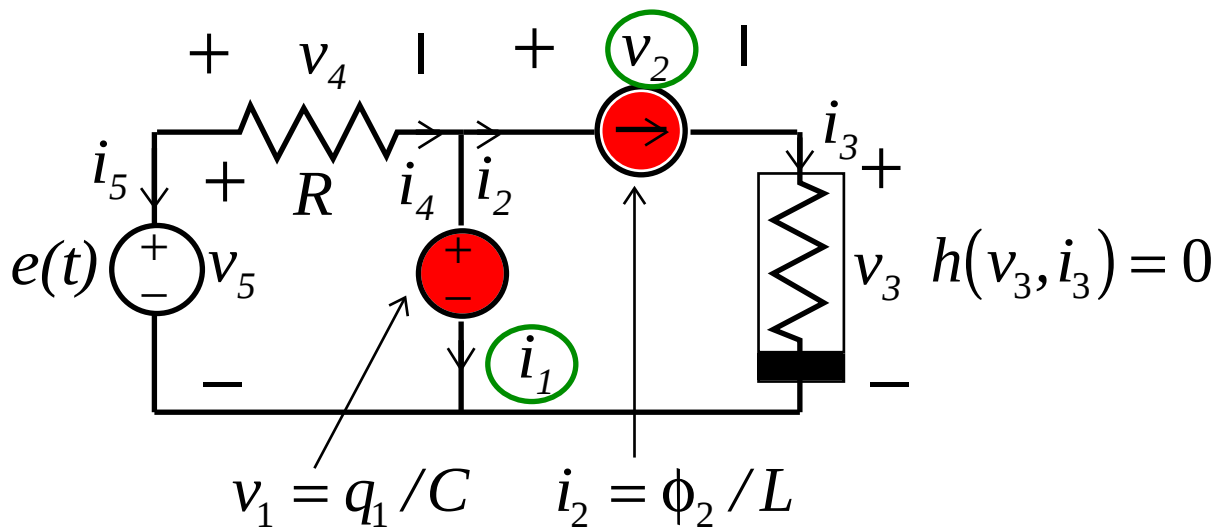


$$\left. \begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 i_1 + i_2 - i_4 = 0 \\
 -i_2 + i_3 = 0 \\
 i_4 + i_5 = 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\
 v_1 + v_4 - v_5 = 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 q_1 - Cv_1 = 0 \\
 \phi_2 - Li_2 = 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 h(v_3, i_3) = 0 \\
 v_4 - Ri_4 = 0 \\
 v_5 = e(t)
 \end{array}
 \end{array} \right\}$$

Attraverso queste equazioni è possibile esprimere tutte le grandezze circuitali e, in particolare, i_1 e v_2 in funzione di q_1 e ϕ_2 .

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{dq_1}{dt} = i_1 \\
 \frac{d\phi_2}{dt} = v_2
 \end{array} \right\}$$

Attraverso il circuito “resistivo associato”



possiamo esprimere i_1 e v_2 in funzione di q_1 e ϕ_2 .

Le equazioni di stato in forma normale

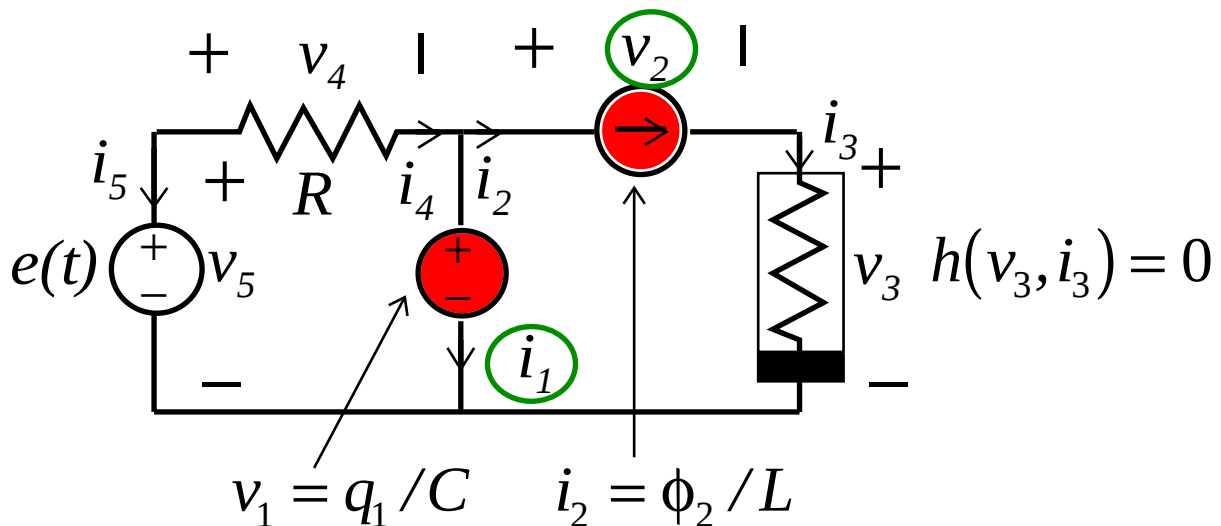
$$\frac{dq_1}{dt} = f_1(q_1, \phi_2; t)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = f_2(q_1, \phi_2; t)$$

esistono se e solo se il circuito “resistivo associato” ammette una e una sola soluzione per ogni valore di q_1 e ϕ_2 .

Una volta noto lo stato tutte le altre grandezze del circuito possono essere calcolate risolvendo il circuito resistivo associato.

- **Calcolo di i_1**

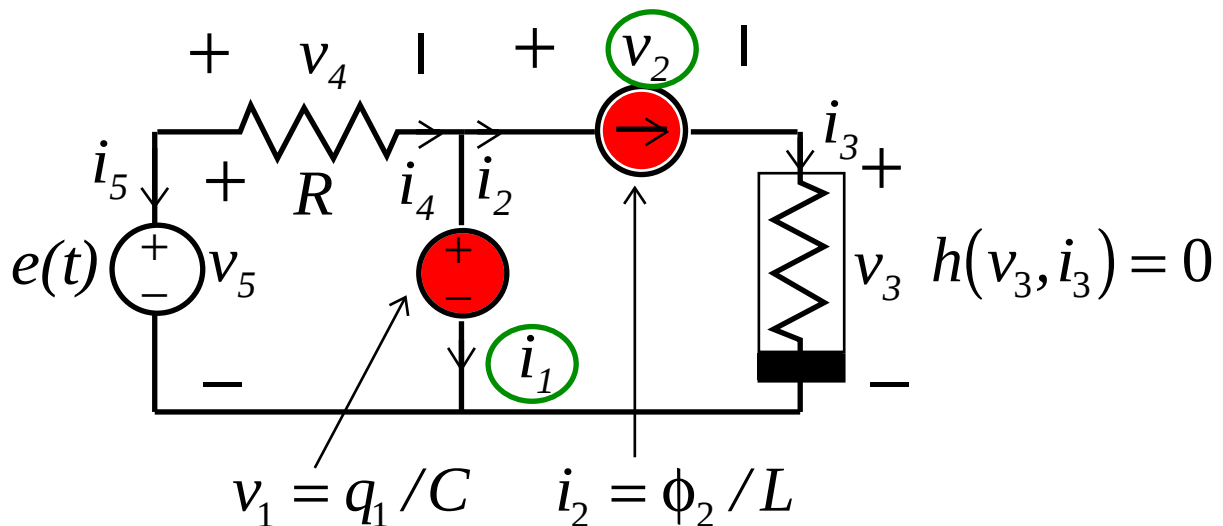


$$i_1 = -i_2 + i_4 = -i_2 + \left(\frac{e - v_1}{R} \right) = -\frac{\phi_2}{L} - \frac{q_1}{RC} + \frac{e}{R}$$

$$f_1(q_1, \phi_2; t) = i_1 = -\frac{q_1}{RC} - \frac{\phi_2}{L} + \frac{e(t)}{R}$$

La funzione $f_1(q_1, \phi_2; t)$ è univocamente definita per ogni valore di q_1 e ϕ_2 .

- **Calcolo di v_2**



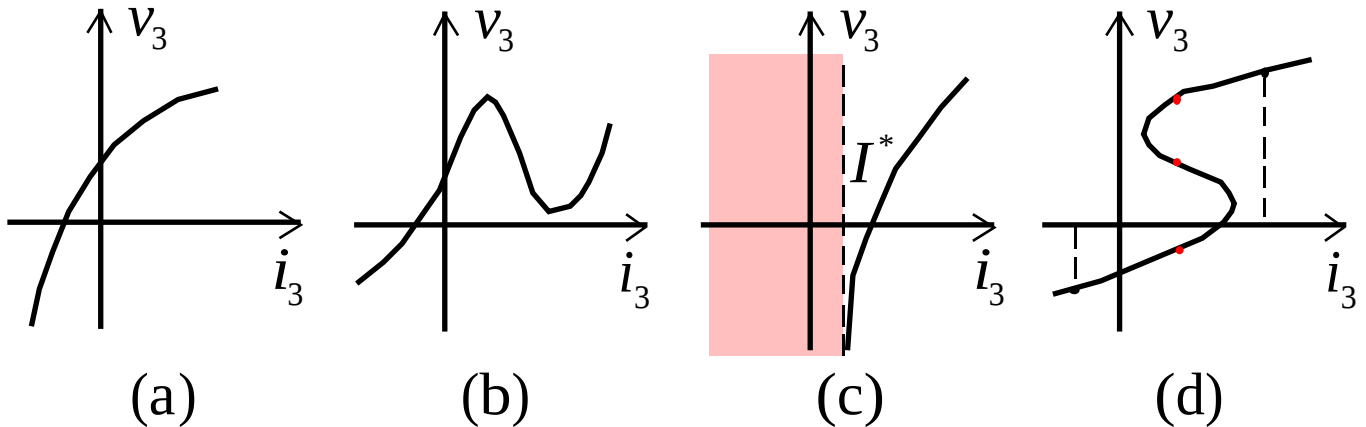
$$v_2 = v_1 - v_3 = \frac{q_1}{C} - v_3, i_3 = i_2 = \frac{\phi_2}{L}$$

$$h(v_3, i_3) = 0 \Rightarrow v_3 = r(i_3)$$

$$f_2(q_1, \phi_2) = v_2 = \frac{q_1}{C} - r_3\left(\frac{\phi_2}{L}\right)$$

La funzione $f_2(q_1, \phi_2)$ è univocamente definita per ogni valore di q_1 e ϕ_2 ?

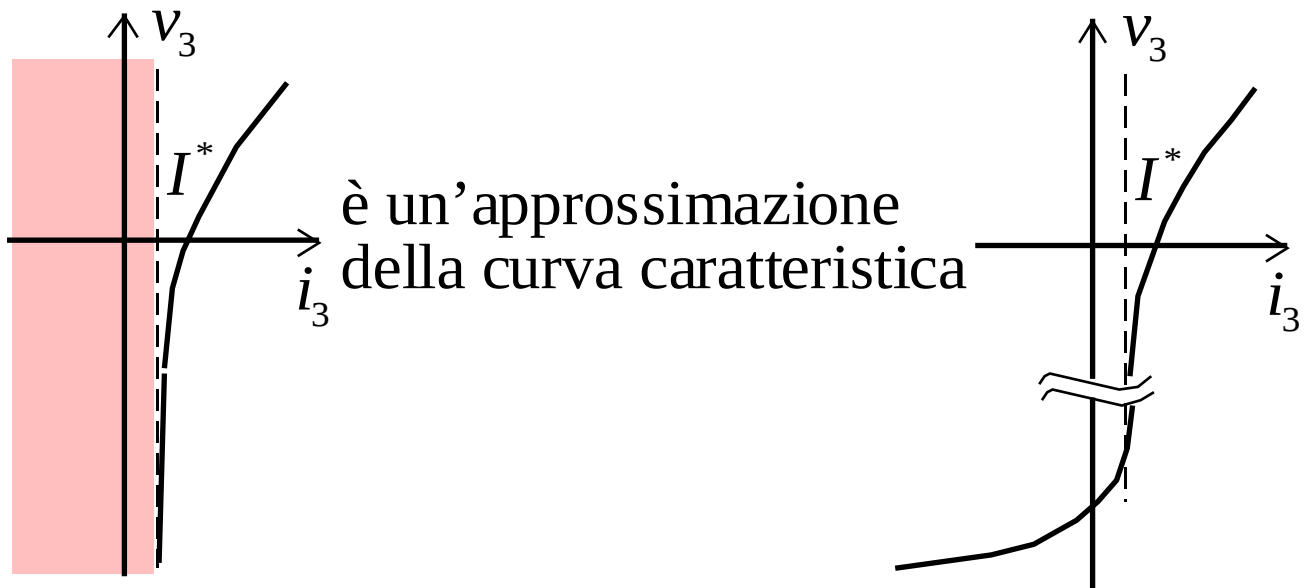
$$f_2(q_1, \phi_2) = v_2 = \frac{q_1}{C} - r_3 \left(\frac{\phi_2}{L} \right)$$



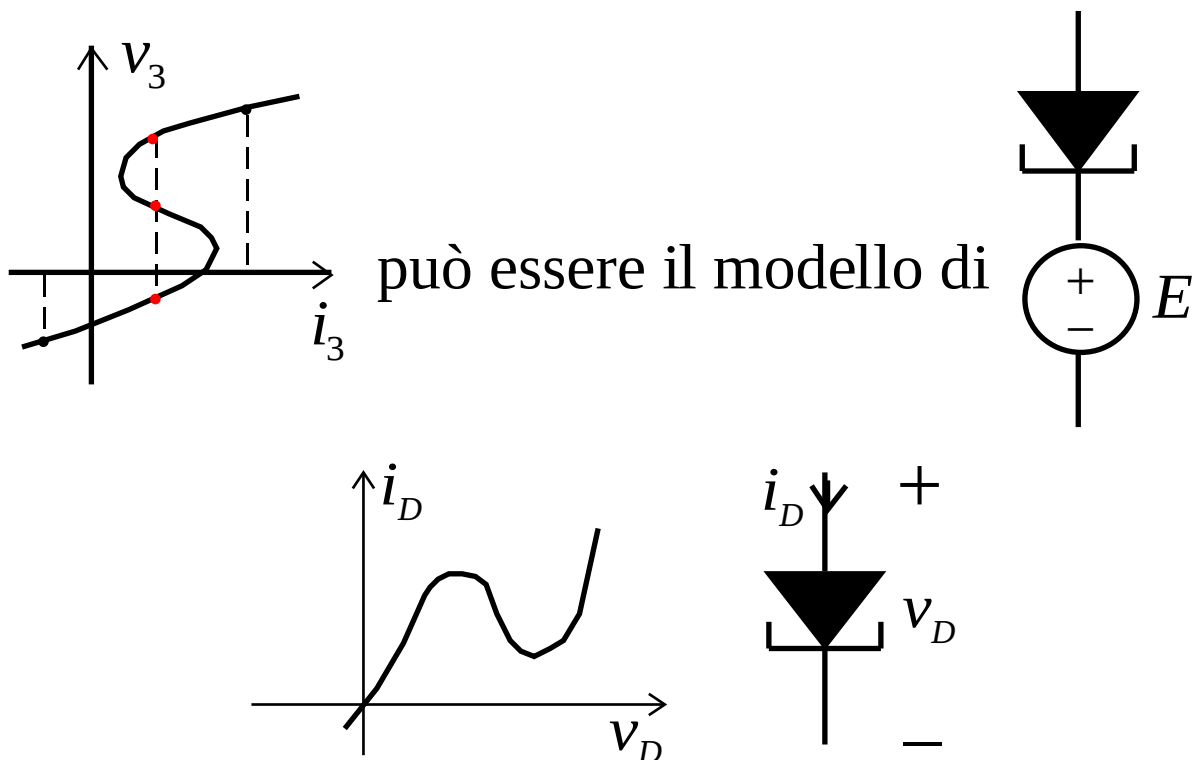
- Nei casi (a) e (b) la funzione $f_2(q_1, \phi_2)$ è univocamente definita per ogni valore di q_1 e ϕ_2 .
- Nel caso (c) la funzione $f_2(q_1, \phi_2)$ è univocamente definita ma **non per ogni valore** di ϕ_2 .
- Nel caso (d) la funzione $f_2(q_1, \phi_2)$ è definita per ogni valore di q_1 e ϕ_2 , ma **non univocamente**.

Nei casi (c) e (d) il modello circuitale non è ben posto

– **Caso (c)**

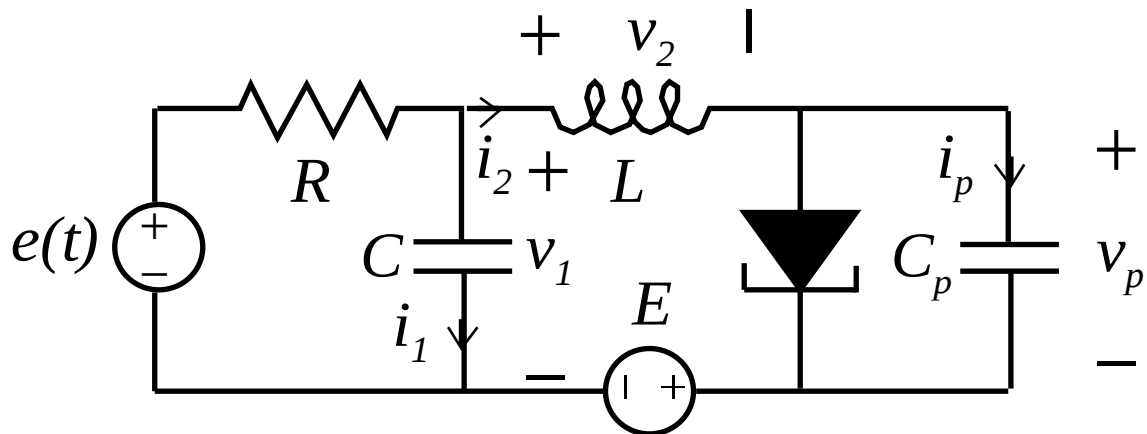


– **Caso (d)**

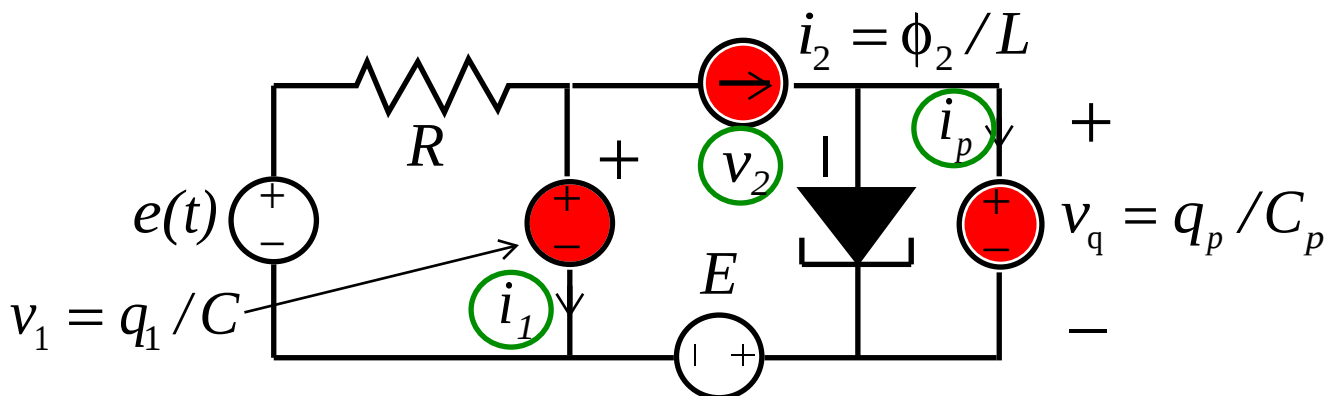


Un modello più accurato: si considera anche la capacità parassita di giunzione

Un modello più accurato



Il circuito resistivo associato del nuovo modello ha una ed una sola soluzione per ogni valore delle grandezze di stato.



$$f_1(q_1, q_p, \phi_2) = i_1 = -q_1/RC - \phi_2/L + e/R$$

$$f_p(q_1, q_p, \phi_2) = i_p = i_2 + i_D = \frac{\phi_2}{L} + g_D(q_p/C_p)$$

$$f_2(q_1, q_p, \phi_2) = v_2 = v_1 - v_p - E = q_1/C_1 - q_p/C_p + E$$

Le funzioni f_1 , f_p e f_2 sono definite univocamente per ogni valore di q_1, q_p e ϕ_2 .

Posto

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^N, \quad \mathbf{x}_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^N,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}; t) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{f}_C(\mathbf{q}, \phi; t) \\ \mathbf{f}_L(\mathbf{q}, \phi; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}; t) : \mathbf{R}^{N+1} \rightarrow \mathbf{R}^N,$$

si ha

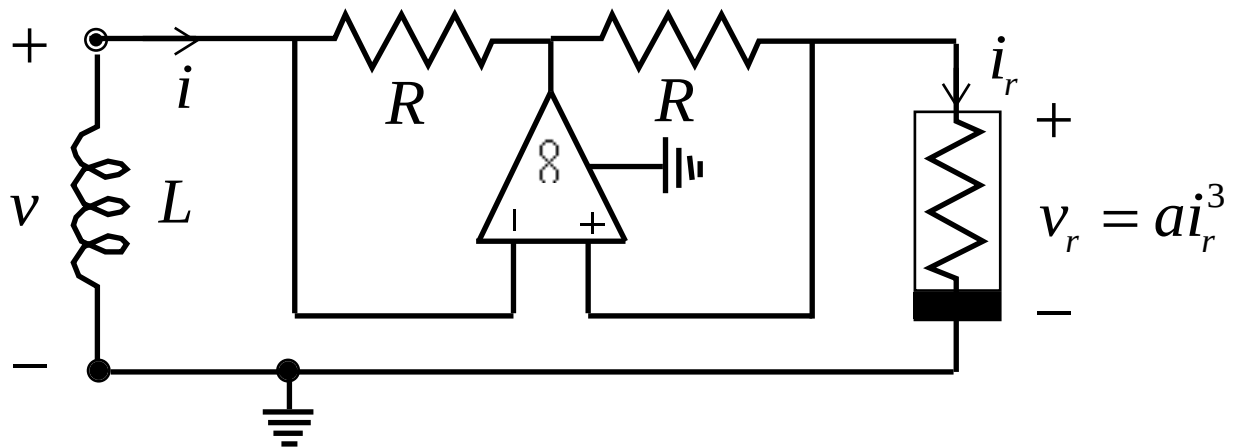
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; t) \quad \text{con} \quad \mathbf{x}(t = t_0) = \mathbf{x}_0$$

Esistenza e unicità della soluzione

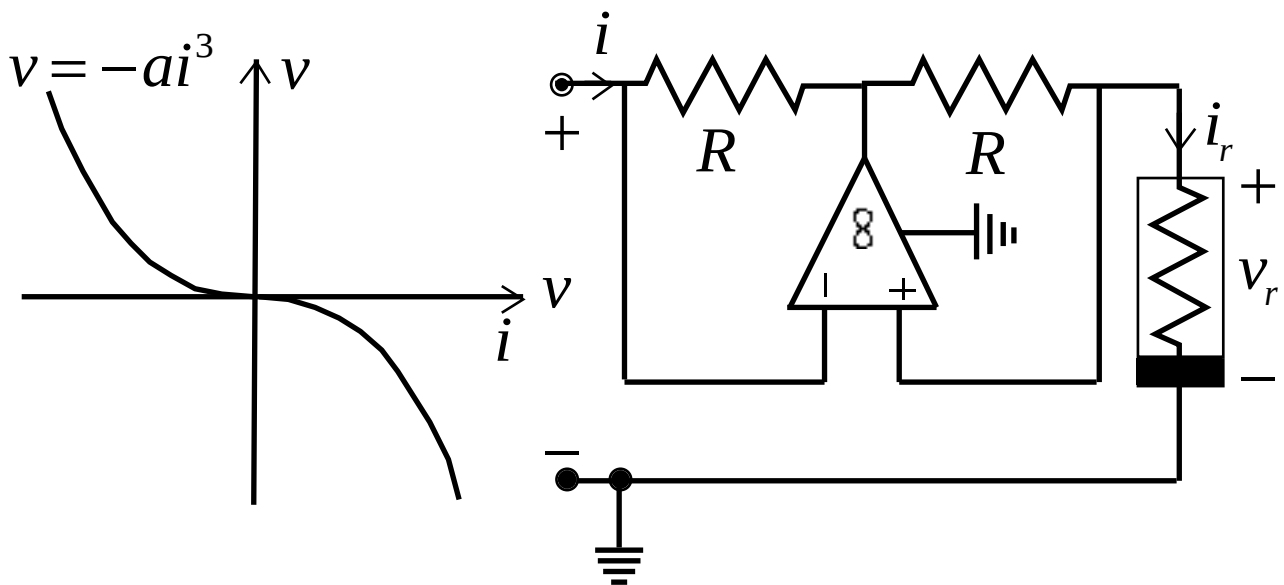
La soluzione di questo problema è unica ed esiste per ogni $t > t_0$? In generale, la risposta è no.

- **Esempio1)**

Consideriamo il circuito



con la condizione iniziale $i(t = t_0) = I_0$. Essendo



si ha

$$L \frac{di}{dt} = -v, \quad v = -ai^3 \quad \longrightarrow \quad \frac{di}{dt} = f(i) = \frac{a}{L} i^3.$$

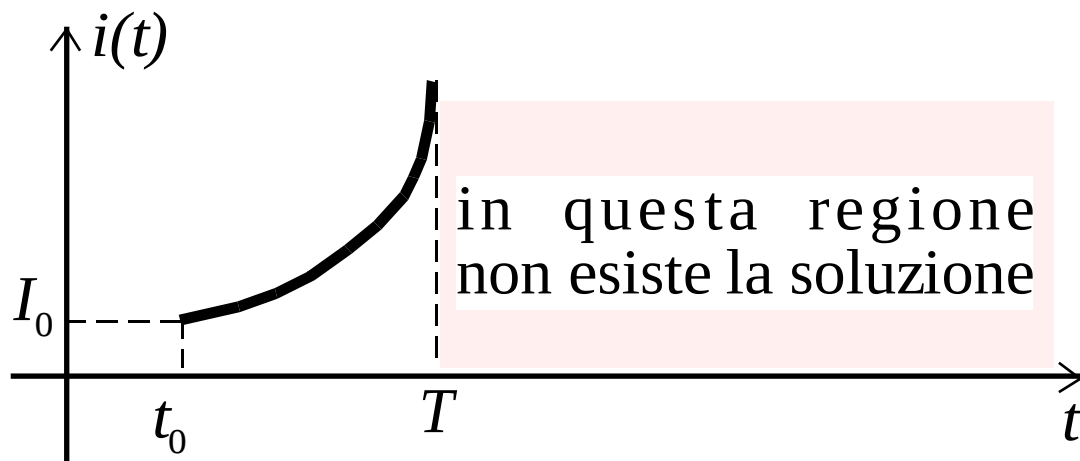
Bisogna risolvere il problema di Cauchy:

$$\frac{di}{dt} = f(i) = \frac{a}{L} i^3 \quad \text{con} \quad i(t = t_0) = I_0.$$

Esso ha una sola soluzione,

$$i(t) = \text{sign}(I_0) \left(\frac{L}{2a} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{T-t}}, \quad \text{dove} \quad T = t_0 + \frac{L}{2aI_0^2}.$$

Questa soluzione, però, esiste solo per $t_0 \leq t < T$.



La soluzione del circuito in esame non esiste per
 $T < t$.

