

CAPITOLO 6

ELEMENTI CIRCUITALI A PIÙ TERMINALI

6.1 Elementi circuitali con più di due terminali. Circuiti di N-poli

Sebbene i bipoli siano gli elementi circuitali più comuni, esistono numerosi elementi circuitali con N terminali (ad esempio, quelli che rappresentano i transistori, l'amplificatore operazionale, il trasformatore, figure 1a, 1b e 1c). Un elemento a N terminali può essere anche un circuito costituito da soli bipoli, ad esempio da resistori (figura 1d). Il funzionamento di questi elementi verrà descritto in questo capitolo.

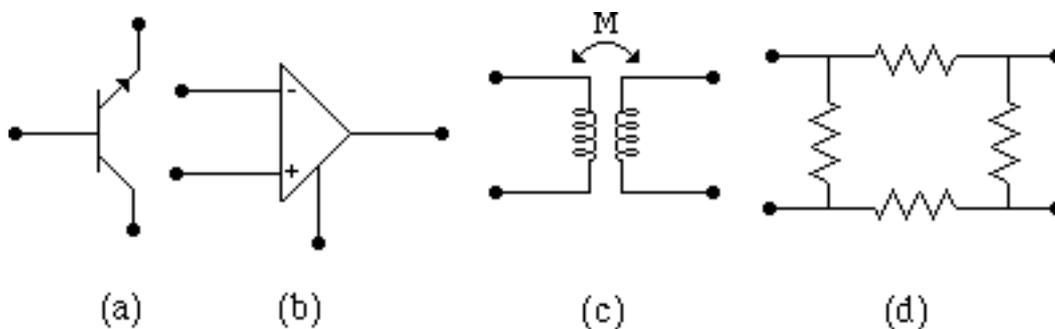


Figura 1 Transistore *npn* (a), amplificatore operazionale (polarizzato) (b), induttori accoppiati (trasformatore) (c) e quadripolo di resistori (d).

In questo paragrafo vengono affrontati questi due problemi:

(a) come si estendono le leggi di Kirchhoff a un circuito costituito anche da elementi con più di due terminali?

(b) come si caratterizza un elemento con N terminali?

A un elemento con N terminali si dà il nome di **N-polo**. Il funzionamento di un N -polo è descritto, come nel caso del bipolo, attraverso le relazioni tra le storie temporali delle tensioni tra i terminali e delle correnti nei terminali. Merita tuttavia una breve discussione il modo in cui possono essere scelte tali correnti e tali tensioni. Per non appesantire l'esposizione si faccia riferimento all'esempio descritto in figura 2: esso rappresenta un circuito elettrico costituito da due bipoli e da un componente con tre terminali (a un elemento con tre terminali si dà il nome di **tripolo**).

Un componente con tre terminali è caratterizzato dalle tre correnti i_1 , i_2 e i_3 e dalle tre tensioni v_{13} , v_{21} e v_{23} , e il funzionamento è descritto dalle relazioni tra le storie temporali delle v_{13} , v_{21} e v_{23} e delle i_1 , i_2 e i_3 . Queste relazioni dipendono tutte dalla costituzione fisica del componente? La risposta è no. Ora verrà mostrato che le tre correnti i_1 , i_2 e i_3 non sono tra loro indipendenti, e così anche le tre tensioni v_{13} , v_{21} e v_{23} .

Come per i circuiti costituiti da soli componenti a due terminali, valgono (in forma approssimata) nella regione esterna alle superfici limite di ogni componente le leggi

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{ndS} = 0, \quad (1)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{tdl} = 0, \quad (2)$$

dove Σ e γ siano, rispettivamente, una superficie e una linea chiuse, che non taglino nessuna superficie limite. Si applichi la (1) a una superficie chiusa che racchiuda il componente a tre terminali. Si ottiene (i_h è la corrente nel terminale “h” e il riferimento per il verso è la freccia che punta verso la superficie limite):

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0. \quad (3)$$

Come nel caso dei componenti a due terminali, le tre correnti i_1 , i_2 e i_3 non sono tra loro indipendenti: solo due lo sono (nel caso di un componente a due terminali solo una corrente è indipendente).

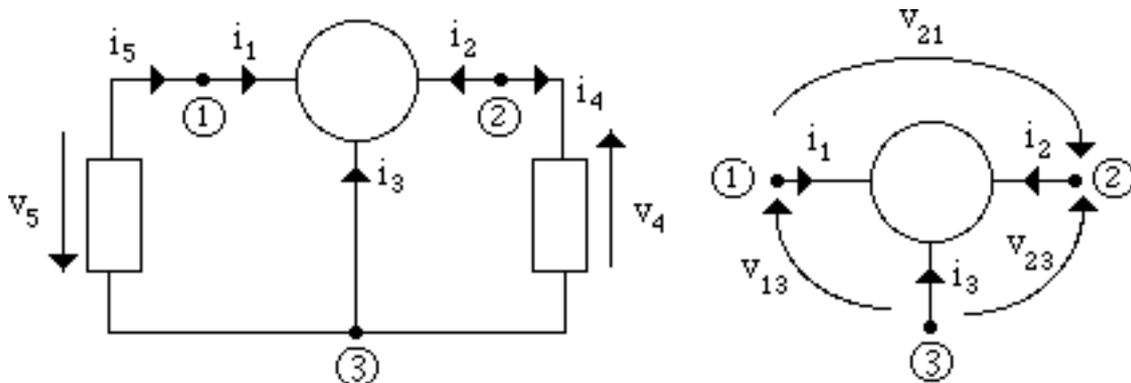


Figura 2 Un circuito costituito da due bipoli e un tripolo.

Si applichi, ora, la (2) a una linea chiusa che passi per i morsetti del tripolo. Si ottiene (v_{ij} è la tensione tra il terminale “i” e il terminale “j” e il riferimento per il verso è la freccia che punta verso il terminale “i”)

$$v_{13} + v_{21} - v_{23} = 0. \quad (4)$$

Quindi anche le tre tensioni v_{13} , v_{21} e v_{23} non sono indipendenti: solo due lo sono (il componente a due terminali è caratterizzato da una sola tensione).

Allo scopo di individuare un insieme di correnti e tensioni indipendenti, tra tutti i terminali del componente se ne scelga uno di riferimento; nell'esempio considerato viene scelto il terminale “3” come terminale di riferimento. A esso si attribuisca il nome di **terminale comune**. Si considerino le correnti i_1 , i_2 negli altri 2 terminali. Esse sono indipendenti, cioè nessuna di esse è deducibile dalle altre mediante la legge per le correnti (1). Esse inoltre soddisfano la condizione di completezza.

Considerata infatti la corrente nel terminale comune, essa può essere espressa in funzione delle altre due attraverso la relazione

$$i_3 = -i_1 - i_2. \quad (5)$$

Si considerino, poi, le tensioni tra ciascuno dei terminali diversi da quello comune e quest'ultimo, orientate secondo le frecce che procedono da quello comune agli altri terminali. Esse sono indipendenti, cioè nessuna di esse è deducibile dalle altre mediante la legge per le tensioni (2). Esse inoltre soddisfano la condizione di completezza. La tensione tra due terminali diversi da quello comune può essere espressa in funzione delle altre due attraverso la relazione

$$V_{21} = V_{23} - V_{13}. \quad (6)$$

Tenendo conto dei vincoli imposti dalle (5) e (6), il tripolo è completamente descritto dalle due correnti i_1 , i_2 e dalle due tensioni v_{13} , v_{23} . Le correnti i_1 , i_2 sono le **correnti descrittive** del componente e le tensioni v_{13} , v_{23} sono le **tensioni descrittive** (l'insieme delle correnti e delle tensioni descrittive dipende dalla scelta del terminale comune). L'unione di questi due insiemi di grandezze è in grado di caratterizzare univocamente il componente e consente, inoltre, la determinazione di tutte le altre: esso costituisce un *insieme minimo fondamentale*. (Un bipolo ha una sola corrente e una sola tensione descrittiva).

