

# On Pole-Residue Approaches to Equivalent Circuit Identification with “Concretely” Passive Realizations

Massimiliano de Magistris

Luciano De Tommasi\*

Energy Research Center of the Netherlands  
1755ZG Petten – THE NETHERLANDS

Andrea Chiariello, Massimo Nicolazzo

Department of Electrical Engineering (DIEL)  
Università di Napoli FEDERICO II – ITALY

Tom Dahene, Dirk Deschrijver

Ghent University IBBT, Department of Information Technology (INTEC)  
Gaston Crommenlaan 8, B-9050 Ghent – BELGIUM

\*This work was executed at University of Antwerp, BELGIUM

Internal seminar presented at DIEL – 27 July 2009

# Sommario

- Introduzione al macro-modeling circuitale e breve rassegna applicazioni
- Un po' di storia sul "model identification" in frequenza e stato dell'arte
- Causalità, stabilità e passività dei modelli e "passivity enforcement"
- Il Positive Real Lemma e l'approccio "convex constrained optimization"
- L'approccio "Partial Fraction" e l'ottimizzazione convessa
- Un po' di storia sulla sintesi circuitale con una rassegna di risultati utili per i nostri scopi
- "Positive Fraction Vector Fitting" alla luce della sintesi "concretamente passiva"
- Validazione numerica e casi di studio
- Stato e prospettive sull'attività

# Introduzione/1

- La maggior parte dei sistemi elettrici/elettronici sono composti di sotto-sistemi concentrati e distribuiti, su diverse scale, che interagiscono fra loro. È da sempre di grande interesse disporre di modelli ridotti di tipo circuitale delle strutture elettromagnetiche complesse.
- Gli approcci più tradizionali molto frequenti sono tutti del tipo “physics based”, come ad esempio nei Partial Element Equivalent Circuit.
- Per le strutture lineari una possibilità di “sistematizzare” il processo di riduzione è caratterizzarle (o simularle) in frequenza e identificare modelli ridotti il cui comportamento in frequenza, nelle bande di interesse, sia adeguatamente accurato.
- In modo grossolano potremmo dire che le tecniche di più largo uso sono basate su approssimazioni razionali ai minimi quadrati, e le tecniche specifiche differiscono essenzialmente nel modo di effettuare il fitting e nel modo di realizzare una adeguata robustezza numerica.

## Introduzione/2

- Altri approcci in letteratura possono essere ricondotti a
  - Metodi di collocazione
  - Metodi basati sui momenti
  - Metodi basati su sottospazi
  - fantasiose mescolanze dei precedenti
- Nel problema della generazione dei modelli ridotti ci sono alcuni sottoproblemi che “ritornano” indipendentemente dagli autori e approcci:
  - Stabilità numerica delle procedure
  - Accuratezza e convergenza della approssimazione
  - Stabilità del modello
  - Compattezza della rappresentazione
- Allo stato attuale nessuno degli schemi di cui siamo a conoscenza sembra soddisfare contemporaneamente tutti i requisiti, in particolare quando si pensi ad uno schema agevolmente implementabile in un “design-automation environment”

# Introduzione/3

Alcune applicazioni (attuali o “potenziali”):

- modelli interconnessioni in sistemi elettronici “high speed” o “mixed signal” (analogico- digitale);
- modelli equivalenti per strutture a microonde, antenne integrate, strutture radianti etc.;
- interpolazione/estrapolazione di radar cross-section
- analisi di sistemi elettrici di potenza (in condizioni estreme);
- simulazione termica ed elettrica di dispositivi elettronici mediante reti termiche equivalenti;
- implementazione numerica efficiente di problemi elettromagnetici formulati con equazioni integrali (approssimazione funzioni di Green);
- riduzione d’ordine delle parti lineari di circuiti molto complessi;
- realizzazione passiva di sistemi di ordine frazionario (Fractance Devices)
- modellistica di catene di strutture per ottimizzazione acceleratori ...

# Identificazione in frequenza/1

## Questioni generali per l'identificazione in frequenza

- l'approssimazione deve valere su ampi intervalli in frequenza;
- è molto opportuno che il modello verifichi intrinsecamente basilari vincoli fisici (come causalità, stabilità e passività);
- è opportuno che laddove importanti proprietà strutturali dei sistemi distribuiti quali propagazione e/o radiazione possono essere modellate analiticamente vengano estratte dal modello prima dell'identificazione
- è necessario valutare di volta in volta quale tipo di rappresentazione (es: Z, Y, H, S) permetta di avere i dati in forma "più regolare"
- il modello identificato deve consentire una sintesi agevole, ed è opportuno che essa sia "concretamente passiva" (es: senza generatori controllati)
- infine è opportuno che il tutto risulti direttamente compatibile con SPICE, che è di fatto il riferimento industriale per la simulazione "system level"

## Identificazione in frequenza/2

L'identificazione (approssimazione) di una risposta in frequenza  $\tilde{f}(j\omega)$  nota con una funzione razionale fratta è stato un problema molto studiato (Levy 1959). Esso può essere formulato come un problema ai minimi quadrati:

$$\min_{\{b_i\}, \{a_j\}} \sum_{k=1}^N \left\| \tilde{f}(j\omega_k) - \frac{\sum_{i=1}^P b_i j\omega_k^{i-1}}{\sum_{j=1}^Q a_j j\omega_k^{j-1}} \right\|^2$$

Ci sono alcune intrinseche difficoltà:

- le incognite  $a_j$  compaiono al denominatore (problema non lineare);
- per ampi intervalli in frequenza (es: 10 GHz) e per ordine dei polinomi  $P$  e  $Q$  elevati i coefficienti  $j\omega^j$  spaziano in un range elevatissimo (es:  $10^{10*N}$ ), portando a problemi numericamente mal condizionati
- infine per la sintesi circuitale è più comodo di disporre della forma in poli e residui piuttosto che in rapporto di polinomi

## Identificazione in frequenza/3

Nel riformulare il problema ha senso considerare direttamente il caso matriciale di  $N$  campioni in frequenza di una matrice di  $m \times m$  complessa  $H(j\omega)$ :

$$\{H_k = H(j\omega_k)\}_{k=1,\dots,N}$$

La matrice  $H(j\omega)$  può essere approssimata con l'espansione:

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{\sum_{i=1}^P B_i f_i(j\omega)}{\sum_{j=1}^Q a_j g_j(j\omega)}$$

dove  $\{B_i\}$  sono matrici  $m \times m$ ,  $\{a_j\}$  valori scalari,  $\{f_i\}$   $\{g_j\}$  generiche funzioni di base.

# Identificazione in frequenza/4

Scelte le funzioni di base l'identificazione di  $\{a_j\}$   $\{B_i\}$  è un classico problema di fitting:

$$\min_{\{B_i\}, \{a_j\}} \sum_{k=1}^N \left\| \left\| H(j\omega_k) - \frac{\sum_{i=1}^P B_i f_i(j\omega_k)}{\sum_{j=1}^Q a_j g_j(j\omega_k)} \right\|_F \right\|^2$$

dove  $\|H\|_F^2 = \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_{ij}^2 \right)^{1/2}$  indica la norma di Frobenius

Si tratta di un problema ai minimi quadrati (non lineare). Esso può essere risolto con algoritmi classici quali Levenberg-Marquardt o Gauss-Newton.

Per i sistemi a parametri concentrati la scelta più ovvia per le funzioni di base è:

$$f_i = j\omega^{i-1}, \quad g_j = j\omega^{j-1}$$

In questo caso  $H(j\omega)$  risulta una matrice di rapporti di polinomi.

"Model Based Parameter Estimation" (Brittingham 1980) e "Rational Function Approximation" (Gao 2005).

## Identificazione in frequenza/5

Il problema di fitting può essere “linearizzato” se riformulato:

$$\min_{\{R_i\}, \{a_j\}} \sum_{k=1}^N \left\| H(j\omega_k) \sum_{j=1}^Q a_j g_j(j\omega_k) - \sum_{i=1}^P R_i f_i(j\omega_k) \right\|_F^2$$

In sostanza abbiamo moltiplicato i due termini per il denominatore, minimizzando una nuova funzione “pesata”.

In tal caso il problema ai minimi quadrati è lineare. Esso però dà luogo ad errori elevati se i termini in:

$$\sum_{j=1}^Q a_j g_j(j\omega_k)$$

danno grosse variazioni di tale “peso” sull’insieme delle frequenze  $\omega_k$  considerate.

## Identificazione in frequenza/6

È possibile ottenere una formulazione iterativa a partire dalla precedente considerando il problema:

$$\min_{\{R_i\}, \{a_i\}} \sum_{k=1}^N \left\| \frac{H(j\omega_k) \sum_{j=1}^Q a_j^{(n+1)} g_j(j\omega_k) - \sum_{i=1}^P R_i^{(n+1)} f_i(j\omega_k)}{\sum_{j=1}^Q a_j^{(n)} g_j(j\omega_k)} \right\|_F^2$$

Essa è lineare all'interno iterazione come la precedente, in quanto il denominatore è fissato, e se converge riporta al caso di partenza. Questo schema (simile ad una iterazione di punto fisso) va sotto il nome di iterazione di "Sanathanan Koerner"\* e supera gli svantaggi descritti prima.

Come spesso accade tutto ciò fu dimenticato ...

\*C.K. Sanathanan, J. Koerner, "Transfer Function Synthesis as Ratio of two Complex Polynomials", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.8 n°1, 1963.

## Identificazione in frequenza/7

Per tutti gli schemi considerati è importante ricordare che la scelta

$$f_j = j\omega^{j-1}, \quad g_j = j\omega^{j-1}$$

( $H(j\omega)$  rapporto di polinomi) dà importanti limitazioni alla crescita contemporanea dell'ordine di approssimazione ed alla larghezza di banda di interesse, in quanto le potenze elevate di  $j\omega$  portano presto a problemi numericamente mal condizionati.

Tale problema è superato naturalmente con una diversa base di espansione dove i termini dell'espansione sono i singoli "fratti". Tale scelta è alla base dell'algoritmo di Gustavsen- Semlyen chiamato Vector Fitting (dopo)

Sono anche state proposte espansioni in polinomi ortogonali, che però allo stato non hanno portato vantaggi all'approccio Vector Fitting

# “Vector Fitting”/1

Approssimiamo la risposta in frequenza nella forma poli residui:

$$f(s) = \sum_{k=1}^K \frac{r_k}{s - p_k} + r_0 + r_{-1}s$$

Si parte con una scelta di poli di tentativo  $\bar{p}_k$  e si introduce una funzione “peso” (incognita)  $\sigma(s)$  assumendo:

$$\sigma(s)f(s) \approx \sum_{k=1}^K \frac{r_k}{s - \bar{p}_k} + r_0 + r_{-1}s$$

$$\sigma(s) \approx \sum_{k=1}^K \frac{\tilde{r}_k}{s - \bar{p}_k} + 1$$

È da notare che le approssimazioni di  $f(s)$  e  $\sigma$  hanno gli stessi poli! Da tali posizioni otteniamo l'equazione (lineare):

$$\sum_{k=1}^K \frac{r_k}{s - \bar{p}_k} + r_0 + r_{-1}s \approx \left( \sum_{k=1}^K \frac{\tilde{r}_k}{s - \bar{p}_k} + 1 \right) f(s)$$

## “Vector Fitting”/2

Imponendo la precedente uguaglianza negli  $N$  campioni in frequenza in cui è nota la funzione  $f(s)$  è possibile determinare i coefficienti  $r_k, r_0, r_{-1}, \tilde{r}_k$  mediante la soluzione del sistema lineare  $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$  dove:

$$\mathbf{A}_n = \underbrace{\left[ \frac{1}{s_n - \bar{p}_1} \dots \frac{1}{s_n - \bar{p}_K}, 1, s_n, \frac{-f(s_n)}{s_n - \bar{p}_1} \dots \frac{-f(s_n)}{s_n - \bar{p}_K} \right]}_{2(K+1)}$$

$$\mathbf{x} = \underbrace{\left[ r_1, r_2, \dots, r_K, r_0, r_{-1}, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_K \right]^T}_{2(K+1)}$$

$$\mathbf{b} = \underbrace{\left[ f(s_1), f(s_2), \dots, f(s_N) \right]^T}_N$$

**A  $\mathbf{x}=\mathbf{b}$  risulta sovra-determinato se  $N > 2(K+1)$ . Può essere risolto con i minimi quadrati, questa volta lineari!**

## “Vector Fitting”/3

Ogni somma di frazioni può essere scritta come:

$$(\sigma f)_{fit}(s) = r_0 \frac{\prod_{k=1}^{K+1} (s - r_k)}{\prod_{n=1}^N (s - \bar{p}_k)} \quad \sigma_{fit}(s) = \frac{\prod_{k=1}^{K+1} (s - \tilde{r}_k)}{\prod_{n=1}^N (s - \bar{p}_k)}$$

Da cui si ricava:

$$f(s) = \frac{(\sigma f)_{fit}(s)}{\sigma_{fit}(s)} = r_0 \frac{\prod_{k=1}^{K+1} (s - r_k)}{\prod_{n=1}^N (s - \tilde{r}_k)}$$

Dunque i poli di  $f(s)$  risultano proprio gli zeri (residui) di  $\sigma$  e:

$$\sigma_{fit}(s) \rightarrow 1$$

## "Vector Fitting"/4 (sintesi)

- l'algoritmo definisce dei poli iniziali di tentativo;
- riformula all'interno della iterazione il problema nella forma lineare  $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$  (sovra-determinata) tramite la funzione  $\sigma$ ;
- risolve un problema di minimi quadrati lineari all'interno della iterazione, trovando i nuovi poli e residui approssimati;
- riprende l'iterazione dal primo punto con i nuovi poli trovati;
- arresta l'iterazione quando  $\sigma \approx 1$  .