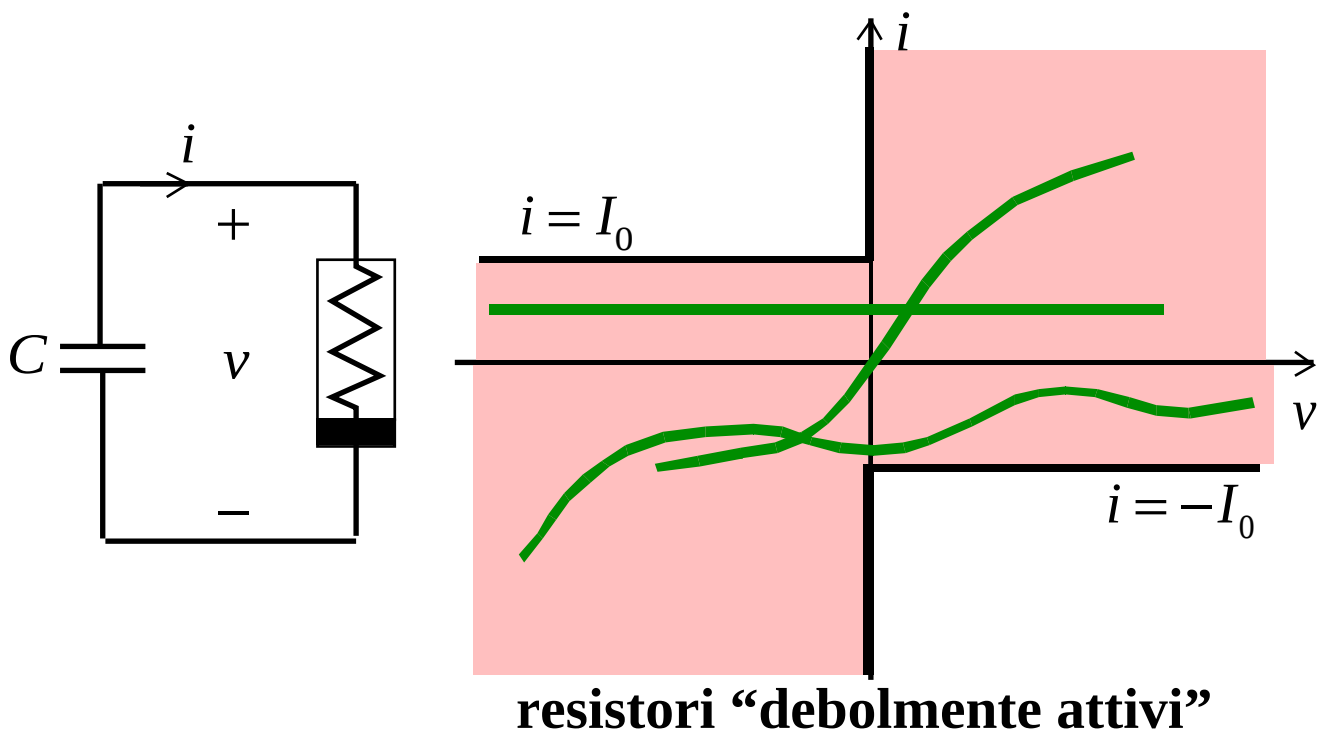
Un criterio di esistenza

$$\frac{dx}{dt} = f(x; t) \quad \text{con} \quad x(t = t_0) = x_0$$

- Condizione necessaria affinché la soluzione esista per ogni $t > t_0$ è che essa sia limitata per ogni $t > t_0$: non deve, come nell'esempio 1), divergere in un intervallo di tempo finito.

E' possibile stabilire *apriori* se la soluzione diverge in un intervallo di tempo finito?

Esempio 2)



$$p = vi \geq -I_0|v|$$

$$W = Cv^2 / 2 \Rightarrow |v| = \sqrt{2/C} \sqrt{W}, \quad p \geq -I_0 \sqrt{2/C} \sqrt{W}$$

$$-\frac{dW}{dt} = p \geq -I_0 \sqrt{2/C} \sqrt{W}$$

$$\frac{dW}{dt} \leq I_0 \sqrt{2/C} \sqrt{W}$$

$$\frac{1}{\sqrt{W}} \frac{dW}{dt} \leq I_0 \sqrt{2/C}$$

$$\frac{d}{dt}(2\sqrt{W}) \leq I_0 \sqrt{2/C}$$

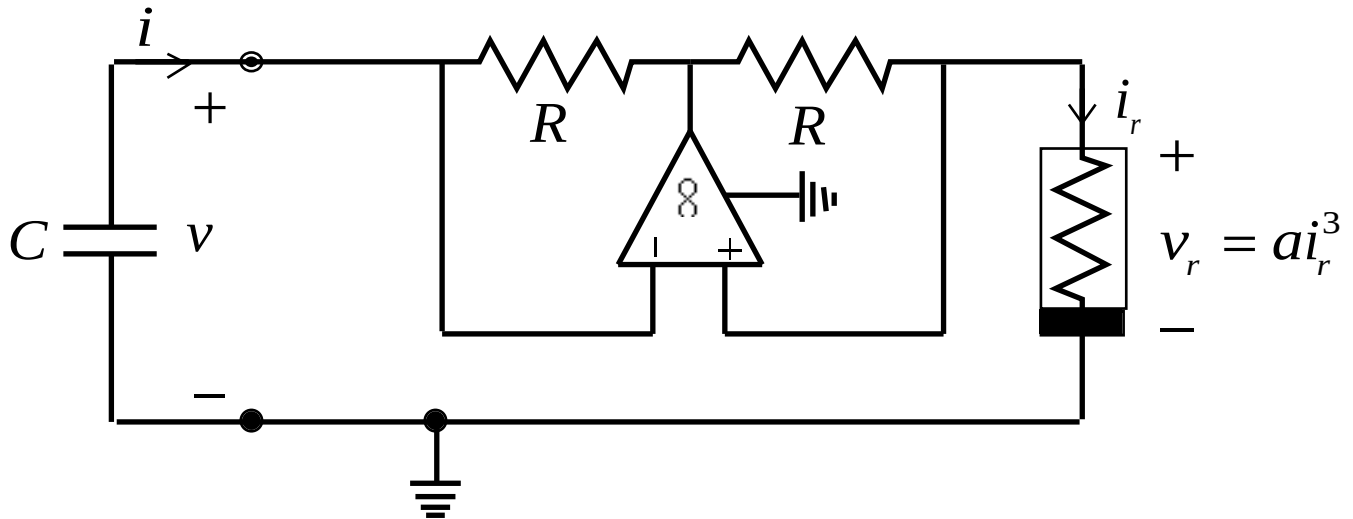
$$\sqrt{W} = \sqrt{C/2} |v|$$

$$\boxed{\frac{d|v|}{dt} \leq \frac{I_0}{C}}$$

Se i resistori sono “debolmente attivi” le soluzioni non possono divergere in un intervallo di tempo finito; eventualmente, esse divergono per $t \rightarrow +\infty$.

Esempio 3)

Consideriamo, ora, il circuito



con la condizione iniziale $v(t = t_0) = V_0$. Si ha

$$C \frac{dv}{dt} = -i, \quad i = -\left(\frac{v}{a}\right)^{1/3} \quad \longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = f(v) = \frac{1}{C} \left(\frac{v}{a}\right)^{1/3}.$$

Bisogna risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\frac{dv}{dt} = f(v) = \frac{1}{C} \left(\frac{v}{a}\right)^{1/3} \quad \text{con} \quad v(t = t_0) = 0.$$

Le soluzioni di questo problema sono definite per ogni $t > t_0$ ma sono **due**:

$$v_1(t) = 0;$$

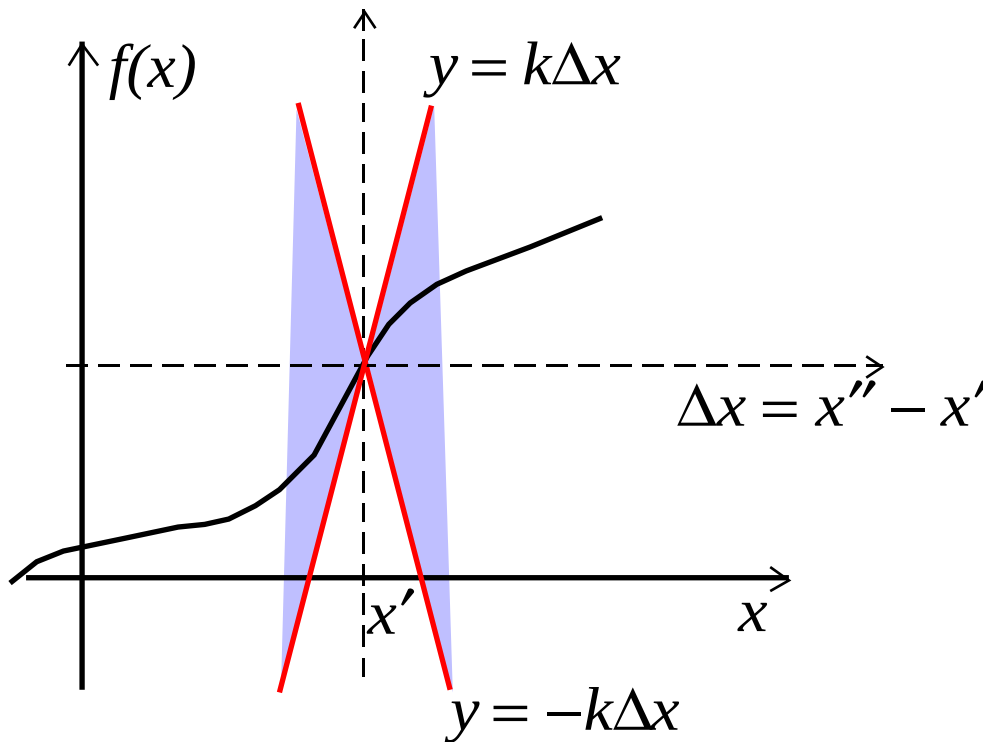
$$v_2(t) = K(t - t_0)^{3/2}, \quad \text{dove} \quad K = a^{-1/2} (3C/2)^{-3/2}.$$

Condizione di Lipschitz

La funzione $f(x;t): \mathbf{R}^{N+1} \rightarrow \mathbf{R}^N$ è lipschitziana rispetto alla variabile x nel dominio $D \subset \mathbf{R}^{N+1}$ se esiste una costante k tale che

$$\|f(x';t) - f(x'';t)\| \leq k\|x' - x''\|$$

per ogni $(x';t) \in D$ e $(x'';t) \in D$.



Criteri per la “lipschitzianità”

- Se le derivate parziali $\partial f_i / \partial x_j$ sono ovunque finite in D , f è lipschitziana in D .
- Se f è lineare a tratti in D , f è lipschitziana in D .

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; t) \quad \text{con} \quad \mathbf{x}(t = t_0) = \mathbf{x}_0$$

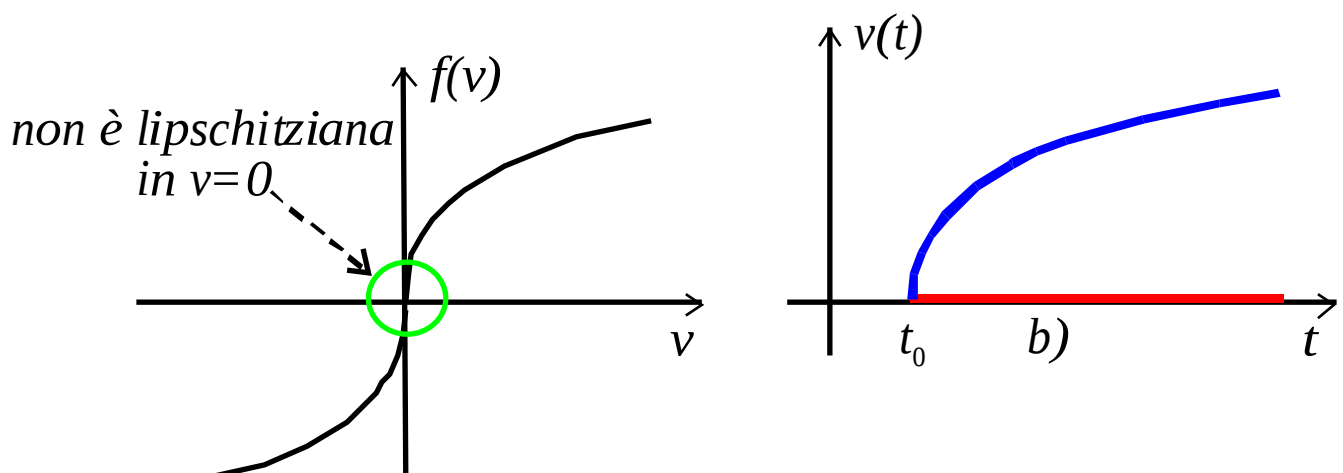
Un criterio unicità

Si assuma che:

- i. la soluzione esista per ogni $t \geq t_0$ e sia $\|\mathbf{x}(t)\| \leq d$;
- ii. la funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x}; t): \mathbf{R}^{N+1} \rightarrow \mathbf{R}^N$ sia continua e lipschitziana rispetto alla variabile $\mathbf{x}$ in ogni dominio $V = \{(\mathbf{x}; t) \mid \|\mathbf{x}(t)\| \leq d\}$.

Allora la soluzione è unica per ogni $t \geq t_0$.

Nell'esempio 3) la funzione f non è lipschitziana in $v = 0$.



Criterio di esistenza e unicità

Si assuma che:

- i.* il circuito resistivo associato abbia una e una sola soluzione per ogni valore di $\mathbf{q}$ e ϕ ;
- ii.* le curve caratteristiche degli elementi circuitali siano “regolari”;
- iii.* gli elementi circuitali siano “debolmente attivi”.

Allora, esiste per ogni $t > t_0$ una ed una sola soluzione del sistema di equazioni di stato

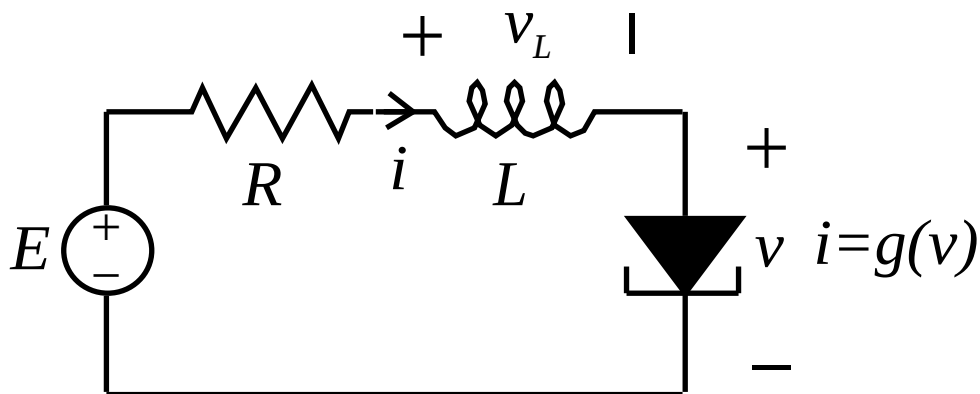
$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{f}_C(\mathbf{q}, \phi; t) \\ \frac{d\phi}{dt} = \mathbf{f}_L(\mathbf{q}, \phi; t) \end{cases}$$

che verifica le condizioni iniziali

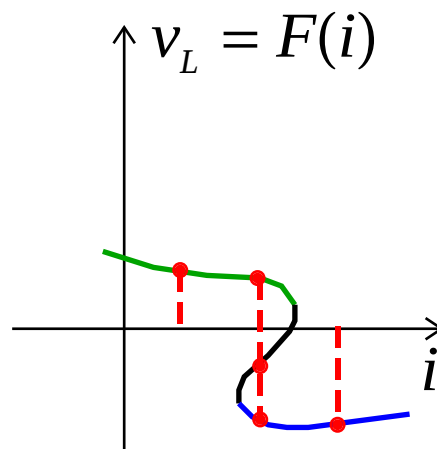
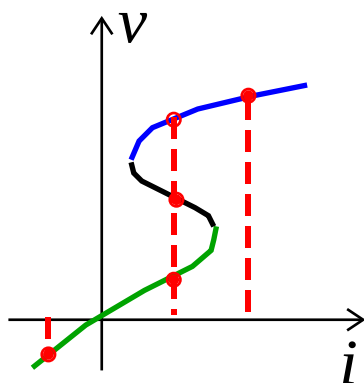
$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t = t_0) &= \mathbf{Q}_0, \\ \phi(t = t_0) &= \Phi_0. \end{aligned}$$

Equazione di stato con “isteresi”

Consideriamo il circuito



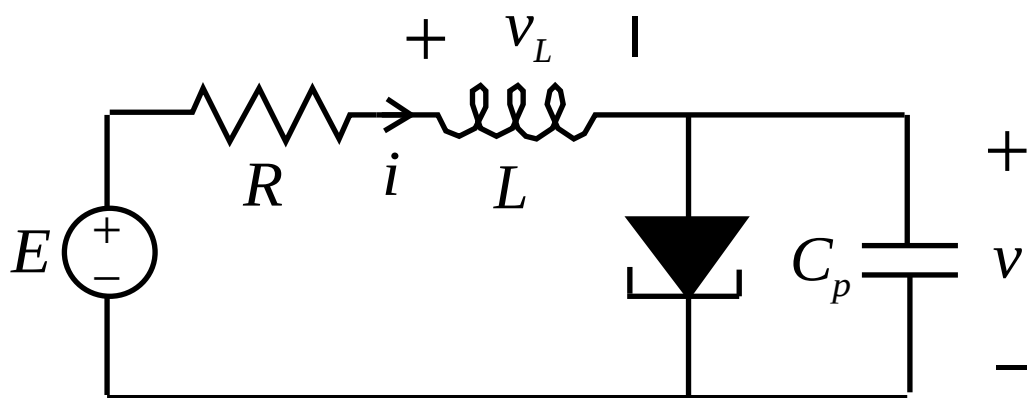
$$L \frac{di}{dt} = v_L = -Ri - v + E$$



$$L \frac{di}{dt} = F(i)$$

Questa equazione non è in forma normale. Un modello più accurato può essere ottenuto aggiungendo la capacità parassita di giunzione del diodo tunnel.

Modello con capacità parassita di giunzione del diodo tunnel

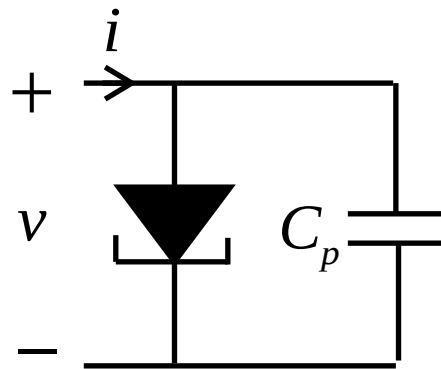


Equazioni di stato in forma normale

$$L \frac{di}{dt} = -Ri - v + E$$

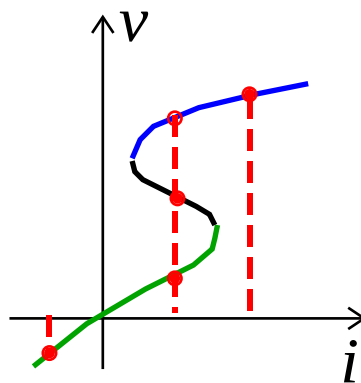
$$C_p \frac{dv}{dt} = i - g(v)$$

Modello ridotto

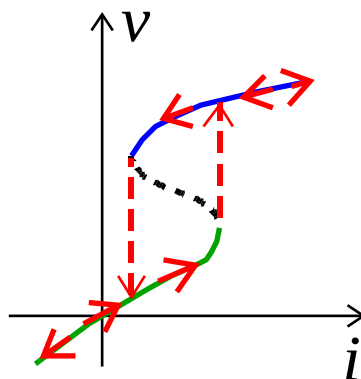


$$C_p \frac{dv}{dt} + g(v) = i$$

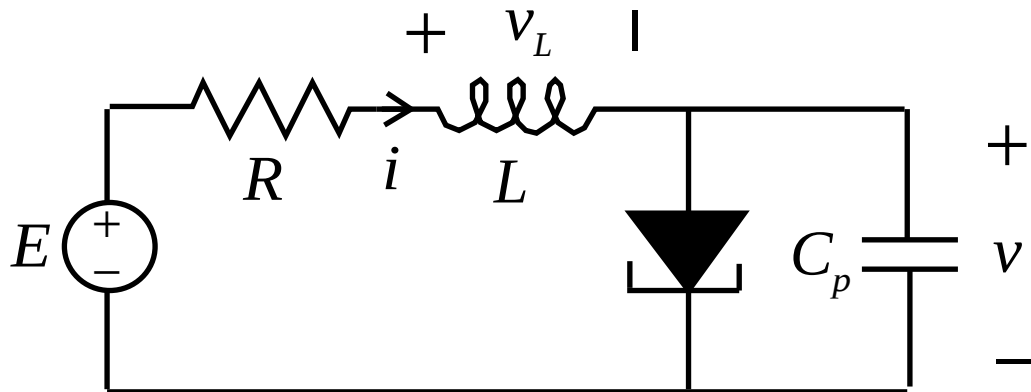
$$C_p = 0$$



$$C_p \rightarrow 0^+$$



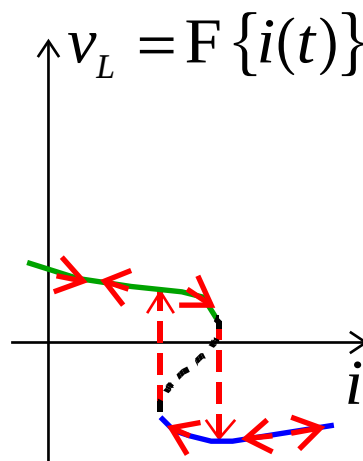
Il circuito



nel limite $C_p \rightarrow 0^+$ può essere descritto dall'**equazione differenziale funzionale**

$$L \frac{di}{dt} = F \{i(t)\}$$

dove



è una relazione funzionale di tipo isteretico.

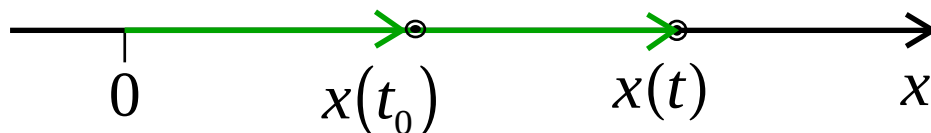
Analisi qualitativa di circuiti dinamici

Il comportamento asintotico e la stabilità delle soluzioni di un circuito possono essere dedotte dallo studio delle dinamiche nello spazio di stato.

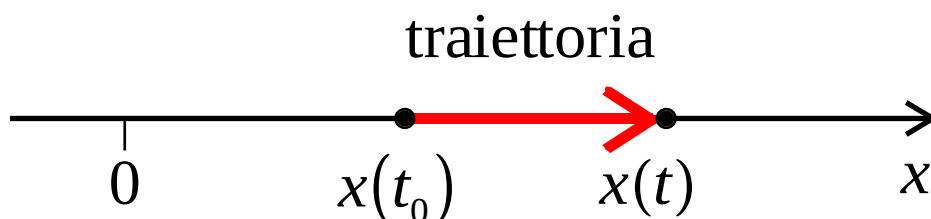
- **Circuito del primo ordine**

$$\dot{x} = x(t)$$

Lo spazio di stato è la retta



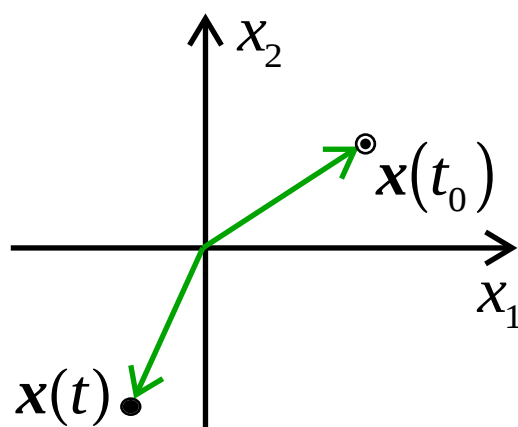
Traiettoria nello spazio di stato



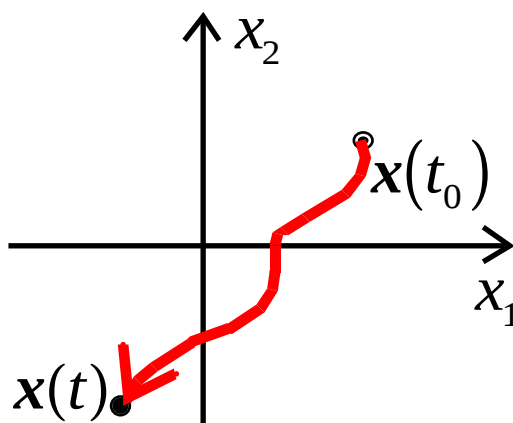
- **Circuito del secondo ordine**

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Lo spazio di stato è il piano



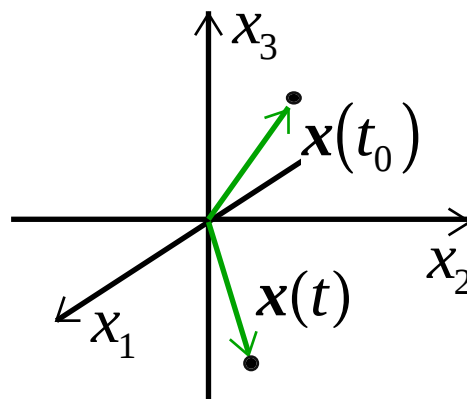
Traiettoria nello spazio di stato



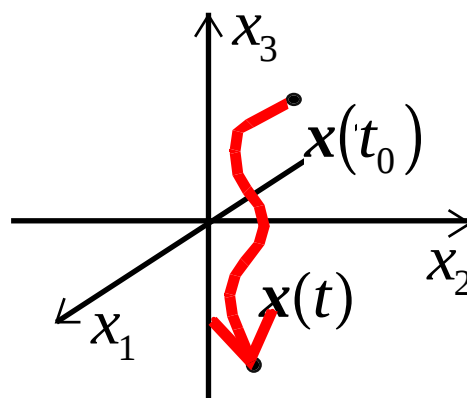
- **Circuito di ordine N**

$$\mathbf{x}(t) = |x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)|^T$$

Lo spazio di stato è lo spazio vettoriale R^N



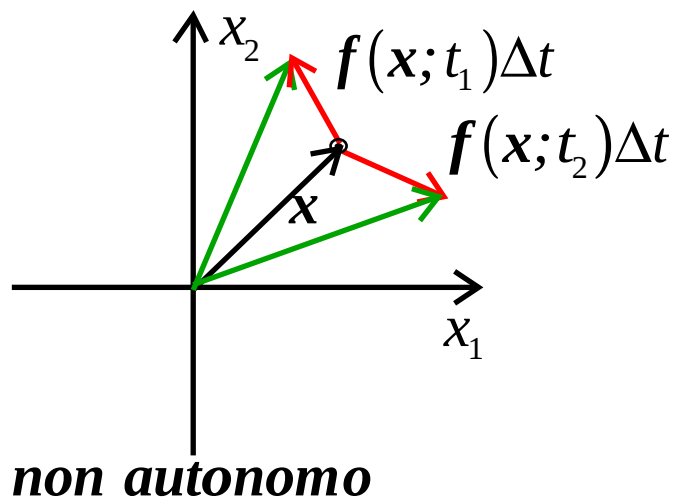
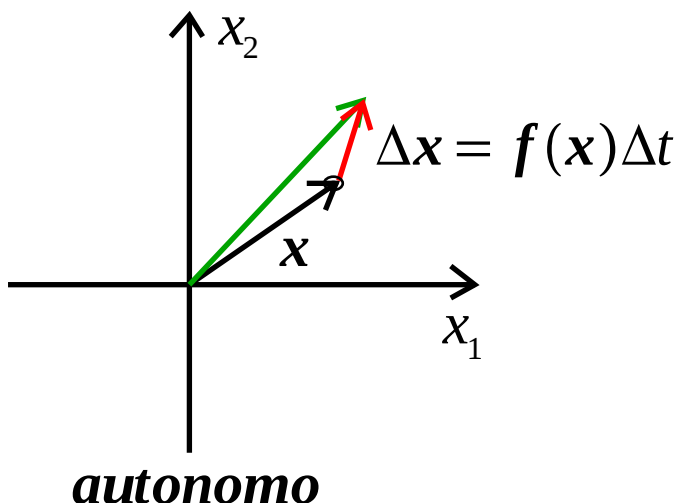
Traiettoria nello spazio di stato



Ritratto di fase (phase portrait)

Il “ritratto” di fase di un circuito è l’insieme di tutte le possibili traiettorie nello spazio di stato.

Il circuito si dice autonomo se $f = f(x)$, altrimenti si dice non autonomo.



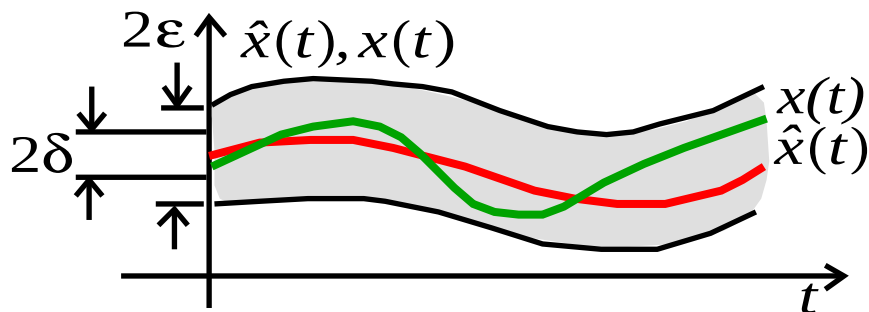
- Due traiettorie distinte di un circuito autonomo non possono mai intersecarsi;
- Le traiettorie di un circuito non autonomo si intersecano.

Stabilità secondo Lyapunov

- La soluzione $\hat{x} = \hat{x}(t)$ si dice che è **stabile**, se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x = x(t)$ con $\|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| \leq \delta$ si ha

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon \text{ per ogni } t \geq t_0,$$

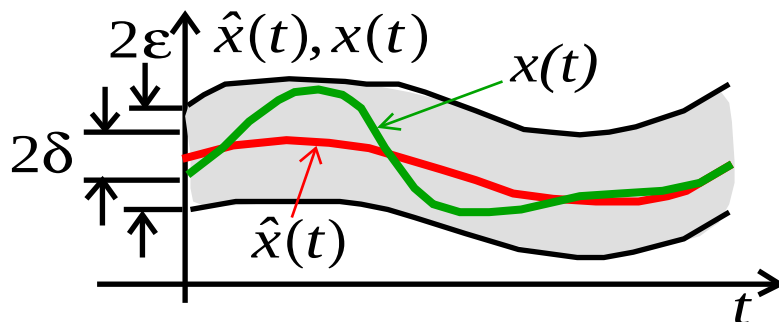
altrimenti si dice che è instabile.