Il funzionamento di un tripolo è descritto attraverso due relazioni indipendenti tra le correnti e le tensioni descrittive: solo esse dipendono dalla costituzione fisica dell'oggetto e costituiscono le **relazioni costitutive** del componente. Nei paragrafi successivi verranno descritte le relazioni costitutive di alcuni N-poli.

Si consideri, ora, un componente con N terminali (figura 3). Per la legge delle correnti (1) solo (N-1) correnti del N-polo sono indipendenti: la restante corrente è legata alle altre attraverso la (1). Le tensioni di un N-polo sono $N(N-1)$. Per la legge delle tensioni (2) solo (N-1) tensioni sono indipendenti, le altre sono legate a quelle indipendenti attraverso la (2). Si ordinino (ad arbitrio) i terminali attraverso i numeri naturali che vanno da 1 a N e, si scelga il terminale “N” come terminale comune. Allora le correnti e le tensioni descrittive sono, rispettivamente,

$$i_1, i_2, \dots, i_{N-1}, \\ V_{1N}, V_{2N}, \dots, V_{N-1N};$$

i_h è la corrente nel h-esimo terminale e v_{hN} è la tensione tra il terminale “h” e il terminale comune “N”. La corrente i_N nel terminale comune vale

$$i_N = - \sum_{h=1}^{N-1} i_h, \quad (7)$$

e la tensione v_{hk} tra il terminale “h” e il terminale “k” (con h e k diversi da N) vale

$$V_{hk} = V_{hN} - V_{kN}. \quad (8)$$

Il funzionamento di un N-polo è descritto da $(N-1)$ relazioni tra le correnti e le tensioni descrittive, che dipendono solo dalla costituzione fisica del componente che l'elemento rappresenta. L'insieme di queste relazioni costituiscono le **relazioni costitutive** dell'N-polo.

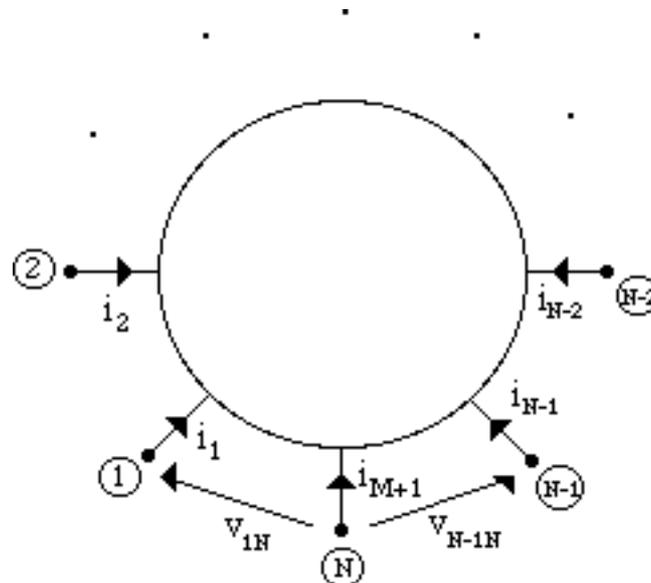


Figura 3 Caratterizzazione dell'N-polo attraverso le correnti e le tensioni descrittive; “N” è il terminale comune.

Una volta scelto il terminale comune e quindi l'insieme delle correnti e delle tensioni descrittive, è possibile associare a questo insieme un grafo orientato. Si consideri dapprima il tripolo illustrato in figura 2 e si scelga il terminale “3” come terminale comune (figura 4a). Si costruisca il grafo a stella ottenuto collegando i morsetti “1” e “2” a quello comune “3”; i due lati sono orientati in modo tale che le frecce confluiscono nel morsetto comune e quindi siano concordi con i riferimenti per i versi delle correnti descrittive. A ogni lato si associno la corrente e la tensione descrittive, corrispondenti. La freccia dell'arco è riferita alla corrente e gli estremi dell'arco alla tensione. Si può dare una immagine concreta a queste correnti e tensioni, pensandole come le correnti e le tensioni di bipoli fittizi collegati ai morsetti secondo gli archi del grafo (su ogni lato viene fatta la convenzione dell'utilizzatore). In questa rappresentazione non compaiono la corrente nel terminale comune e la tensione tra i terminali “1” e “2”. Ricordiamoci che esse possono essere determinate dalle correnti e tensioni descrittive attraverso le (3) e (4).

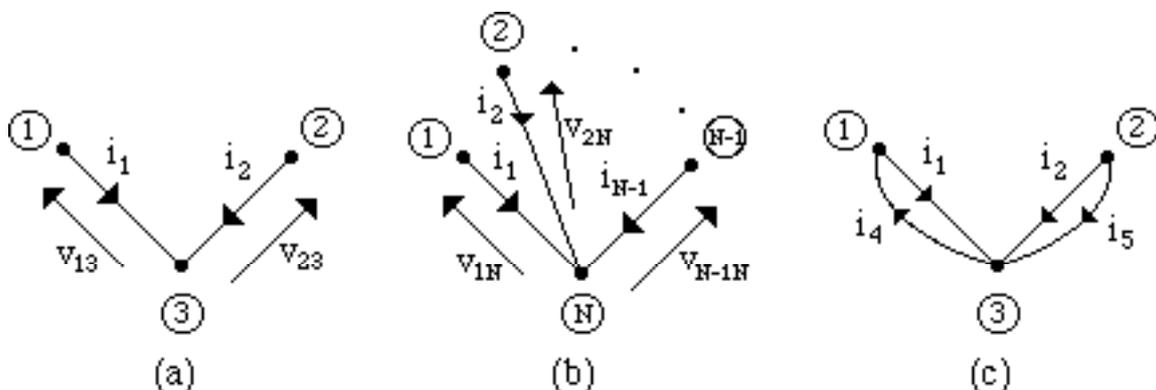


Figura 4 grafo del tripolo (a), dell'N-polo (b) e del circuito di figura 2a.

Ogni volta che in un circuito figurino uno o più componenti con N terminali, il grafo del circuito può essere costruito operando al solito modo per ciò che riguarda i bipoli, e sostituendo al componente con N terminali uno schema del tipo riportato in figura 4b; il terminale “ N ” è stato scelto come terminale comune (eliminando con ciò la corrente nel terminale comune e le tensioni tra le coppie di terminali diversi da quello comune). In figura 5c è riportato il grafo del circuito rappresentato in figura 2.

A questo punto possiamo estendere le leggi di Kirchhoff a un circuito costituito da bipoli e N -polo.

Equazioni di Kirchhoff per un circuito costituito da N -poli

Si consideri un circuito elettrico costituito da N -poli e si costruisca il grafo orientato corrispondente. Le correnti descrittive del circuito devono verificare la legge di Kirchhoff per le correnti per ogni nodo del grafo e le tensioni descrittive devono verificare la legge di Kirchhoff per le tensioni per ogni maglia del grafo.

La legge di Kirchhoff per le correnti discende dalla (1) e quella per le tensione discende dalla (2).

Per un circuito costituito da N -poli valgono tutte le proprietà delle equazioni di Kirchhoff che sono state illustrate fino ad ora. Le equazioni di Kirchhoff possono essere espresse attraverso la matrice di incidenza e la matrice di maglia fondamentale. Per un circuito costituito da N -poli è possibile introdurre i potenziali di nodo e le correnti di maglia così come è stato fatto per i circuiti di soli bipoli e in particolare vale la conservazione delle potenze virtuali (a ciascun lato del grafo dell' N -polo è associata una potenza virtuale assorbita).

Esempio

Si scrivano le equazioni di Kirchhoff del circuito illustrato in figura 2.

Un'insieme massimale di equazioni indipendenti per le correnti si ottiene applicando la prima legge di Kirchhoff ai nodi “1” e “2”. Invece un insieme massimale di equazioni indipendenti per le tensioni si ottiene applicando la seconda legge di Kirchhoff ai due anelli del grafo del circuito (figura 2). Allora si ha

$$\begin{aligned}i_2 + i_4 &= 0, \\i_1 - i_5 &= 0, \\v_{13} + v_5 &= 0, \\v_{23} - v_4 &= 0.\end{aligned}$$

A queste equazioni bisogna aggiungere le equazioni costitutive dei due bipoli e le due equazioni caratteristiche che descrivono il funzionamento del tripolo. In questo modo si ottengono otto equazioni indipendenti nelle otto incognite $i_1, i_2, i_4, i_5, v_{13}, v_{23}, v_4$ e v_5 . Osserviamo ancora una volta che la corrente i_3 e la tensione v_{12} non appaiono direttamente; esse possono essere determinate attraverso le relazioni (5) e (6) da quelle descrittive.