## “Vector Fitting”/5

- l’algoritmo è molto efficace su di un ampio insieme di casi (sembra allo stato imbattibile!)
- per sistemi a più ingressi e più uscite le matrici di trasferimento sono identificate con un *set di poli comune*, ponendo i vari elementi in un unico vettore (da cui il nome di Vector Fitting);
- è importante la scelta dei poli iniziali di tentativo ai fini della corretta convergenza dell’algoritmo;
- si puo’ accelerare la convergenza rimuovendo il vincolo sul comportamento asintotico della funzione di scalatura  $\sigma(s)$ , adottando la definizione:

$$\sigma(s) \approx \sum_{k=1}^K \frac{\tilde{r}_k}{s - \tilde{p}_k} + \tilde{k}$$

## “Vector Fitting”/6

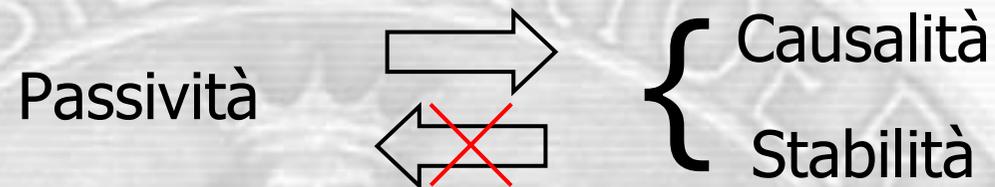
L’algoritmo VF è stato sviluppato indipendentemente da Gustavsen e Semlyen (1999). Successivamente è stato riconosciuto come una specifica riformulazione dello schema Sanathanan Koerner (Hendrix, Dahene 2006):

$$\begin{cases} f_i = \frac{1}{s - p_i} & i = 1, \dots, Q - 2; & f_{Q-1} = 1; & f_Q = s; \\ g_j = \frac{1}{s - p_j} & j = 1, \dots, P - 1; & g_P = 1. \end{cases}$$

$$\sigma^{(n)} = \sum_{j=1}^N \frac{a_j^{(n)}}{s - p_j} + a_{N+1}^{(n)} = a_{N+1}^{(n)} \frac{\prod_{i=1}^N (s - z_i^{(n)})}{\prod_{j=1}^N (s - p_j)}$$

# Passività dei modelli identificati/1

La passività dei modelli identificati (dei sotto-sistemi) è fondamentale per la simulazione "system level". Infatti\*:



Esempio: circuito strettamente passivo  $\rightarrow$  soluzione di regime sinusoidale; nel dominio  $s$  l'asse immaginario deve appartenere alla R.O.C., dunque:

- i poli sono tutti a  $\text{Re}\{p_i\} < 0$
- il sistema è causale

Vale inoltre l'importante proprietà di "chiusura":

*"connessioni in serie, parallelo e retroazione di sistemi passivi portano ancora a sistemi passivi"*

\*P. Triverio, S. Grivet-Talocia et al., "**Stability, Causality and Passivity in Electrical Interconnect Models**", IEEE Trans. on Advanced Packaging, 2007

S. Grivet-Talocia, "**On driving non passive macro-models to instability**", Int. Journal of Circuit Theory and Applications, 2008

## Passività dei modelli identificati/2

L'accuratezza nell'identificazione di  $f(s)$  non garantisce in generale i requisiti di stabilità, causalità e passività che sicuramente hanno le strutture da modellare. Ciò può essere originato da diversi tipi di problemi:

- il modello con cui abbiamo costruito  $f(s)$  è inaccurato
- ovvero i dati sperimentali su  $f(s)$  sono rumorosi
- $f(s)$  verifica tali proprietà, ma nel corso dell'identificazione esse vengono “perse” a favore di una soluzione più accurata

Mentre è abbastanza facile forzare la *stabilità* durante l'identificazione ( $\text{Re}\{p_j\} < 0$ ) è abbastanza più complesso garantire la *passività*.

I più diffusi algoritmi (es: VF) forniscono macro-modelli stabili ma non necessariamente passivi anche se applicati a dati rigorosamente passivi!

## Passività dei modelli identificati/3

La matrice di rappresentazione di un multiporta passivo (impedenze o ammettenze) finito è razionale e "Positive Real" (PR)\*:

- 1)  $H(s)$  è analitica per  $\text{Re}\{s\} > 0$
- 2)  $H^*(s) = H(s^*)$  per  $\text{Re}\{s\} > 0$
- 3)  $H(s) + H^H(s) \geq 0$  per  $\text{Re}\{s\} > 0$

Le condizioni 1) 2) sono soddisfatte da qualsiasi funzione strettamente stabile (tutti i poli nel semipiano sinistro); la condizione 3) è equivalente a  $\text{Re}\{H\} > 0$  e corrisponde al fatto che la potenza reattiva assorbita sia positiva.

Le condizioni di (matrice) PR sono necessarie e sufficienti per la sintesi passiva\*

La condizione  $\text{Re}\{H\} > 0$  equivale a  $\text{eig}\{\text{Re}[H(j\omega)]\} > 0$  (per ogni  $\omega$ ) con "eig" l'intero set degli autovalori .

\*O. Brune, "Synthesis of a Finite Two Terminal Network Whose Driving-Point Impedance is a Prescribed Function of Frequency", J. of Mathematical Physics, vol 10, 1931.

## Passività dei modelli identificati/4

Si può perseguire la passività con due strategie:

- A-posteriori correggendo le “violazioni di passività” del modello identificato (tecniche perturbative)
- A-priori o identificando sotto-sistemi intrinsecamente passivi, ovvero vincolando opportunamente il modello nel corso della identificazione

La prima è di più semplice implementazione ma meno generale. Attualmente è quella più usata e va sotto il nome di “Passivity Enforcement”.

La seconda modalità è più generale, ma suscita “diffidenza” per l’onere computazionale quando formulata come problema di ottimizzazione

Esistono molte varianti di quest’ultimo approccio, ma quelle più interessanti sono secondo noi basate sull’ottimizzazione convessa\*

\*M. de Magistris, L. De Tommasi, “**Identification of broadband passive macromodels for electromagnetic structures**”, *Compel* vol.26 n° 2, 2007.

## “Passivity enforcement”

In questo schema la passività viene verificata dopo lo step di identificazione, ed in caso negativo il modello deve essere “corretto”

Il “forzamento della passività” a-posteriori (perturbativo) inevitabilmente degrada la qualità dell’identificazione originaria

Sono applicabili a strutture con elevata dimensionalità e molti poli, scalando in modo abbastanza favorevole con la dimensione del problema

Si distinguono le tecniche:

- Correzioni locali (e trucchi beceri vari)
- QPpassive (Gustavsen 2001\*) →QPVF
- Hamiltoniana (Grivet-Talocia 2004\*)→IDEM

\*Gustavsen, B. and Semlyen, A., “Enforcing passivity for admittance matrices approximated by rational functions”, IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 16, No. 1, 2001

\*\*Grivet-Talocia, S. “Passivity enforcement via perturbation of Hamiltonian matrices”, IEEE Trans. on Circuit and Systems I, Vol. 51, No. 9, 2004.

## “PE”: Quadratic Programming Passive

Si tratta di forzare la passività in corrispondenza di un set di pulsazioni  $\{\omega_j\}$  aggiungendo un termine correttivo  $\Delta H$  al modello non passivo  $H$  e forzati i vincoli:

$$\Delta H = \Delta R_0 + \sum_{n=1}^N \frac{\Delta R_n}{s - a_n}$$

$$\lambda + \Delta\lambda = \text{eig}(H(j\omega_i) + \Delta H(j\omega_i)) \geq 0 \quad i = 1 \dots l$$

Viene poi linearizzata la relazione tra autovalori e residui in funzione della perturbazione:

$$\Delta\lambda = R\Delta R$$

e risolto un problema ai minimi quadrati (vincolato) che minimizza le perturbazioni che rendono il modello passivo.

La tecnica si basa su assunzioni piuttosto restrittive:

- imposizione passività su un set finito di pulsazioni
- linearizzazione legame autovalori/perturbazioni

Non c'è garanzia che il risultato sia passivo, e comunque non c'è garanzia di passività “globale” (cioè per le pulsazioni diverse dal set  $\{\omega_j\}$ !)

## “PE”: formulazione con Hamiltoniana

Si può forzare la passività “globalmente” (cioè per tutte le pulsazioni) partendo dalla forma di stato  $(A,B,C,D)$  attraverso la matrice Hamiltoniana:

$$N_0 = \begin{pmatrix} A - B(D + D^T)^{-1}C & -B(D + D^T)^{-1}B^T \\ C^T(D + D^T)^{-1}C & -A + C^T(D + D^T)^{-1}B^T \end{pmatrix}$$

La presenza di autovalori immaginari di  $N_0$  rivela la non passività del modello. Inoltre analizzando le sequenze di autovalori immaginari e dei corrispondenti autovettori si determinano esattamente gli intervalli con violazioni di passività.

La correzione si ottiene perturbando la matrice  $C$  opportunamente, con uno schema iterativo che converge quando tutti gli autovalori immaginari scompaiono.

- i vincoli sono posti sulle matrici indipendenti dalla frequenza;
- le perturbazioni vengono calcolate sulla base di una linearizzazione.

Quando l’algoritmo converge il risultato è garantito passivo per tutte le frequenze!

## “a-priori passive”/1

È possibile formulare il problema di identificazione di modelli passivi come minimizzazione vincolata, imponendo la passività. In generale si tratta di un problema di ottimizzazione non lineare, che risulta di complessa implementazione.

Per semplificarlo:

1. Identificazione parametrica di modelli a sottoblocchi passivi (un mare di casi particolari in letteratura!)
2. Identificazione vincolando i residui dopo aver identificato i poli
  - Identificazione residui sulla forma di stato
  - Identificazione residui di espansioni con vincoli sui singoli termini

È facile convincersi che le formulazioni di tipo 1 sono solo casi particolari di quelle di tipo 2 (ciò nonostante fioriscono che è un piacere!)

L'identificazione dei residui con poli fissati permette di scrivere i vincoli in forma di relazioni “affini”, e ciò apre la strada alle formulazioni basate sull'ottimizzazione convessa.

# Convex programming/1

Un generico problema di ottimizzazione non lineare vincolata:

minimize  $f_0(x)$

subject to:

$f_i(x) \geq 0, \quad i = 1 \dots m$

$h_i(x) = 0, \quad i = 1 \dots p$

si dice convesso quando  $f_0, f_i$  sono tutte funzioni "convesse" e i vincoli di uguaglianza  $h_i$  sono affini.

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in (0,1)$$

I problemi che possono essere formulati come ottimizzazione convessa hanno enormi vantaggi rispetto alla ottimizzazione non lineare:

- L'ottimo è garantito come globale
- È possibile stabilire a-priori l'eventuale non fattibilità, non limitatezza e pseudo-ottimalità
- Sono disponibili algoritmi numerici robusti ed efficienti

## Convex programming/2

Perché il problema possa essere formulato in modo “convesso” è fondamentale la forma dei vincoli. Per quanto riguarda la funzione da minimizzare (in genere una norma) si dimostra matematicamente che è possibile riscriverla in forma affine con la stessa soluzione.

Gli algoritmi di convex programming accettano in ingresso ben precise formulazioni, dette *standard forms*. La “traduzione” del problema originario in una forma standard può essere ottenuta tramite interfacce ad alto livello oramai disponibili anche in ambiente Matlab (CVX\*)

Quindi nel nostro caso sfrutteremo tale approccio formulando un problema di minimizzazione con vincoli di semi-positiva definitezza su opportune matrici.

\*Grant M., Boyd S., Ye Y., **Disciplined Convex Programming**, Chapter in Global Optimization: From Theory to Implementation, L. Liberti and N. Maculan, eds., in the book series Nonconvex Optimization and Applications, Springer, 2006.

\*Grant M., Boyd S., **CVX: Matlab software for disciplined convex programming** (web page and software). <http://stanford.edu/~boyd/cvx>

# “PR lemma” e convex programming/1

Considerato un sistema nella forma  $\{A, B, C, D\}$  con matrice di trasferimento  $H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ , con  $H(s)$  stabile. Se esiste una matrice  $W = W^T$  tale che:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -A^T W - WA & -WB + C^T \\ -B^T W + C & D + D^T \end{bmatrix} \geq 0 \\ W \geq 0 \end{cases}$$

allora  $H(s)$  è Positive-Real e vice-versa\*. Osserviamo che:

- si introduce una matrice ausiliaria  $W$  (aumento dimensionalità)
- i vincoli sono posti su matrici indipendenti dalla frequenza

Il “Positive Real lemma” riporta ad un problema algebrico quello della sintesi di circuiti passivi, passando per la forma di stato.

B.D.O. Anderson “A System Theory Criterion for Positive Real Matrices”, J. SIAM Control, Vol. 5, No. 2, 1966.

R.F. Curtain “Old and New Perspectives on Positive Real Lemma in Systems and Control Theory”, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 79, 1999.

## “PR lemma” e convex programming/2

Basandosi sul PR-lemma si può costruire un approccio basato sull'idea di avere una buona stima dei poli del sistema, e di cercarne i rispettivi residui con un'ottimizzazione vincolata.

Il nocciolo è che in questo modo i vincoli posti dal PR lemma sui residui divengono “affini” e il problema può essere messo in forma “convessa”\*

Si può dimostrare che in tal modo si identifica il sistema passivo (con i poli assegnati) a minima distanza dai dati!

A causa della complessità della formulazione e della mancanza di un'implementazione di pubblico dominio tale approccio ha avuto scarso impatto nonostante la sua generalità.

Inoltre la sintesi passa per la forma di stato e non permette di utilizzare (direttamente) solo elementi passivi.

\* C.P Coelho et al., “**A convex programming approach for generating guaranteed passive approximations to tabulated frequency-data**”, IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. 23, No. 2, 2004.

## Formulazione “Positive-Partial Fraction”

Alternativamente è possibile pensare di identificare direttamente  $H(s)$  di un multiporta lineare garantendo a-priori la passività basandosi su tre fatti:

1. un sistema passivo può essere approssimato da una espansione poli residui dove la passività è imposta per ciascun termine (cond. sufficiente!)
2. il vincolo di passività può essere scritto per ciascun termine (o coppia) in modo indipendente dalla frequenza;
3. a seguito dell'identificazione dei poli (ad es. con VF) l'identificazione dei residui può essere formulata come un problema convesso (ed in modo comprensibile!)

L'idea, non generale come quella basata sul Positive Real Lemma, riduce però la complessità e dà notevoli vantaggi nella sintesi!

Si tratta ora di valutarne (possibilmente in generale) le qualità ed i limiti. A tal fine è utile un “ripasso” della teoria classica della sintesi circuitale!

# Sintesi circuitale: motivazioni/1

Nella sintesi classica è nota la forma funzionale di  $H(s)$  e si vuole trovare una realizzazione minima. Storicamente la realizzazione doveva essere anche “concretamente passiva”.

Nell'identificazione invece sono noti i campioni (in frequenza) di  $H(s)$ , mentre la forma funzionale è scelta in relazione a:

- forma in cui sono disponibili i dati;
- semplicità di formulazione identificazione;
- vantaggi numerici;
- semplicità schema di sintesi.

Le due visioni del problema si intersecano quando vogliamo realizzare modelli ridotti SPICE a valle di procedure di identificazione.

Nella letteratura sull'identificazione al problema della sintesi non viene in genere data grande rilevanza.

Ciò è secondo me un errore! Viceversa può essere invece molto utile tornare alle origini della sintesi circuitale (e muoversi sulle “spalle dei giganti”).

## Sintesi circuitale: motivazioni/2

Non vengono indagati i legami tra le rappresentazioni utilizzate nella identificazione e le corrispondenti realizzazioni.