Scegliendo δ arbitrariamente piccolo ε può essere reso arbitrariamente piccolo.

- La soluzione $\hat{x} = \hat{x}(t)$ si dice che è **asintoticamente stabile**, se, è **stabile** e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0.$$



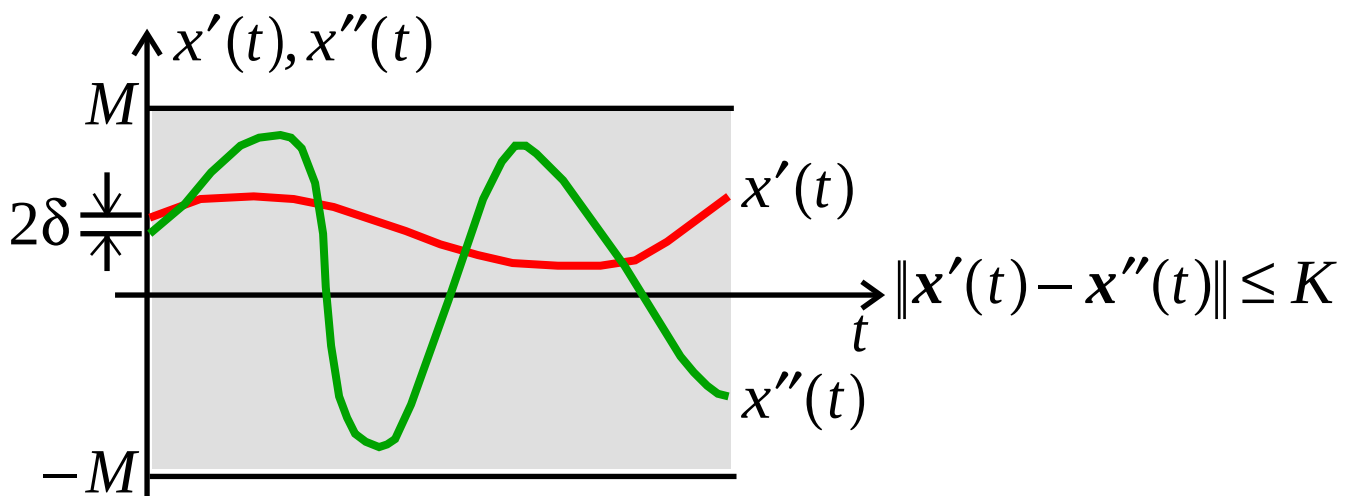
Stabilità secondo Lagrange: “bounded stability”

La soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ si dice che è “boundedly stable”, se, per ogni $t \geq t_0$ si ha che

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M < \infty$$

dove M è una costante indipendente da $\mathbf{x}(t_0)$.

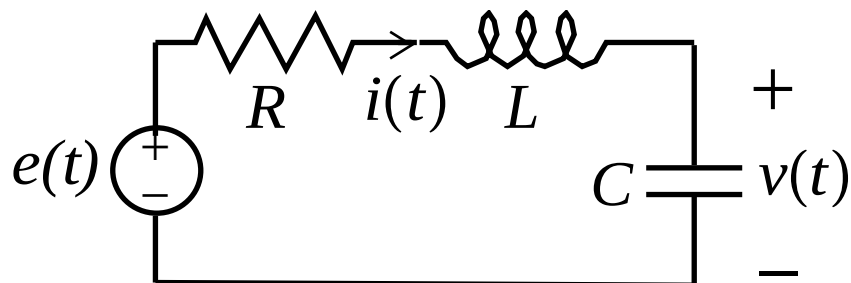
Possono esistere soluzioni che sono instabili secondo Lyapunov e stabili, invece, secondo Lagrange.



K non può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo il valore di δ arbitrariamente piccolo (ma diverso da zero).

Circuiti lineari tempo invarianti

Un esempio



Il polinomio caratteristico associato è:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC}.$$

Si assuma che le radici siano distinte, $\lambda_+ \neq \lambda_-$. Tutte le possibili soluzioni del circuito sono esprimibili come

$$x(t) = K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t} + x_p(t)$$

- i. $x_p = x_p(t)$ è una soluzione particolare;
- ii. le costanti K_+ e K_- dipendono dalle condizioni iniziali.

La stabilità delle soluzioni dipende solo dai valori delle frequenze naturali λ_+ e λ_- .

Consideriamo due diverse soluzioni del circuito:

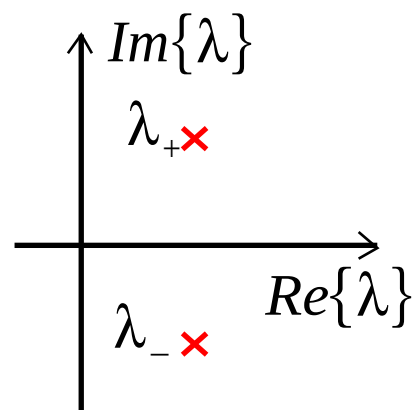
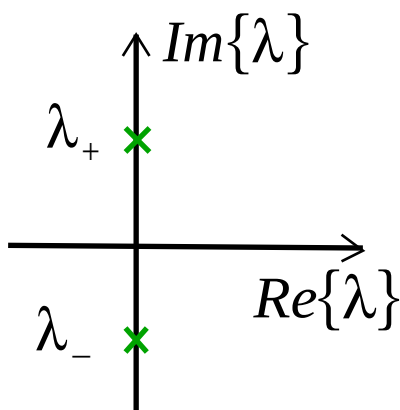
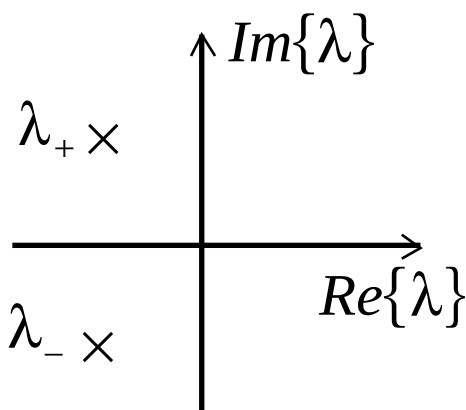
$$\hat{x}(t) = \hat{K}_+ e^{\lambda_+ t} + \hat{K}_- e^{\lambda_- t} + x_p(t),$$

$$x(t) = K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t} + x_p(t);$$

si ha

$$|\Delta x| = |\hat{x}(t) - x(t)| = \left| (\hat{K}_+ - K_+) e^{\lambda_+ t} + (\hat{K}_- - K_-) e^{\lambda_- t} \right|$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\Delta x| = ?$$



$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\Delta x(t)| = 0$$

$$|\Delta x(t)| \leq M$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\Delta x(t)| = \infty$$

a)
Circuito
asintoticamente stabile

b)
Circuito stabile

c)
Circuito instabile

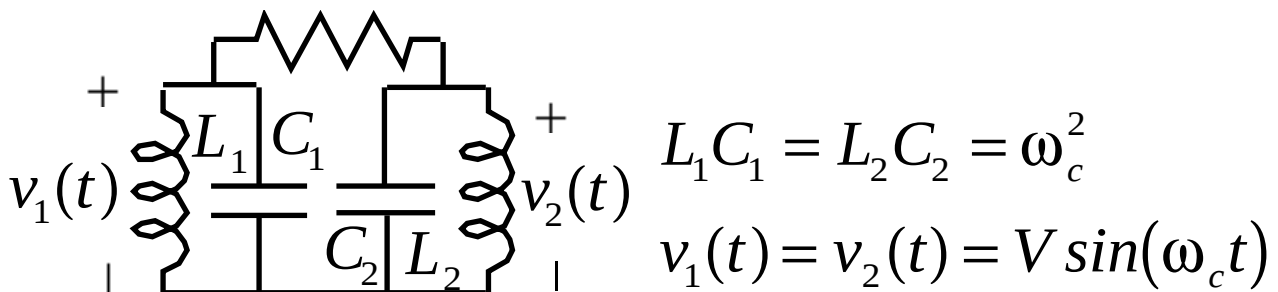
Queste sono proprietà strutturali dei circuiti lineari tempo invarianti

a) Condizione sufficiente per la asintotica stabilità di un circuito lineare tempo invariante:

- i. il circuito contiene generatori indipendenti e elementi passivi: resistori, induttori, condensatori, ...;
- ii. ciascuna maglia e ciascun insieme di taglio contengono almeno un elemento dissipativo.

b) Condizione sufficiente per la stabilità di un circuito lineare tempo invariante:

il circuito contiene solo generatori indipendenti e elementi passivi.



c) Un circuito che contiene oltre a elementi passivi e generatori indipendenti, anche altri elementi attivi, come, ad esempio, generatori controllati e amplificatori operazionali, può essere instabile.

Circuiti lineari asintoticamente stabili

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t) - x_p(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t}] = 0$$

Il comportamento per $t \rightarrow +\infty$ di qualsiasi soluzione del circuito è indipendente dal suo valore iniziale: esso dipende solo e solo dalla struttura del circuito e dalle forme d'onda dei generatori indipendenti.

Ciascun circuito lineare asintoticamente stabile è caratterizzato da una soluzione di regime permanente, $x_{rp} = x_{rp}(t)$. Essa è unica, dipende solo dalla struttura del circuito e dalle forme d'onda dei generatori indipendenti e varia con regolarità al variare dei parametri.

Per qualsiasi soluzione si ha che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t) - x_{rp}(t)] = 0.$$

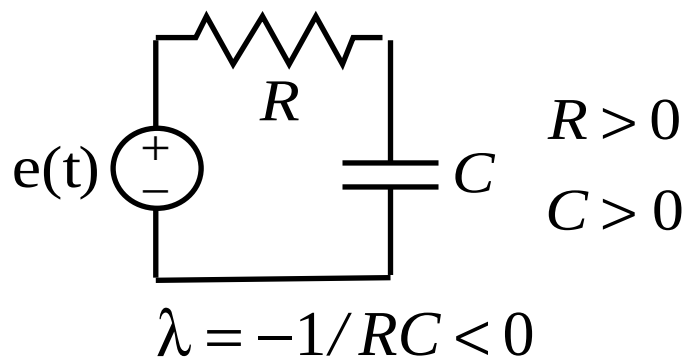
Per $t \rightarrow \infty$ si perde qualsiasi correlazione con le condizioni iniziali.

- Generatori indipendenti **stazionari** $\Rightarrow$ il regime permanente è **stazionario**;
- Generatori indipendenti **sinusoidali** e **isofrequenziali** con frequenza $f \Rightarrow$ il regime permanente è **sinusoidale** con frequenza f ;
- Generatori indipendenti **periodici** con periodo $T \Rightarrow$ il regime permanente è **periodico** con periodo T ;
- Generatori indipendenti **quasi-periodici** con contenuto armonico negli intervalli di frequenze $I_1, I_2, \dots, I_s \Rightarrow$ il regime permanente è **quasi-periodico** con contenuto armonico negli intervalli di frequenze $I_1, I_2, \dots, I_s$.

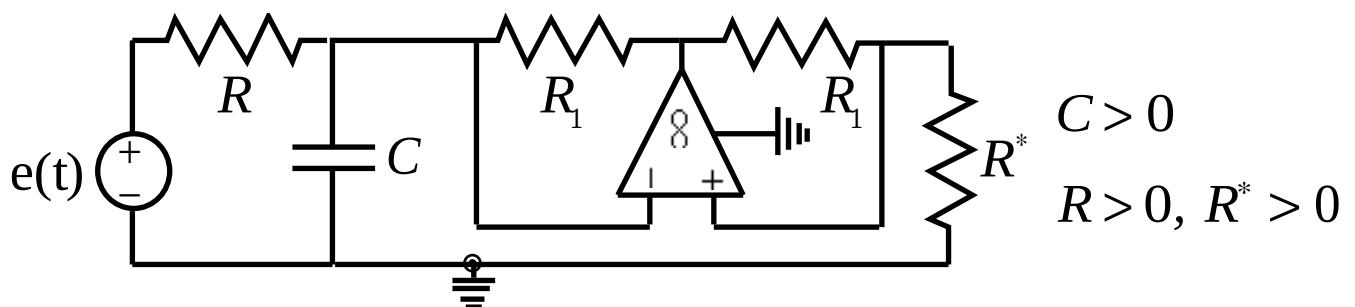
Come varia il comportamento asintotico delle soluzioni al variare dei parametri del circuito?

Un circuito si dice strutturalmente stabile se il comportamento asintotico delle soluzioni non varia qualitativamente per “piccole” variazioni dei parametri.

- Circuito lineare “strutturalmente stabile”



- Circuito lineare “non strutturalmente stabile”

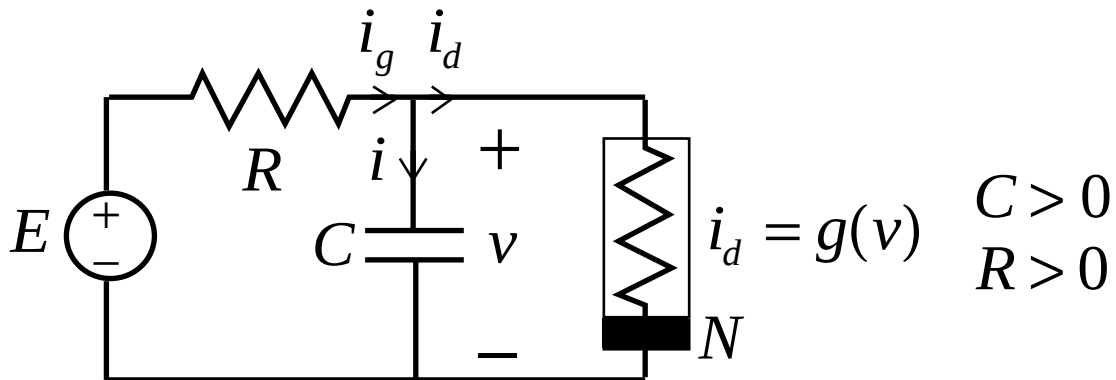


$$R_{eq} = R / (1 - R/R^*)$$

$$\lambda = -1/R_{eq}C \begin{cases} < 0 & R < R^* \\ > 0 & R > R^* \end{cases}$$

Circuiti non lineari autonomi

Un esempio: circuito del primo ordine

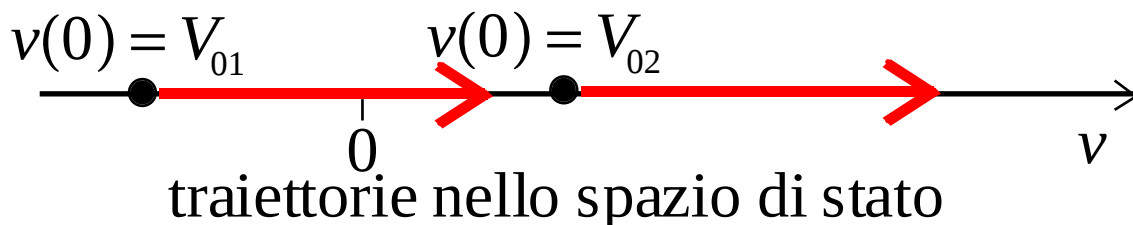


$$C \frac{dv}{dt} = i = i_g - i_d$$
$$i_g = \frac{E - v}{R}, \quad i_d = g(v)$$

Queste equazioni devono essere risolte con la condizione iniziale $v(0) = V_0$.

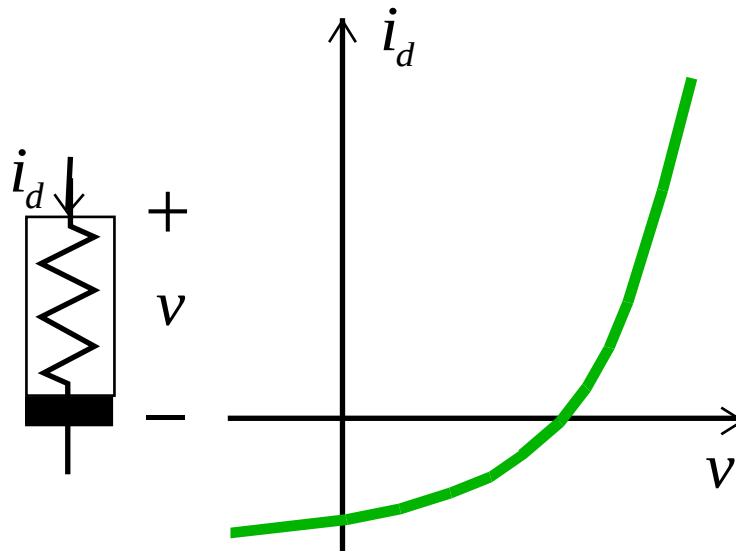
Analizziamo le dinamiche nello spazio di stato del circuito.

Ritratto di fase

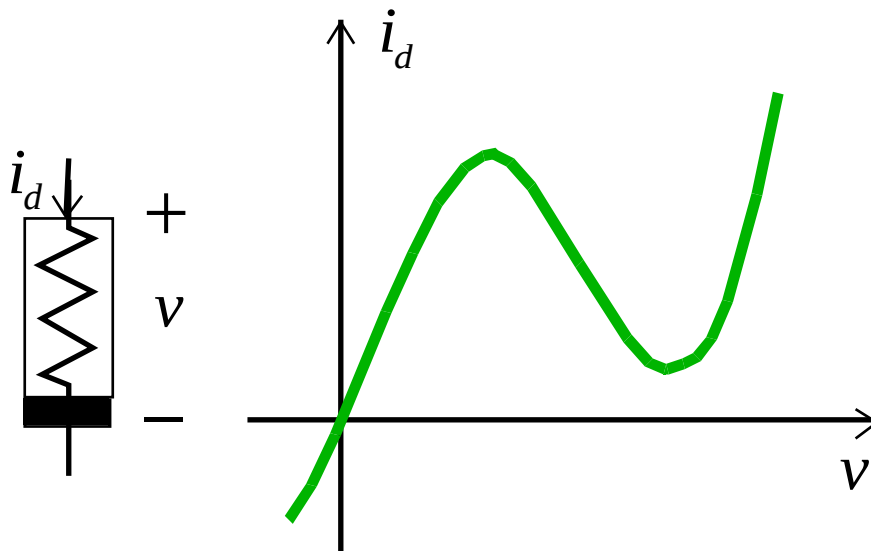


Il comportamento asintotico e la stabilità delle soluzioni dipendono solo dal tipo di curva caratteristica del resistore non lineare.

i. Curva caratteristica monotona crescente

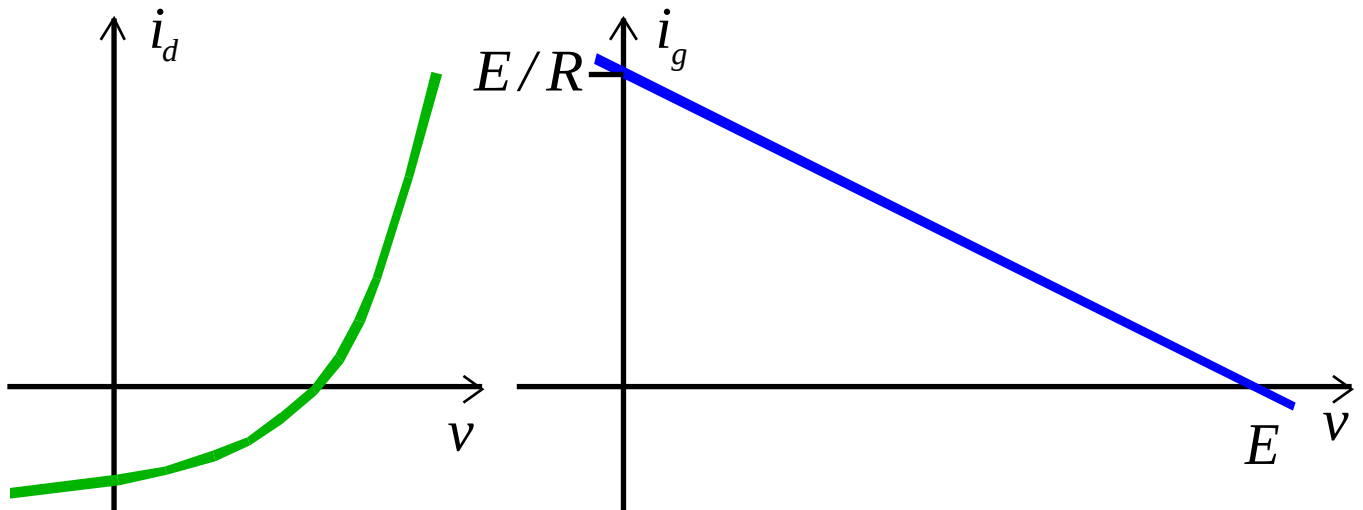


ii. Curva caratteristica non monotona

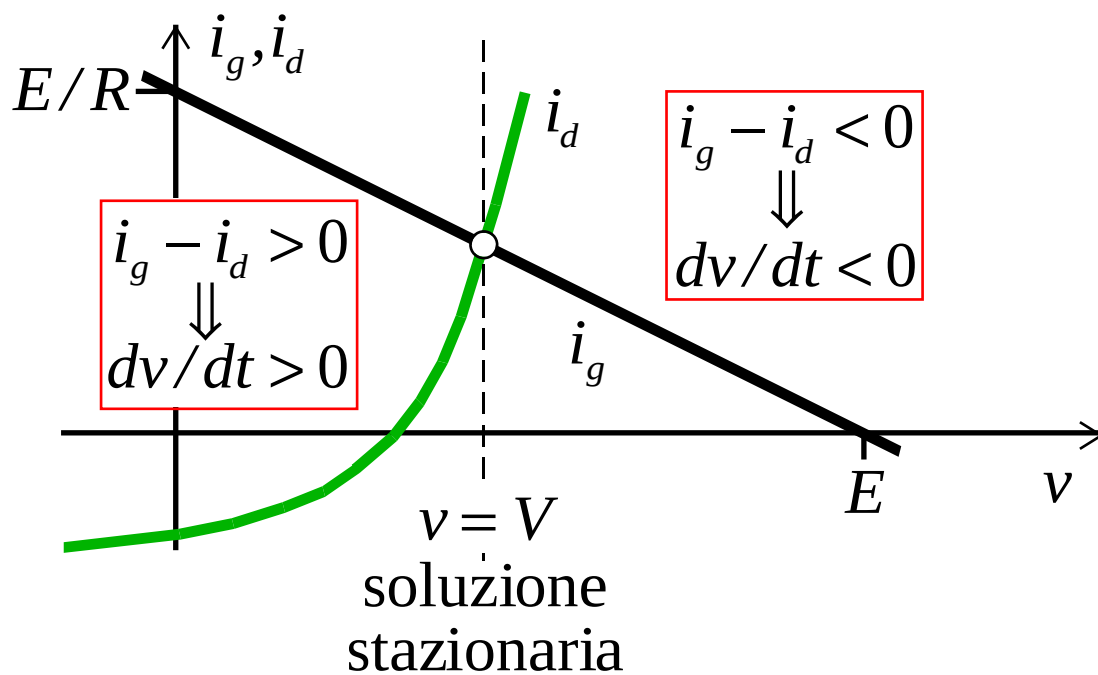


Curva caratteristica monotona crescente

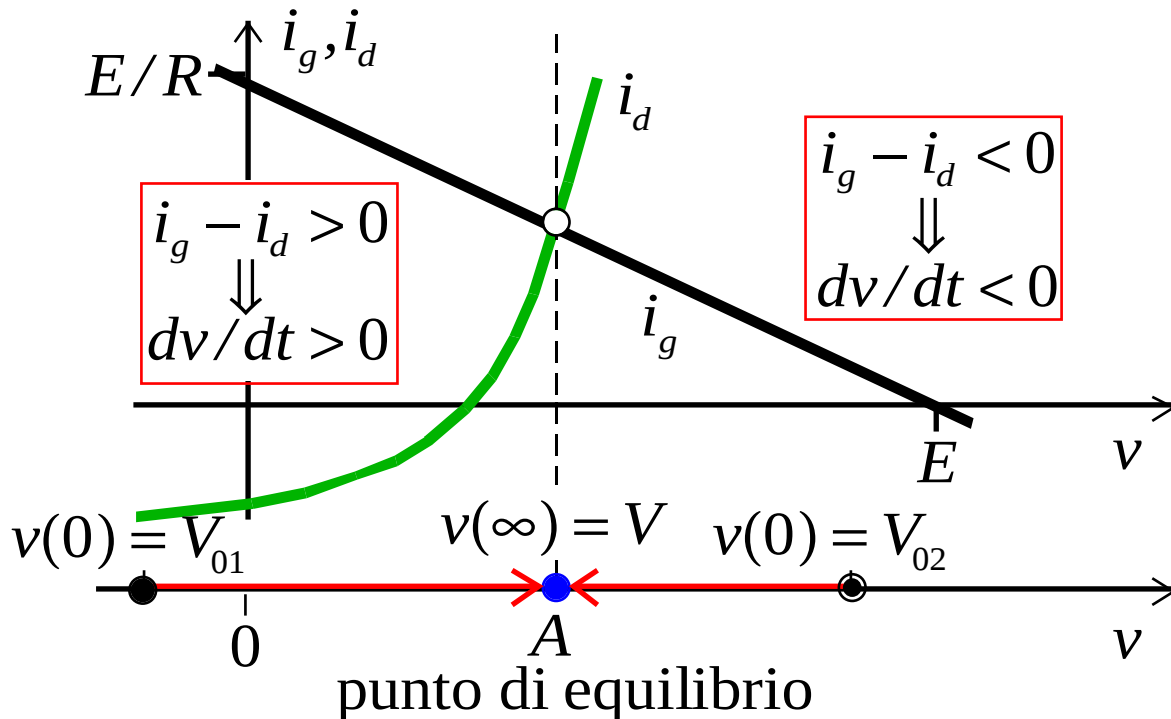
$$i_g = \frac{E - v}{R}, i_d = g(v)$$



$$C \frac{dv}{dt} = i_g(v) - i_d(v)$$

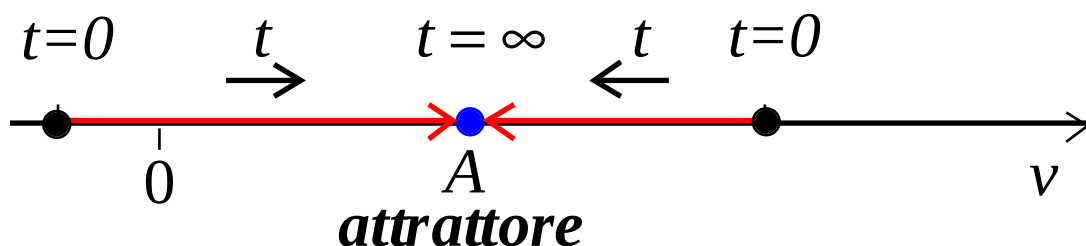


Costruiamo il ritratto di fase



Un nuovo concetto: l'attrattore

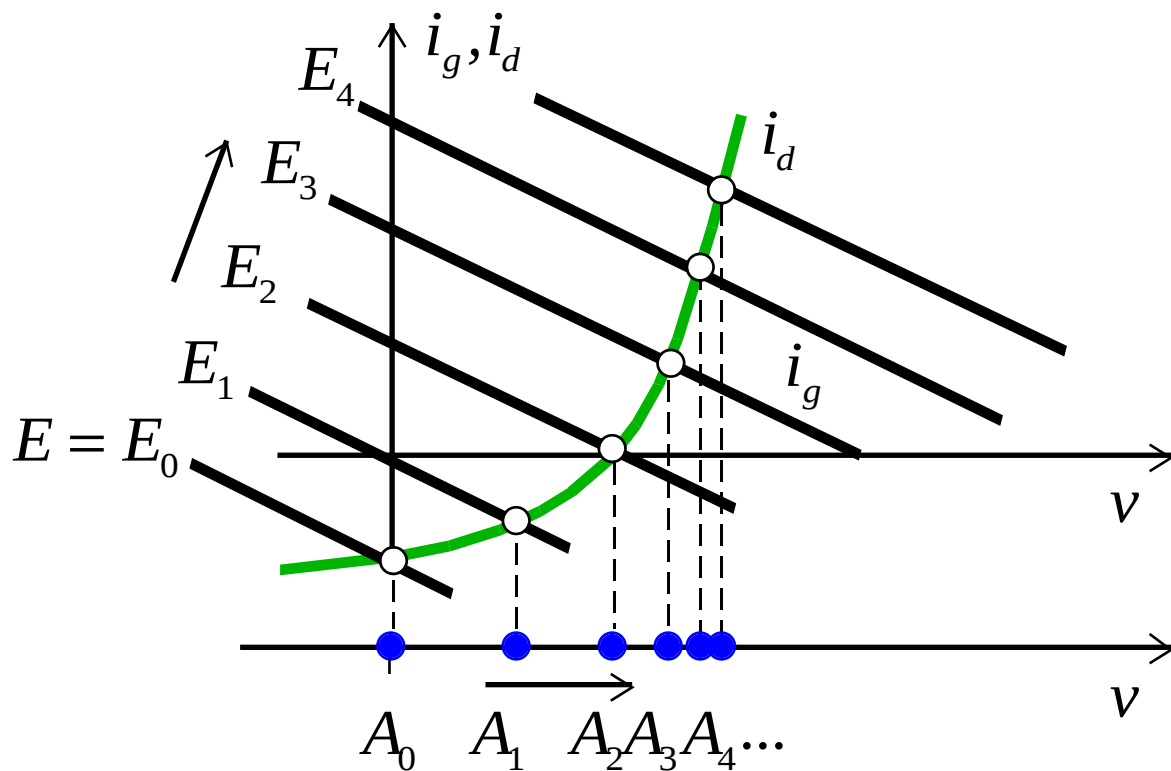
Il **punto di equilibrio** A è un punto di **attrazione** per tutte le traiettorie del circuito:



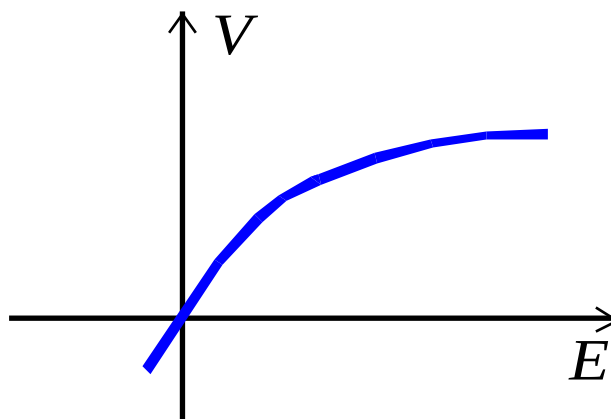
Per ogni valore di $v(0)$ si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = V$.