6.2 Potenza elettrica assorbita dall'N-polo

Per l'N-polo è possibile definire la potenza elettrica assorbita così come è stato fatto per il bipolo (su ogni lato del grafo associato all'N-polo viene fatta la convenzione dell'utilizzatore). Si scelga il terminale comune, ad esempio il terminale “N”. La **potenza elettrica assorbita** dall'N-polo è definita (attraverso le correnti e le tensioni descrittive), come:

$$p = \sum_{h=1}^{N-1} i_h v_{hN}. \quad (9)$$

Questa espressione si riduce alla potenza assorbita dal bipolo per $N=2$.

È particolarmente interessante mostrare che la potenza assorbita dall'N-polo è indipendente dalla scelta del terminale comune. Si consideri l'espressione della potenza assorbita che si ottiene scegliendo un altro terminale come terminale comune, ad esempio il terminale “1”. In questo caso si ha

$$\check{p} = \sum_{h=2}^N i_h v_{h1}. \quad (10)$$

Le tensioni descrittive $v_{21}, v_{31}, \dots, v_{N1}$ possono essere rappresentate attraverso le tensione descrittive $v_{1N}, v_{2N}, \dots, v_{N-1N}$. Si ha, allora,

$$v_{h1} = v_{hN} - v_{1N} \quad h = 2, 3, \dots, N, \quad (11)$$

dove $v_{NN} \equiv 0$. Sostituendo la (11) nella (10), si ottiene

$$\check{p} = \sum_{h=2}^N i_h (v_{hN} - v_{1N}) = \sum_{h=2}^N i_h v_{hN} - v_{1N} \sum_{h=2}^N i_h. \quad (12)$$

Utilizzando la corrispondente della (7) per il terminale comune “1” ($i_1 = -\sum_{h=2}^N i_h$) e ricordando che $v_{NN} \equiv 0$, si ottiene

$$\check{p} = \sum_{h=2}^N i_h v_{hN} + i_1 v_{1N} = \sum_{h=1}^{N-1} i_h v_{hN} = p. \quad (13)$$

Una immediata conseguenza del teorema della conservazione delle potenze virtuali è la conservazione delle potenze elettriche nei circuiti di N-poli.

Conservazione delle potenze elettriche

Per un circuito costituito da N-poli la somma delle potenze elettriche assorbite è uguale a zero.

Cosa rappresenta la potenza elettrica assorbita da un N-polo? Nel limite quasi-stazionario la potenza elettrica assorbita dal N-polo è, con buona approssimazione, uguale al flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie limite Σ del componente che l'N-polo rappresenta. Applicando il teorema di Poynting (vedi **Appendice B**), si ha (la normale \mathbf{n} a Σ punta verso l'interno):

$$p = \sum_{h=1}^{N-1} i_h v_{hN} \cong \oiint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv + \iiint_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv + \iiint_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv. \quad (14)$$

A seconda della costituzione fisica del componente prevale un termine piuttosto che un altro nella (14), come nel caso dei bipoli. Per ogni N-polo, che verrà introdotto, saranno descritte le proprietà energetiche.

6.3 Caratterizzazione di un M-porte

Collegando un N-polo ad altri elementi circuitali, le correnti negli N terminali di esso e le tensioni tra le coppie dei suoi morsetti assumeranno particolari “valori”. Può accadere, nel caso in cui N sia pari, che le correnti indipendenti siano N/2 se l’N-polo è collegato soltanto a bipoli o a circuiti che, ai morsetti, equivalgano a bipoli. In figura 6 vengono illustrati due circuiti in ciascuno dei quali c’è il quadripolo di soli resistori descritto in figura 1d.

Nel circuito descritto in figura 6a le tre correnti i_1 , i_2 , e i_3 del quadripolo di resistori sono indipendenti, mentre nel circuito in figura 6b solo le due correnti i_1 e i_2 (o i_3 e i_4) sono indipendenti. Viene allora spontaneo affermare che il quadripolo di resistori nel circuito di figura 6b “è un elemento con due porte” o “**doppio bipolo**”, nel senso che a esso sono collegati due distinti bipoli (il bipolo è un elemento circuitale a una “porta”).

Le grandezze necessarie a descrivere il funzionamento del doppio bipolo sono le due correnti di porta i_1 e i_2 e le due tensioni di porta v_{13} e v_{24} (convenzione dell’utente per il doppio bipolo). Il funzionamento del quadripolo di resistori nel circuito di figura 6a può essere descritto attraverso tre relazioni indipendenti tra le tre correnti e le tre tensioni descrittive (una volta scelto un terminale comune). Quando il quadripolo funziona, invece, da doppio bipolo si ha (vedi figura 6b)

$$i_1 = -i_3 \text{ e } i_2 = -i_4.$$

In questo caso le relazioni costitutive basate sulle correnti e tensioni descrittive (si scelga il terminale “4” come terminale comune), utilizzando la condizione $i_1 = -i_3$, danno due relazioni indipendenti tra le due correnti i_1 e i_2 e le due tensioni v_1 e v_2 di porta.

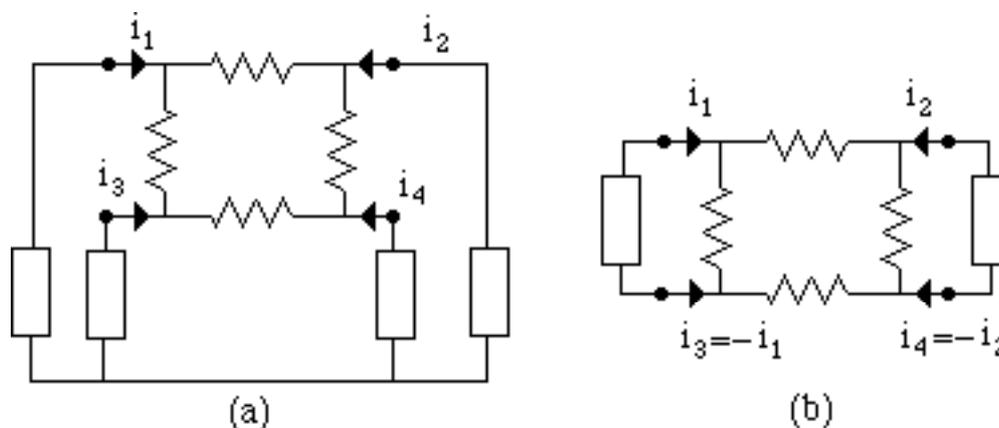


Figura 6

Definizione: doppio bipolo

Un doppio bipolo è un elemento circuitale con quattro terminali, associati a due a due, in modo tale da costituire due porte (figura 7a). Ogni porta è caratterizzata dalla corrente e dalla tensione di porta.

Un doppio bipolo ha due correnti e due tensioni di porta. Il funzionamento di un doppio bipolo è descritto attraverso due relazioni indipendenti tra le due correnti e le due tensioni di porta.

Definizione: M-porte

Un M-porte è un elemento con $2M$ terminali messi in evidenza, associati a due a due, in modo tale da costituire M porte (figura 7b). Le grandezze che caratterizzano l'M-porte sono le M correnti e le M tensioni di porta.

Il funzionamento di un M-porte è descritto attraverso M relazioni indipendenti tra le correnti e le tensioni di porta.