Una volta identificati i modelli passivi vengono realizzati senza imporre la passività dei singoli elementi, es:

- sintesi con componenti a parametri negativi (Gustavsen)
- sintesi a partire dalla forma di stato (con generatori controllati)

Alcune motivazioni per approfondimenti sulla sintesi:

- “completezza” della formulazione Positive Partial Fraction?
- corretta “validazione” con dati numerici e relativi schemi (circuiti) per la generazione dei dati
- ricerca di uno schema di sintesi “concretamente passiva” e (agevolmente) realizzabile in SPICE
- un po’ di “manutenzione culturale” (omissioni, inesattezze ed ambiguità in letteratura)

# Sintesi circuitale: un po' di storia/1

La sintesi circuitale nasce negli all'inizio del 1900 motivata dalla realizzazione di filtri per telegrafia e telefonia.

Era necessario, oltre che “ingegneristicamente” trovare circuiti che realizzassero certe funzioni, proteggerne i brevetti (studio di classi di circuiti equivalenti).

Viene sviluppata in modo rigoroso da Foster, Cauer, Brune, Howitt, Guillemin.... fino ai livelli più generali e astratti (Belevitch) (es. resistori e trasformatori complessi, circuiti “astrattamente passivi” etc.).

Sul piano applicativo perde gradualmente di interesse, che si sposta sulla teoria dell'approssimazione. Inoltre i vincoli di “fisica realizzabilità” vengono rilassati dalla disponibilità degli amplificatori elettronici.

Negli anni '70 diventa un problema di “teoria dei sistemi” e formulato in relazione alla forma di stato.

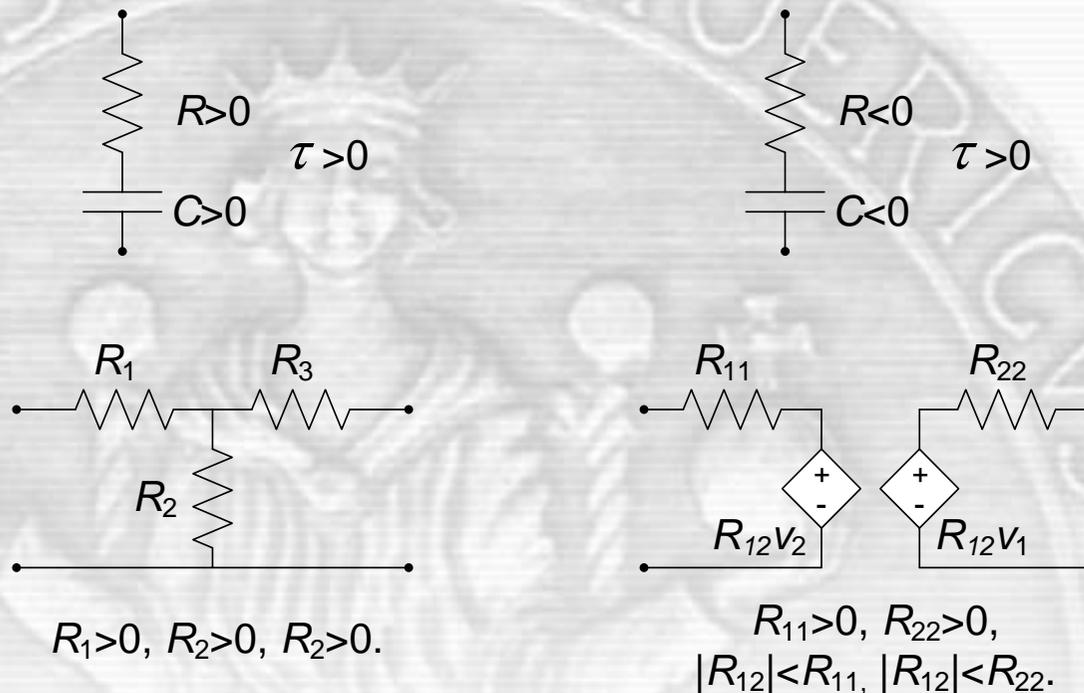
Viene abbandonata (e dimenticata!), fino alla nuova “primavera” legata alla identificazione di macro-modelli. Il suo utilizzo attuale appare spesso maldestro!

## Sintesi circuitale: un po' di storia/2

- R. Foster "A reactance theorem", Bell Syst. Techn. Journ., vol.3 1924.
- O. Brune, "Synthesis of a Finite Two Terminal Network Whose Driving-Point Impedance is a Prescribed Function of Frequency", J. of Mathematical Physics, vol 10, 1931.
- N. Howitt, "Group Theory and the Electric Circuit", Physical Review, vol.37 1931.
- W. Cauer, "Ideale Transformatoren und lineare Transformationen", Elektrische Nachrichten Technik 1932.
- E. Guillemin "Synthesis of Passive Networks", (Voll. I-II), J. Wiley & Sons, 1957
- W. Cauer, "Synthesis of Linear Communication Networks", (Voll. I-II), McGRAW HILL, 1958.
- V. Belevitch "Summary of the History of Circuit Theory", Proceedings of the IRE, 1961.
- V. Belevitch, "Classical Network Theory", Holden-Day, 1968
- B.D.O. Anderson, S. Vongpanitlerd, "Network Analysis and Synthesis", Prentice Hall, 1973.
- S. Darlington, "A History of Network Synthesis and Filter Theory for Circuit Composed of Resistors, Inductors, and Capacitors", IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, vol.46, 1999.

## Identificazione passiva e sintesi/2

Circuiti "concretamente passivi" ed "astrattamente passivi" (definizione di Belevitch) teoricamente equivalenti



Nella simulazione circuitale, anche in presenza di algoritmi "neutri" rispetto alla stabilità, è intuitivo che i primi sono da preferire!

## Sintesi circuitale: un po' di storia/3

Il problema è così formulato: data l'espressione in frequenza di una immettenza  $H(s)$  determinare la topologia ed i parametri di un circuito realizzabile (storicamente “concretamente passivo”).

I procedimenti classici di sintesi si basano sull'estrazione successiva di impedenze/ammettenze realizzabili, effettuata in modo che la parte restante ancora una funzione realizzabile.

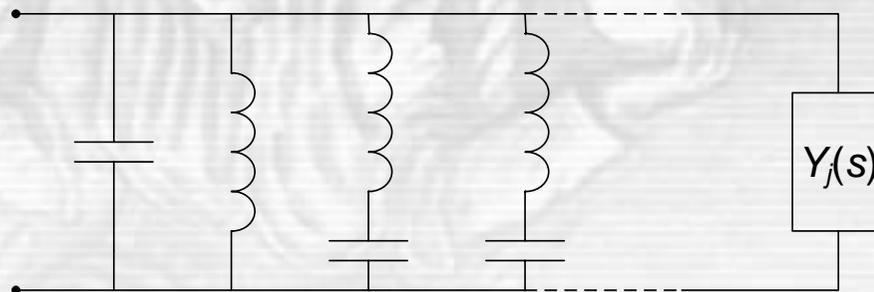
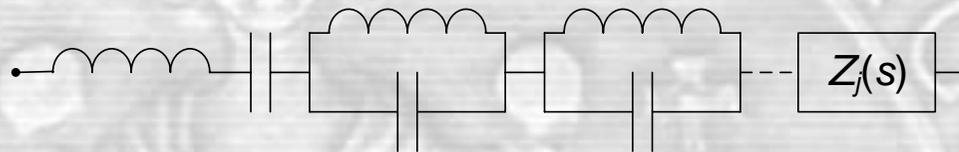
Per circuiti di soli condensatori ed induttori (reattanze) il procedimento è abbastanza immediato e produce le due sintesi canoniche di Foster (frazione parziale) e Cauer (frazione continua).

Esso si estende immediatamente a tutti i circuiti di due soli tipi di elementi (passivi). In generale invece (circuiti con più tipi di elementi) il problema è più complesso (ciclo di Brune)

# Sintesi di immetENZE/1

La sintesi di Foster corrisponde ad espandere la funzione da sintetizzare in una somma di termini direttamente realizzabili, ciascuno dei quali risulta Positive Real. Ad esempio per le impedenze si ha:

$$Z(s) = \alpha_1 s + \frac{\alpha_2}{s} + \sum_{i=3}^{j-1} \frac{2\alpha_i s}{s^2 - \omega_i^2} + Z_j(s)$$

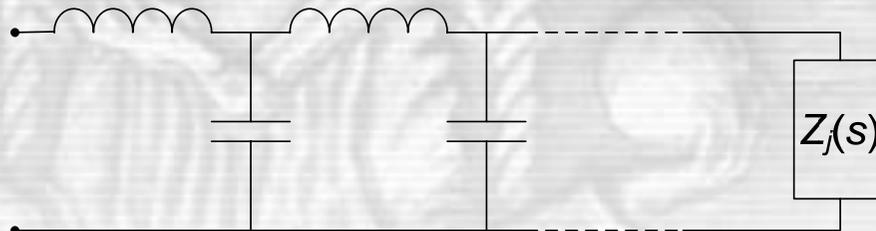


R. Foster "A reactance theorem", Bell Syst. Techn. Journ., vol.3 1924.

## Sintesi di immetENZE/2

La sintesi di Cauer invece si basa sull'espansione in "frazione continua" della  $Z(s)$ :

$$Z(s) = L_1 s + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{L_2 s + \frac{1}{C_2 s + \dots}}}$$



È possibile dimostrare che le due sintesi di Foster e di Cauer sono equivalenti e possono essere ricavate l'una dall'altra attraverso opportune matrici di trasformazione.

## Sintesi di immetENZE/3

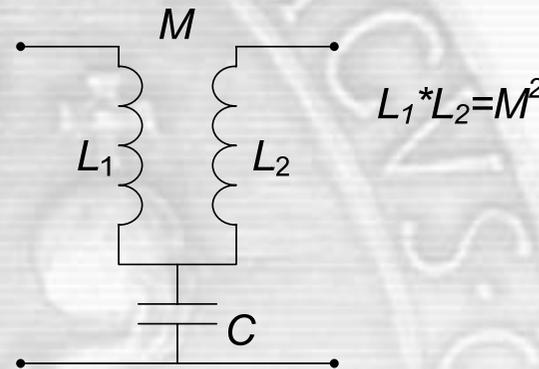
E' abbastanza facile far vedere che tali metodi si estendono in modo piuttosto diretto ai casi di circuiti di soli due elementi, RC o RL. Ciò deriva essenzialmente dal fatto che poli e zeri sono distribuiti in modo analogo sull'asse immaginario (circuiti LC) o su quello reale (RL, RC).

La semplicità delle sintesi di Foster e Cauer è dovuta principalmente al fatto che nel ciclo di "estrazione" è automaticamente garantito che la parte rimanente continua ad essere una funzione PR.

Nel caso più generale (circuiti R,L,C,K) O. Brune, ha mostrato che esiste il caso che, ad un certo punto del processo di estrazione, la rimanente immetenza risulti una *funzione minima*, ovvero una funzione la cui parte reale non risulta monotona in funzione di  $\omega$ . In tal caso si può dimostrare che nessuno delle tecniche di estrazione sin qui considerate si può applicare per ottenere un resto che sia ancora PR.

## Sintesi di immetENZE/4

È necessario allora un nuovo tipo di estrazione che è quello di Brune. Esso consiste nella rimozione di un elemento come in figura, dove è presente un trasformatore ad accoppiamento perfetto. È possibile dimostrare che, con la scelta appropriata dei valori degli elementi (passivi), la funzione che resta dopo l'estrazione è sempre PR.



Bott e Duffing dimostrarono successivamente che è possibile una sintesi senza trasformatori, ma non minima!

## Sintesi di immetENZE/5

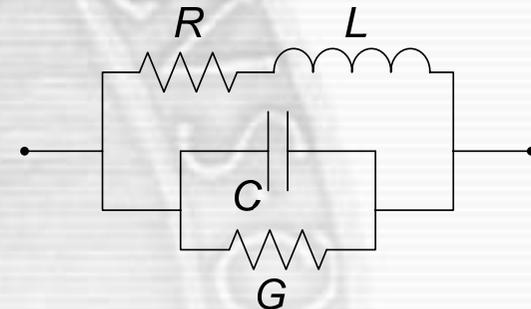
Consideriamo ora in generale l'espansione in frazione parziale:

$$Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s) + \dots + Z_n(s)$$

dove il generico termine dell'espansione può eventualmente essere visto come la combinazione di termini complessi coniugati del tipo:

$$Z_i(s) = \frac{r_i}{s - p_i} + \frac{\bar{r}_i}{s - \bar{p}_i}$$

che corrispondono a blocchi del tipo (cella di "Foster" generalizzata)



È evidente che la condizione che  $Z(s)$  sia una funzione PR non garantisce in generale che lo siano le sue componenti nella espansione (ci possono essere "cancellazioni"). Dunque ai termini non è richiesto (in generale) di essere singolarmente PF.

## Sintesi di immetENZE/6

Vogliamo ora studiare le condizioni perché il singolo termine dell'espansione precedente risulti PR. È possibile, rielaborando opportunamente la somma dei termini complessi coniugati, mostrare come la condizione PR dipende solo dal numeratore (il denominatore risulta un numero reale positivo essendo il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato, indipendentemente da  $\omega!$ ) e può essere espressa dalle relazioni [v. Guillelmin]:

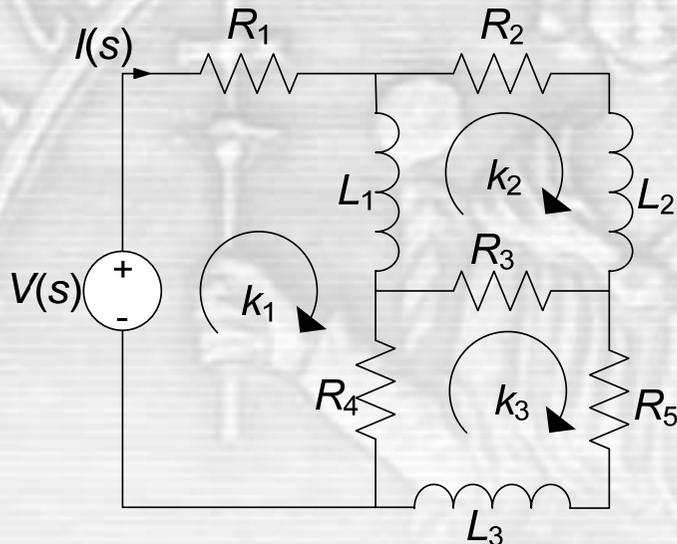
$$\begin{cases} -(\operatorname{Re}\{p_i\}\operatorname{Re}\{r_i\} + \operatorname{Im}\{p_i\}\operatorname{Im}\{r_i\}) \geq 0 \\ -(\operatorname{Re}\{p_i\}\operatorname{Re}\{r_i\} - \operatorname{Im}\{p_i\}\operatorname{Im}\{r_i\}) \geq 0 \end{cases}$$

È importante osservare che tali vincoli sono relazioni indipendenti dalla frequenza, e pertanto garantiscono la passività in generale.