La soluzione stazionaria $v = V$ è **asintoticamente stabile** ed è la **soluzione di regime** del circuito.

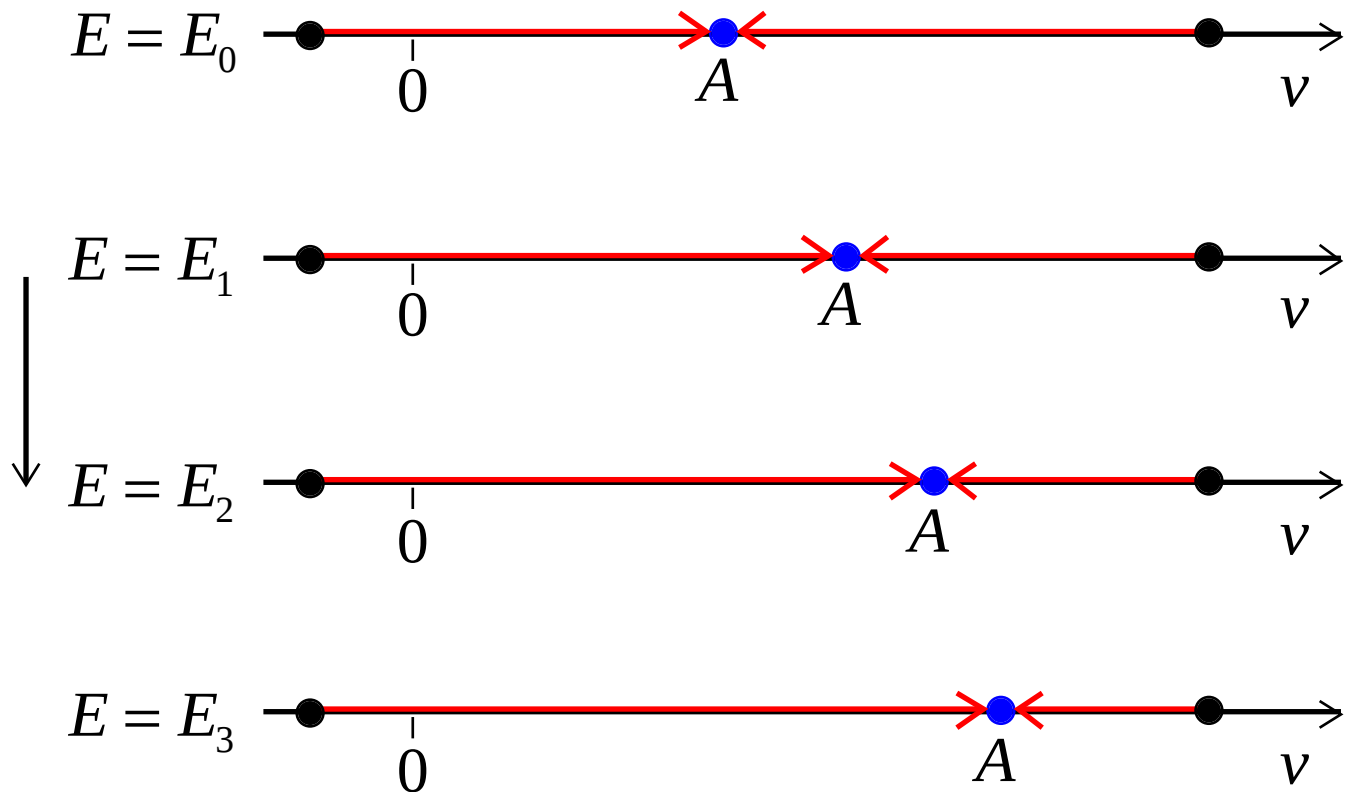
**Come varia la soluzione stazionaria del circuito
al variare dei parametri?**



**Varia in modo regolare, secondo un andamento
del tipo**



Al variare dei parametri il diagramma di fase del circuito non varia qualitativamente !!!



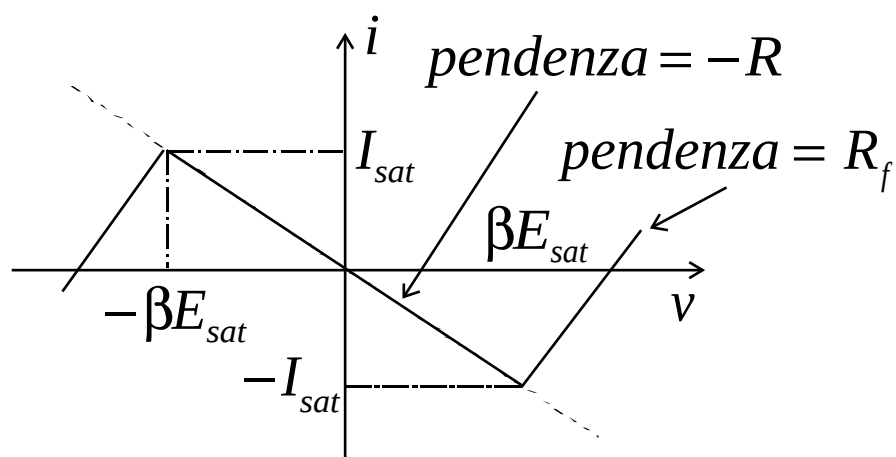
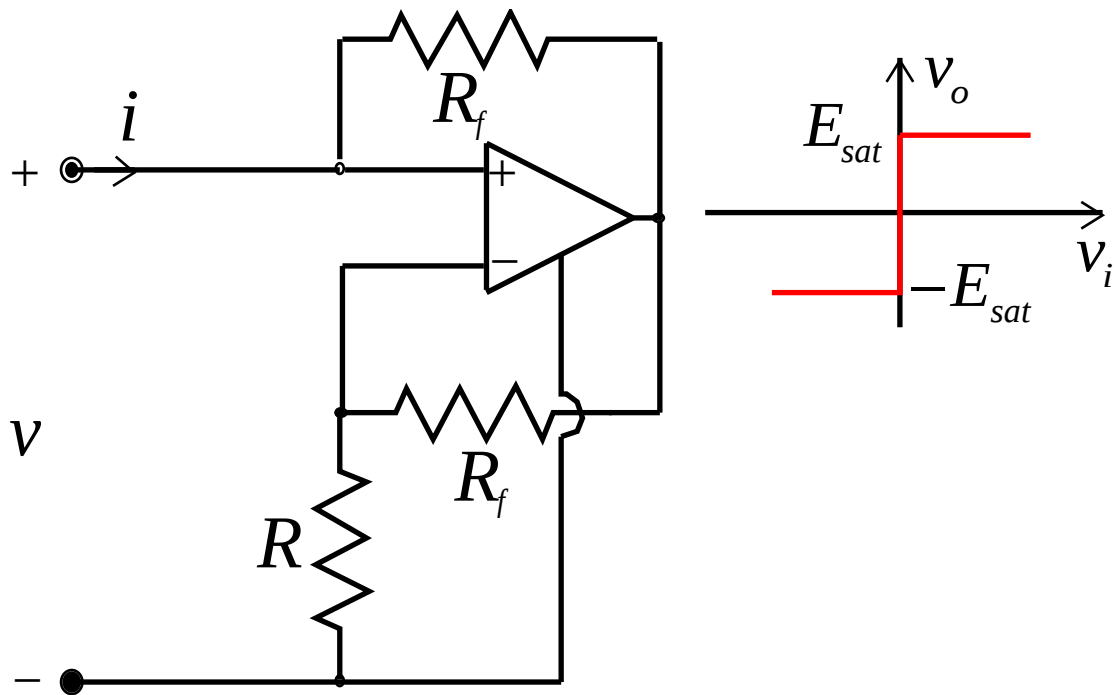
Il circuito è strutturalmente stabile nel caso in esame.

Riassumendo, abbiamo che:

- Il comportamento asintotico delle soluzioni è indipendente dalle condizioni iniziali e, quindi, è unico anche quando i resistori sono non lineari, purché le loro curve caratteristiche siano monotone crescenti.
- Il circuito è strutturalmente stabile.
- Il tipo di regime permanente che si instaura nel circuito dipende solo dalle sorgenti.
 - Generatori indipendenti **stazionari** $\Rightarrow$ il regime permanente è **stazionario**.
 - Generatori indipendenti **sinusoidali** e **isofrequenziali** con frequenza $f \Rightarrow$ il regime permanente è **periodico** con periodo $1/f$: si ha la generazione di armoniche;
- eccetera

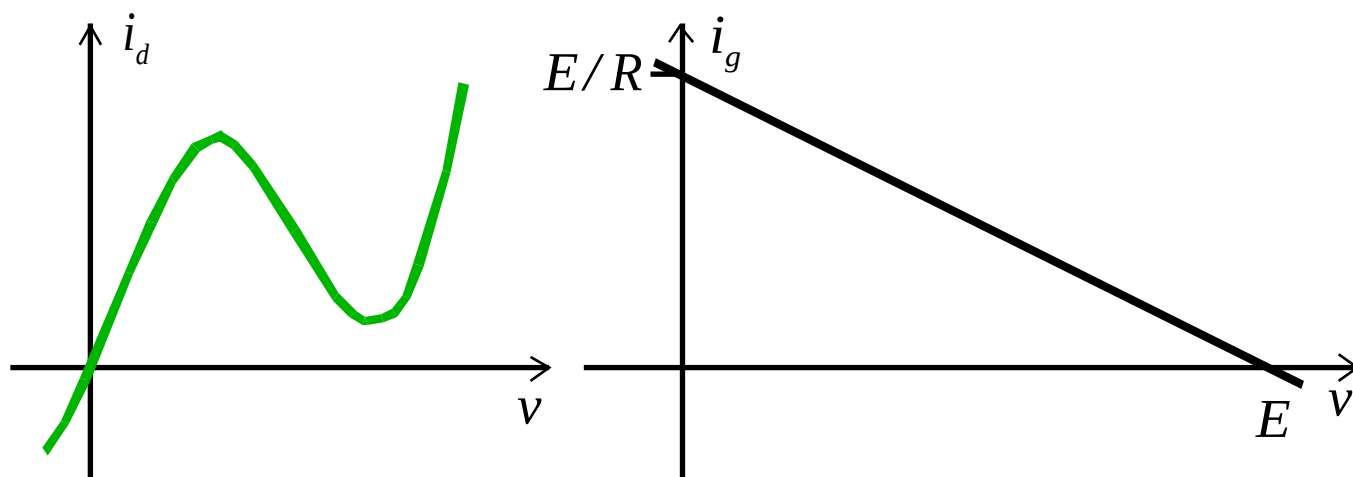
Tutto ciò non è più vero per i circuiti che contengono amplificatori operazionali e generatori controllati.

Attraverso amplificatori operazionali è possibile realizzare bipoli con curve caratteristiche non monotone

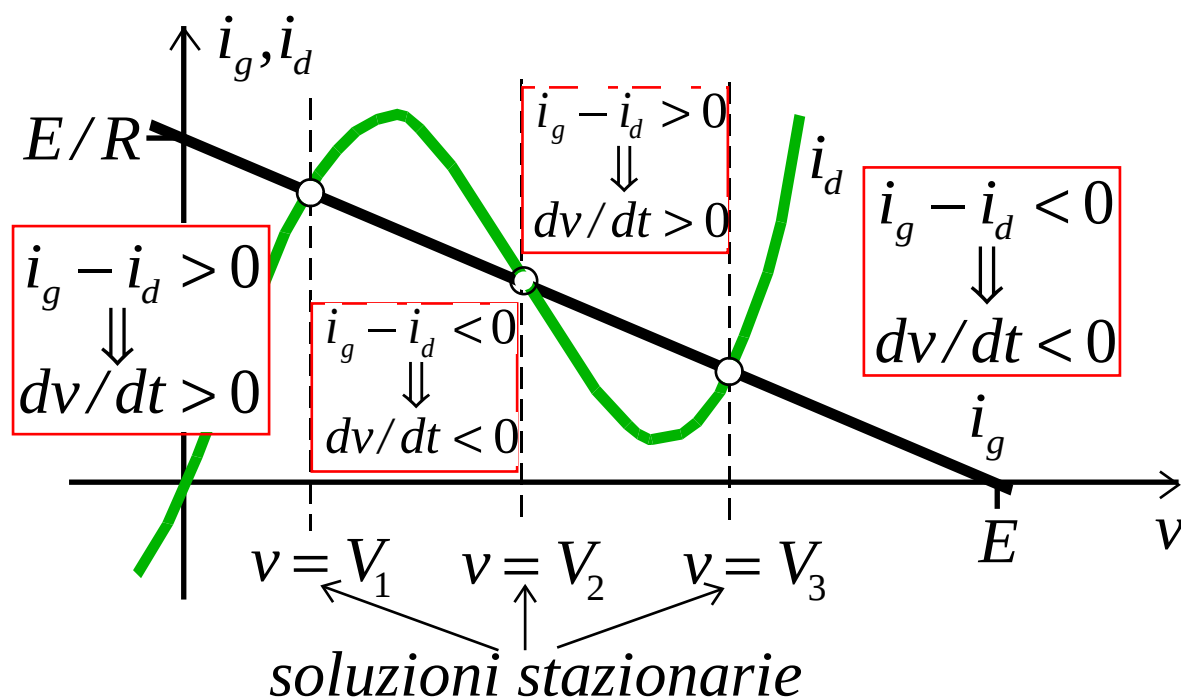


Curva caratteristica non monotona

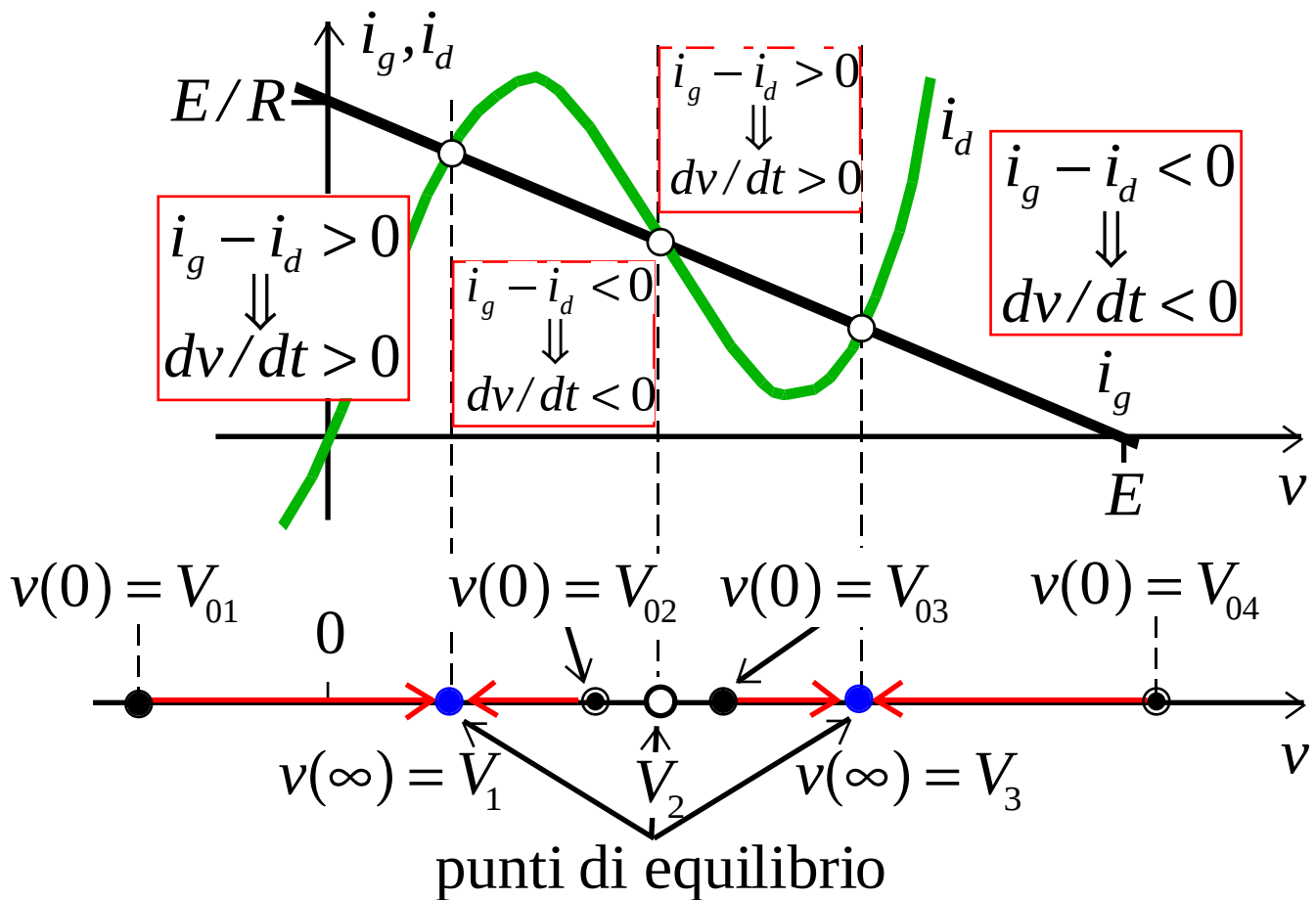
$$i_g = \frac{E - v}{R}, i_d = g(v)$$



$$C \frac{dv}{dt} = i_g(v) - i_d(v)$$



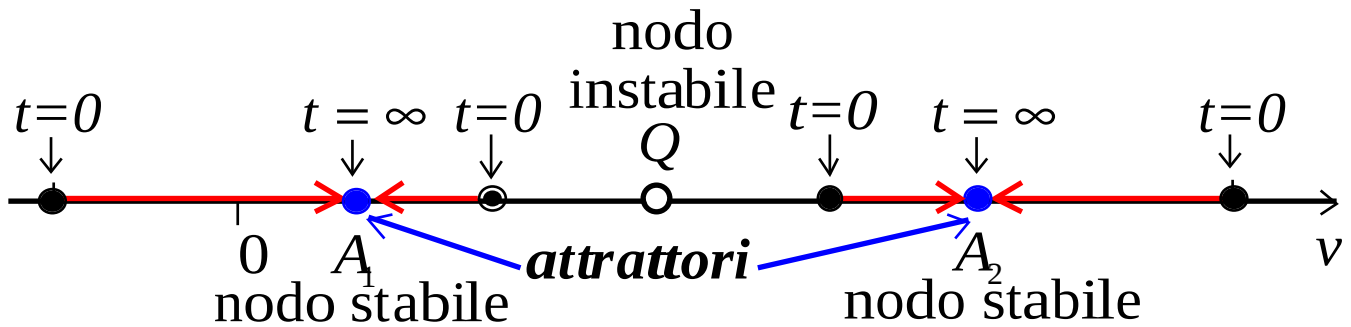
Costruiamo il ritratto di fase



I punti di equilibrio e, quindi, le soluzioni stazionarie, sono tre:

- i punti di equilibrio $v = V_1$ e $v = V_3$ sono asintoticamente stabili: **“nodi” stabili**;
- il punto di equilibrio $v = V_2$ è instabile, secondo Lyapunov: **“nodo” instabile**.

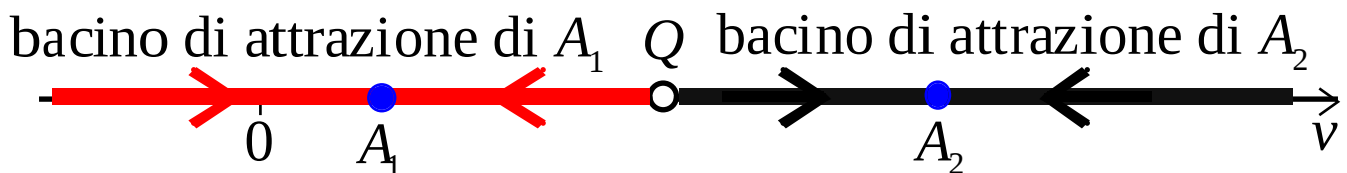
Ritratto di fase



Il ritratto di fase ha due attrattori: i punti A_1 e A_2 . Il punto di equilibrio Q non è un attrattore.

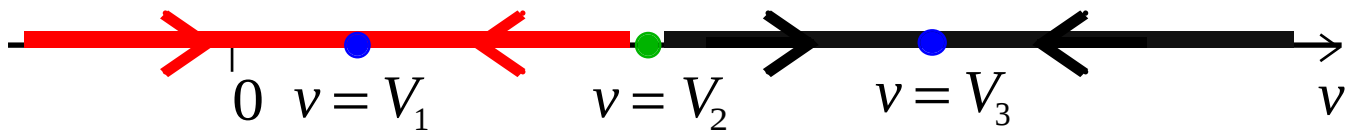
I bacini di attrazione

Il **bacino di attrazione** di un attrattore A è l'insieme delle condizioni iniziali dalle quali partono tutte le traiettorie che convergono, asintoticamente, verso il punto di equilibrio A .



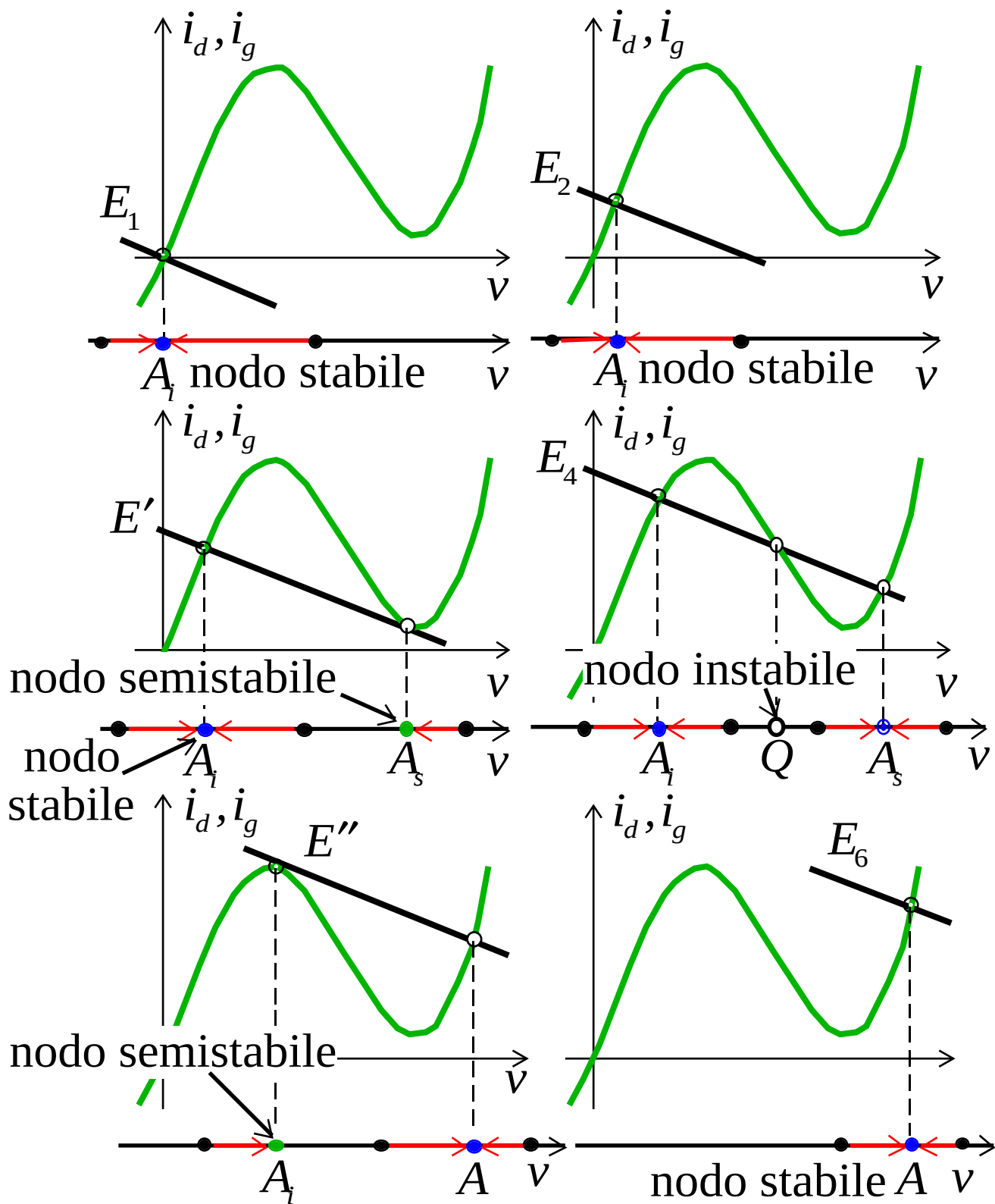
Il punto di equilibrio instabile Q è il punto di separazione tra i bacini di attrazione degli attrattori A_1 e A_2 .

Ritratto di fase



- Le soluzioni stazionarie $v = V_1$ e $v = V_3$ sono asintoticamente stabili;
- La soluzione stazionaria $v = V_2$ è instabile (secondo Lyapunov);
- In questo caso il circuito ha due regimi stazionari $v = V_1$ e $v = V_3$;
- A quale dei due regimi la soluzione del circuito tende dipende solo dalle condizioni iniziali;
- L'insieme delle condizioni iniziali $v(0) < V_2$ è il bacino di attrazione del regime stazionario $v = V_1$ e l'insieme delle condizioni iniziali $v(0) > V_2$ è il bacino di attrazione del regime stazionario $v = V_3$.