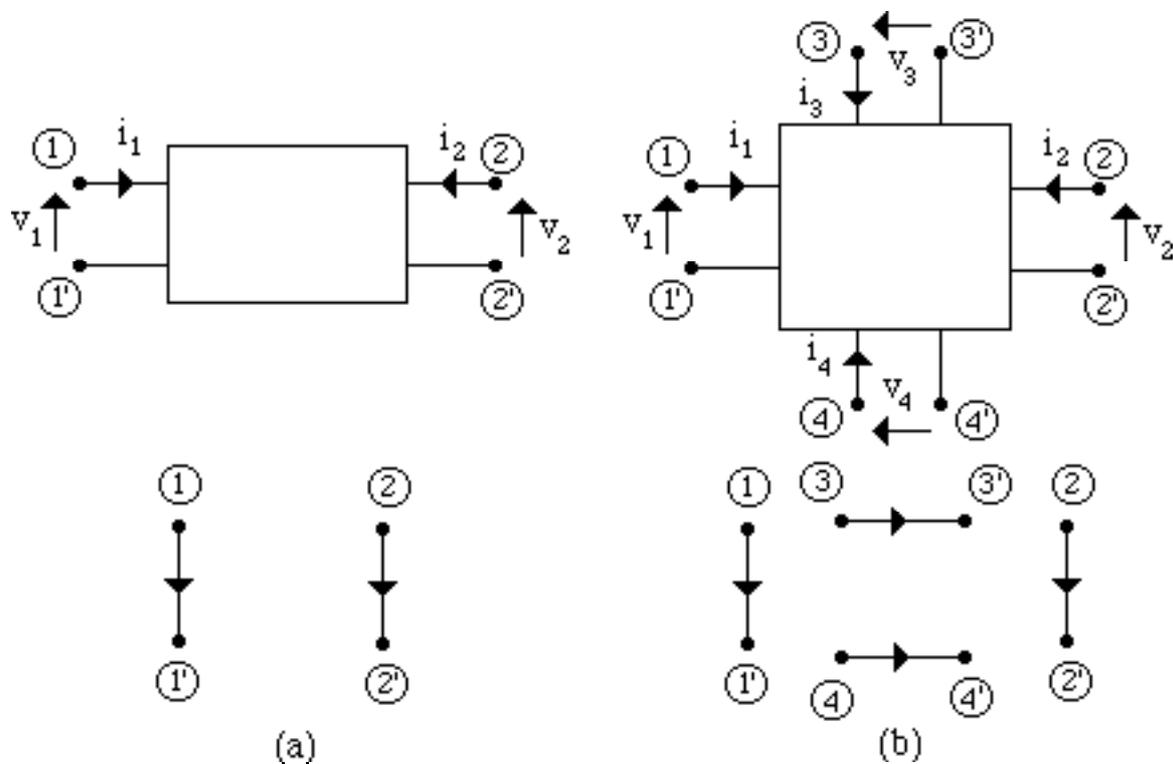


Figura 7 M-porte con $M=2$ (doppio bipolo) (a) e con $M=4$ (b) e relativi grafi.

Ci sono componenti che funzionano intrinsecamente come un doppio bipolo, cioè per essi è possibile raggruppare i 4 terminali in 2 coppie, per ciascuna delle quali la somma delle correnti è zero, indipendentemente dal modo in cui è inserito in un circuito; un esempio molto importante è il trasformatore.

Il grafo di un doppio bipolo può essere rappresentato da due lati e quattro nodi come illustrato in figura 7a; in figura 7b è riportato il grafo di un M-porte con $M=4$: esso ha 4 lati e otto nodi. Il grafo di un doppio bipolo, e più in generale di un M-porte, consta di lati non connessi; ciò implica che le tensioni e le correnti di porta non sono correlate tra loro attraverso le equazioni di interconnessione, ma tramite le equazioni costitutive. Pertanto i circuiti con M-porte hanno grafi non connessi.

La potenza elettrica assorbita da un M-porte è data da

$$p = \sum_{h=1}^M i_h v_h, \quad (15)$$

cioè è uguale alla somma delle potenze assorbite da ciascuna porta (su ogni porta viene fatta la convenzione dell'utilizzatore). La (15) discende direttamente dall'espressione della potenza elettrica assorbita dall'elemento a 2M terminali, definita dalla (9), e dalle relazioni tra le correnti descrittive imposte dalla condizione di funzionamento che caratterizza l'M-porte. Si ordinino i terminali in modo tale da avere

$$i_h = -i_{h+M} \quad h = 1, 2, \dots, M, \quad (16)$$

e si scelga il terminale “2M” come terminale comune. Allora la potenza elettrica assorbita dall'2M-polo vale (si ponga $v_{2M2M} \equiv 0$):

$$\begin{aligned} p &= \sum_{h=1}^{2M-1} i_h v_{h2M} = \sum_{h=1}^M i_h v_{h2M} + \sum_{h=M+1}^{2M-1} i_h v_{h2M} = \\ &= \sum_{h=1}^{M-1} i_h (v_{h2M} - v_{h+M2M}) + i_M v_{M2M} = \sum_{h=1}^M i_h (v_{h2M} - v_{h+M2M}). \end{aligned} \quad (17)$$

Ricordando che le tensioni di porta v_h sono legate alle tensioni descrittive attraverso la relazione

$$v_h = v_{h2M} - v_{h+M2M}, \quad (18)$$

si ottiene la (15).

6.4 Il transistorore bipolare e l'amplificatore operazionale

Esistono numerosi elementi circuitali con più di due terminali che sono di estrema importanza nella creazione di modelli e nella rappresentazione di proprietà particolari dei dispositivi fisici. Gli elementi circuitali di tipo statico sono quegli elementi il cui funzionamento è descritto attraverso relazioni di tipo “istantaneo” tra le correnti e le tensioni descrittive o tra le correnti e le tensioni di porta. In questo paragrafo illustreremo brevemente le relazioni costitutive del transistorore bipolare e dell'amplificatore operazionale. Nei prossimi paragrafi verranno descritti i generatori controllati, il trasformatore ideale e il giratore e infine verranno caratterizzati gli N-poli e gli M-porte costituiti da soli resistori lineari e generatori ideali (i cosiddetti N-poli e M-porte resistivi).

Negli N-poli statici sono trascurabili gli effetti dovuti ai fenomeni di induzione magnetoelettrica e elettromagnetica rispetto a quelli dovuti alla conduzione elettrica. Quindi vale la relazione (approssimata):

$$p(t) = \sum_{h=1}^{N-1} i_h v_h = \iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d v, \quad (19)$$

cioè la potenza elettrica assorbita è uguale al lavoro per unità di tempo compiuto dal campo elettrico \mathbf{E} sulle cariche in moto, che danno luogo al campo di corrente \mathbf{J} . Negli N-polo passivi statici questo

lavoro si trasforma in energia termica (parte uscirà dalla superficie limite sotto forma di calore e la restante parte dà luogo a un incremento dell'energia interna del componente e quindi a un innalzamento della temperatura) e la potenza assorbita è sempre positiva. Negli N-polo attivi statici il lavoro del campo elettrico è, almeno in parte, uguale all'opposto del lavoro del campo elettromotore e quindi la potenza assorbita può essere negativa.

- Il transistor bipolare

Il transistor bipolare “ideale” è un tripolo (cioè un elemento a tre terminali), statico non lineare e tempo invariante. In figura 8 viene illustrato il simbolo del transistor bipolare *npn* e del transistor bipolare *pnp*. In questa breve descrizione del transistor bipolare si farà esplicito riferimento a quello di tipo *npn*. Al momento opportuno verranno messe in evidenza le differenze sostanziali tra i due tipi. Ogni terminale del transistor ha un nome, che ricorda la parte del dispositivo fisico (del quale il tripolo in esame è il modello) a cui il conduttore terminale è collegato.