# Coordinate normali e sintesi/1

L'introduzione delle cosiddette coordinate normali permette di chiarire in forma algebrica il problema alla base della sintesi di Brune.

Consideriamo il circuito in figura, e valutiamo in particolare l'impedenza vista dal generatore (con le correnti di maglia).



$$\begin{pmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) & Z_{13}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) & Z_{23}(s) \\ Z_{31}(s) & Z_{32}(s) & Z_{33}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gli elementi  $Z_{rs} = R_{rs} + sL_{rs}$  rappresentano le impedenze di maglia (rispettivamente auto e mutue).

## Coordinate normali e sintesi/2

Considerata la soluzione del sistema con Cramer, tenuto conto che nel caso considerato è  $I(s)=k_1$ , è immediato calcolare l'impedenza vista dal generatore:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = V(s) \frac{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V(s) & z_{12} & z_{13} \\ 0 & z_{22} & z_{23} \\ 0 & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}} = \frac{|Z|}{\begin{vmatrix} 1 & z_{12} & z_{13} \\ 0 & z_{22} & z_{23} \\ 0 & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}} = \frac{|Z|}{\begin{vmatrix} z_{22} & z_{23} \\ z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}}$$

## Coordinate normali e sintesi/3

Vogliamo ora considerare una trasformazione del sistema considerato che sia invariante per l'impedenza. Consideriamo una trasformazione  $Z'=A^T Z A$ , con  $A$  matrice non singolare del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{matrici di Howitt})$$

cui corrisponde un nuovo circuito con lo stesso numero di maglie. E' semplice provare (utilizzando la forma di Kramer e le proprietà dei determinanti) che questo nuovo circuito mantiene la stessa impedenza\*:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{|Z'|}{\begin{vmatrix} z'_{22} & z'_{23} \\ z'_{32} & z'_{33} \end{vmatrix}} = \frac{|Z|}{\begin{vmatrix} z_{22} & z_{23} \\ z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}}$$

\*N. Howitt, "Group Theory and the Electric Circuit", Physical Review, vol.37 1931.

## Coordinate normali e sintesi/4

- La trasformazione considerata definisce una classe di circuiti invarianti rispetto all'impedenza considerata.
- La classe di circuiti definita dalla trasformazione contiene, a seguito dell'arbitrarietà di  $A$ , anche circuiti con elementi caratterizzati da parametri negativi (cioè elementi non passivi!), pur rimanendo passiva l'impedenza invariante!
- È immediata l'estensione della proprietà alle impedenze definite dalle altre maglie (basta posizionare opportunamente la riga di zeri ed uno in  $A$ ). In questo modo è anche possibile vedere che, se si richiede l'invarianza dell'impedenza da tutte le maglie contemporaneamente si perviene ad una trasformazione banale (identità).

## Coordinate normali e sintesi/5

Per il circuito in esame consideriamo ora le quantità:

$$W_L = \frac{1}{2}(L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + L_3 i_3^2) = \frac{1}{2} \left[ L_1 (k_1 - k_2)^2 + L_2 k_2^2 + L_3 k_3^2 \right]$$

$$P_R = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 + R_5 i_5^2 = R_1 (k_1 - k_2)^2 + \dots$$

Esse, rappresentano rispettivamente l'energia immagazzinata dagli induttori e la potenza dissipata dai resistori, e pertanto risultano sicuramente forme quadratiche definite positive. In termini delle correnti di maglia  $k_i$  è possibile esprimerle come:

$$2W_L = \mathbf{k}^T L \mathbf{k} \quad L = \begin{bmatrix} L_{ij} \end{bmatrix}$$

$$P_R = \mathbf{k}^T R \mathbf{k} \quad R = \begin{bmatrix} R_{ij} \end{bmatrix}$$

## Coordinate normali e sintesi/6

Teorema di diagonalizzazione simultanea: ogni coppia di matrici quadrate e simmetriche  $B=B^T$  e  $C=C^T$ , tali che almeno una delle due sia definita positiva, ammette una matrice  $A$  invertibile che le diagonalizza simultaneamente, ovvero che sia  $A^T B A$  che  $A^T C A$  sono matrici diagonali.

Posto  $[T, D] = \text{eig}(R, L)$  (notazione MATLAB autovalori generalizzati)

$$k = T k'$$

$$L' = T^T L T, \quad R' = T^T R T \quad \text{con } L', R' \text{ matrici diagonali}$$

Le variabili  $k'$  sono le “coordinate normali” nel senso che isolano i modi naturali fattorizzando l'equazione caratteristica. Questa fattorizzazione è passibile di una ben precisa interpretazione circuitale!

## Coordinate normali e sintesi/7

Consideriamo l'ulteriore trasformazione:

$$k' = Dk'', \quad D = \begin{pmatrix} t_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t_{13}^{-1} \end{pmatrix}$$

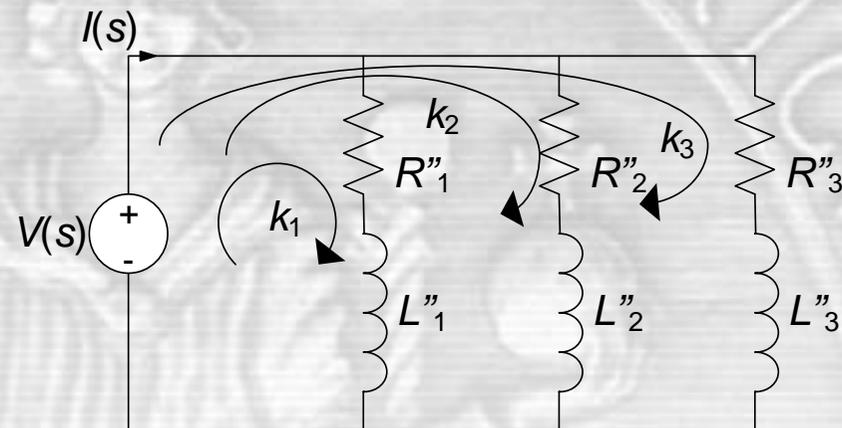
$$k = T \cdot D \cdot k'' = B \cdot k'', \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

dunque, a causa della presenza di una riga unitaria:

$$i_1 = k_1'' + k_2'' + k_3''$$

## Coordinate normali e sintesi/8

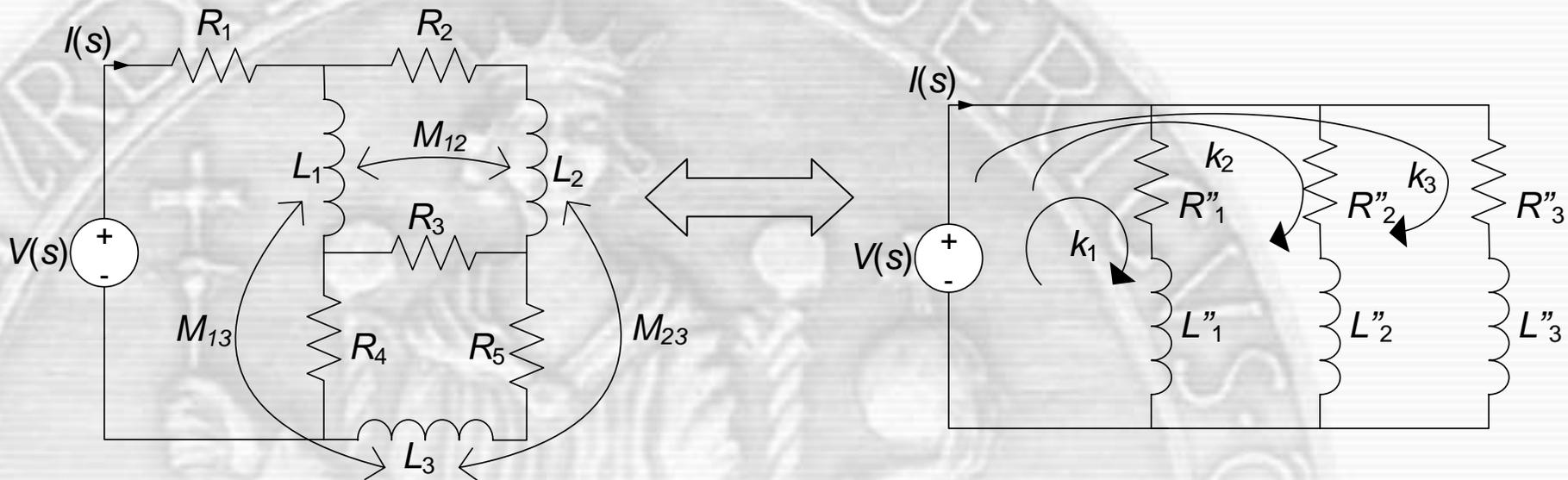
La trasformazione permette di vedere  $i_1$  come la somma (e non più in generale come una combinazione lineare) delle correnti di maglia  $k_i$ , realizzando una mera “scalatura” dei fattori diagonali nelle matrici  $L'$  ed  $R'$ . Ad essa corrisponde il circuito (equivalente ai fini dell'impedenza)



Esso coincide con la forma di Foster per la sintesi in parallelo, ottenuta dall'espansione in frazione parziale dell'ammettenza!

# Coordinate normali e sintesi/9

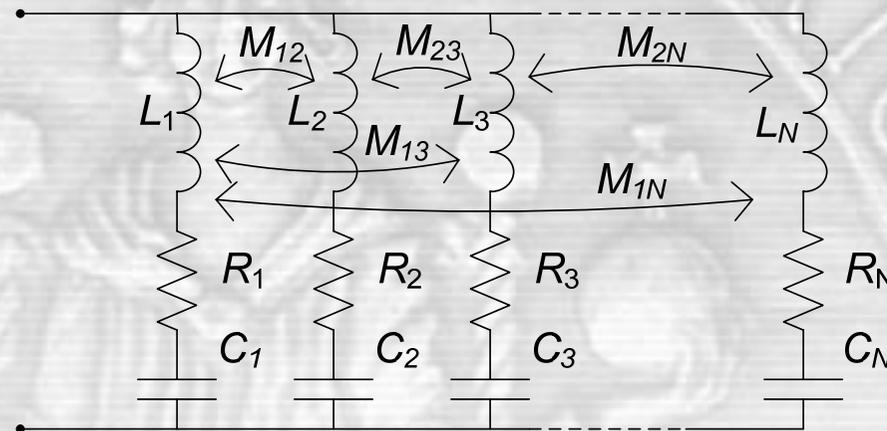
Osserviamo che si perviene ad un risultato analogo anche se il circuito di partenza presenta mutui accoppiamenti!



Dunque la possibilità di una sintesi di tipo Foster (serie o parallelo) è legata al problema della diagonalizzazione simultanea delle matrici. Questa è la limitazione di fondo per il caso generale di  $RL(K)C$

## Coordinate normali e sintesi/10

Un possibile schema generale di sintesi (parallelo) è quello in figura. Stiamo immaginando di aver simultaneamente diagonalizzato le matrici di resistenze e capacità, e la matrice delle induttanze ha invece i termini fuori diagonale



La questione di quali immetENZE si possono mettere nella forma di Foster è equivalente al problema della diagonalizzazione congiunta di tre matrici!

# Estensioni ai multiporta/1

L'estensione della sintesi al caso dei multi-porta passa per l'interpretazione delle trasformazioni lineari su matrici di multiporta in termini di trasformatori ideali\*.

Si può dimostrare che presa una matrice (ad esempio di impedenze  $Z$ ) e considerata la trasformazione  $Z'=A^TZA$ , con  $A$  matrice reale non singolare, il multiporta  $Z'$  può essere sempre realizzato con il multiporta  $Z$  opportunamente collegato ad un insieme (finito) di trasformatori ideali.

Dunque a partire da  $Z$  si può costruire un'intera classe di matrici di impedenze.

In un certo senso ciò è l'estensione al caso matriciale della proprietà di trasporto al primario per un trasformatore ideale  $Z'=k^2Z$ .

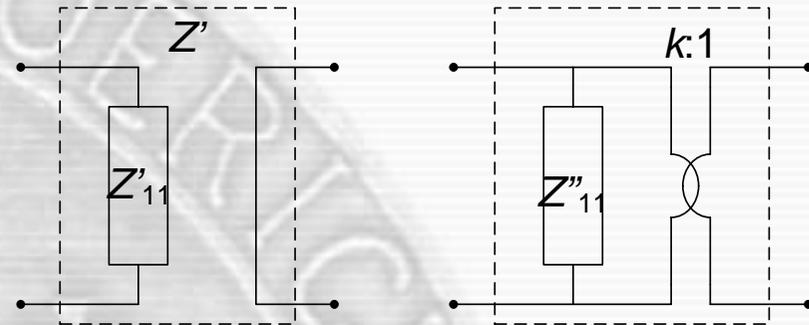
W. Cauer, "Ideale Transformatoren und lineare Transformationen", Elektrische Nachrichten Technik, 1932.