Il ritratto di di fase varia qualitativamente al variare dei parametri

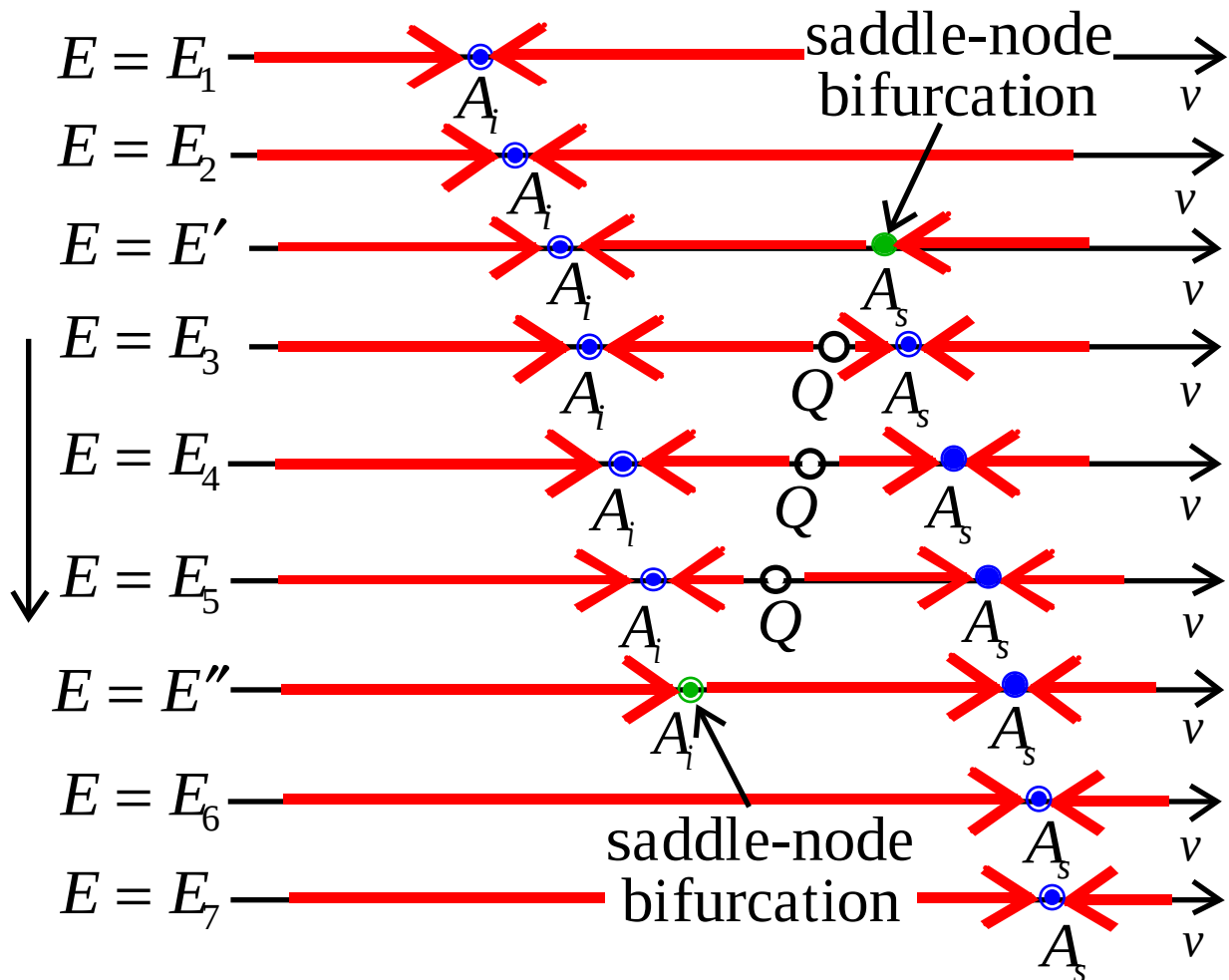


Questo circuito non è strutturalmente stabile

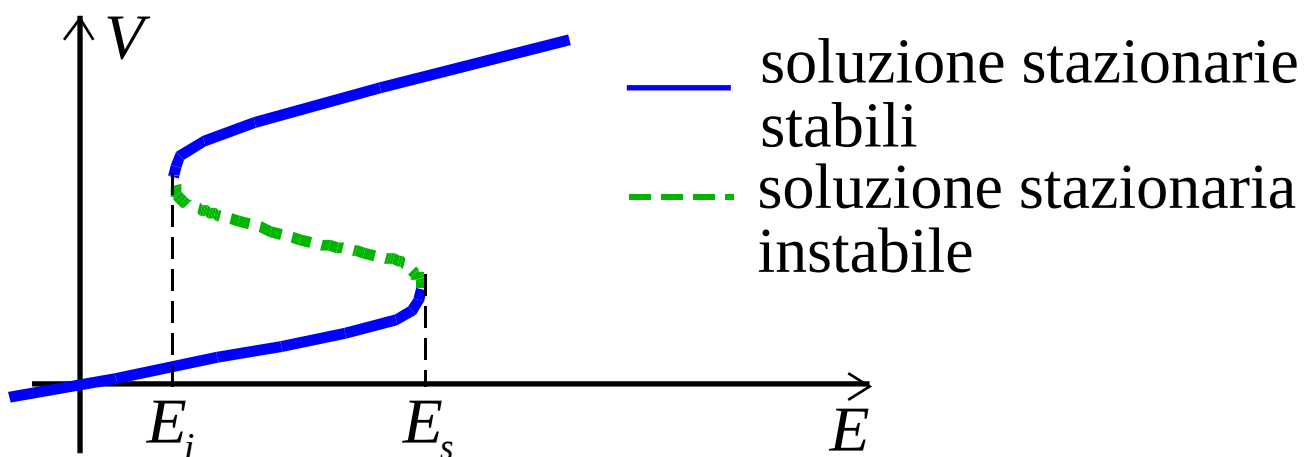
Biforcazioni

- Il **comportamento qualitativo delle soluzioni** cambia al variare dei parametri; in particolare, cambia qualitativamente il ritratto di fase del circuito.
- Questi cambiamenti prendono il nome di **biforcazioni**.
- I valori dei parametri in corrispondenza dei quali essi si verificano prendono il nome di **valori di biforcazione**.

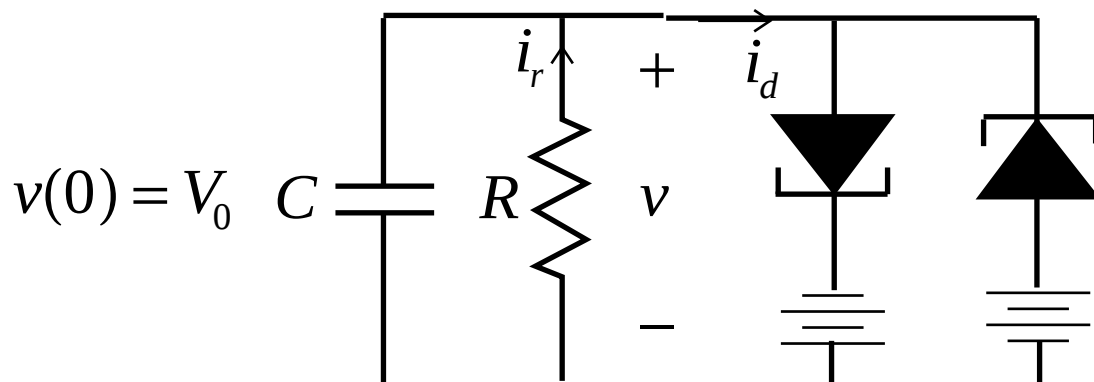
“Saddle-node bifurcation”



Biforcazione a “ripiegamento” (folding bifurcation)

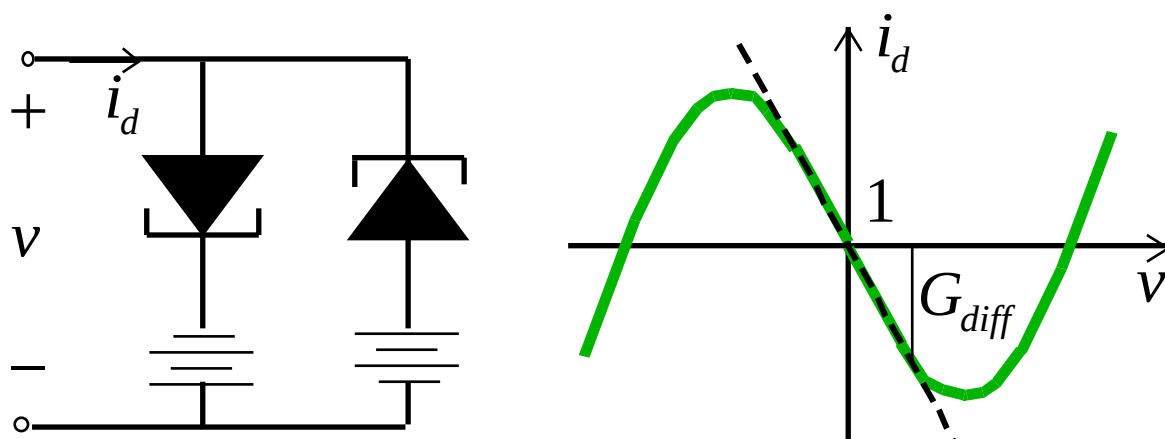


Un altro esempio di biforcazione

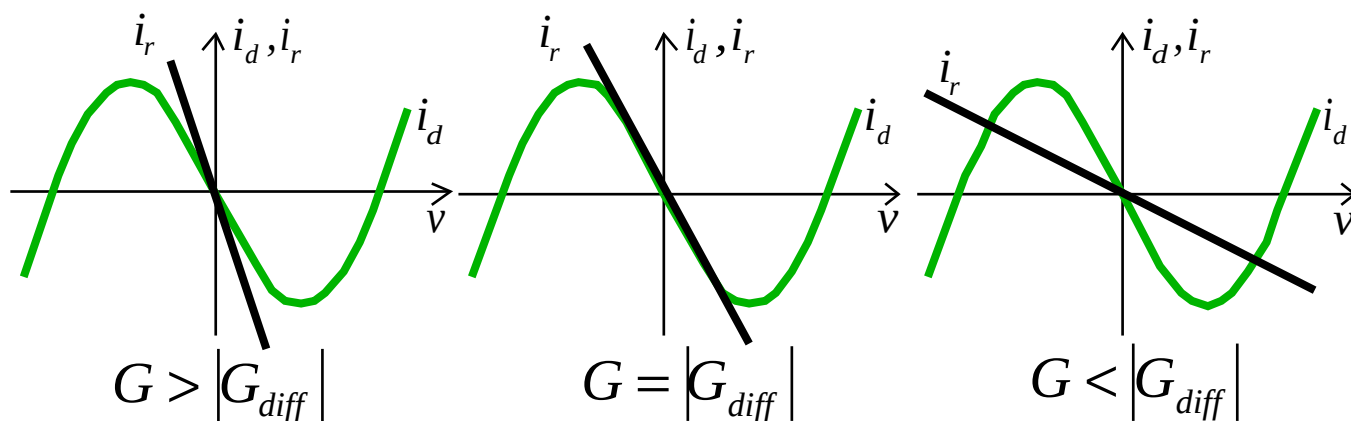


$$C \frac{dv}{dt} = i_r(v) - i_d(v)$$

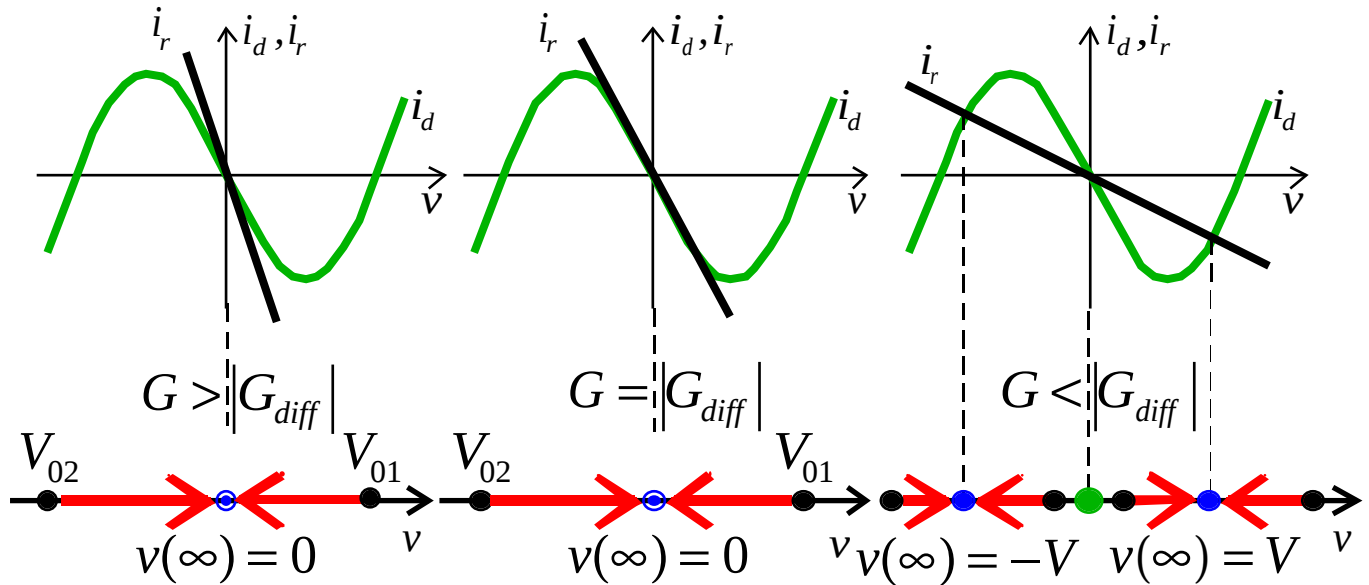
$$i_r(v) = -v/R, \quad i_d(v) = g(v)$$



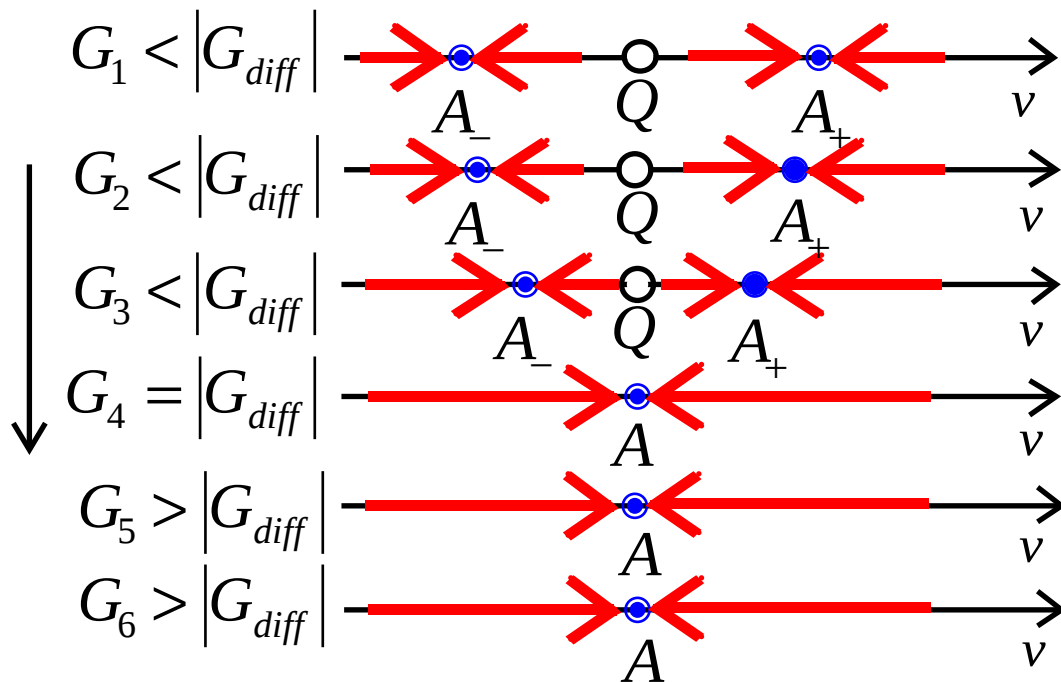
$$G = 1/R, \quad G_{diff} = dg/dv|_{v=0}$$



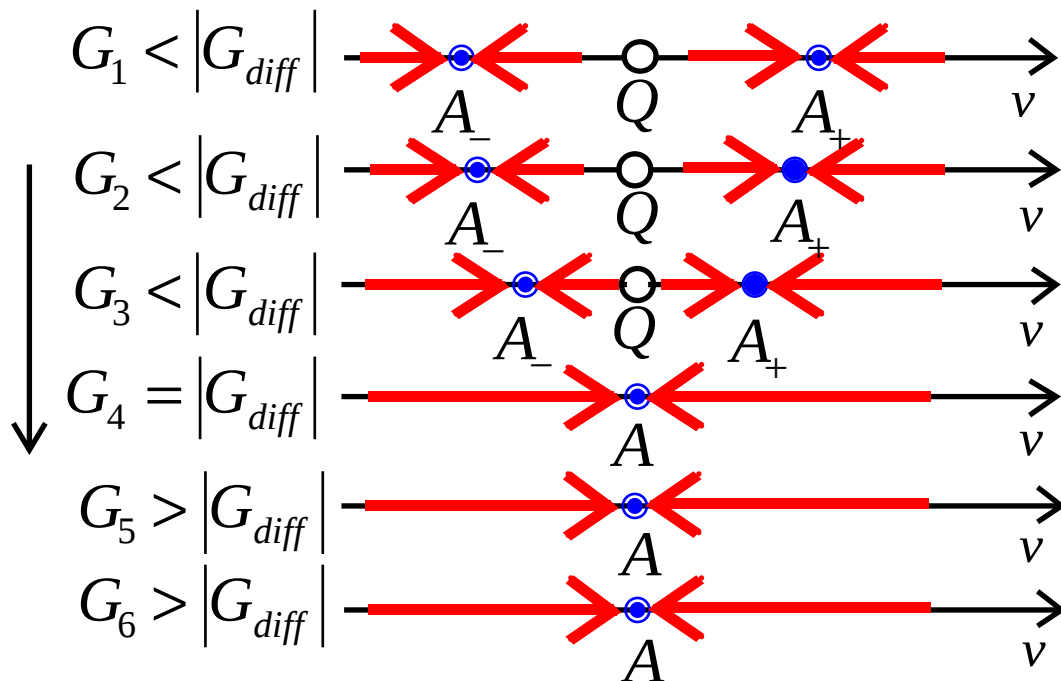
Al variare di G cambia il ritratto di fase



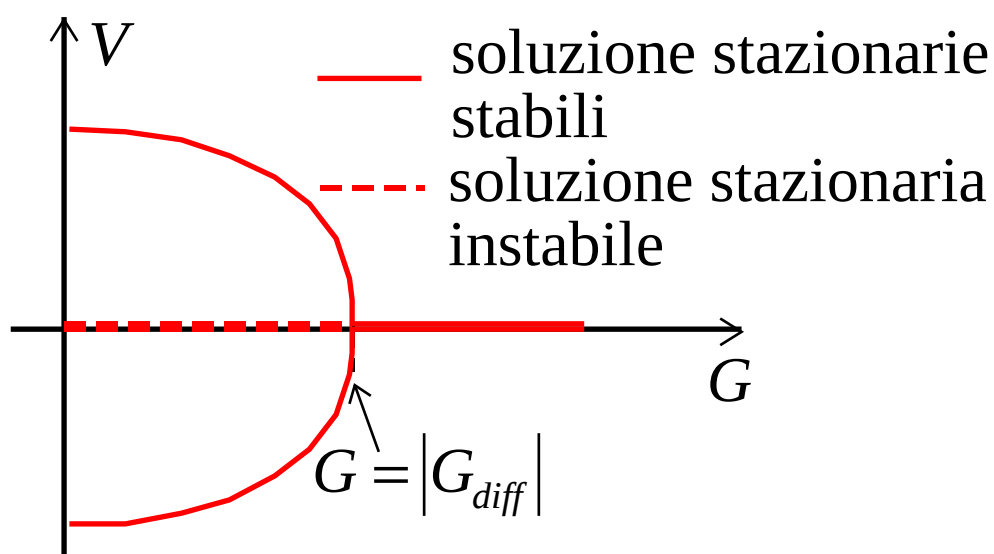
“Saddle-node bifurcation”



“Saddle-node bifurcation”



Biforcazione a “forcone” (pitchfork bifurcation)



Quando le curve caratteristiche dei resistori sono non monotone il circuito non è strutturalmente stabile. Esso può avere:

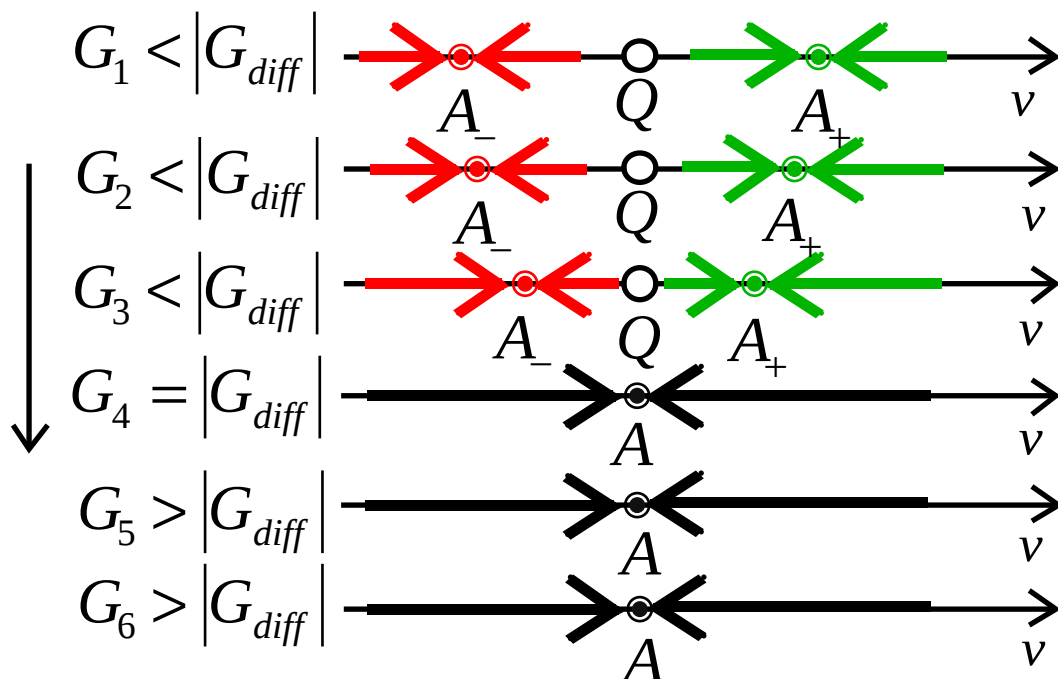
- **soluzioni instabili, secondo Lypunov;**
- **più regimi permanenti;**
- **biforcazioni.**

Le soluzioni di regime di un circuito autonomo del primo ordine sono solo di tipo stazionario.

Un circuito del **primo ordine** può avere più di un regime permanente se contiene resistori con curve caratteristiche non monotone, e/o amplificatori operazionali, generatori controllati, A quale **regime** il circuito tende dipende solo dalle condizioni iniziali.

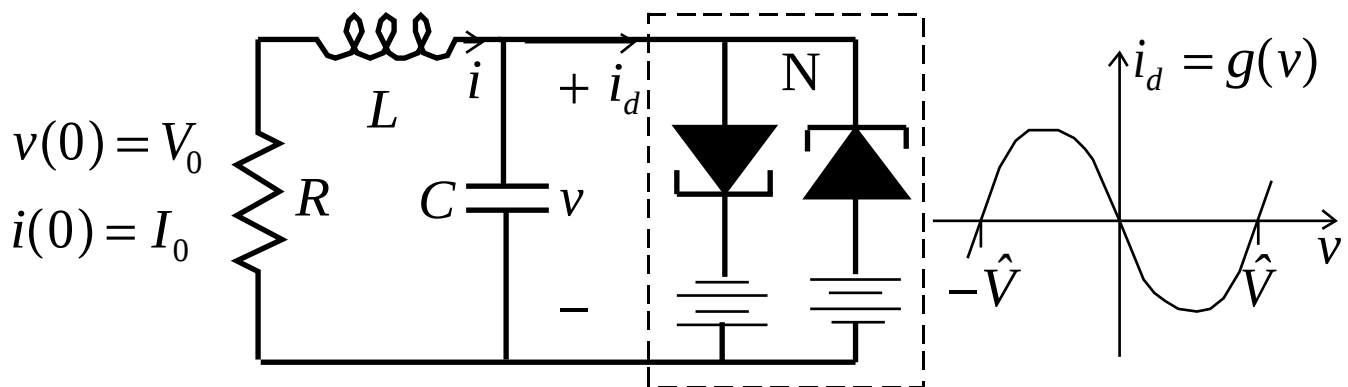
Biforcazioni

Il regime permanente può cambiare **qualitativamente** al variare dei parametri del circuito.



Cosa accade al crescere della dimensione dello spazio di stato ?

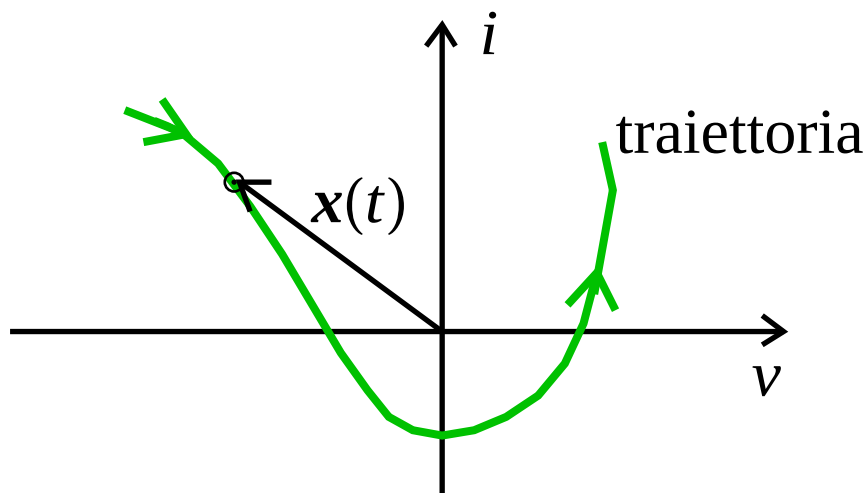
Circuito autonomo del secondo ordine



Le equazioni di stato del circuito sono:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -\frac{i}{G} - v \\ C \frac{dv}{dt} = i - g(v) \end{cases}$$

Analizziamo il comportamento delle soluzioni nello spazio di stato del circuito



Stabilità secondo Lagrange

Energia immagazzinata nel circuito:

$$W = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cv^2.$$

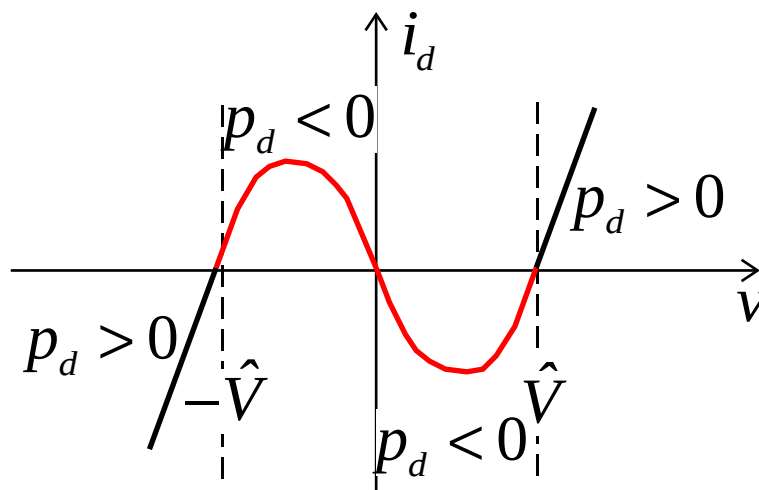
Potenza assorbita dagli elementi dinamici:

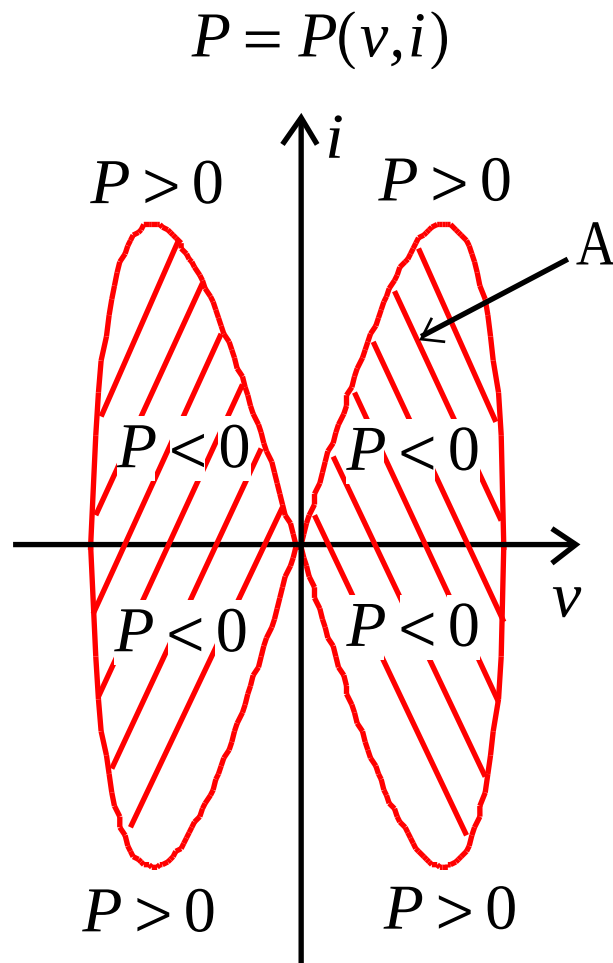
$$P = p_R + p_d = Ri^2 + i_d v.$$

Dalla conservazione delle potenze si ha:

$$\frac{dW}{dt} = -P.$$

$R > 0$ e il bipolo N è **asintoticamente passivo**



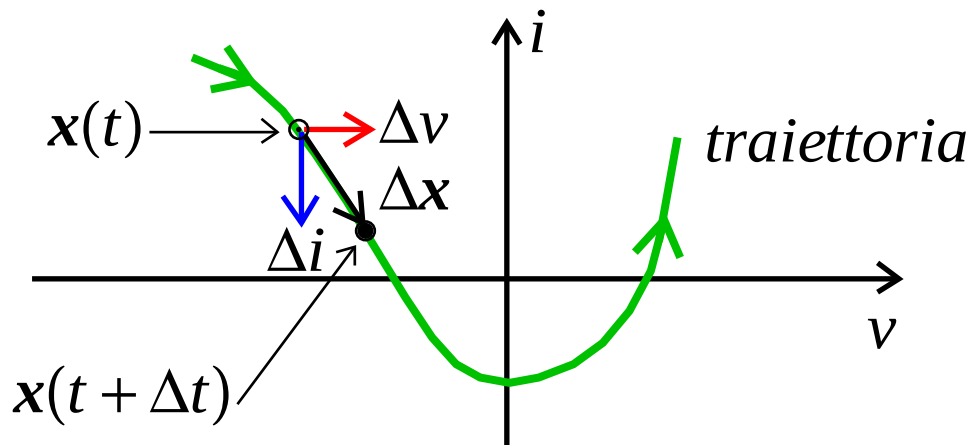


$$\frac{dW}{dt} = -P(v, i)$$

All'esterno della regione A la derivata dell'energia immagazzinata è minore di zero. Di conseguenza, le grandezze di stato del circuito sono limitate per ogni istante di tempo,

$$|\mathbf{x}(t)| \leq M .$$

Spazio di stato

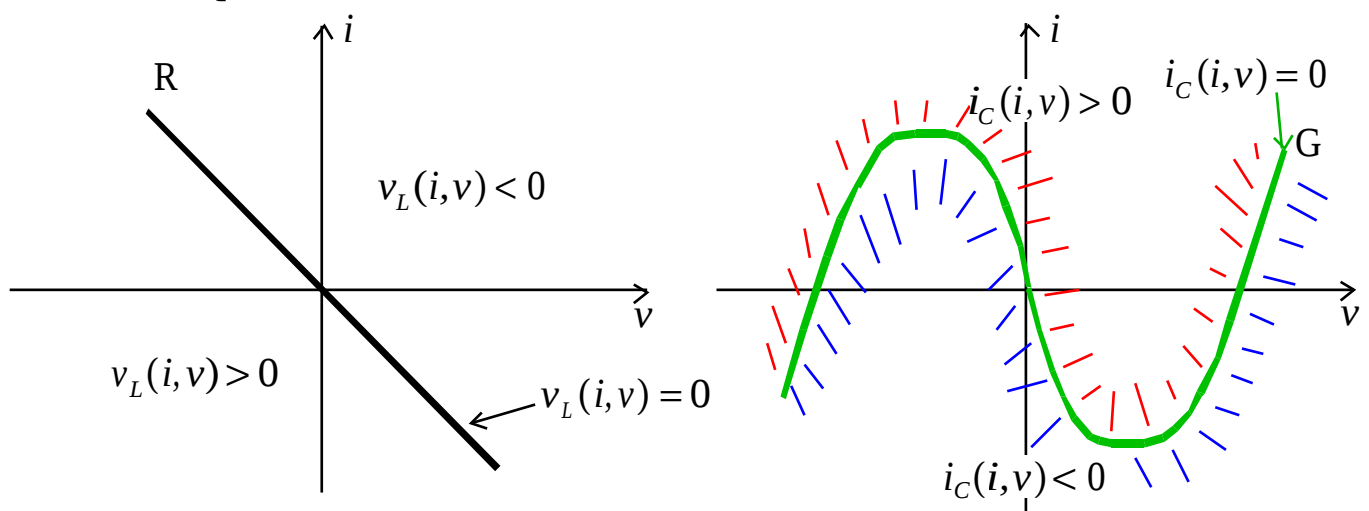


Per un Δt sufficientemente piccolo si ha

$$\Delta v \cong \frac{dv}{dt} \Delta t, \quad \Delta i \cong \frac{di}{dt} \Delta t.$$

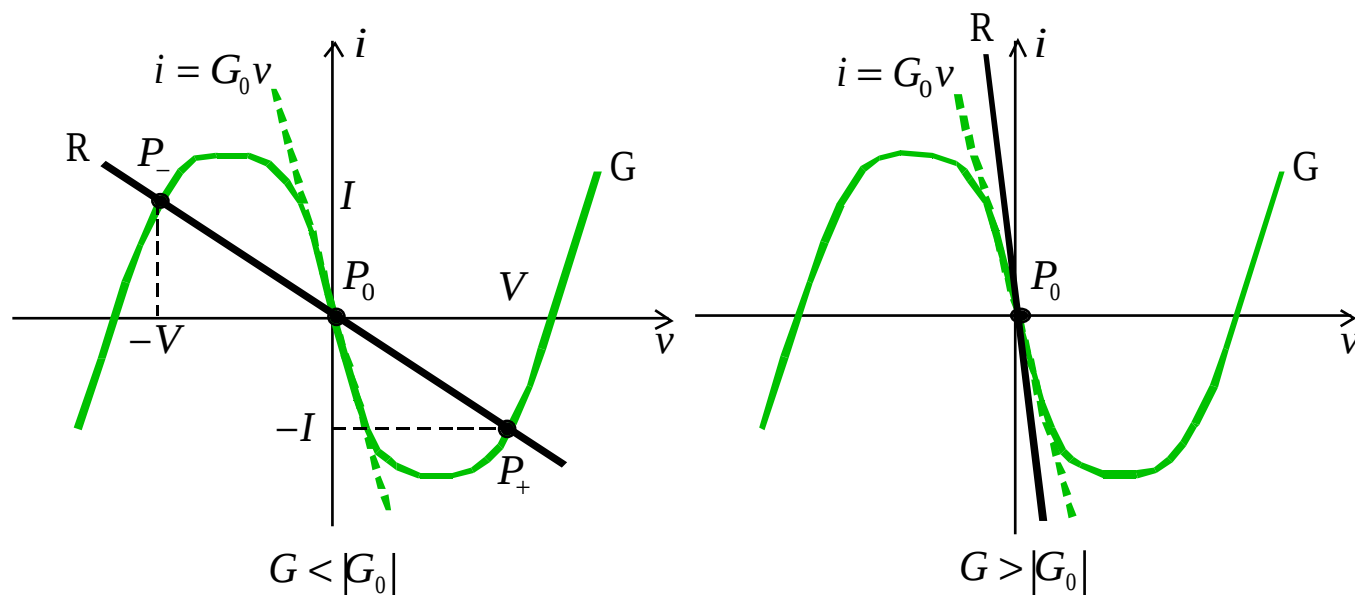
Equazioni di stato

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = v_L(i, v) \\ C \frac{dv}{dt} = i_C(i, v) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} v_L(i, v) &\equiv -\frac{i}{G} - v \\ i_C(i, v) &\equiv i - g(v) \end{aligned}$$



$$G_0 \equiv dg/dv|_{v=0}$$

Due situazioni notevoli

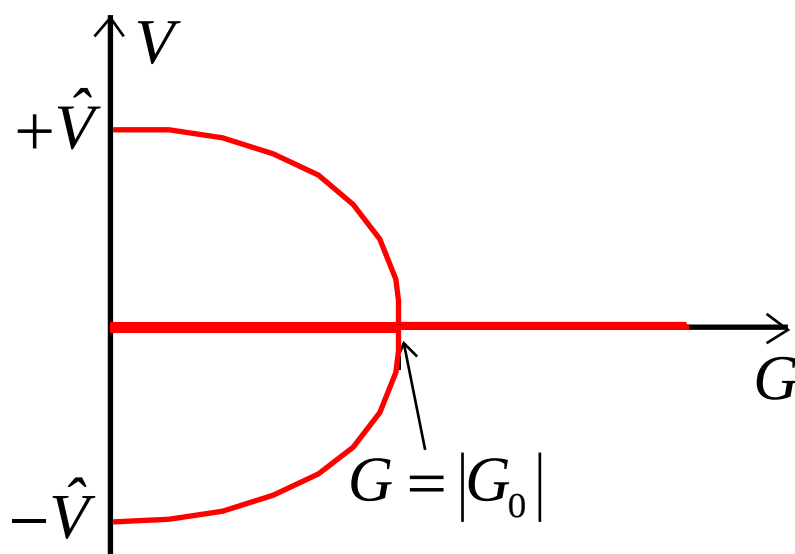


$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{P_-} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{P_+} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{P_0} = 0$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{P_0} = 0$$

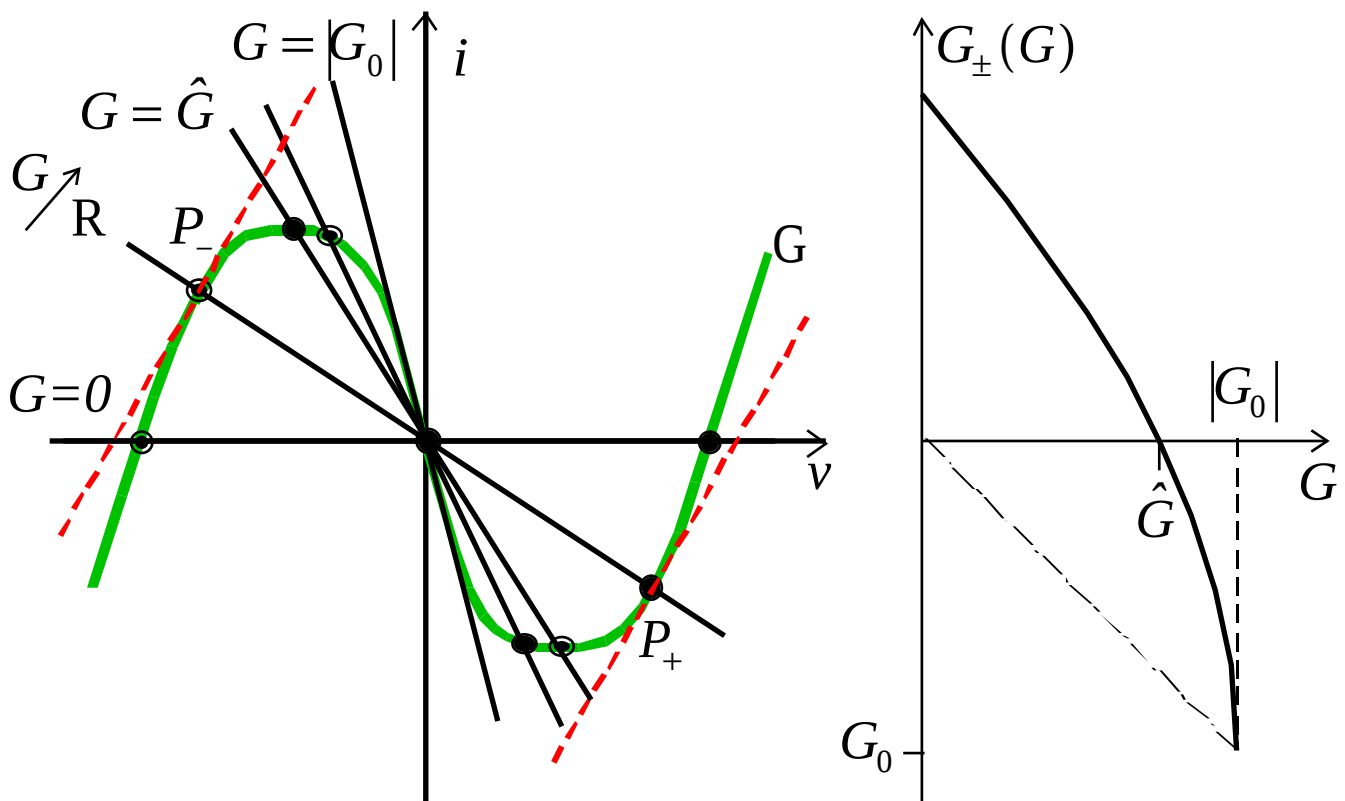
Tre soluzioni stazionarie

Una soluzione



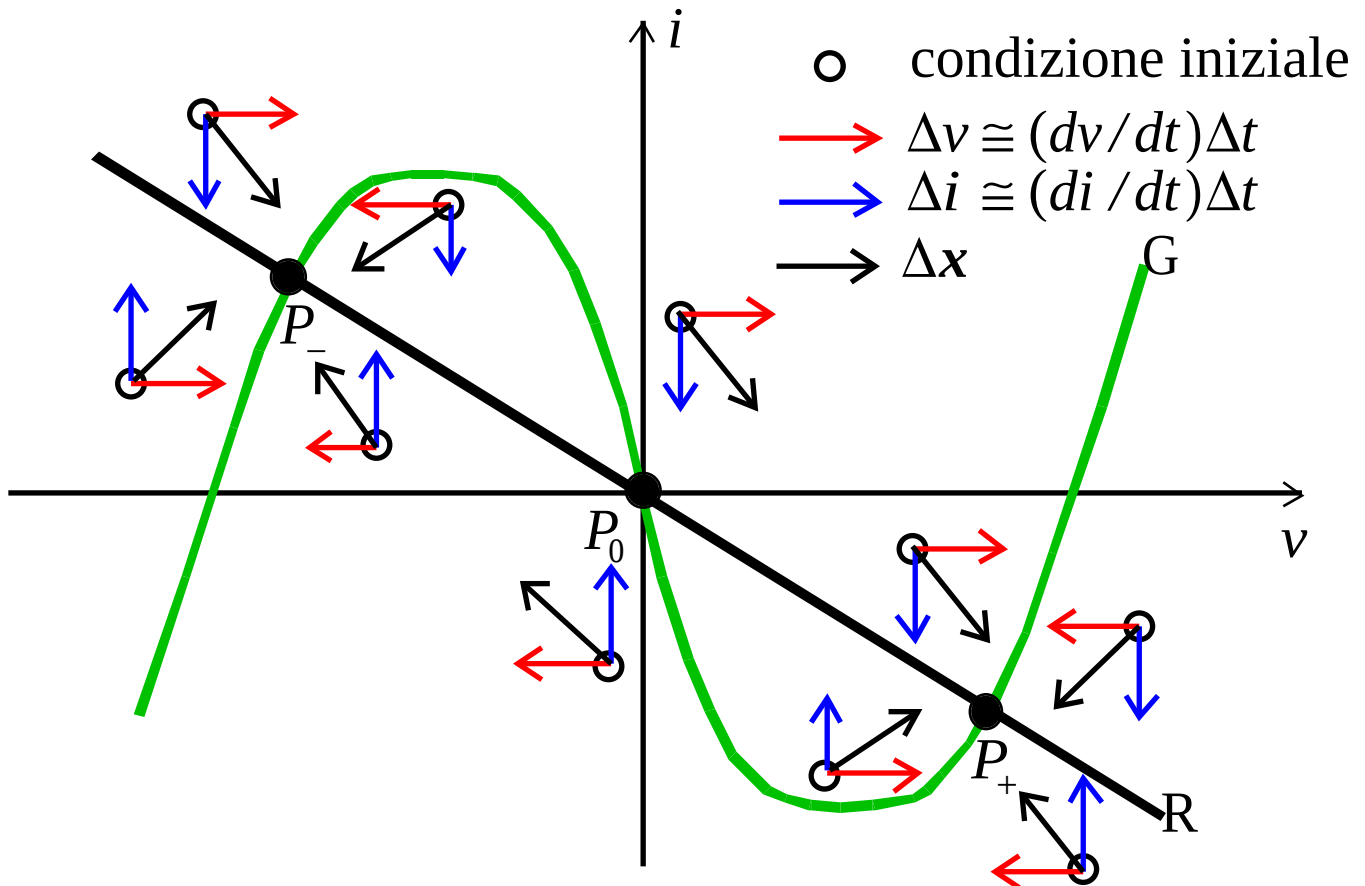
Consideriamo la pendenza della curva G in corrispondenza dei punti di equilibrio P_+ e P_-

$$G_{\pm} \equiv dg/dv|_{P_{\pm}}$$



- Per $0 < G \leq \hat{G}$ si ha $G_{\pm} \geq 0$.
- Per $\hat{G} < G \leq |G_0|$ si ha $G_{\pm} < 0$ con $|G_{\pm}| \leq G$.

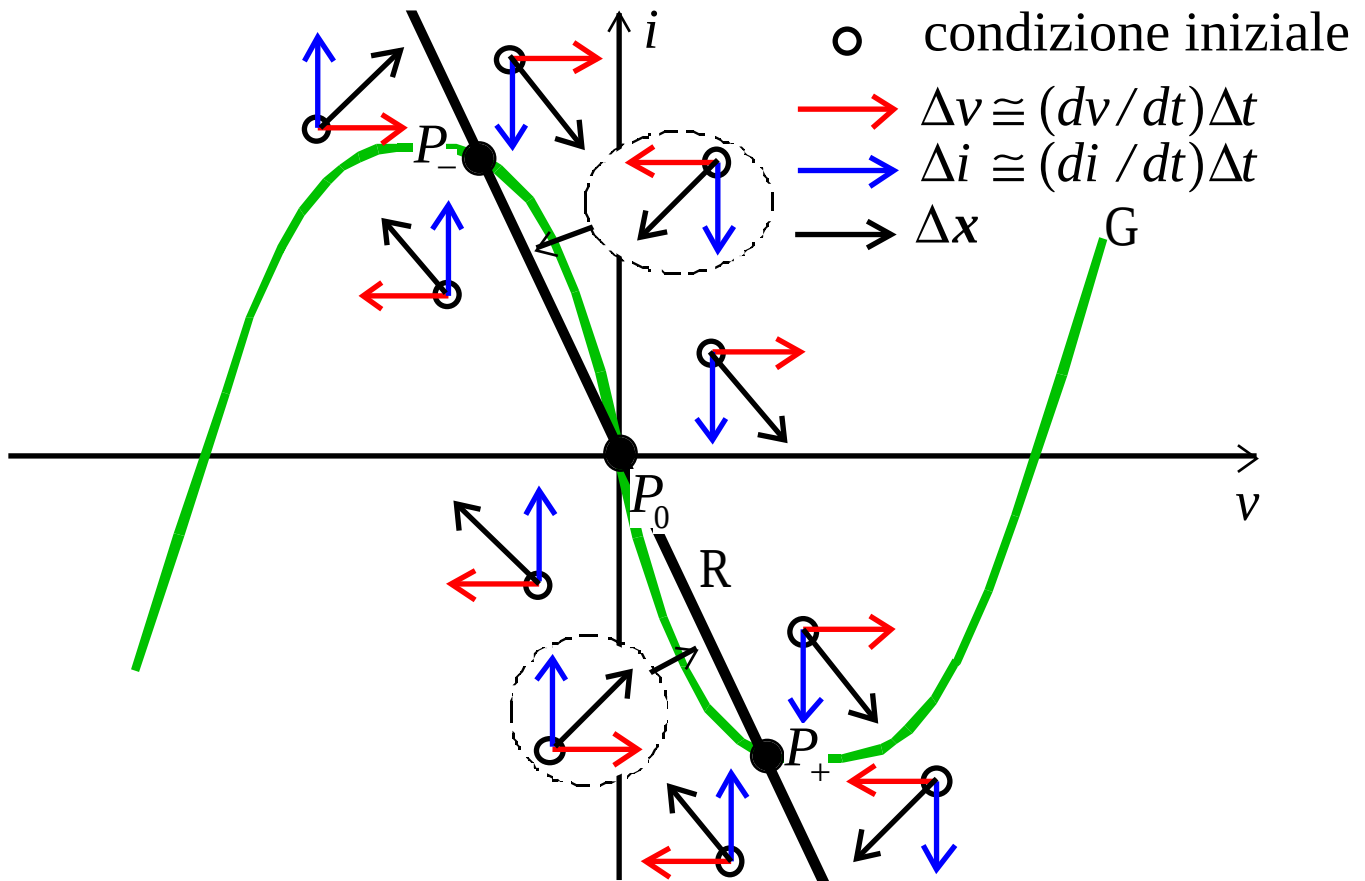
Consideriamo le situazioni nelle quali $G < |G_0|$ e $G_{\pm} > 0$



Esistono tre punti di equilibrio, $P_+ \equiv (V, -I)$, $P_0 \equiv (0, 0)$ e $P_- \equiv (-V, I)$:

- i punti di equilibrio P_+ e P_- sono **attrattori**; le soluzioni **stazionarie** $v = V, i = -I$ e $v = -V, i = I$ sono asintoticamente stabili.
- P_0 è un punto di equilibrio instabile a “**sella**”; la soluzione **stazionaria** $v = 0, i = 0$ è **instabile**, secondo Lyapunov.

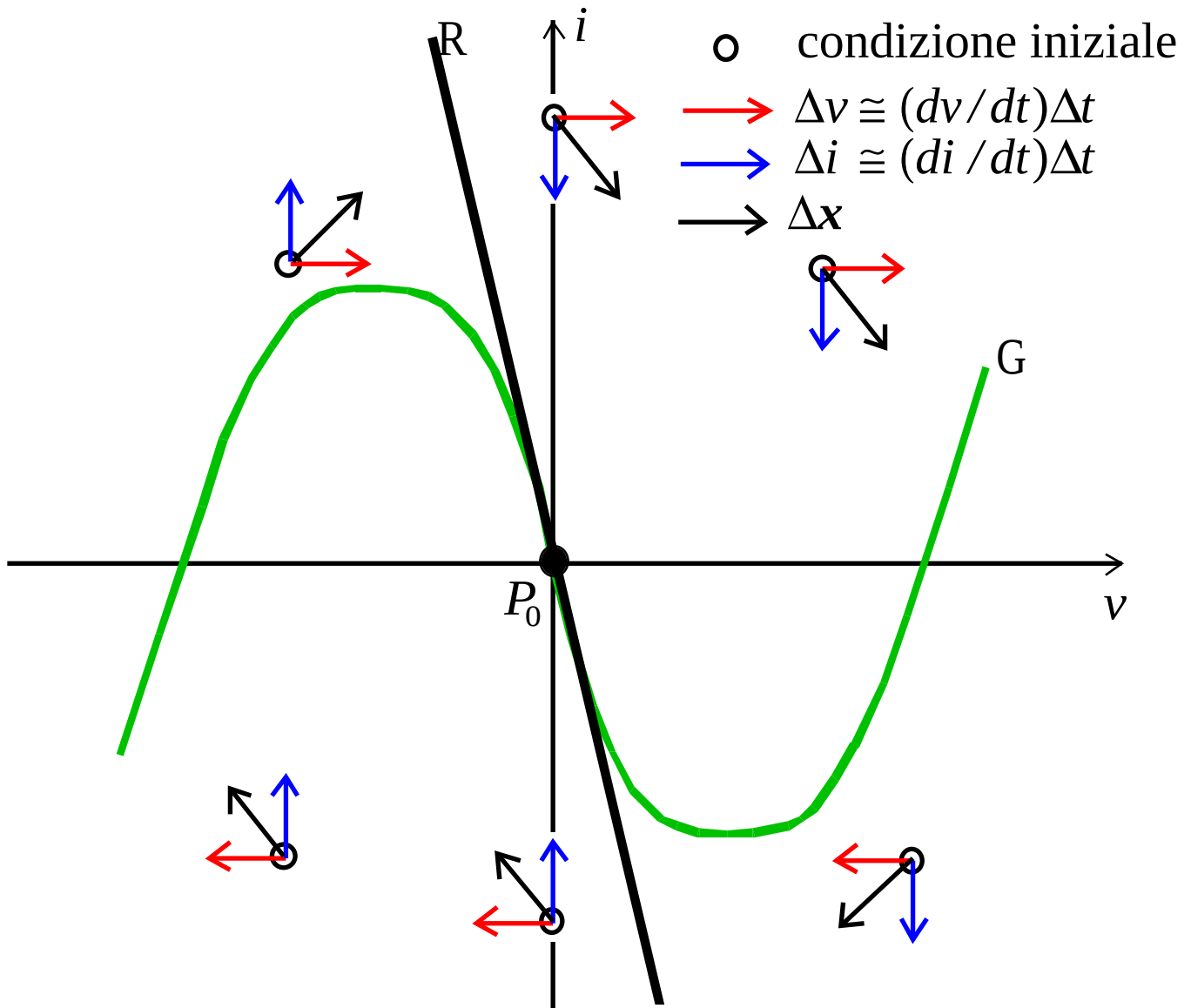
Consideriamo le situazioni nelle quali $G < |G_0|$ e $G_{\pm} < 0$



Esistono tre punti di equilibrio, $P_+ \equiv (V, -I)$, $P_0 \equiv (0, 0)$ e $P_- \equiv (-V, I)$:

- P_0 è un punto di equilibrio instabile a “**sella**”; la soluzione **stazionaria** $v = 0, i = 0$ è **instabile**, secondo Lyapunov.
- I due punti di equilibrio P_+ e P_- sono attrattori ? Bisogna studiarne la stabilità attraverso altri metodi.

Consideriamo, infine, le situazioni nelle quali
 $G > |G_0|$

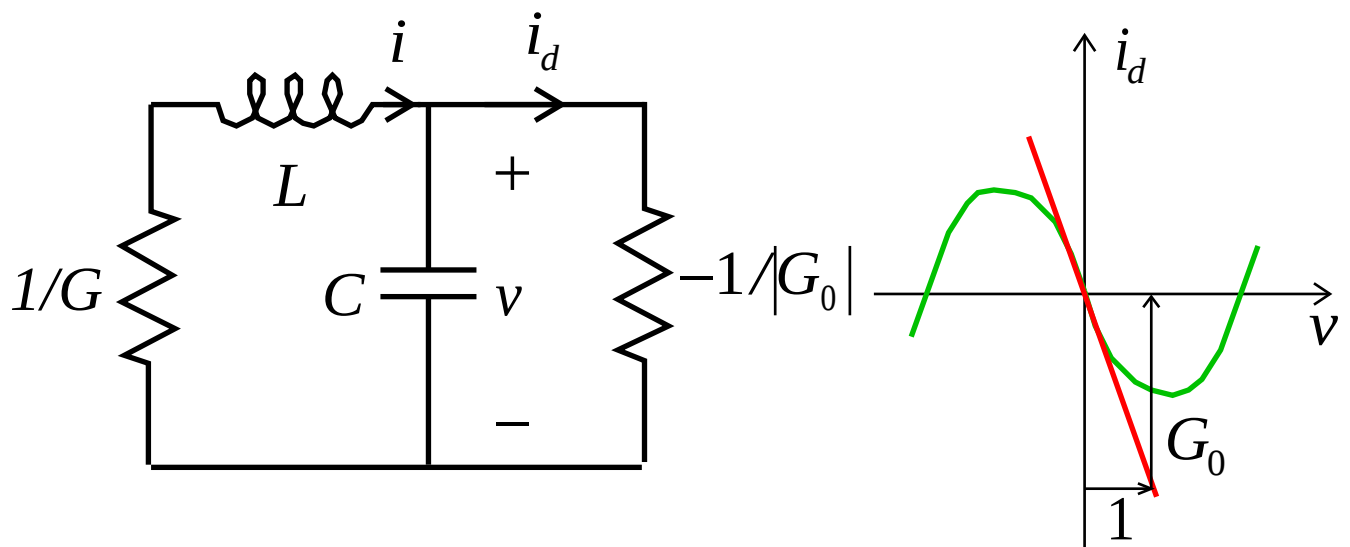


Esiste un solo punto di equilibrio, $P_0 \equiv (0,0)$:

- Il punto di equilibrio P_0 è un attrattore?
 Bisogna studiarne la stabilità attraverso altri metodi.

Studio della stabilità del punto di equilibrio P_0

Quando il punto di funzionamento del bipolo N si trova nell'intorno dell'origine ($v = 0, i_d = 0$), il comportamento del circuito può essere adeguatamente descritto attraverso il modello linearizzato



$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -\frac{i}{G} - v \\ C \frac{dv}{dt} = i + |G_0|v \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico associato è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{1}{LG} - \frac{|G_0|}{C} \right) \lambda + \frac{1 - |G_0|/G}{LC}$$

$$G^* \equiv \sqrt{C/L}, \quad G_c \equiv G^{*2} / |G_0|$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \underbrace{\frac{|G_0|}{GC} (G_c - G)}_{\alpha} \lambda + \underbrace{\frac{1 - |G_0|/G}{LC}}_{\beta}$$

- $0 < G < |G_0| \Rightarrow \beta < 0$: le frequenze naturali sono reali.