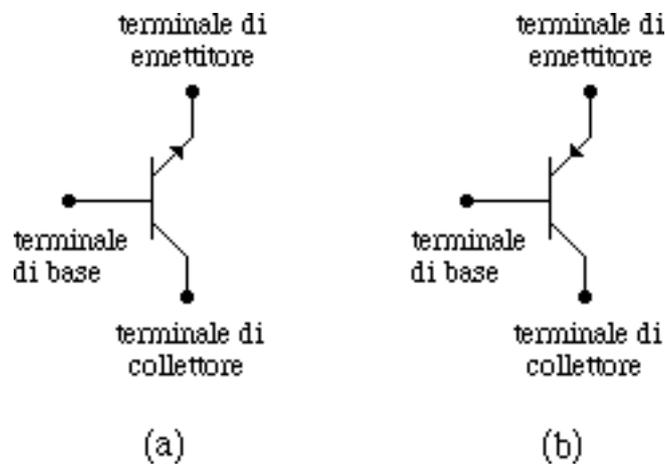


Figura 8 Simbolo del transistor bipolare *npn* (a) e *pnp* (b).

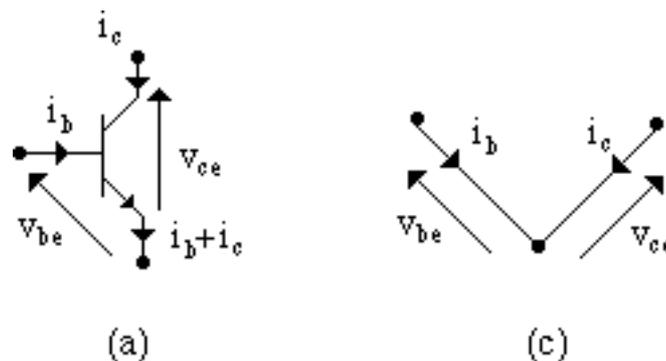


Figura 9

Per caratterizzare il funzionamento del transistor bisogna scegliere un terminale comune. Sono possibili tre scelte: *caratterizzazione a base comune* (il terminale comune è il terminale di base), *caratterizzazione a emettitore comune* (il terminale comune è il terminale di emettitore) e *caratterizzazione a collettore comune* (il terminale comune è il terminale di collettore). Qui il transistor verrà caratterizzato attraverso la caratterizzazione a emettitore comune (figura 9).

Questo tripolo può essere caratterizzato su **base tensione** (cioè considerando le due tensioni descrittive V_{be}, V_{ce} come variabili indipendenti e le due correnti descrittive i_b, i_c come variabili

pendenti), o su **base corrente** (cioè considerando le due correnti descrittive i_b, i_c come variabili indipendenti e le due tensioni descrittive v_{be}, v_{ce} come variabili dipendenti), oppure su **base ibrida** (cioè considerando, una corrente e una tensione descrittiva, ad esempio, i_b, v_{ce} , come variabili indipendenti e l'altra tensione e corrente descrittiva v_{be}, i_c come variabili dipendenti).

In pratica i dati misurati sui dispositivi che, l'elemento circuitale in esame rappresenta, sono solitamente espressi in termini della rappresentazione ibrida

$$\begin{aligned} v_{be} &= \hat{v}_{be}(i_b, v_{ce}), \\ i_c &= \hat{i}_c(i_b, v_{ce}). \end{aligned} \quad (20)$$

Inoltre, per tradizione, di solito si traccia la caratteristica nel piano (v_{be}, i_b) con v_{ce} come parametro, e nel piano (v_{ce}, i_c) con i_b come parametro, (in figura 10 è mostrata una approssimazione lineare a tratti delle curve caratteristiche).

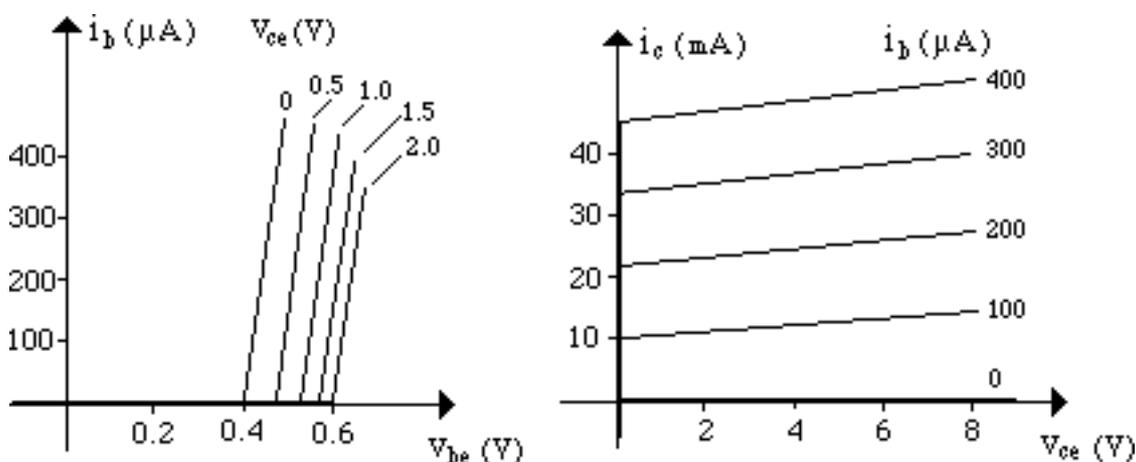


Figura 10 Approssimazione lineare a tratti delle caratteristiche a emettitore comune di un transistor npn.

Per ottenere le caratteristiche di un transistor *pn*p bisogna cambiare il segno delle grandezze descrittive.

La potenza elettrica assorbita dal transistor bipolare vale

$$p = i_b v_{be} + i_c v_{ce}. \quad (21)$$

Le caratteristiche sia nel piano (v_{be}, i_b) che nel piano (v_{ce}, i_c) passano solo attraverso il primo e terzo quadrante, quindi le “potenze” assorbite da ciascuna porta” $i_b v_{be}$ e $i_c v_{ce}$ sono positive o uguali a zero, quindi ciascuna porta si comporta, dal punto di vista energetico, come se fosse un bipolo passivo. Di conseguenza l'energia elettrica assorbita dal transistor bipolare è sempre positiva e viene trasformata in calore attraverso un effetto simile all'effetto Joule che si osserva nei resistori. Pertanto il transistor è un bipolo passivo e dissipativo.

In un circuito che contiene un solo generatore, bipoli statici passivi e transistori vale ancora la non amplificazione delle tensioni e delle correnti. Quando in un circuito sono presenti transistori non vale né la proprietà della sovrapposizione degli effetti, né la proprietà della reciprocità.

- L'amplificatore operazionale

L'amplificatore operazionale è un dispositivo a semiconduttore estremamente complesso. Per le applicazioni a basse frequenze si comporta come un elemento statico non lineare con quattro terminali, il cui funzionamento può essere descritto dalle relazioni approssimate (figura 11)

$$i_- = I_-, \quad (22)$$

$$i_+ = I_+,$$

$$v_u = f(v_i), \quad (23)$$

dove

$$f(v_i) = \begin{cases} E_{\text{sat}} & v_i \geq \varepsilon \\ \frac{E_{\text{sat}}}{\varepsilon} v_i & -\varepsilon \leq v_i \leq \varepsilon \\ -E_{\text{sat}} & v_i \leq -\varepsilon \end{cases} \quad (24)$$

e I_- e I_+ sono due costanti.

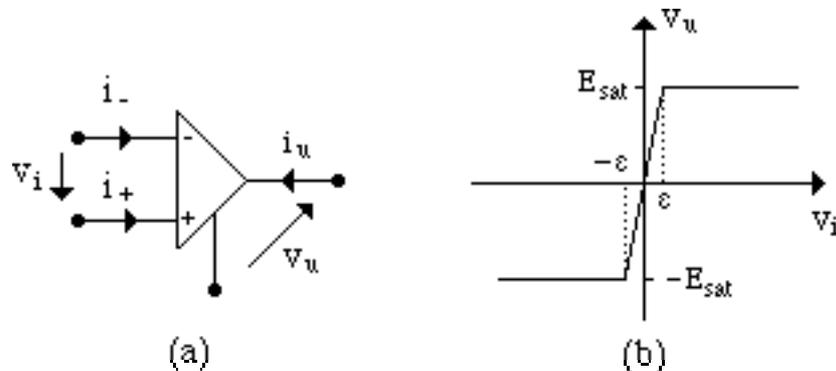


Figura 11 Simbolo dell'amplificatore operazionale polarizzato (a) e caratteristica (b).