## Estensioni ai multiporta/2

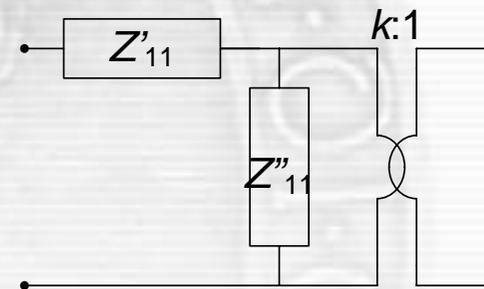
Consideriamo un doppio bipolo passivo  $Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}$  e poniamo:

$$Z = Z' + Z'' = \begin{pmatrix} Z'_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z''_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

$$Z''_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0, \quad k = \frac{Z''_{11}}{Z_{12}} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$



II

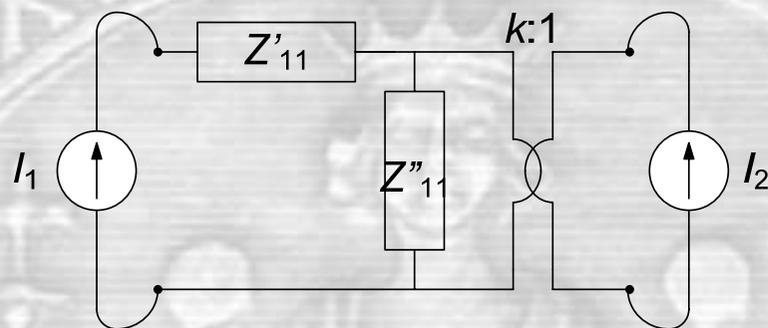


Dunque è possibile lo schema di sintesi (analogo al trasformatore). Il caso però di interesse è  $k$  "reale". Ciò è garantito se:

- il doppio bipolo ha un solo "tipo" di elementi (R, L o C)
- ci sono solo reattanze pure

## Estensioni ai multiporta/3

Analizziamo il circuito equivalente ottenuto



$$Z_{11} = Z'_{11} + Z''_{11}$$

$$Z_{22} = Z'_{11}/k^2$$

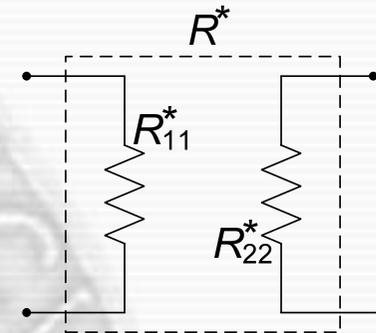
$$Z_{12} = Z''_{11}/k$$

$$\begin{pmatrix} Z'_{11} + Z''_{11} & Z''_{11}/k \\ Z''_{11}/k & Z'_{11}/k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z'_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + Z''_{11} \begin{pmatrix} 1 & 1/k \\ 1/k & 1/k^2 \end{pmatrix}$$

## Estensioni ai multiporta/4

Percorso alternativo. Supponiamo che esista una trasformazione reale non singolare per cui (per semplicità consideriamo pure resistenze):

$$R^* = T^T R T = \begin{pmatrix} R_{11}^* & 0 \\ 0 & R_{22}^* \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} R_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R_a^*} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{22}^* \end{pmatrix}}_{R_b^*}$$



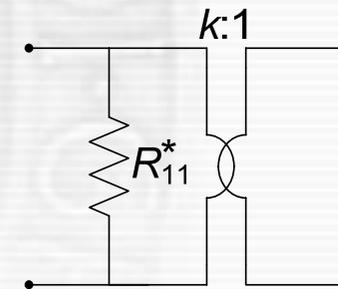
$$R_a = T^T R_a^* T$$

$$R_b = T^T R_b^* T$$

con  $R_a$  ed  $R_b$  singolari in quanto simili a  $R_a^*$  ed  $R_b^*$

Per la condizione  $R_{11} R_{22} - R_{12}^2 = 0$  ognuna di esse può essere scritta come:

$$R_i = R_{i11} \begin{pmatrix} 1 & R_{i12}/R_{i11} \\ R_{i12}/R_{i11} & R_{i22}/R_{i11} \end{pmatrix} = R_{i11} \begin{pmatrix} 1 & 1/k \\ 1/k & 1/k^2 \end{pmatrix}$$



## Estensioni ai multiporta/5

Dalla generalizzazione di quanto visto si può mostrare che la matrice delle impedenze (ammettenze) di un multiporta "lossless" può essere posta nella forma (matrice di Foster):

$$H(s) = R_0 + \sum_{n=1}^N \underbrace{\left( \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{\bar{r}_n}{s - \bar{p}_n} \right)}_{H_n(s)} \cdot R_n + R_\infty s$$

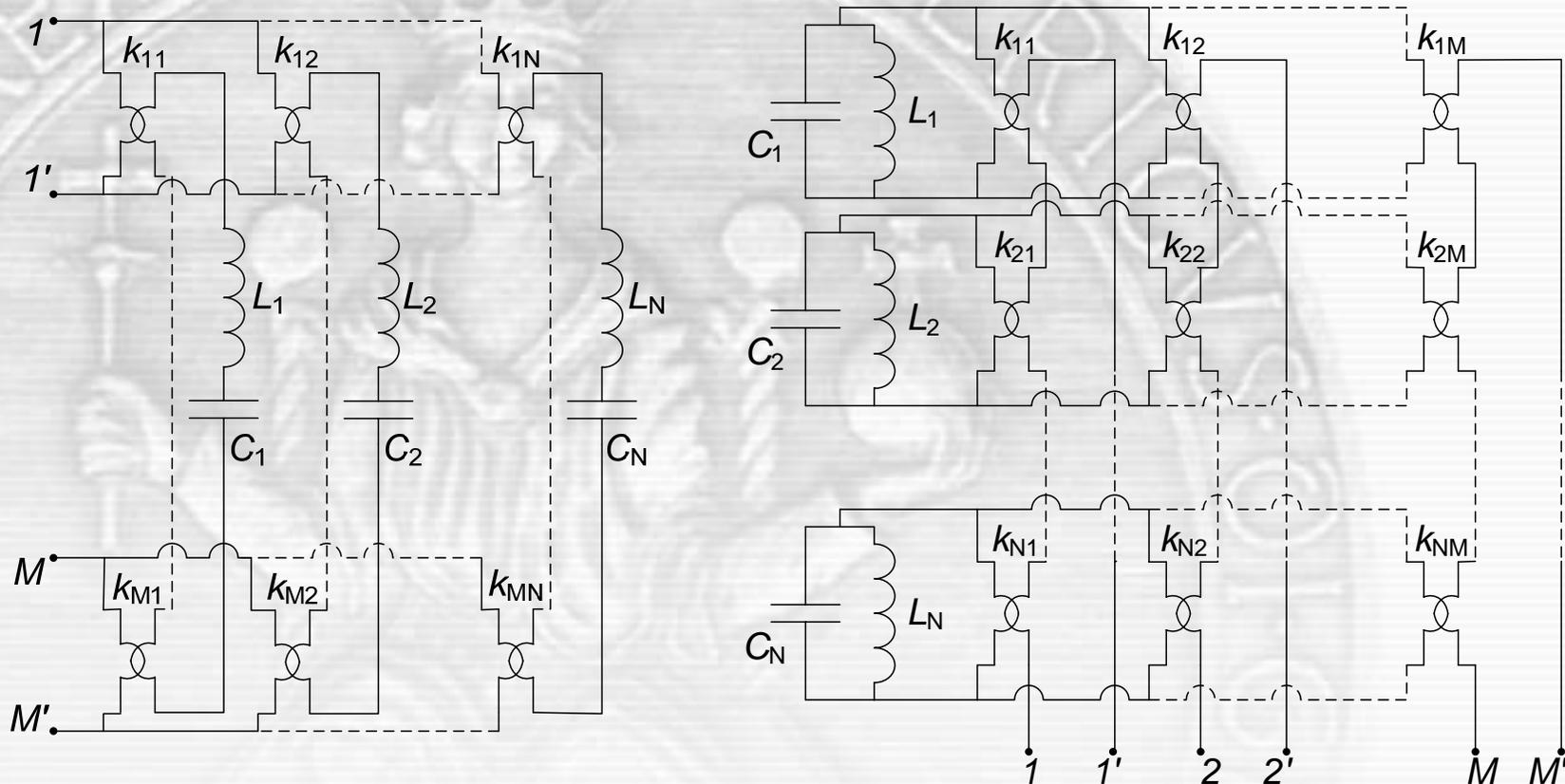
dove  $R_n$  sono matrici reali, simmetriche e semidefinite positive ed  $H_n(s)$  funzioni complesse scalari (impedenze o ammettenze).

Diagonalizzando le matrici  $R_n$  e scomponendo nella somma di matrici a rango 1 (come visto prima), per i singoli termini si ottengono espressioni del tipo:

$$H_n^{(i)}(s) = h_n^{(i)}(s) K_n^{(i)} = h_n^{(i)}(s) \begin{pmatrix} 1 & k_{11}^{(i)} & \cdots & k_{1M-1}^{(i)} \\ k_{11}^{(i)} & (k_{11}^{(i)})^2 & \cdots & k_{11}^{(i)} k_{1M-1}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1M-1}^{(i)} & k_{11}^{(i)} k_{1M-1}^{(i)} & \cdots & (k_{1M-1}^{(i)})^2 \end{pmatrix}$$

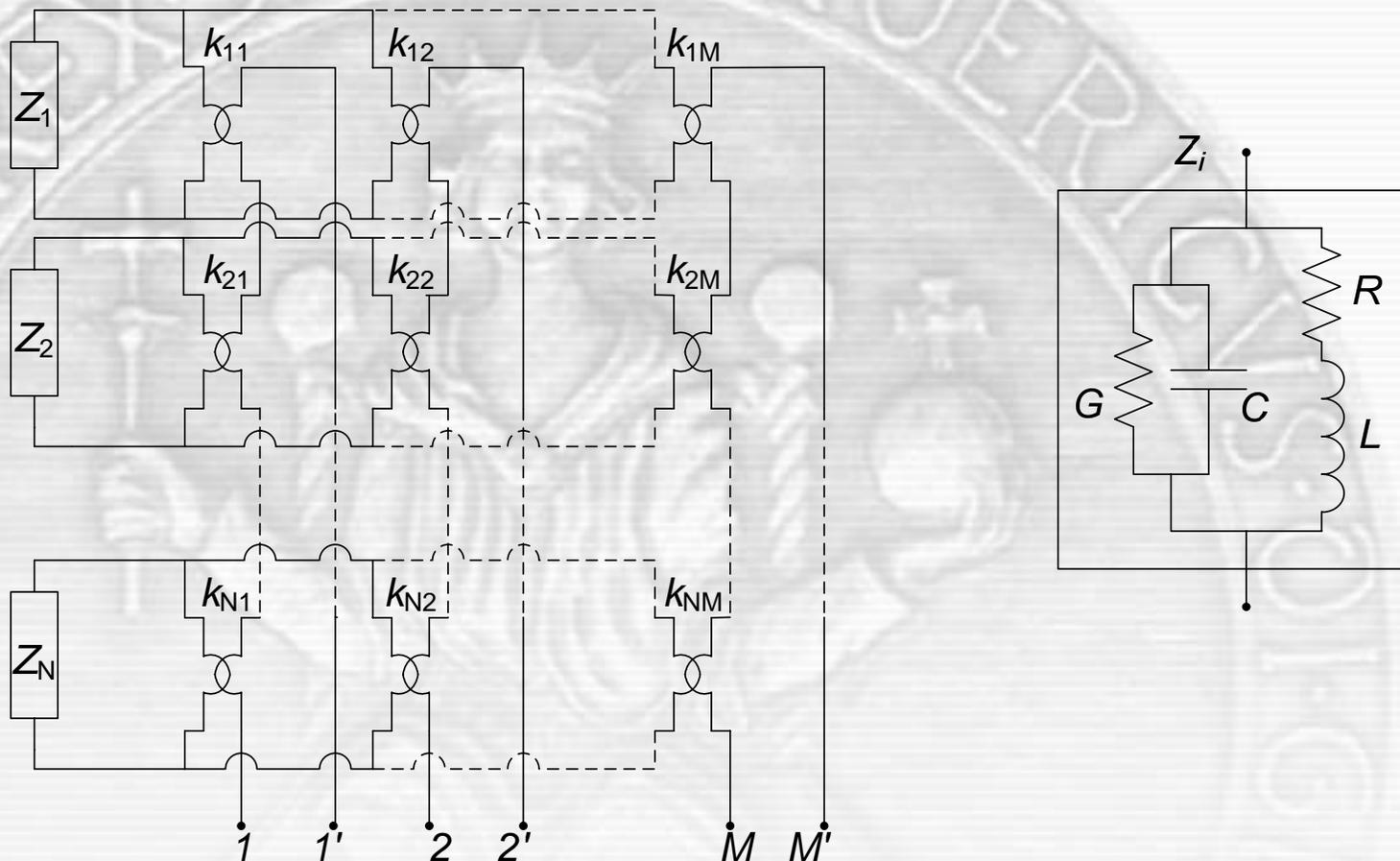
# Estensioni ai multiporta/6

La sintesi corrispondente è quella proposta da Cauer per i multiporta (nel lavoro originale erano considerati soli resistori)



# Estensioni ai multiporta/7

Val la pena osservare che è possibile estendere lo schema di sintesi la caso “lossy”; ad esempio per le impedenze:



## Sintesi: riassumendo ....

Il problema della sintesi è strutturalmente legato alla possibilità di diagonalizzare (con matrici “reali”) le equazioni.

Tale diagonalizzazione equivale (sia nel caso di singola impedenza che di multiporta) ad una espansione in frazione parziale cui corrisponde la sintesi di Foster con l'estensione (dovuta a Cauer) al caso “multi”

L'approccio a frazione parziale risulta “completo” per i casi di:

- impedenze con al più due tipi di elementi
- multiporta con un solo tipo di elementi o puramente reattivi
- multiporta con al più due tipi di elementi?

In tali casi è possibile anche realizzare in modo diretto la sintesi “concretamente passiva” ed è semplice tradurre in SPICE i risultati

Negli altri casi rappresenta invece solo un'approssimazione, di cui andrà a posteriori valutata la qualità!

# “Positive Fraction Vector Fitting”/1

L'idea è strutturalmente basata su:

1. una espansione (tipo “Foster”) per la quale viene forzata la passività sui singoli termini (cond. sufficiente);
2. i vincoli di passività su ciascun termine sono scritti in forma indipendente dalla frequenza
3. l'identificazione avviene in due step: dopo aver identificato i poli (con. VF), l'identificazione dei residui soggetti ai vincoli conduce ad un problema (standard) di ottimizzazione convessa (semi-definite programming)

•L. De Tommasi, D. Deschrijver, T. Dhaene, “**Single-Input-Single-Output Passive Macromodeling via Positive Fractions Vector Fitting**”, Proceedings 12th IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects, Avignon (France) 2008

•M. de Magistris, L. De Tommasi, D. Deschrijver, T. Dhaene, “**Validation of Positive Fraction Vector Fitting Algorithm in the identification of Passive Immittances**”, Proceedings 10th International Workshop on Inverse Problems in Electromagnetism, Ilmenau (Germany) 2008

•L. De Tommasi, M. de Magistris, D. Deschrijver and T. Dhaene, “**An Algorithm for Direct Identification of Passive Transfer Matrices with Positive Real Fractions via Convex Programming**,” (submitted to International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, J. Wiley)

# "Positive Fraction Vector Fitting"/2

1. Espansione tipo Foster  $H(s) = R_0 + \sum_{n=1}^N \left( \frac{R_n}{s - p_n} + \frac{\bar{R}_n}{s - \bar{p}_n} \right)$

$$R_0 \geq 0$$

$$R_n \geq 0 \text{ (termini con poli-residui reali)}$$

2. vincoli di passività

$$\begin{cases} -(\operatorname{Re}\{p_n\} \operatorname{Re}\{R_n\} + \operatorname{Im}\{p_n\} \operatorname{Im}\{R_n\}) \geq 0 \\ -(\operatorname{Re}\{p_n\} \operatorname{Re}\{R_n\} - \operatorname{Im}\{p_n\} \operatorname{Im}\{R_n\}) \geq 0 \end{cases}$$

3. identificazione

$$\{R_i\} = \operatorname{argmin}_{\{R_i\}} \left\| \operatorname{vec} \left( H(j\omega_k) - \tilde{H}(j\omega_k) \right) \right\|_2$$