1	α	β
+	+	-
+	-	-

$$\begin{aligned} G < G_c &\Rightarrow \lambda_- < 0, \lambda_+ > 0 \\ G > G_c &\Rightarrow \lambda_- < 0, \lambda_+ > 0 \end{aligned}$$

- $G = |G_0| \Rightarrow \beta = 0$

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{|G_0|}{GC} (G - G_c)$$

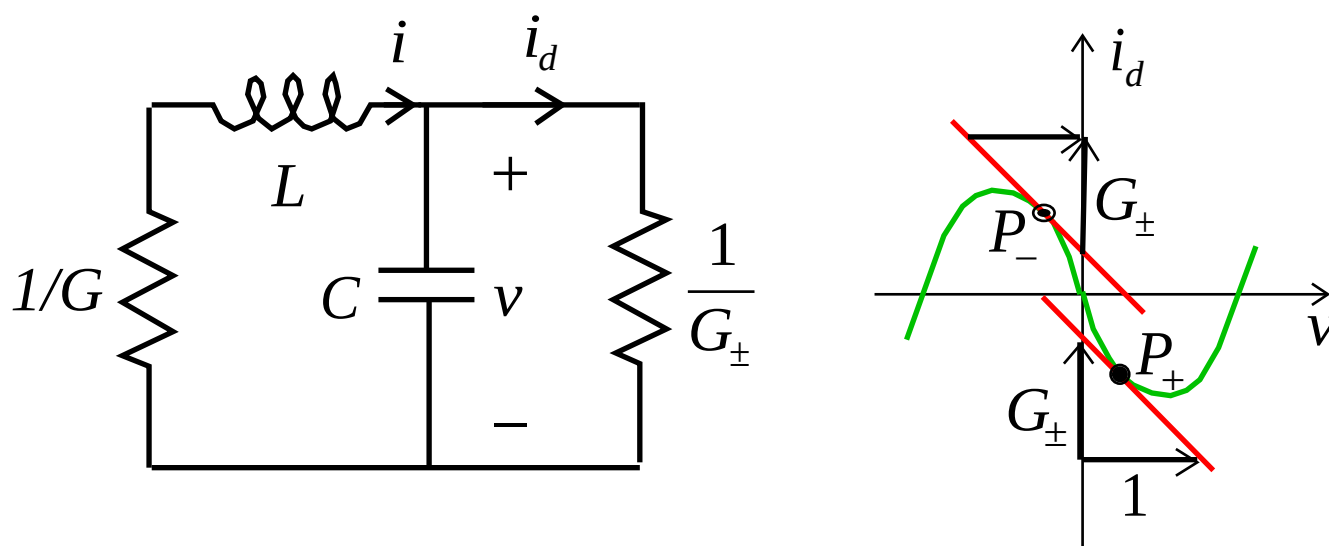
- $G > |G_0| \Rightarrow \beta > 0$: le frequenze naturali sono, in generale, complesse coniugate.

1	α	β
+	+	+
+	-	+

$$\begin{aligned} G < G_c &\Rightarrow \operatorname{Re}\{\lambda\} < 0 \\ G > G_c &\Rightarrow \operatorname{Re}\{\lambda\} > 0 \end{aligned}$$

Studio della stabilità dei punti di equilibrio $P_{\pm}$

Quando il punto di funzionamento del bipolo N si trova nell'intorno del punto di equilibrio $P_+ \equiv (+V, -I)$ o $P_- \equiv (-V, I)$ il comportamento del circuito può essere adeguatamente descritto attraverso il modello linearizzato



Il polinomio caratteristico associato è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{1}{LG} + \frac{G_{\pm}}{C} \right) \lambda + \frac{1 + G_{\pm}/G}{LC}$$

Se $G_{\pm} > 0$ le due frequenze naturali hanno parte reale negativa e i punti di equilibrio P_+ e P_- sono **asintoticamente stabili.**

$$0 < G < \hat{G} \Rightarrow G_{\pm} > 0$$

$$\hat{G} < G \leq |G_0| \Rightarrow G_{\pm} < 0$$

$$|G_{\pm}| < G \leq G_0$$

$$G^* \equiv \sqrt{C/L}, \quad G_c \equiv G^{*2} / |G_0|, \quad G_{c\pm} \equiv |G_0| G_c / |G_{\pm}| \geq G_c$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \underbrace{\frac{|G_{\pm}|}{GC} (G_{c\pm} - G)}_{\alpha} \lambda + \underbrace{\frac{1 - |G_{\pm}|/G}{LC}}_{\beta}$$

Essendo $|G_{\pm}| \leq G$ si ha che $\beta \geq 0$: le frequenze naturali sono, in generale, complesse coniugate.

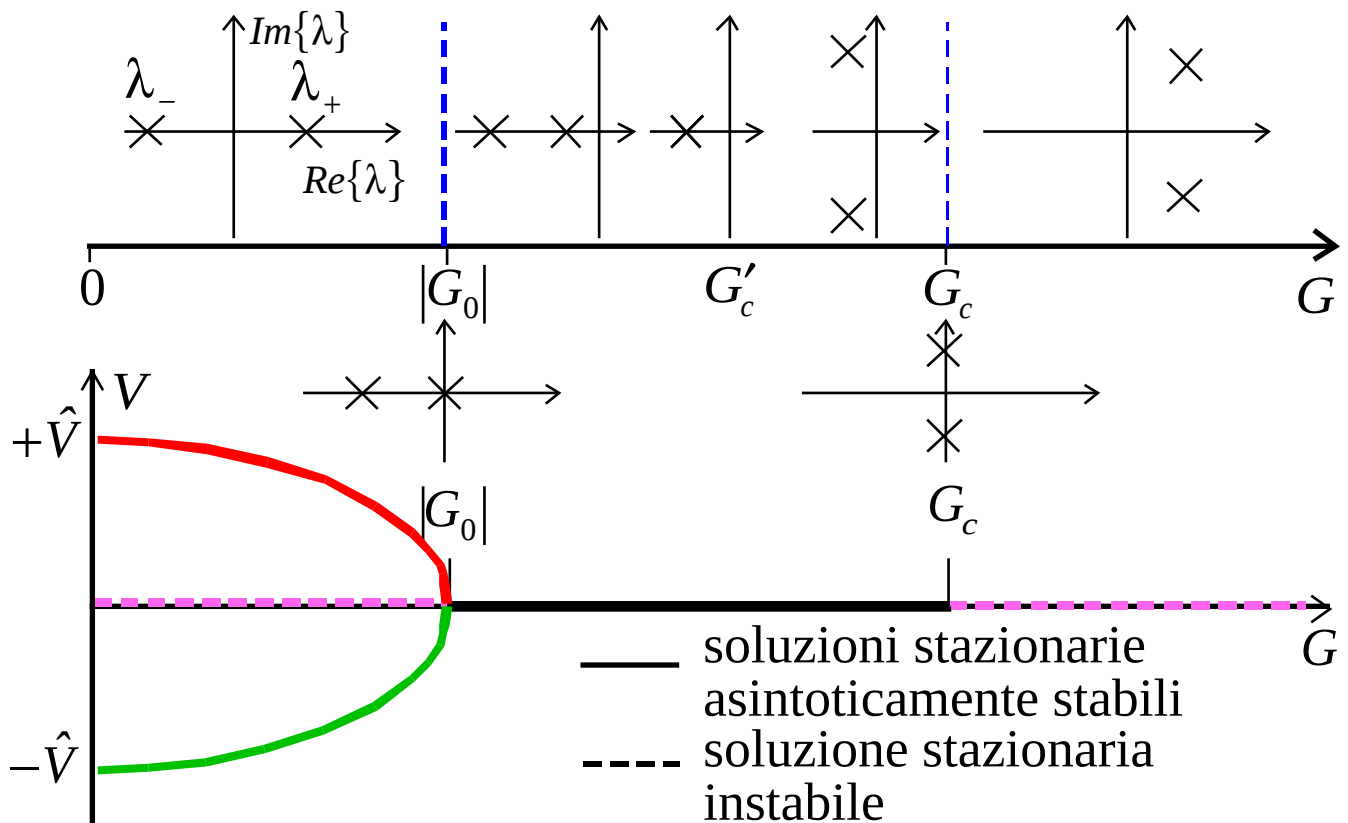
1	α	β	
+	+	+	$G < G_{c\pm} \Rightarrow \operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$
+	-	+	$G > G_{c\pm} \Rightarrow \operatorname{Re}\{\lambda\} > 0$

Per $G_c > |G_0|$ si ha sempre $G < G_c < |G_{c\pm}|$, di conseguenza i punti di equilibrio P_+ e P_- sono sempre **asintoticamente stabili.**

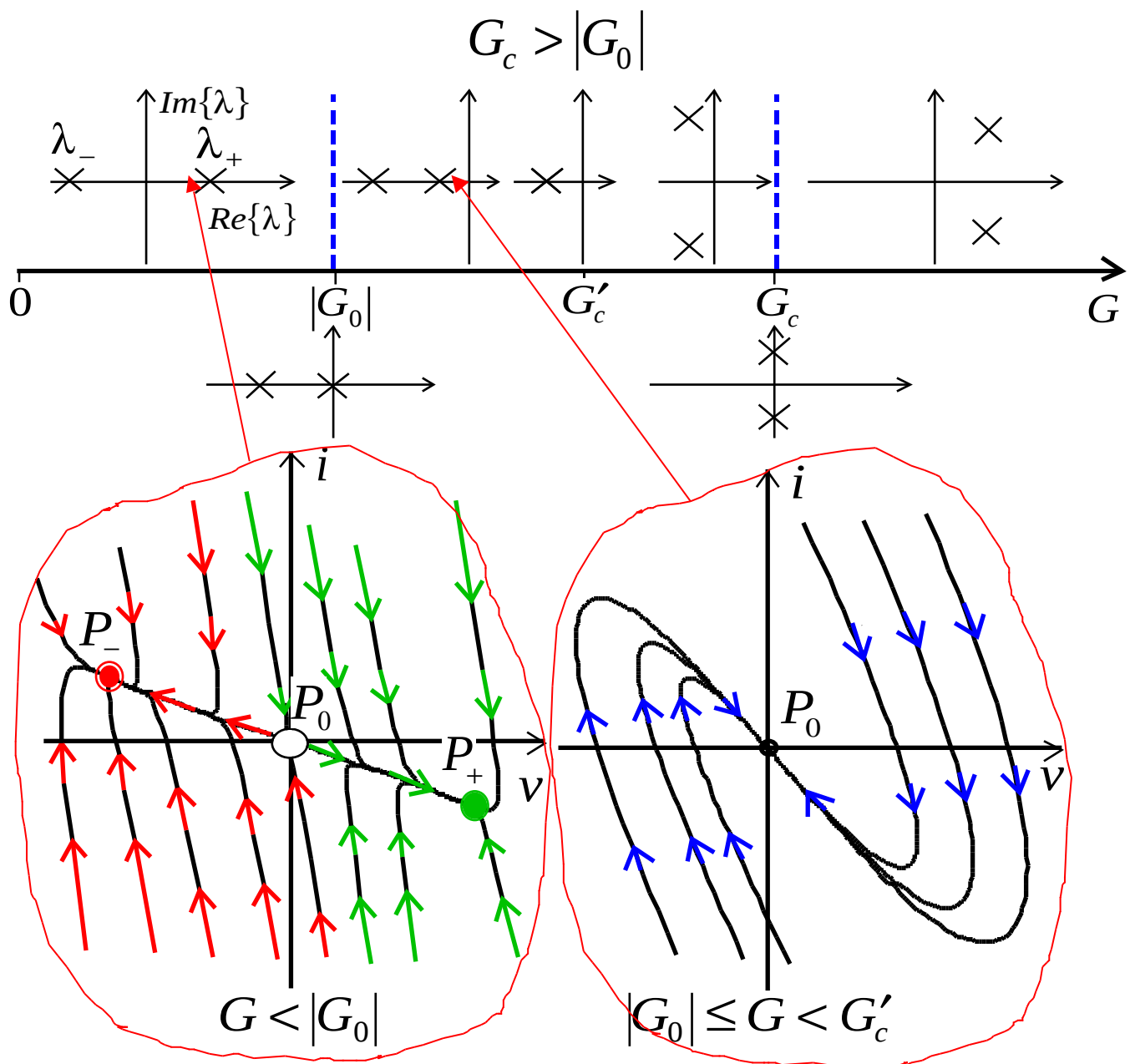
Per $G_c < |G_0|$ può accadere che $G > |G_{c\pm}|$. In queste situazioni i punti di equilibrio P_+ e P_- sono **instabili, secondo Lyapunov.**

Consideriamo le situazioni nelle quali $G_c > |G_0|$

- P_+ e P_- sono **asintoticamente stabili**;
- per il punto di equilibrio P_0 si ha:

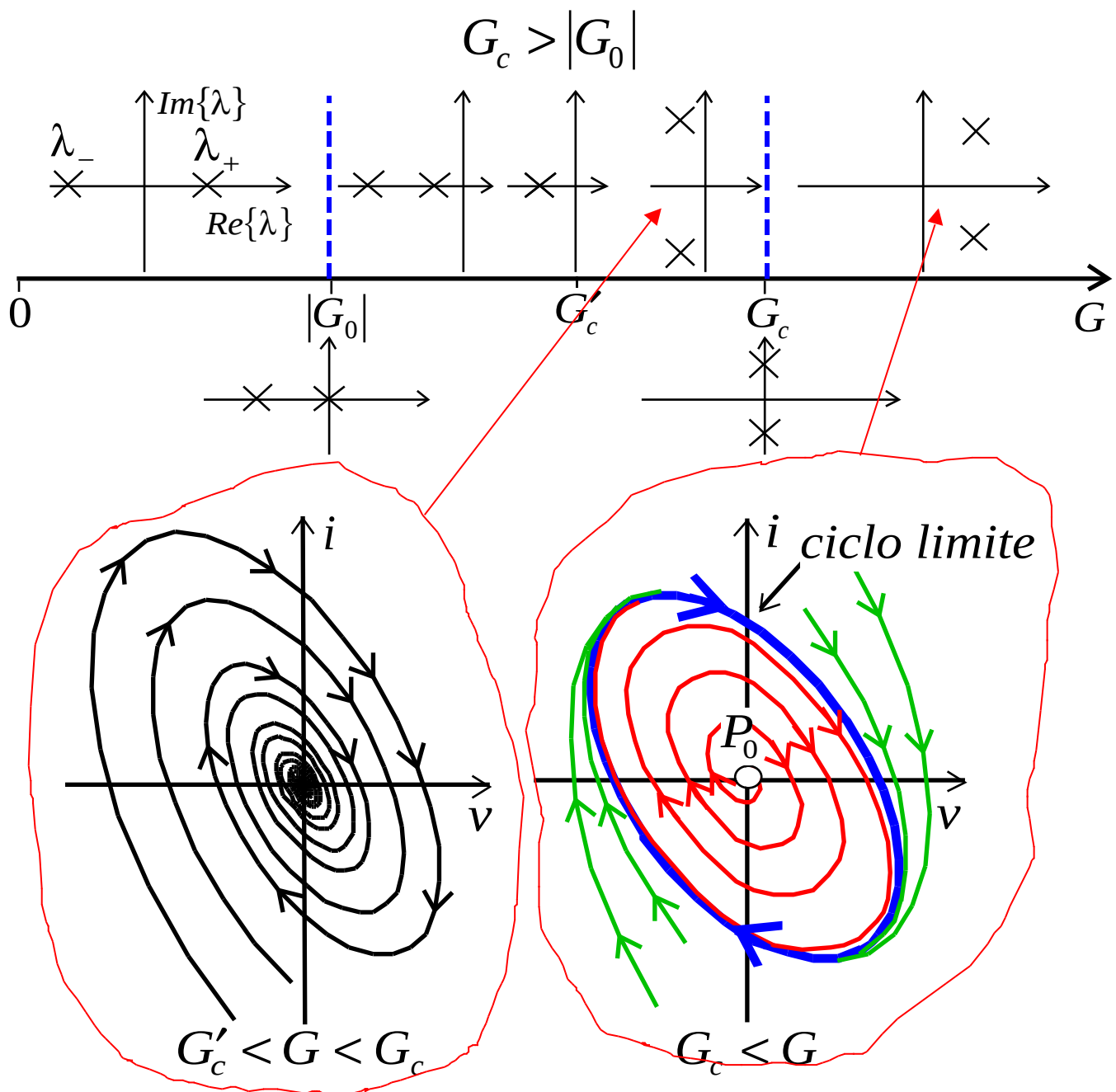


- Per $0 \leq G < |G_0|$ esistono **tre** soluzioni stazionarie: **due** sono **asintoticamente stabili** ed **una** è instabile;
- Per $|G_0| \leq G < G_c$ esiste **una sola** soluzione stazionaria ed è **asintoticamente stabile**;
- Per $G_c < G$ esiste **una sola** soluzione stazionaria ed è **instabile**.



- Per $G < |G_0|$ gli attrattori P_+ e P_- sono due **nodì stabili**; P_0 è un **punto a sella**.
- Per $|G_0| \leq G < G'_c$ l'attrattore P_0 è un **nodo stabile**.

Per $G = |G_0|$ si ha una “**saddle-node bifurcation**”.

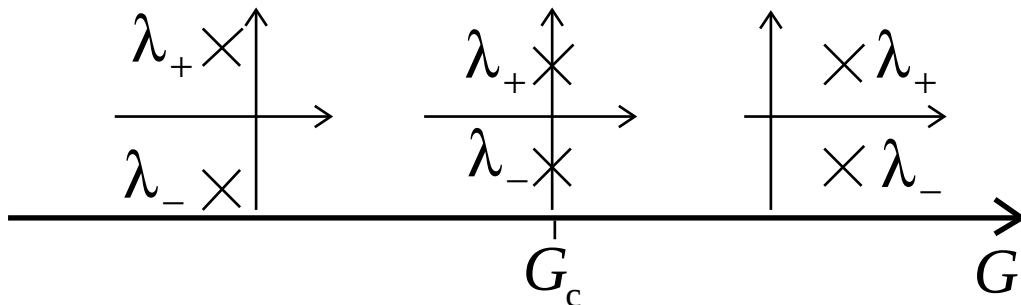


- Per $G'_c < G < G_c$ il punto P_0 è un “**fuoco**” **stabile**.
- Per $G_c < G$ P_0 è un “**fuoco**” **instabile** e le traiettorie tendono asintoticamente al **ciclo limite**.

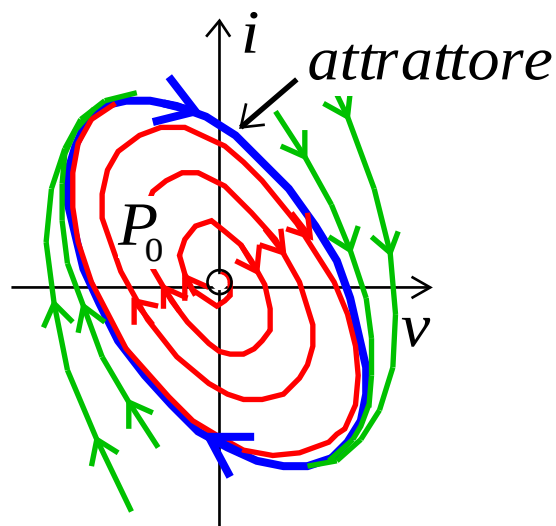
Per $G = |G_0|$ si ha una “**biforcazione di Hopf**”.

Biforcazione di Hopf

Per $|G_0| < G < G_c$ l'unico punto di equilibrio del circuito, P_0 , è un **fuoco stabile**: esso è l'attrattore di tutte le soluzioni del circuito.

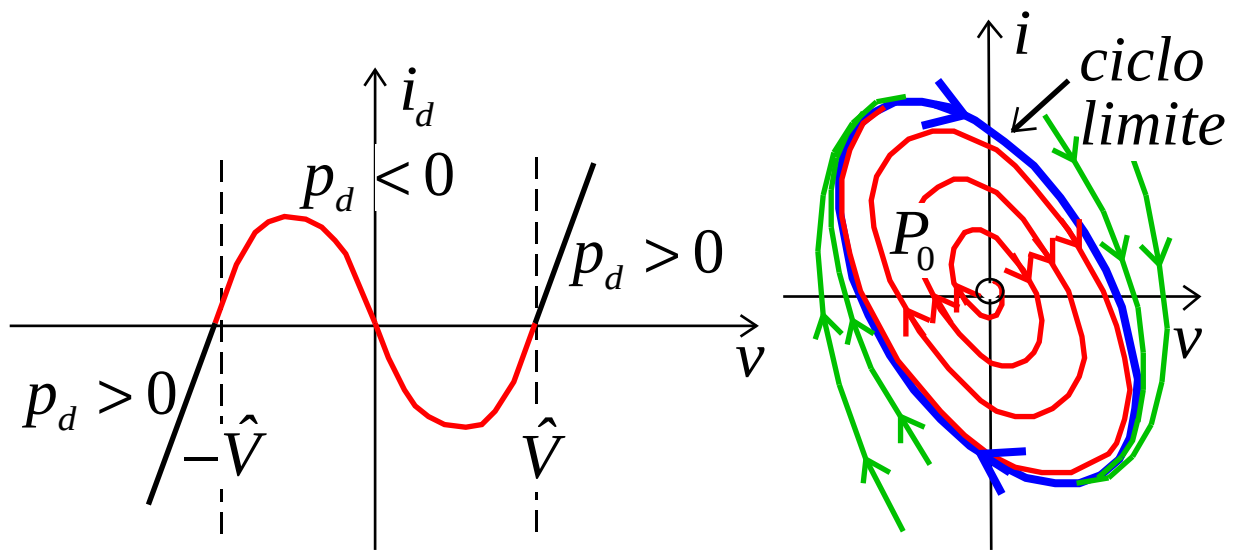


A $G = G_c$ le frequenze naturali del modello linearizzato, nell'intorno di P_0 , attraversano l'asse immaginario e cambia bruscamente il tipo di regime del circuito: P_0 è un **centro**.



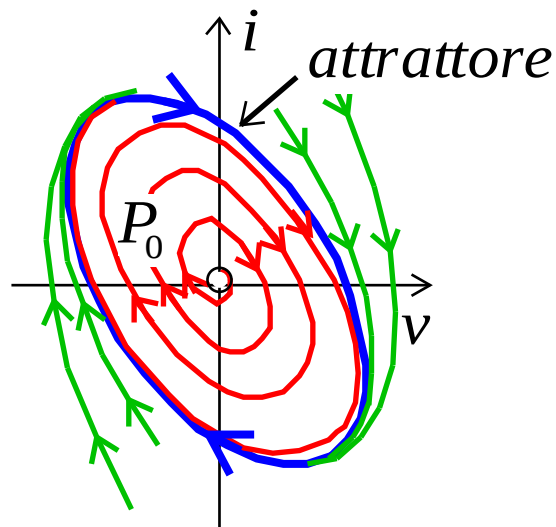
Per $G_c < G$ P_0 è un fuoco instabile. Il **ciclo limite** è l'attrattore di tutte le soluzioni del circuito.

Ciclo limite

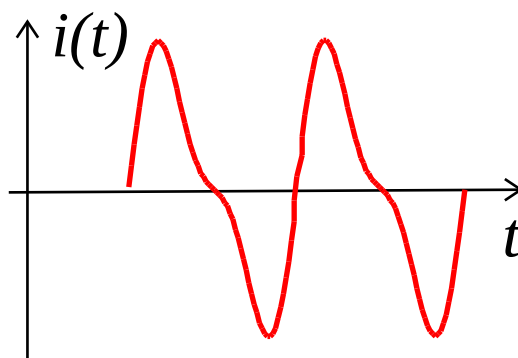


Il ciclo limite nasce dalla competizione di due meccanismi contrastanti:

- per $-\hat{V} < v < +\hat{V}$ il bipolo N fornisce potenza al condensatore e all'induttore, oltre che al resistore lineare, causando così l'espansione delle traiettorie e il loro movimento verso la regione dove lo stesso N è "passivo";
- per $v < -\hat{V}$ e $v > +\hat{V}$, oltre al resistore lineare, anche N assorbe potenza dal condensatore e dall'induttore, causando così la contrazione delle traiettorie e il loro ritorno nella regione dove N è "attivo".

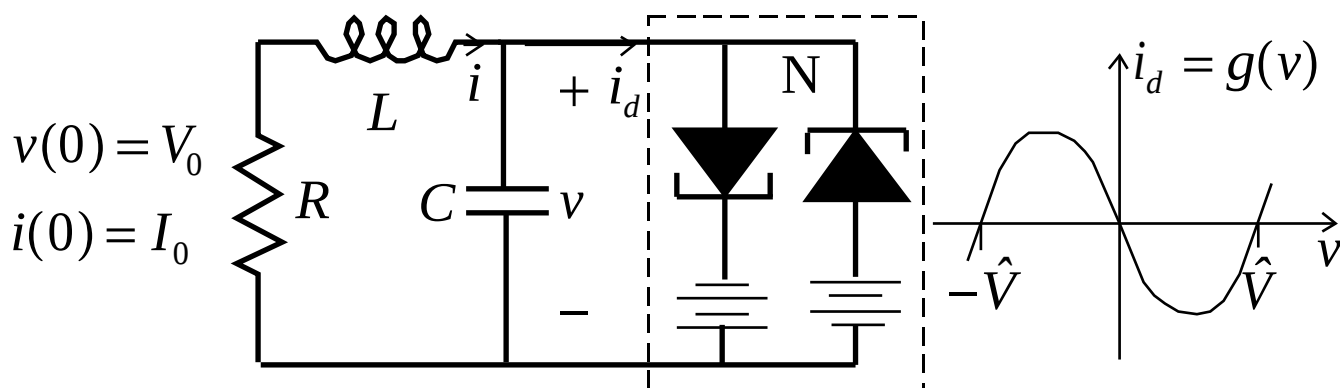


Quando l'attrattore del circuito è un **ciclo limite** il regime permanente è di tipo **periodico**.

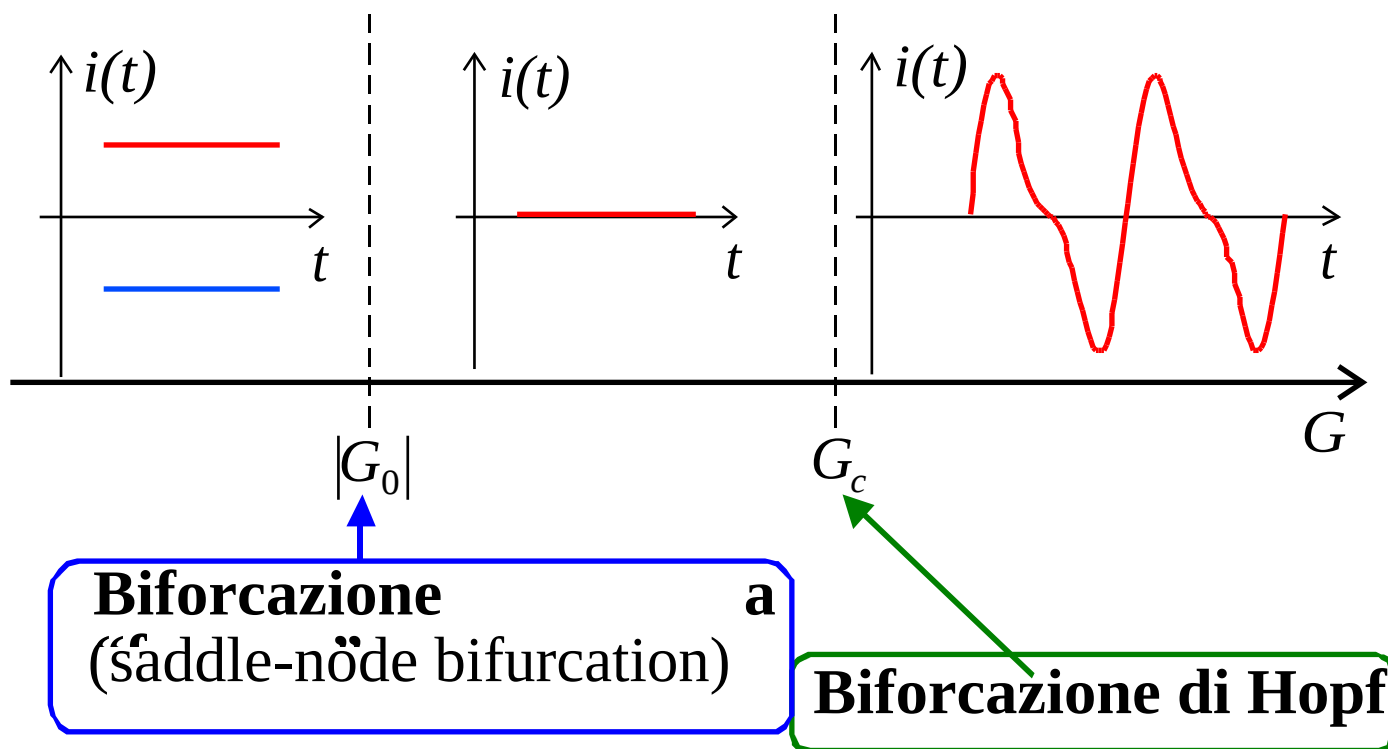


- Il circuito, in regime permanente, si comporta da oscillatore.
- Nella biforcazione di Hopf l'ampiezza dell'oscillazione tende a zero per $G \rightarrow G_c^+$.