Commento

Il dispositivo fisico che prende il nome di “amplificatore operazionale” non coincide con l'elemento circuitale *amplificatore operazionale* definito prima. Innanzi tutto il dispositivo fisico ha più di quattro terminali. Inoltre, affinché esso funzioni da *amplificatore operazionale*, così come descritto dalla relazione caratteristica (23), deve essere correttamente “alimentato” (“polarizzato”) tramite generatori di tensione costanti; a tale scopo sono previsti due appositi terminali (figura 12). Oltre ai cinque terminali indicati nella rappresentazione di figura 12, ci possono essere nel dispositivo fisico terminali aggiuntivi, per consentirne il controllo. Dopo il collegamento alle alimentazioni e al circuito di controllo, solo tre terminali restano disponibili, più un quarto terminale connesso al circuito di alimentazione, così come è illustrato in figura 12. Il dispositivo fisico, così polarizzato, è rappresentato tramite il simbolo illustrato in figura 11a) e il suo funzionamento è descritto dalle relazioni (22)-(24).

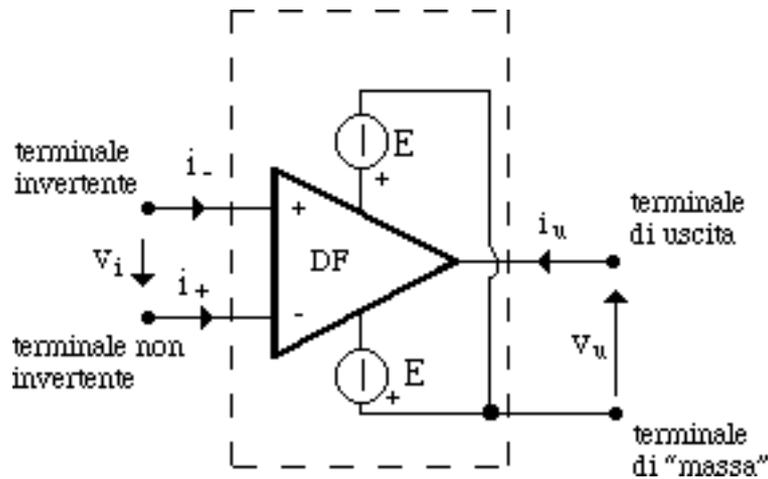


Figura 12 Il dispositivo fisico “amplificatore operazionale” con i generatori di polarizzazione.

Le correnti I_- e I_+ sono tipicamente inferiori a 0.1 mA; ad esempio per il $\mu A740$ I_- e I_+ sono uguali a 0.1 mA, mentre per il $\mu A741$ sono uguali a 0.1 nA. In considerazione dei valori tipici di I_- e I_+ , la precisione si riduce di poco assumendo

$$I_- = I_+ = 0. \quad (25)$$

L'amplificatore operazionale, con l'assunzione (25), è un elemento che funziona intrinsecamente come un doppio bipolo: la corrente della porta di ingresso è nulla e quella della porta di uscita è indipendente dalle tensioni di ingresso v_i e di uscita v_u . La porta di uscita si comporta come se fosse un generatore di tensione “controllato” dalla tensione della porta di ingresso. La potenza elettrica assorbita dall'amplificatore operazionale vale (è possibile trascurare la potenza assorbita dalla porta di ingresso) $p = i_u v_u$. Essa può essere positiva o negativa, a seconda del circuito in cui l'amplificatore è inserito. Pertanto l'amplificatore operazionale “polarizzato” è un doppio bipolo attivo. Si ricorda che l'amplificatore operazionale non polarizzato è un componente passivo; questa è la ragione per cui la tensione di uscita dell'amplificatore operazionale polarizzato non può essere, in valore assoluto, più grande della tensione di alimentazione.

Per un amplificatore operazionale il parametro $A = (E_{sat} / \epsilon)$, detto *guadagno di tensione in anello aperto*, vale tipicamente almeno 100000 (200000 per il $\mu A741$), quindi la tensione sulla porta d'uscita è molto più grande della tensione sulla porta di ingresso. La tensione di saturazione E_{sat} vale tipicamente 2V in meno della tensione di polarizzazione dell'amplificatore operazionale.

In considerazione dei valori tipici di I_- , I_+ e A la precisione si riduce di poco se si assume $I_- = I_+ = 0$ e $A = \infty$. Tale assunzione semplificativa è alla base del modello di amplificatore operazionale ideale definito dalle equazioni caratteristiche

$$\begin{aligned} i_- &= 0 \\ i_+ &= 0 \\ v_u &= E_{sat} \operatorname{sgn}(v_i) & v_i &\neq 0 \quad (\text{regioni di saturazione}) \\ v_i &= 0 & -E_{sat} < v_u < +E_{sat} & \quad (\text{regione lineare}). \end{aligned} \quad (26)$$

Se l'amplificatore operazionale nel circuito in cui è inserito funziona nella regione lineare, cioè la tensione di uscita soddisfa la relazione $-E_{\text{sat}} < v_u < +E_{\text{sat}}$, le relazioni caratteristiche diventano:

$$\begin{aligned} i_- &= 0 \\ i_+ &= 0 \\ v_i &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Di conseguenza, si può pensare al modello lineare dell'amplificatore ideale come a un doppio bipolo costituito da un nullatore e da un noratore: la porta in ingresso di un amplificatore operazionale lineare si comporta come se fosse un nullatore, cioè è nulla sia la corrente che la tensione, mentre la porta di uscita si comporta come se fosse un noratore perché la corrente e la tensione possono essere qualsiasi. Il modello lineare dell'amplificatore operazionale è un doppio bipolo non reciproco e attivo.

6.5 Generatori controllati lineari

Finora si sono incontrati generatori di tensione e di corrente indipendenti (per i quali le tensioni e le correnti sono, rispettivamente, assegnate). Ora saranno introdotti altri tipi di generatori, detti generatori pilotati (o controllati): i generatori pilotati lineari. Si tratta di doppi bipoli ideali, statici e lineari, nei quali una delle grandezze - tensione o corrente - ad una delle due porte è funzione - nel caso lineare è direttamente proporzionale - di una delle grandezze all'altra porta. Considerando tutte le possibili combinazioni si hanno i seguenti elementi.

• Generatore di tensione controllato in tensione

Il generatore di tensione controllato in tensione è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni costitutive (figura 13a)

$$i_1=0, \tag{28}$$

$$v_2=\alpha v_1, \tag{29}$$

dove α è una costante detta rapporto di trasferimento di tensione. La porta "1" è equivalente a un circuito aperto e la porta "2" è equivalente a un generatore di tensione che impone una tensione dipendente linearmente dalla tensione sulla porta "1".

• Generatore di tensione controllato in corrente

Il generatore di tensione controllato in corrente è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni costitutive (figura 13b)

$$v_1=0, \tag{30}$$

$$v_2=ri_1, \tag{31}$$

dove r è una costante, che prende il nome di transresistenza. La porta “1” è equivalente a un corto circuito e la porta “2” è equivalente a un generatore di tensione che impone una tensione dipendente linearmente dalla corrente che circola nella porta “1”.

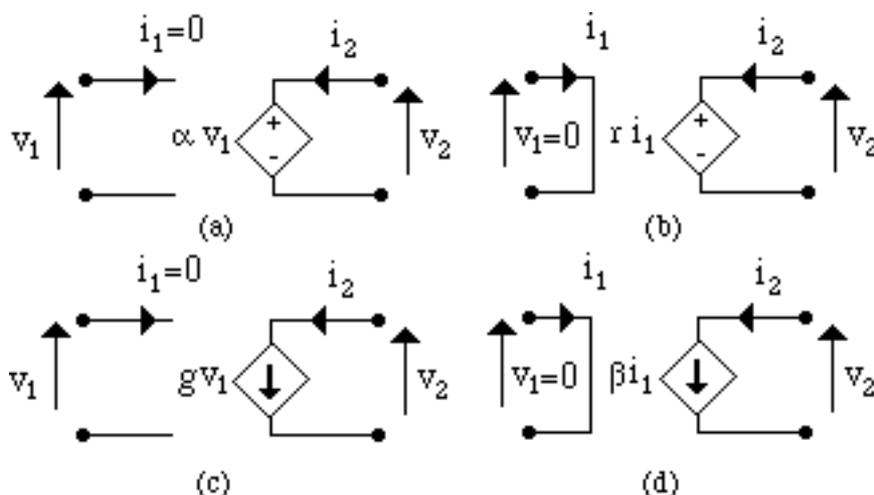


Figura 13 Simboli dei quattro tipi di generatori pilotati lineari.