# “Positive Fraction Vector Fitting”/3

“pseudo-codice” CVX

$$\{R_i\} = \operatorname{argmin}_{\{R_i\}} \left\| \operatorname{vec} \left( H(j\omega_k) - \tilde{H}(j\omega_k) \right) \right\|_2$$

subject to:

$$R_0 \geq 0$$

for  $n = 1:N$

if  $p_n$  is real

$$R_n \geq 0$$

else if  $p_n$  and  $p_{n+1}$  are a complex conjugate pair

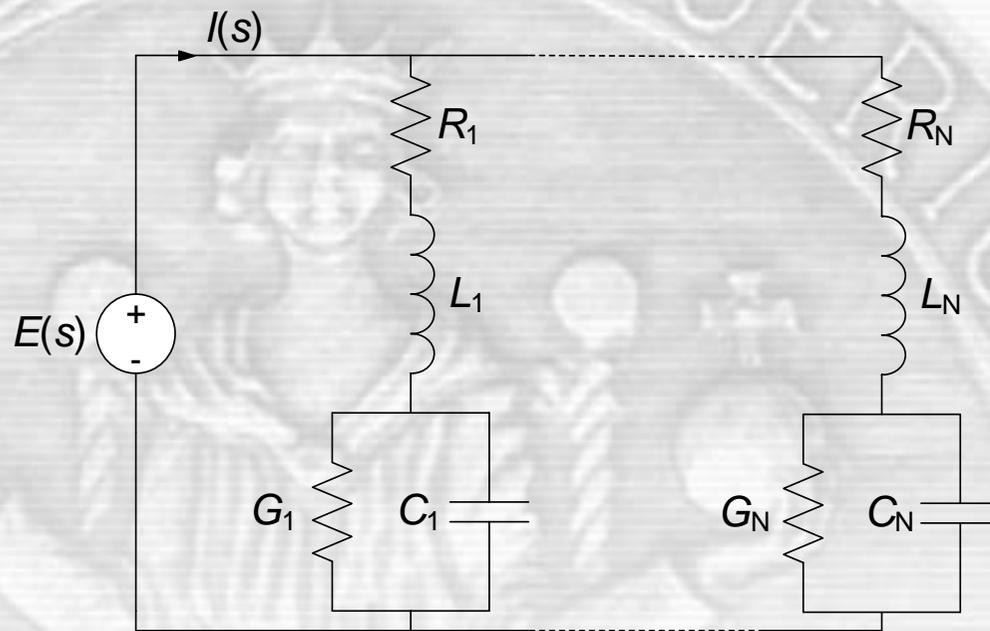
$$-[\operatorname{Re}(p_n)\operatorname{Re}(R_n) + \operatorname{Im}(p_n)\operatorname{Im}(R_n)] \geq 0$$

$$-[\operatorname{Re}(p_n)\operatorname{Re}(R_n) - \operatorname{Im}(p_n)\operatorname{Im}(R_n)] \geq 0$$

end

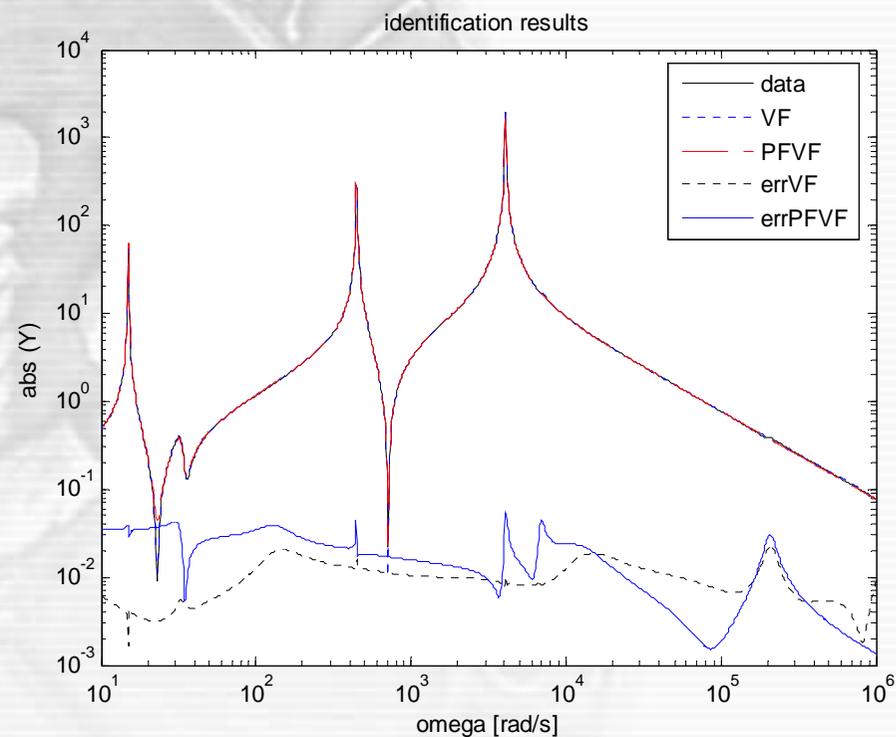
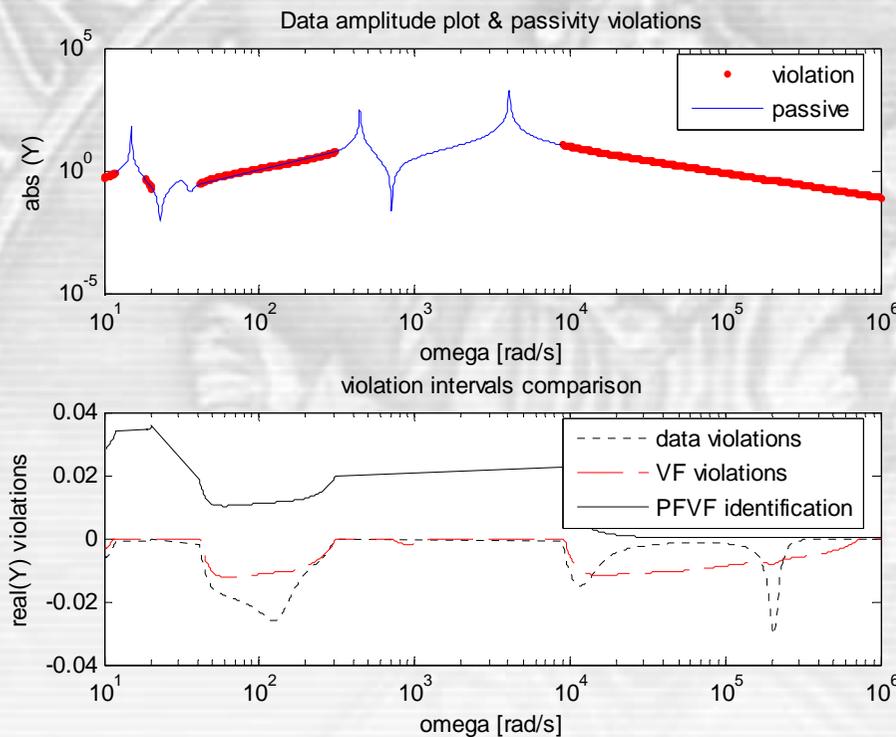
# PFVF 1-D: validazione/1

Caso monodimensionale (impedenze/ammettenze)



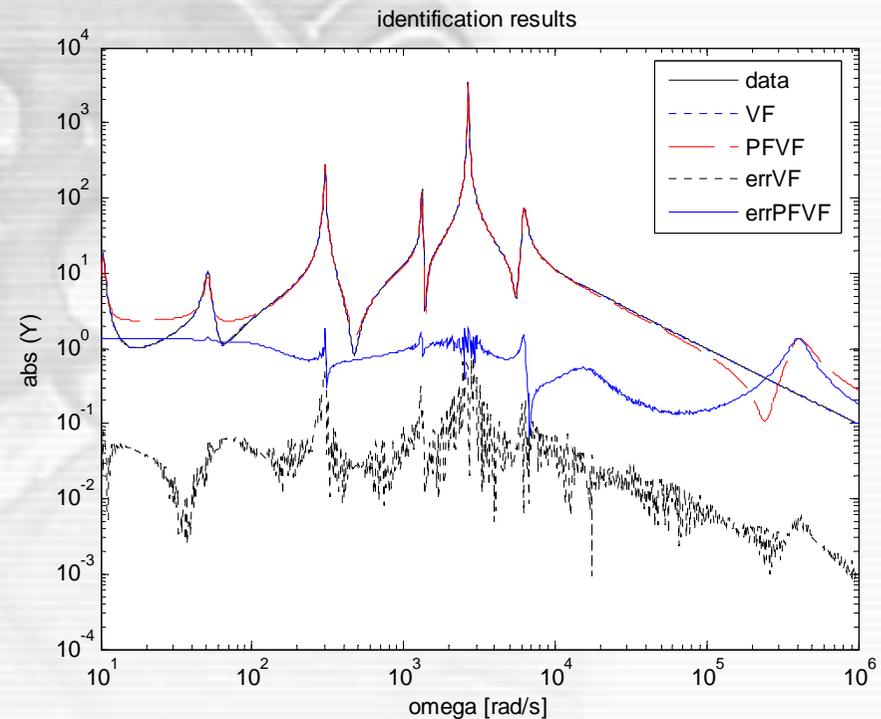
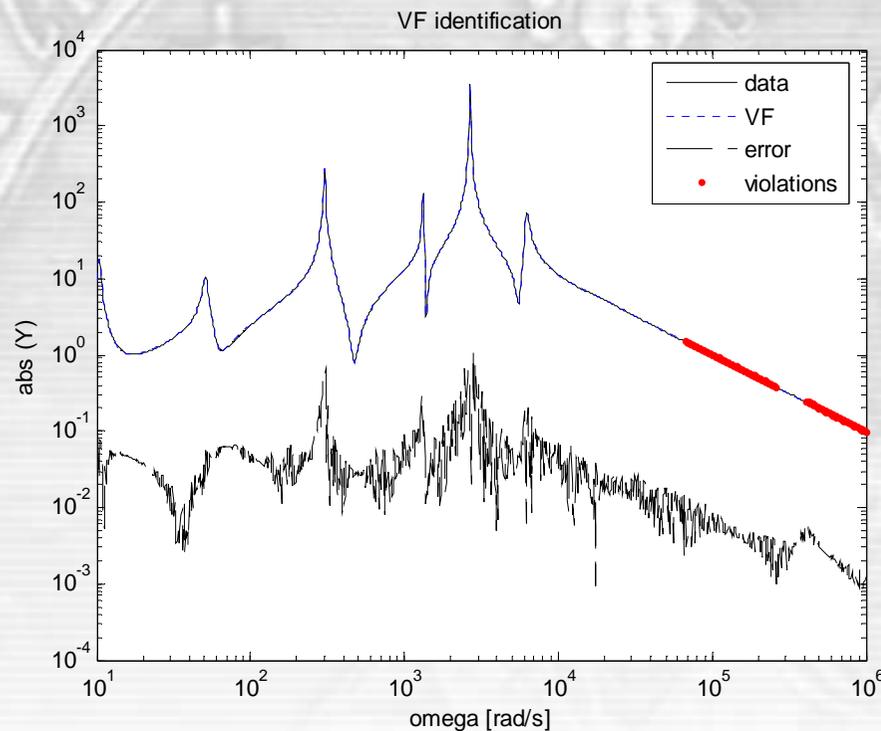
# PFVF 1-D: validazione/2

- Impedenza con 15 poli (identificata con 30), con un livello di violazioni di passività del 4% (esteso a circa il 60% del range in frequenza)
- Errori RMS 1,31e-4 per il VF, 2,58e-4 per il PFVF
- Violazioni di passività corrette al 100%.



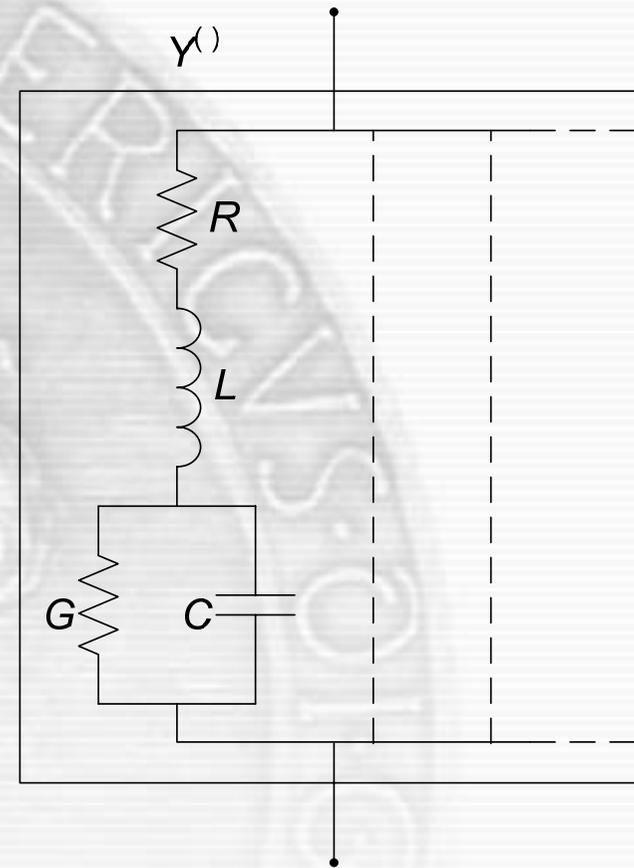
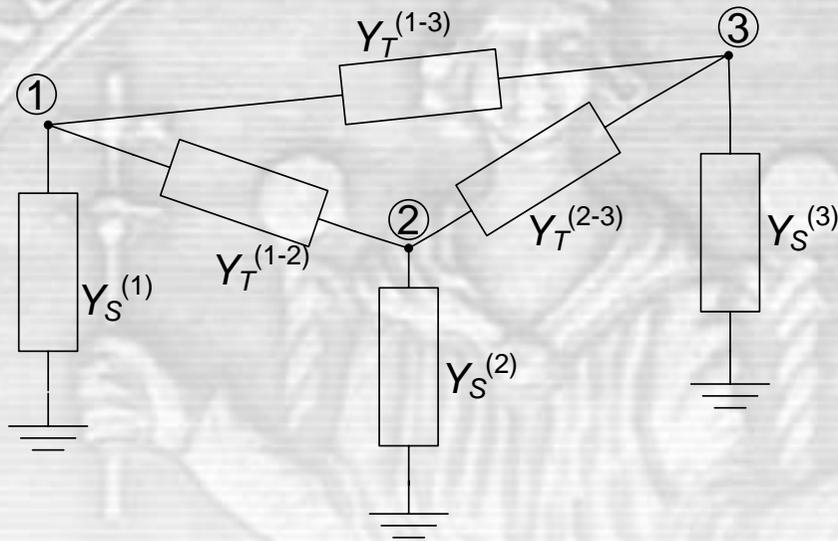
# PFVF 1-D: validazione/3

- Impedenza passiva con 15 poli (identificata con 30), con aggiunta di errore numerico 1%. L'identificazione con il VF porta ad un esteso intervallo di violazioni.
- Il PFVF corregge completamente le violazioni sebbene con una certa perdita di accuratezza