In questo circuito



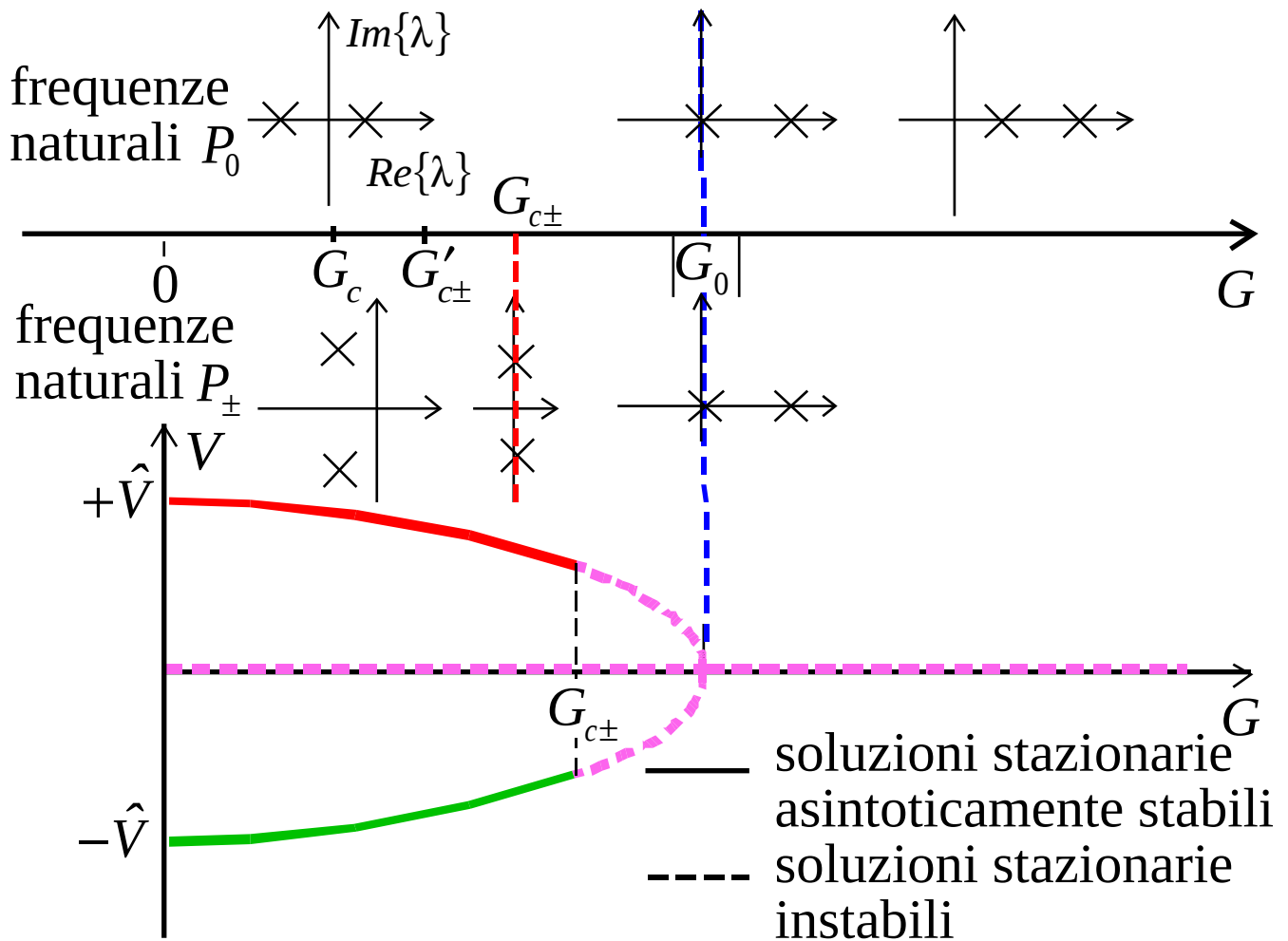
per $G_c > |G_0|$ si hanno due biforcazioni



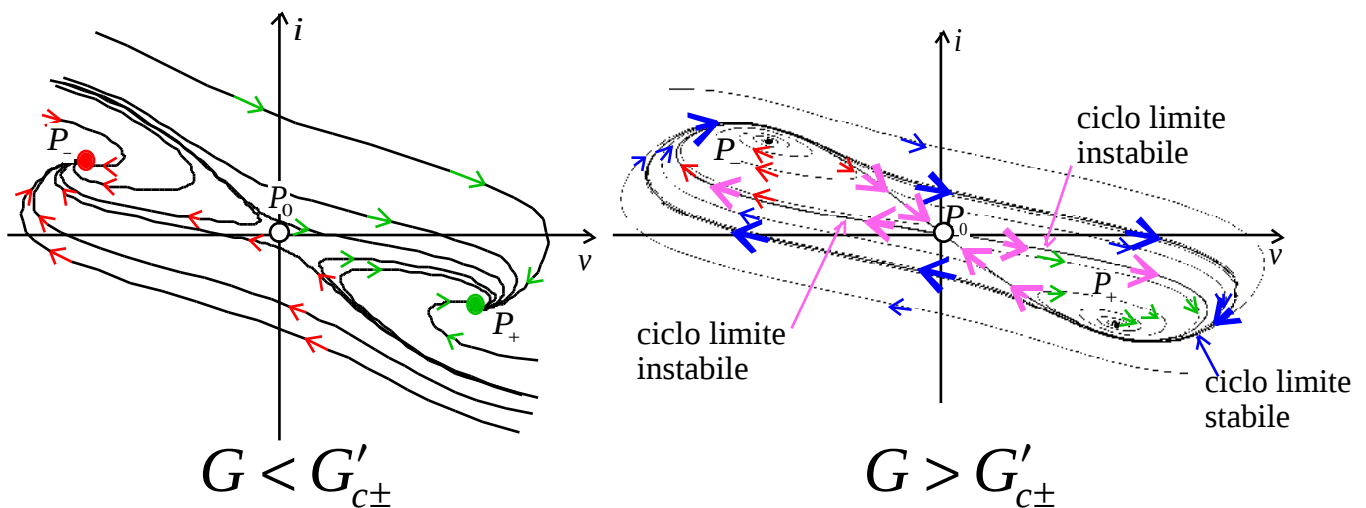
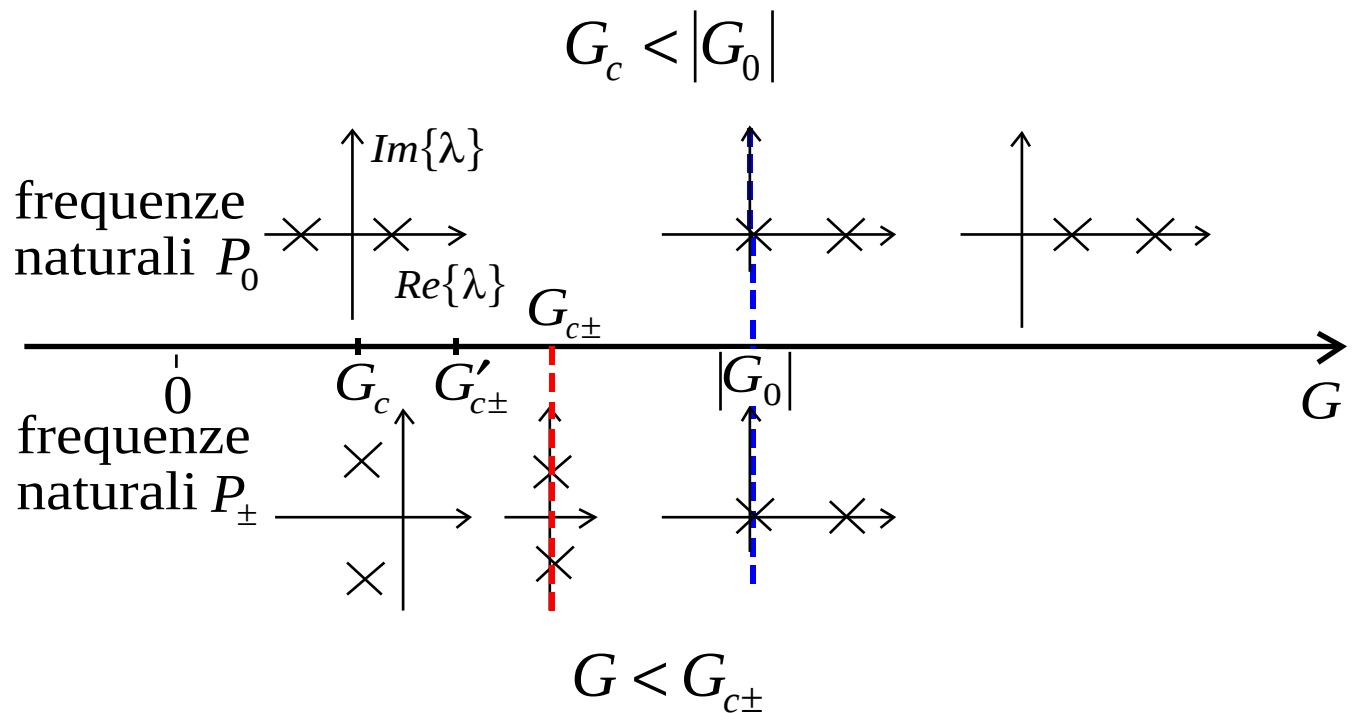
L'ampiezza dell'oscillazione tende a zero per
 $G \rightarrow G_c^+$

Consideriamo, ora, le situazioni nelle quali

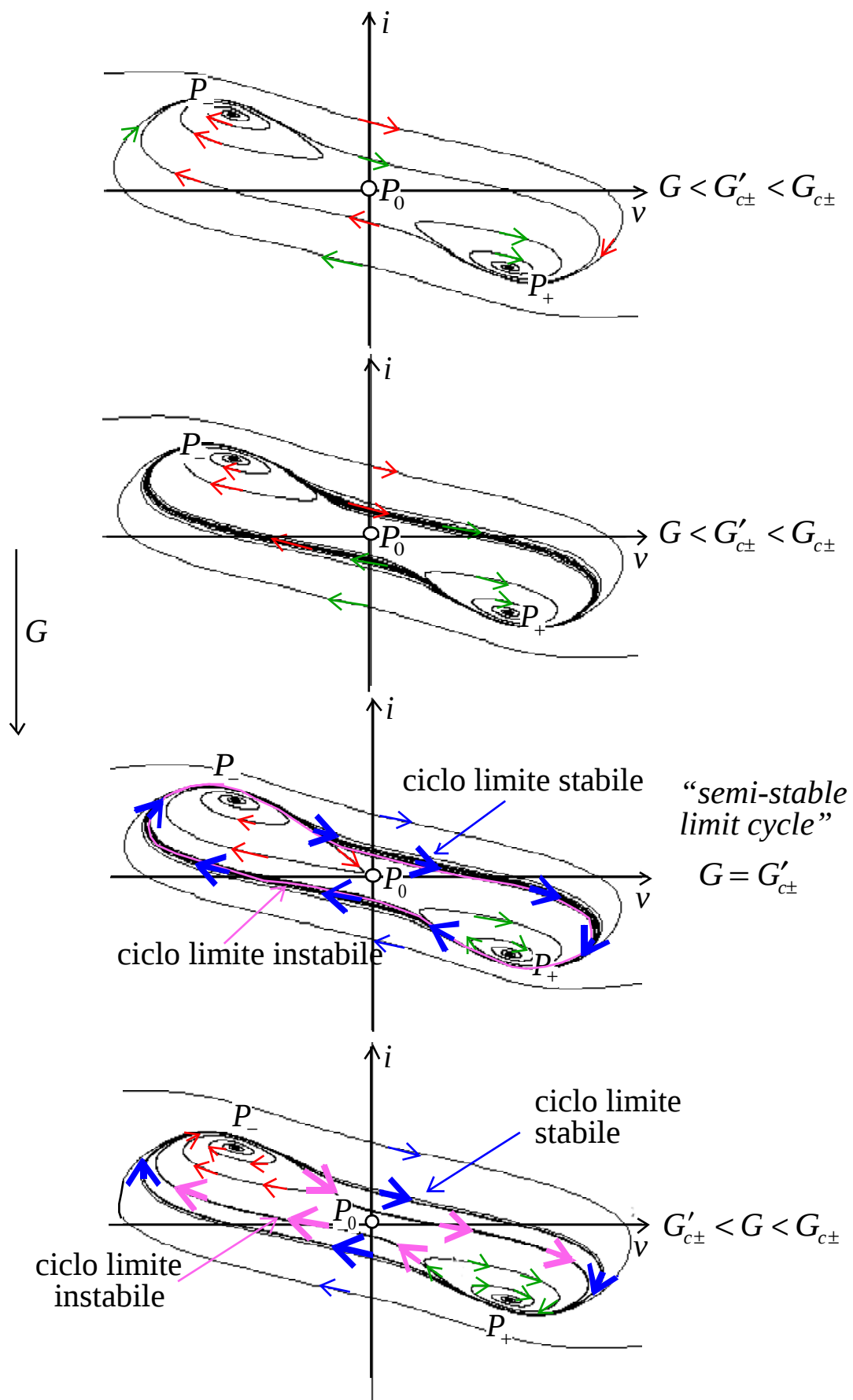
$$G_c < |G_0|$$

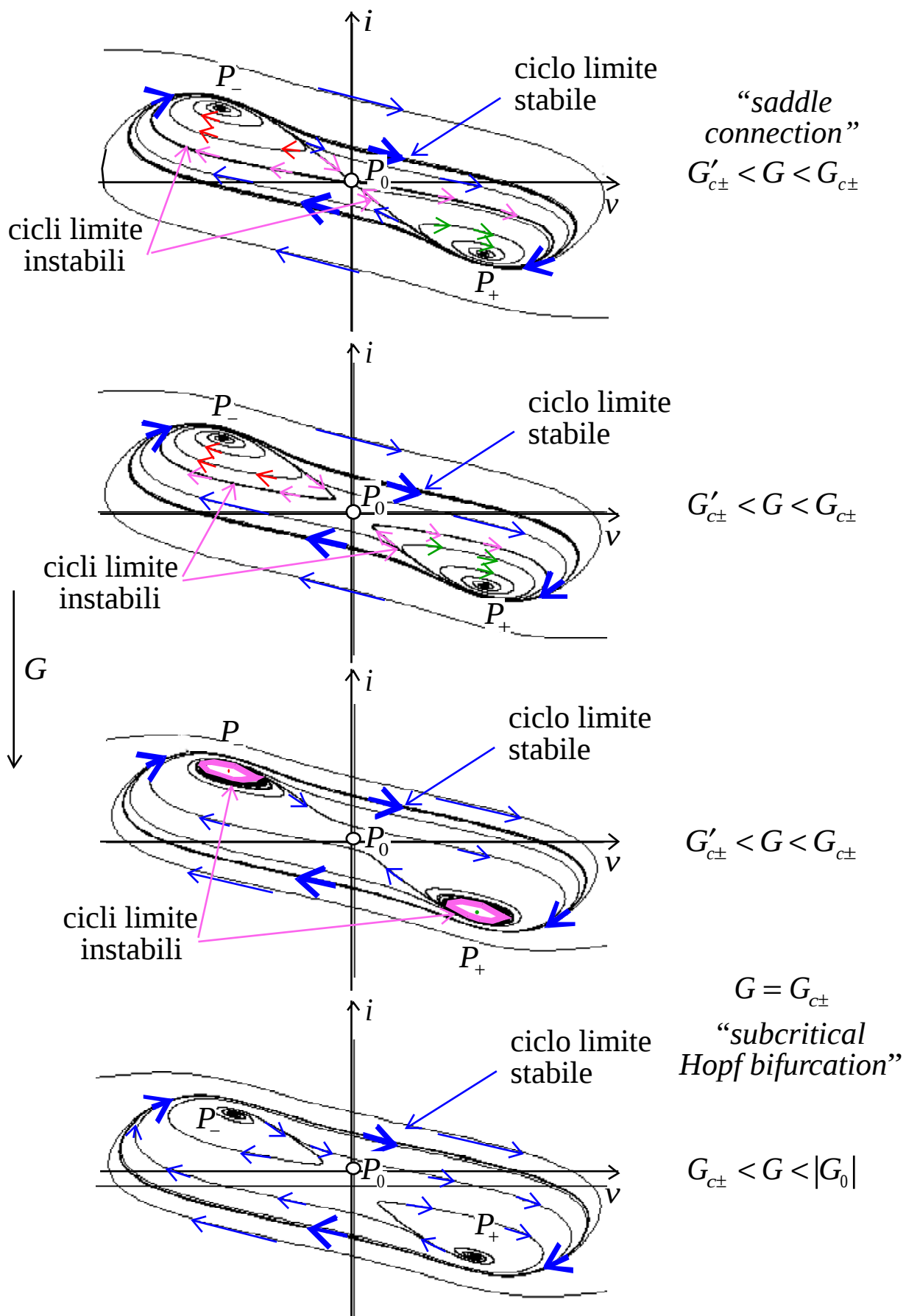


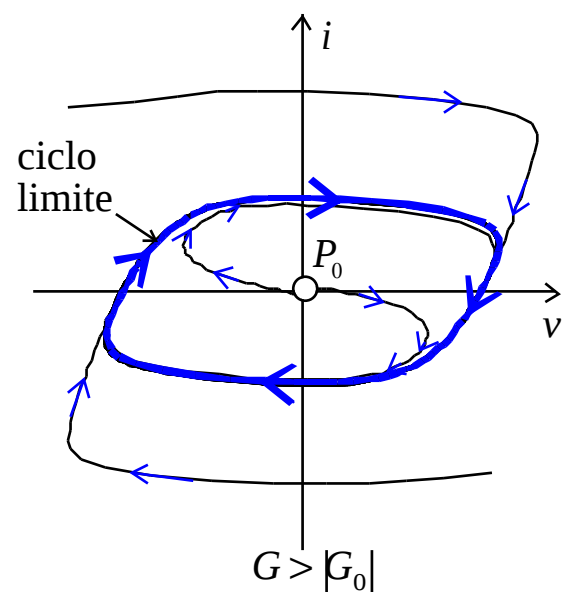
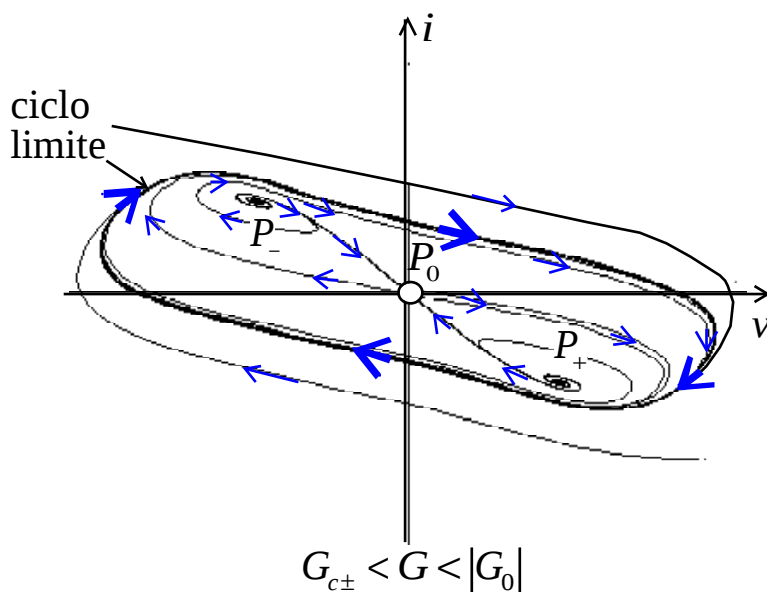
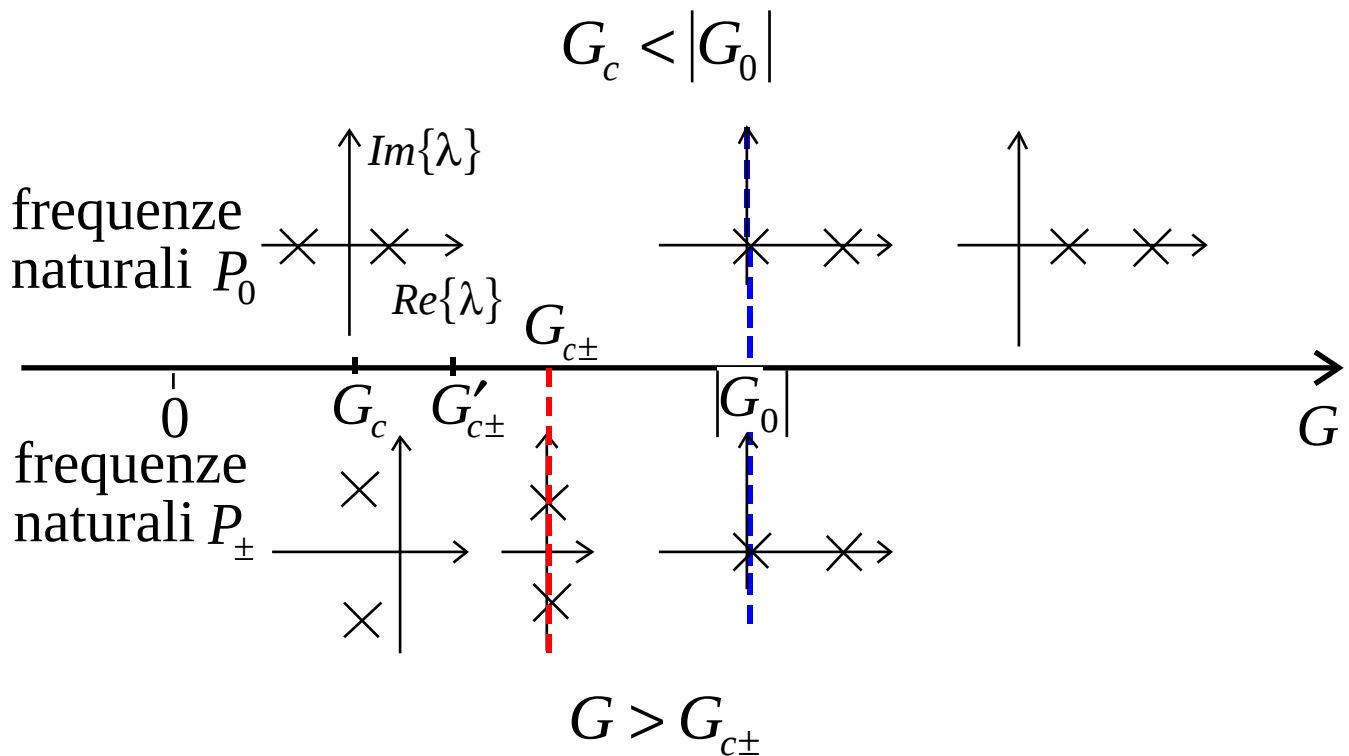
- Per $0 \leq G < G_{c\pm}$ esistono **tre** soluzioni stazionarie: **due** sono **asintoticamente stabili** ed **una** è **instabile**, secondo Lyapunov;
- Per $G_{c\pm} < G$ **tutte** le soluzioni stazionarie sono **instabili**, secondo Lyapunov.



- P_+ e P_- sono due punti di equilibrio asintoticamente stabili, **nodi o fuochi**; P_0 è un **punto a sella**.
- Per $G > G'_{c\pm}$ sono presenti anche due **cicli limite**, uno **asintoticamente stabile** (quello esterno) e uno **instabile** (quello interno).

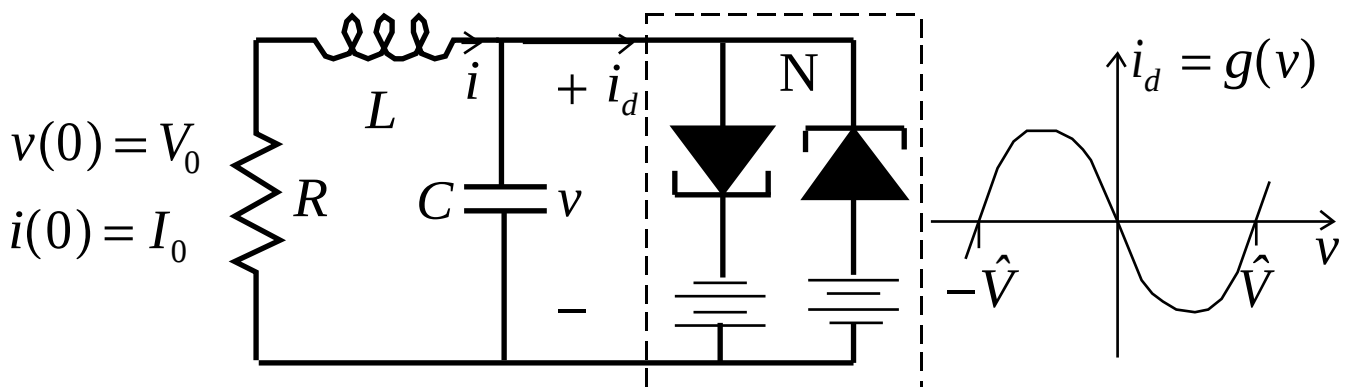




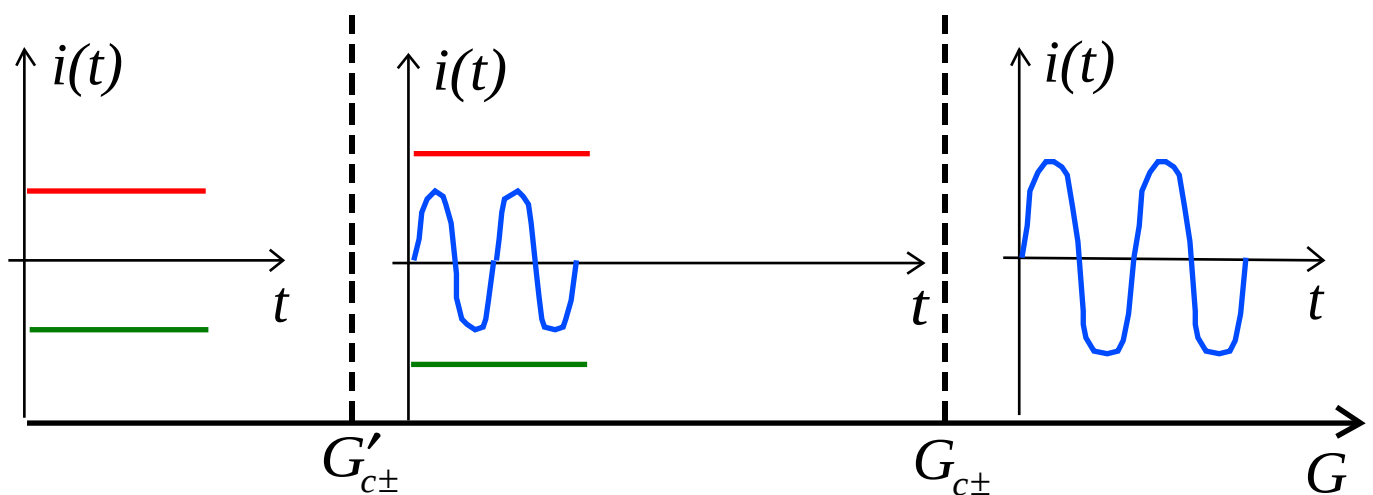


- Per $G_{c\pm} < G < |G_0|$ P_- e P_+ sono due **fuochi instabili**, P_0 è un **punto a sella**.
- Per $G > |G_0|$ P_0 è un **nodo instabile**.

Per $|G_0| > G_c$ in questo circuito

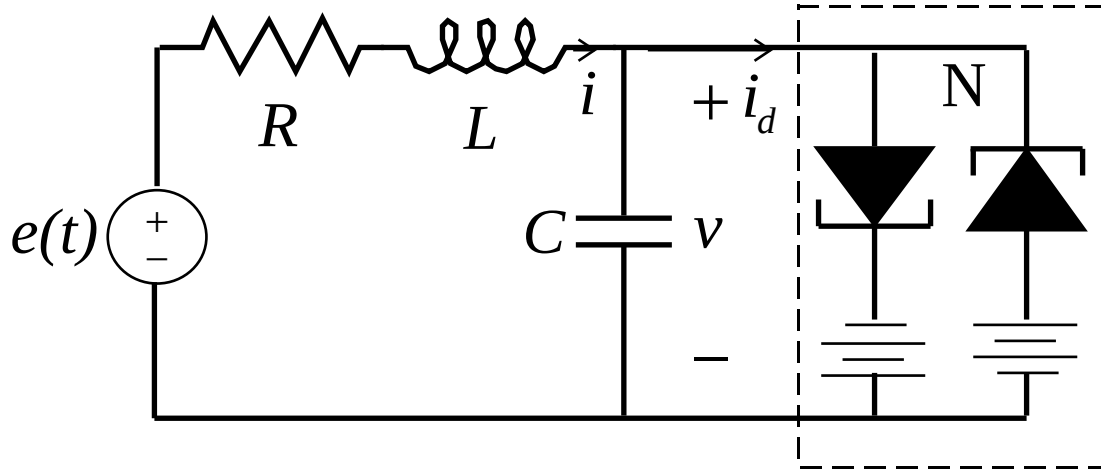


si hanno nuovi fenomeni di biforcazione, alcuni molto complessi.



A differenza di quando accade nelle situazioni per le quali $|G_0| < G_c$, in questo caso l'ampiezza dell'oscillazione non tende a zero per $G \rightarrow G'_{c\pm}$.

Circuiti non autonomi



$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -Ri - v + E_m \cos(\omega t) \\ C \frac{dv}{dt} = i + G_c v \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} i(t_0) = I_0 \\ v(t_0) = V_0 \end{cases}$$

In uno spazio di stato a tre dimensioni è possibile ottenere una rappresentazione “autonoma”

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -Ri - v + E_m \cos(y) \\ C \frac{dv}{dt} = i + G \\ \frac{dy}{dt} = \omega \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} i(t_0) = I_0 \\ v(t_0) = V_0 \\ y(t_0) = \omega t_0 \end{cases} .$$

Al crescere della dimensione dello spazio di stato si arricchisce sempre più la fenomenologia: ad esempio, in circuiti autonomi del terzo ordine si osservano fenomeni di biforcazione più complessi che danno luogo anche a dinamiche caotiche.