• *Generatore di corrente controllato in tensione*

Il generatore di corrente controllato in tensione è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni costitutive

$$i_1=0, \quad (32)$$

$$i_2=g v_1, \quad (33)$$

dove g è una costante, che prende il nome di transconduttanza. La porta “1” è equivalente a un circuito aperto e la porta “2” è equivalente a un generatore di corrente che impone una corrente dipendente linearmente dalla tensione della porta “1”.

• *Generatore di corrente controllato in corrente*

Il generatore di corrente controllato in corrente è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni costitutive

$$v_1=0, \quad (34)$$

$$i_2=\beta i_1, \quad (35)$$

dove β è una costante, che prende il nome di rapporto di trasferimento di corrente. La porta “1” è equivalente a un corto circuito e la porta “2” è equivalente a un generatore di corrente che impone una corrente dipendente linearmente dalla corrente che circola nella porta “1”.

La potenza elettrica assorbita dai generatori controllati può essere negativa, quindi sono doppi bipoli attivi. Quando in un circuito ci sono generatori controllati lineari, continua a valere la proprietà della sovrapposizione degli effetti, ma non vale più la proprietà della reciprocità. Il lettore verifichi questa affermazione.

Anche se i generatori pilotati sono da ritenersi componenti ideali immaginati per semplificare la rappresentazione circuitale di componenti più complessi come il transistor o l'amplificatore operazionale, è pur vero che proprio utilizzando lo stesso amplificatore operazionale è possibile realizzare componenti le cui relazioni costitutive approssimano in maniera soddisfacente i diversi generatori pilotati. Di conseguenza tali dispositivi vengono spesso utilizzati nei circuiti reali per ottenere effetti particolari. Ad esempio, attraverso un generatore di tensione controllato in tensione è possibile collegare due doppi bipoli in cascata in modo tale che il funzionamento del primo non risenta della presenza del secondo. Tale tecnica di separazione è un importante strumento nella progettazione dei circuiti elettronici.

Esempio

Consideriamo il doppio bipolo illustrato in figura 14; R_a e R_b sono le resistenze dei due resistori lineari. Il terminale di “uscita” dell'amplificatore operazionale è collegato a quello “invertente” attraverso il resistore di resistenza R_a (questa è la cosiddetta configurazione a **retroazione negativa**).

Si assuma che la tensione di uscita dell'amplificatore operazionale sia, in valore assoluto, inferiore alla tensione di saturazione. In questa condizione di funzionamento l'amplificatore operazionale si comporta come se fosse lineare e la relazione tra la tensione di uscita e quella di ingresso è (per il momento assumeremo un guadagno ad anello aperto elevato ma finito)

$$v_u = Av_i. \quad (36)$$

Siccome la corrente della porta di ingresso dell'amplificatore è nulla, nel resistore di resistenza R_a fluisce la corrente i_1 e nel resistore di resistenza R_b fluisce la corrente i_2 (i riferimenti per i versi sono illustrati in figura 14). Allora applicando la seconda legge di Kirchhoff si ottengono le seguenti equazioni

$$\text{maglia " porta 1 " _ " resistore } R_b \text{ " _ " porta ingresso AO " } \quad v_1 + R_b i_2 + v_i = 0, \quad (37)$$

$$\text{maglia " porta 1 " _ " resistore } R_a \text{ _ " porta uscita AO " } \quad v_1 - R_a i_1 - v_u = 0, \quad (38)$$

$$\text{maglia " porta ingresso AO " _ " porta 2 " _ " resistore } R_a \text{ " } \quad v_i + v_2 + R_a i_1 = 0. \quad (39)$$

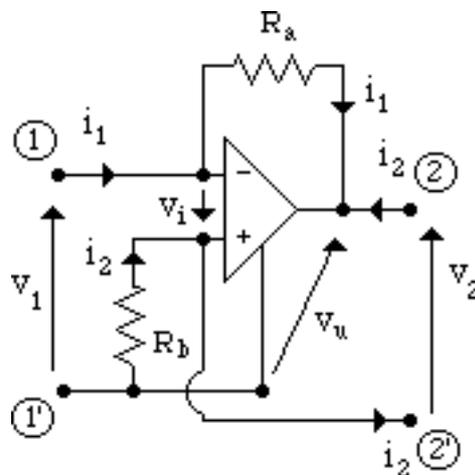


Figura 14

Sostituendo la (36) nelle (37)-(39) ed eliminando v_i , si ottengono le relazioni

$$G_a v_2 = -i_1 + \frac{1}{A} (v_1 - R_a i_1), \quad (40)$$

$$R_b i_2 = -v_1 + \frac{1}{A} (v_1 - R_a i_1). \quad (41)$$

(dove $G_a = 1/R_a$). Nel limite di $A \rightarrow \infty$, le (40) e (41) danno ¹

$$G_a v_2 = -i_1, \quad (42)$$

$$R_b i_2 = -v_1. \quad (43)$$

Se il resistore di resistenza R_b è un corto circuito ($R_b = 0$), dalle (42) e (43) si ottiene

$$v_1 = 0, \quad v_2 = -i_1 / G_a. \quad (44)$$

Le (44) sono le equazioni costitutive del generatore di tensione controllato in corrente; in questo caso $r = -1/G_a$. Il segno del coefficiente r può essere cambiato invertendo i terminali di una porta.

Se il resistore di conduttanza G_a è un circuito aperto, dalle (42) e (43) si ottiene

$$i_1 = 0, \quad i_2 = -v_1 / R_b. \quad (45)$$

Le (45) sono le equazioni costitutive del generatore di corrente controllato in tensione; in questo caso $g = -1/R_b$. Il segno del coefficiente g può essere cambiato invertendo i terminali di una porta del doppio bipolo.

Il lettore dimostri che, connettendo in maniera opportuna un generatore di corrente controllato in tensione e un generatore di tensione controllato in corrente, è possibile realizzare gli altri due tipi di generatori controllati.

6.6 Il giratore

Il giratore è un doppio bipolo statico lineare, definito dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} i_1 &= G v_2, \\ i_2 &= -G v_1, \end{aligned} \quad (46)$$

dove la costante G è detta conduttanza di girazione; il simbolo del giratore è illustrato in figura 15.

La potenza elettrica assorbita dal giratore è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento, quindi è un doppio bipolo globalmente passivo che non dissipa e né immagazzina energia. Per questo doppio bipolo non vale la non amplificazione delle tensioni e delle correnti pur essendo globalmente passivo. Pertanto deve essere costituito necessariamente da elementi attivi. Se in un circuito è

¹ Le (42) e (43) si ottengono anche quando il terminale di “uscita” dell’amplificatore operazionale è collegato al terminale di ingresso “non invertente” (questa è la cosiddetta configurazione con **retroazione positiva**); basta sostituire nelle (40) e (41) A con $-A$ e poi considerare il limite $A \rightarrow \infty$. È possibile dimostrare che nel caso di retroazione positiva le (41) e (43) sono una soluzione instabile, quindi fisicamente irrealizzabili, a differenza di quando accade nella configurazione con retroazione negativa. Nella configurazione con retroazione positiva le soluzioni stabili possono essere ottenute solo se si utilizza la caratteristica non lineare dell’amplificatore operazionale.

presente un giratore, continua a valere la sovrapposizione degli effetti; invece la proprietà della reciprocità non è più valida. Il lettore dimostri queste proprietà.