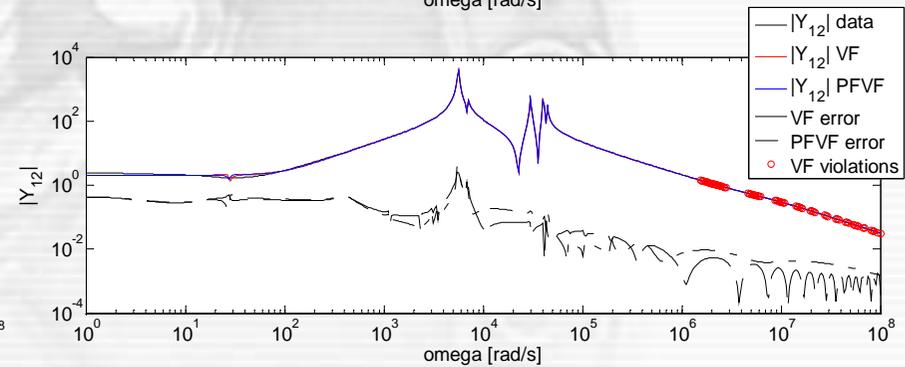
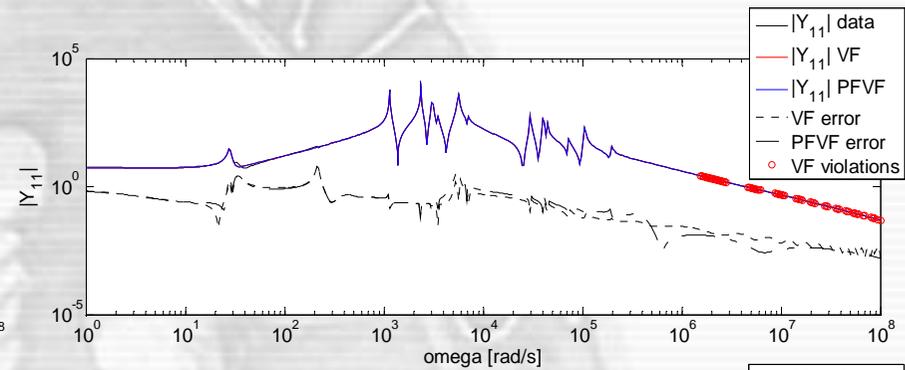
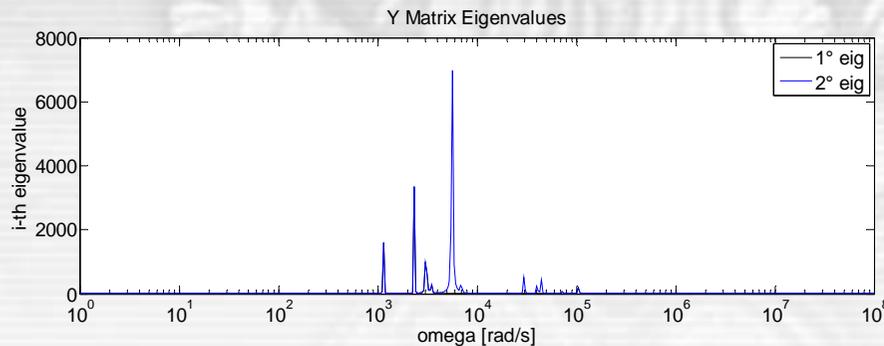
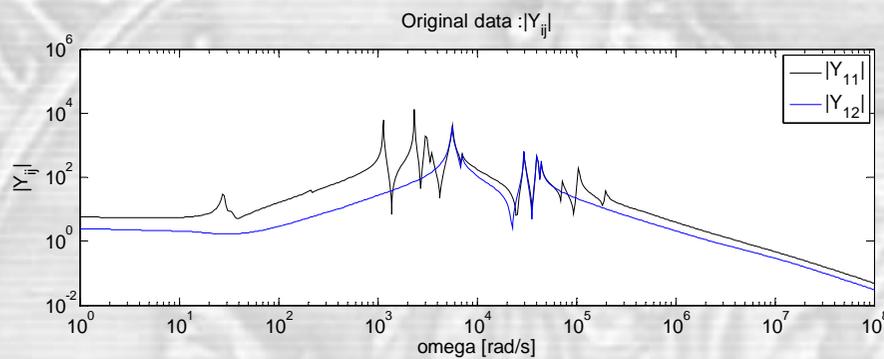
# PFVF multi-D: validazione/1

Caso multi-dimensionale (matrice ammettenze multiporta)



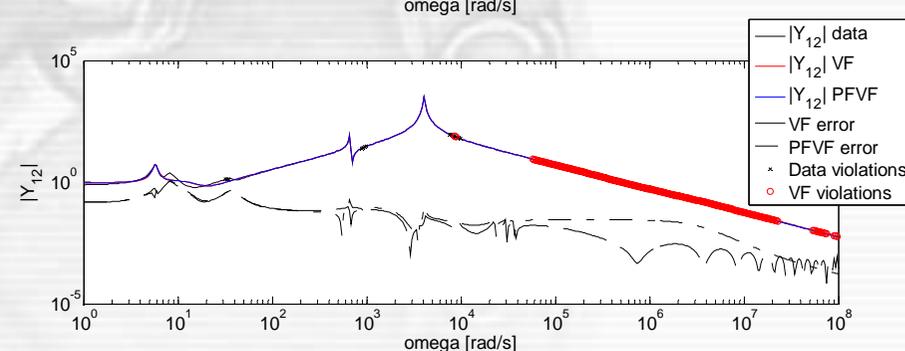
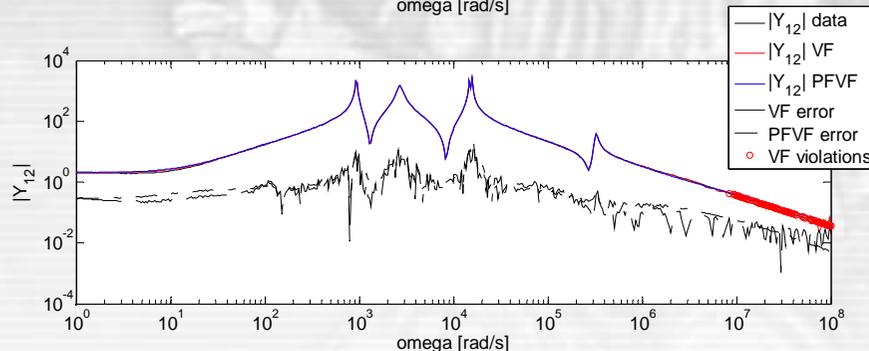
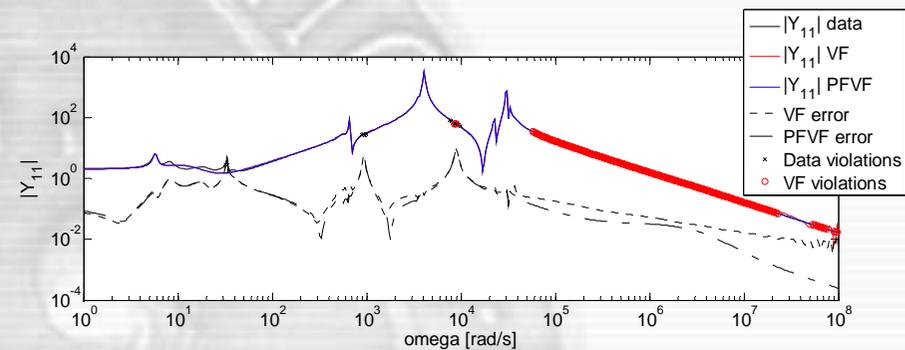
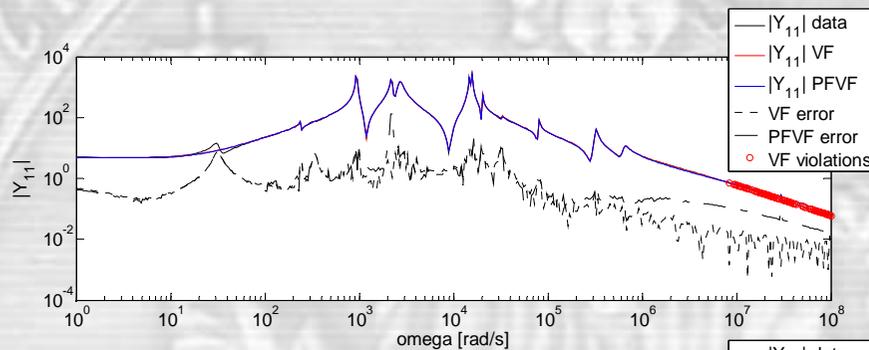
# PFVF multi-D: validazione/2

- Caso 2x2 120 poli e dati passivi non rumorosi, identificazione VF con violazioni di passività (circa 12% in banda)
- Errori RMS 0.035 per il VF, 0.034 per il PFVF
- Violazioni di passività corrette al 100% con PFVF.



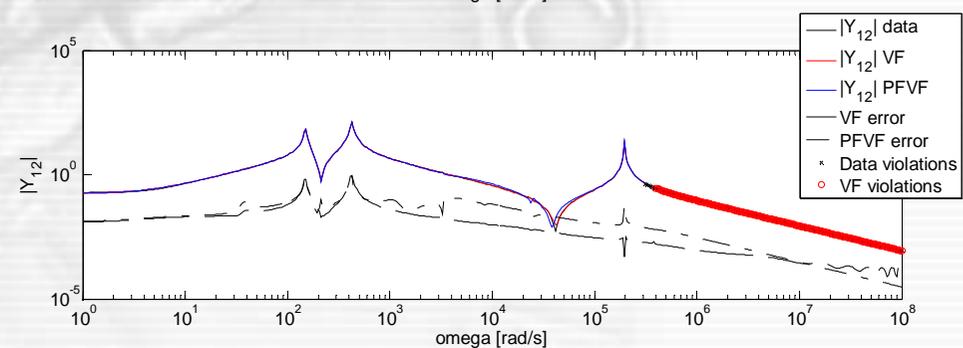
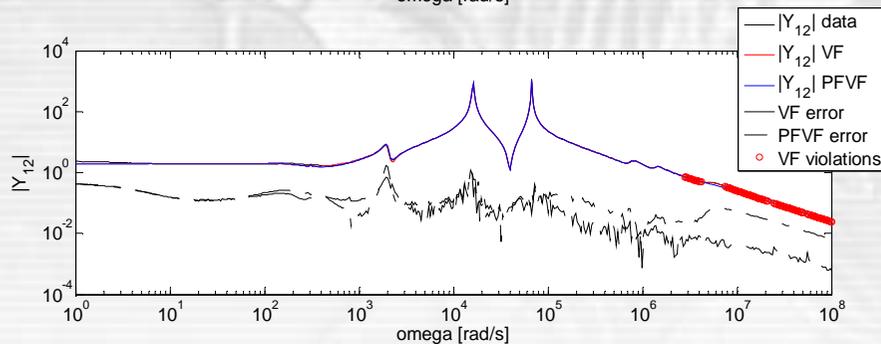
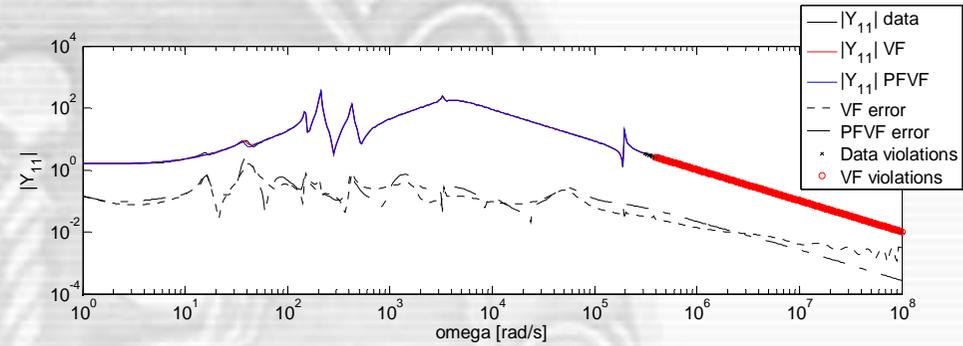
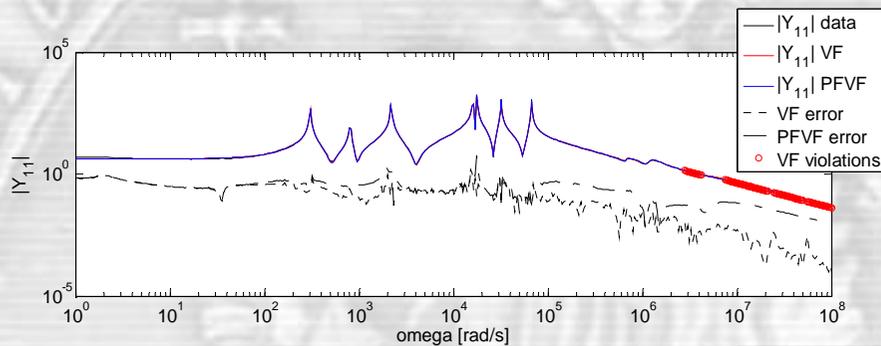
# PFVF multi-D: validazione/3

- b) caso 2x2 120 poli e dati passivi e rumorosi (2%) identificazione VF con violazioni di passività corrette dal PFVF
- c) caso 2x2 80 poli dati con violazioni di passività del (3%) che il VF estende a circa il 36%



# PFVF multi-D: validazione/4

- d) caso 2x2 120 poli identificato con 40 poli, dati passivi e rumorosi (1%) con violazioni di passività del VF corrette dal PFVF
- e) caso 4x4 42 poli dati non passivi (2% della banda)



## PFVF multi-D: validazione/5

d) caso 2x2 120 poli identificato con 40 poli, dati passivi e rumorosi (2%) con violazioni di passività corrette dal PFVF

e) caso 4x4 42 poli dati non passivi (2% della banda)

case	data poles	Ident. poles	data noise	error		viol. band %	
				VF	PFVF	Data	VF
a)	120	120	0%	0.035	0.034	0	12,4
b)	120	120	2%	0.059	0.08	0	11,4
c)	80	80	0%	0.095	0.069	3	35,6
d)	120	40	1%	0.033	0.071	0	15,6
e)	44	44	0%	0.055	0.039	1,6	30,2

# PFVF multi-D: validazione/6

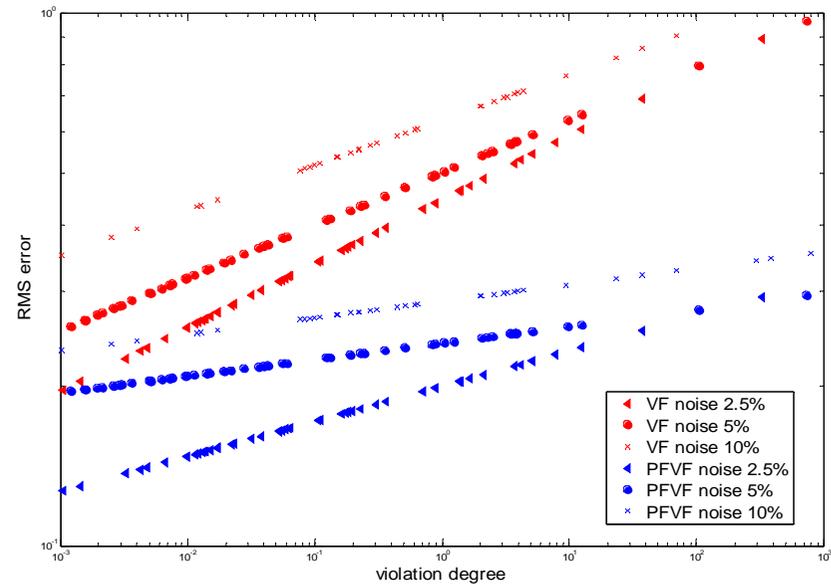
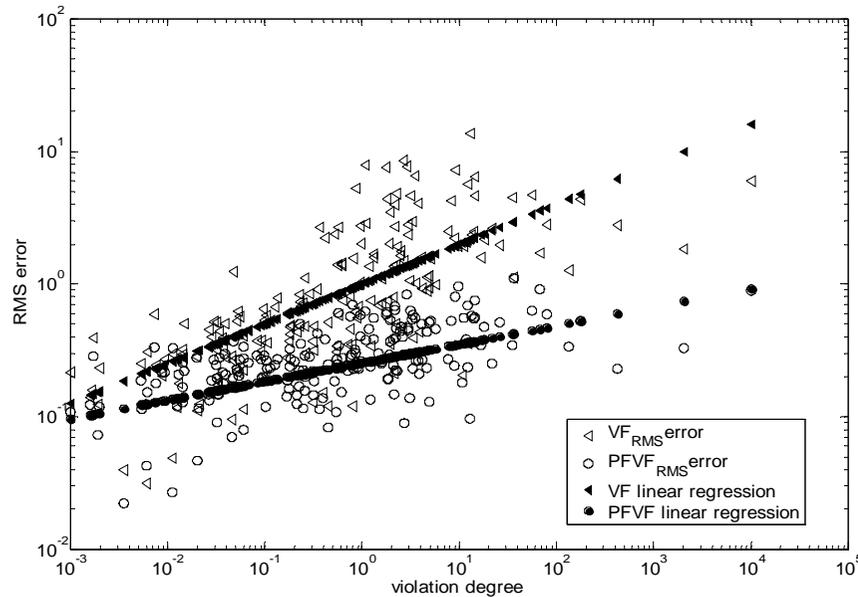
a) regressioni lineari su 200 identificazioni

con 40 poli, dati non rumorosi

b) regressioni lineari su 240 identificazioni

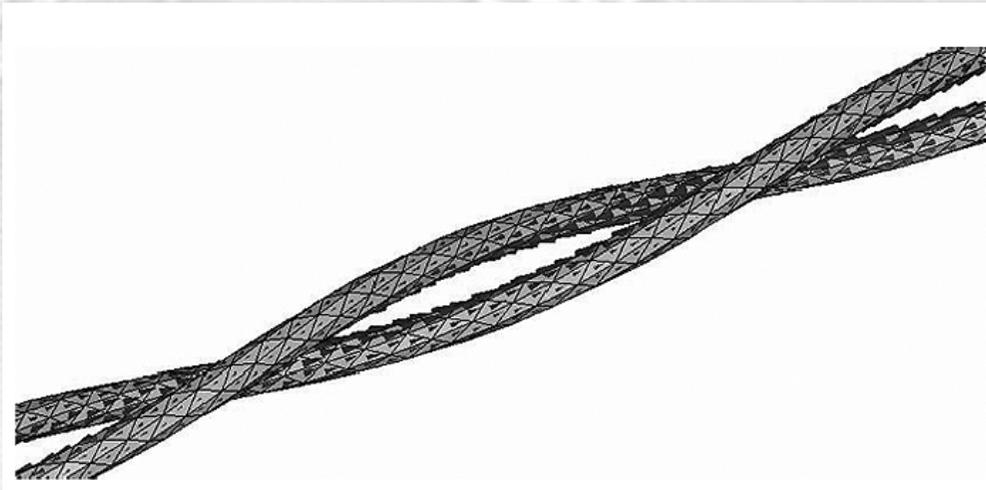
con 40 poli, dati rumorosi

$$\text{viol\_degree} = -\min\left(\frac{\min(\text{eig}(Y(\omega)))}{\max(\text{eig}(Y(\omega)))}\right)$$



## PFVF: un caso test/1

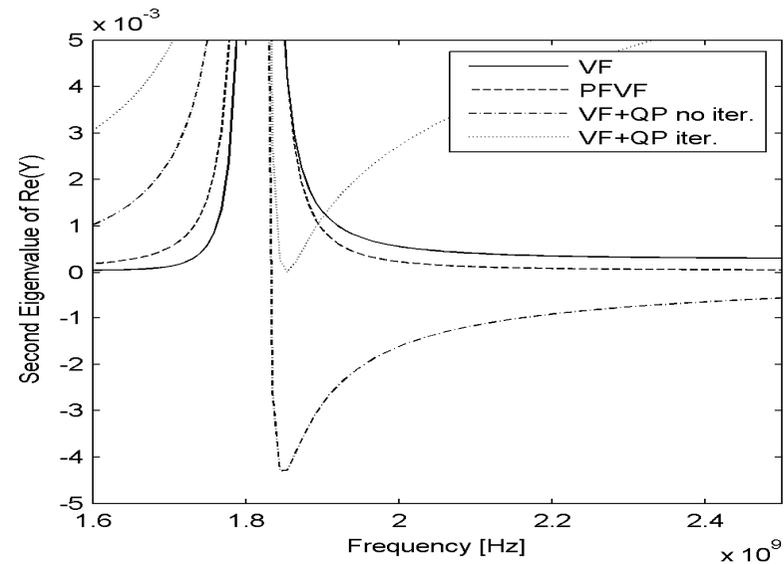
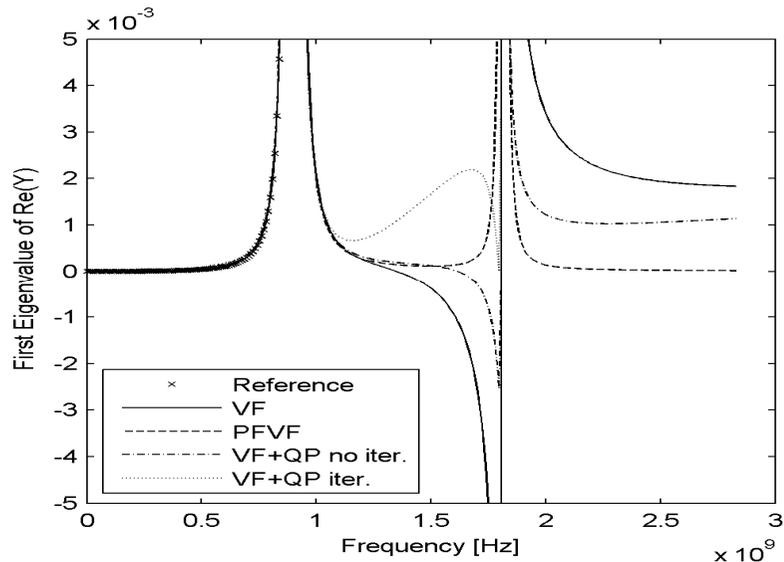
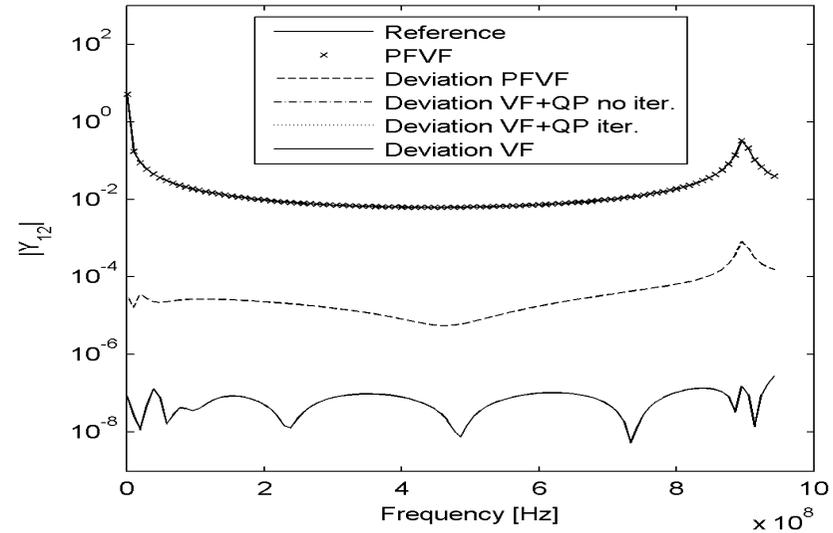
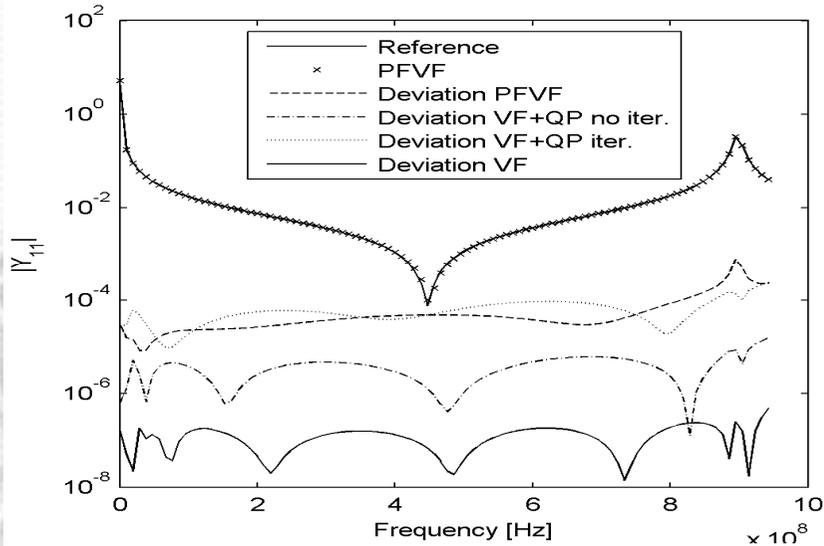
- Caso test: cavo twistato non schermato (UTP):
- raggio 0.25 mm, distanza centro-centro 0.9 mm, periodo di pitch 17 mm
- Intervallo in frequenza 0-1GHz



Modello elettromagnetico  
realizzato con SurfCode

Identificazione dati con PFVF e  
QPpassive, con 16 poli (10  
iterazioni VF)

# PFVF: un caso test/2



## Alcune conclusioni (provvisorie)

- L'approccio a frazione parziale e ottimizzazione convessa sembra funzionare sorprendentemente bene ....
- La sua formulazione ne permette un'interpretazione puramente circuitale e una agevole sintesi concretamente passiva ....
- È sicuramente molto più generale della maggior parte di quelli proposti in letteratura, che in alcuni casi ne sono sottocasi "propri"
- Ha un limite intrinseco nella "non completezza" della base, che però allo stato sembrerebbe non risultare particolarmente vincolante ...
- Nella validazione abbiamo verificato limiti di robustezza, non convergenza, non verifica dei vincoli
- Deve superare numerosi pregiudizi nell'ambiente del macro-modeling a causa del "peccato d'origine" (formulazione di ottimizzazione)

# Problemi aperti e lavoro futuro

- Completamento implementazione caso multi con trasformatori per generazione dati
- Sintesi concretamente passiva caso multi
- Miglioramento robustezza numerica e svincolo dal CVX
- Nuova validazione e studio delle proprietà
- Analisi di altri casi test dalle applicazioni
- Ingegnerizzazione codice e realizzazione sito web
- Approfondimento approccio con tecniche (pseudo-) diagonalizzazione di  $N$  matrici
- Implementazione approccio basato su Positive Real lemma in termini più “circuitali”

# Riferimenti bibliografici

1. R. Foster "A reactance theorem", Bell Syst. Techn. Journ., vol.3 1924.
2. O. Brune, "Synthesis of a Finite Two Terminal Network Whose Driving-Point Impedance is a Prescribed Function of Frequency", J. of Mathematical Physics, vol 10, 1931.
3. N. Howitt, "Group Theory and the Electric Circuit", Physical Review, vol.37 1931.
4. W. Cauer, "Ideale Transformatoren und lineare Transformationen", Elektrische Nachrichten Technik 1932.
5. V. Belevitch "Summary of the History of Circuit Theory", Proceedings of the IRE, 1961.
6. E. Guillemin "Synthesis of Passive Networks", (Voll. I-II), J. Wiley & Sons, 1957
7. W. Cauer, "Synthesis of Linear Communication Networks", (Voll. I-II), McGRAW HILL, 1958.
8. V. Belevitch, "Classical Network Theory", Holden-Day, 1968
9. Anderson B.D.O., Vongpanitlerd S., "Network Analysis and Synthesis", Prentice Hall, 1973.
10. S. Darlington, "A History of Network Synthesis and Filter Theory for Circuit Composed of Resistors, Inductors, and Capacitors", IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, vol.46, 1999.
11. Gustavsen B., Semlyen A., "Rational Approximation of Frequency Domain Responses by Vector Fitting", IEEE Trans. on Power Delivery, vol.14, 1999.
12. Gustavsen B., Semlyen A., "Rational Approximation of Frequency Domain Responses by Vector Fitting", IEEE Trans. on Power Delivery, vol.14, 1999.
13. <http://www.energy.sintef.no/produkt/VECTFIT/index.asp>
14. Gustavsen, B. and Semlyen, A., "Enforcing passivity for admittance matrices approximated by rational functions", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 16, No. 1, 2001.
15. Grivet-Talocia, S. "Passivity enforcement via perturbation of Hamiltonian matrices", IEEE Trans. on Circuit and Systems I, Vol. 51, No. 9, 2004.
16. T. Mangold, P. Russer, "Full-wave modeling and automatic equivalent-circuit generation of millimeter-wave planar and multilayer structures", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, Vol:47, 1999
17. P. Triverio, S. Grivet-Talocia et al., "Stability, Causality and Passivity in Electrical Interconnect Models", IEEE Trans. on Advanced Packaging, 2007
18. S. Grivet-Talocia, "On driving non passive macro-models to instability", Int. Journal of Circuit Theory and Applications, 2008
19. C.P. Coelho, et. al., "A convex programming approach for generating guaranteed passive approximations to tabulated frequency-data", IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. 23, 2004
20. M. de Magistris, L. De Tommasi, "Identification of broadband passive macromodels for electromagnetic structures", Compel vol.26 n° 2, 2007.