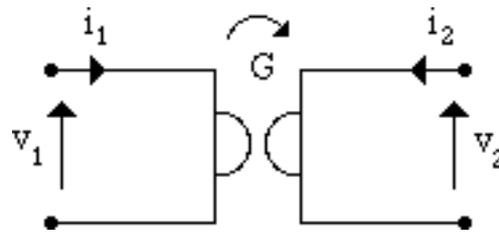


Figura 15 Simbolo del giratore.

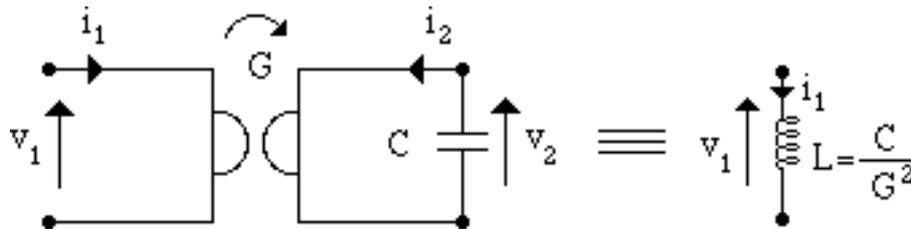


Figura 16 Un giratore terminato alla porta “2” con un condensatore è equivalente a un induttore.

La proprietà più importante del giratore può essere illustrata considerando il circuito illustrato in figura 16 (sulla porta “2” del giratore è connesso un condensatore lineare tempo-invariante con capacità C). In questo caso si ha

$$v_1 = -\frac{i_2}{G} = \frac{C}{G} \frac{dv_2}{dt} = \frac{C}{G^2} \frac{di_1}{dt}. \quad (47)$$

Ovvero, quando alla porta di uscita di un giratore è collegato un condensatore lineare e tempo invariante di capacità C , la porta di ingresso si comporta come se fosse un induttore lineare e tempo invariante di induttanza C/G^2 . Pertanto il giratore consente di realizzare bipoli induttori a partire da un condensatore. Vale anche la proprietà duale: tramite un giratore è possibile realizzare un condensatore a partire da un induttore.

Abbiamo già accennato al fatto che uno stesso bipolo può descrivere il funzionamento di componenti e sistemi elettrici completamente diversi. Ad esempio, il bipolo induttore descrive sia il funzionamento del componente induttore studiato nel Capitolo 2, sia il funzionamento del circuito di figura 16.

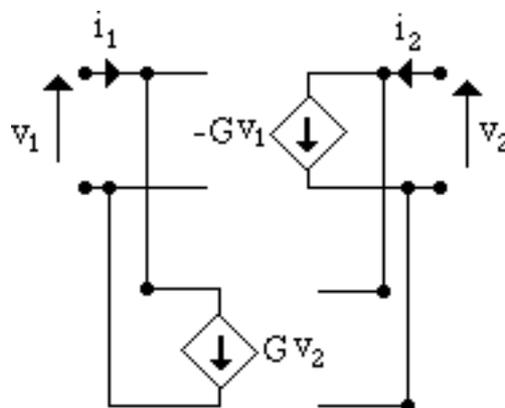


Figura 17 Realizzazione di un giratore attraverso generatori di corrente controllati in tensione.

Il lettore dimostri che se in uscita al giratore è connesso un resistore lineare di resistenza R allora la porta di ingresso si comporta come un resistore lineare di resistenza $1/(RG^2)$; inoltre, il lettore dimostri che se in uscita al giratore è collegato un bipolo controllato in tensione (corrente), allora la porta di ingresso si comporta come se fosse un resistore controllato in corrente (tensione).

Sono disponibili commercialmente, sotto forma di circuiti integrati, dispositivi che approssimano il funzionamento di un giratore. Un giratore può essere realizzato attraverso due generatori di corrente controllati in tensione (così come illustrato in figura 17) e quindi attraverso amplificatori operazionali.

6.7 Il trasformatore ideale

Il trasformatore ideale è un doppio bipolo statico lineare definito dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} v_1 &= nv_2, \\ i_2 &= -ni_1, \end{aligned} \quad (48)$$

dove la costante n è detta rapporto di trasformazione; il simbolo del trasformatore è illustrato in figura 18.

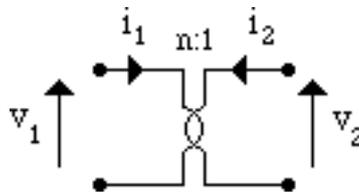


Figura 18 Simbolo del trasformatore ideale.

La potenza elettrica assorbita dal trasformatore ideale è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento, quindi è un doppio bipolo globalmente passivo che non dissipa e né immagazzina energia. Per questo doppio bipolo non vale la non amplificazione delle tensioni e delle correnti pur essendo globalmente passivo, perché può essere $n > 1$ o $n < 1$. Se in un circuito è presente un trasformatore, continua a valere la sovrapposizione degli effetti e la proprietà della reciprocità (il lettore dimostri quest'ultima affermazione).

La proprietà più importante del trasformatore può essere illustrata considerando il circuito illustrato in figura 19 (sulla porta “2” del trasformatore è connesso un resistore lineare con resistenza R). In questo caso si ha

$$v_1 = nv_2 = -nRi_2 = n^2Ri_1. \quad (49)$$

Ovvero, quando alla porta di uscita di un trasformatore è collegato un resistore lineare di resistenza R , la porta di ingresso si comporta come se fosse un resistore lineare di resistenza n^2R (n è

adimensionale). Pertanto il trasformatore consente di variare la resistenza di un resistore senza alterarne la costituzione fisica.

Il lettore dimostri che, quando alla porta di uscita è collegato un induttore lineare di induttanza L (condensatore lineare di capacità C), la porta di ingresso si comporta come se fosse un induttore di induttanza n^2L (condensatore di capacità C/n^2).

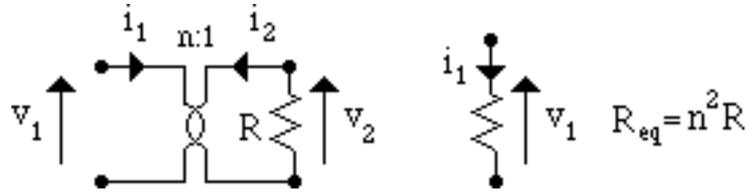


Figura 19 Un trasformatore terminato alla porta “2” con un resistore è equivalente a un resistore.

Un trasformatore ideale può essere realizzato attraverso un generatore di corrente controllato in corrente e un generatore di tensione controllato in tensione (così come illustrato in figura 20).

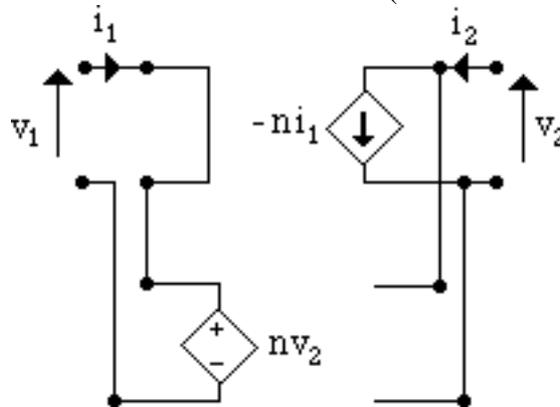


Figura 20 Realizzazione di un trasformatore ideale attraverso generatori controllati.

Applicazione: adattamento in potenza

Si consideri il circuito illustrato in figura 21. La tensione E e la resistenza R_i sono fissate. Si valuti il valore della resistenza R_u che rende massima la potenza assorbita dal resistore.

La potenza p_u assorbita dal resistore di resistenza R_u vale

$$p_u(R_u/R_i) = E^2 \frac{R_u/R_i}{(1 + R_u/R_i)^2}. \quad (50)$$

Il massimo della funzione $p_u = p_u(R_u/R_i)$ si ha per $R_u/R_i = 1$. Dunque la potenza p_u assorbita dal resistore di resistenza R_u è massima quando

$$R_u = R_i. \quad (51)$$

Il generatore di tensione E in serie con il resistore di resistenza R_i potrebbe rappresentare, ad esempio, il circuito equivalente secondo Thévenin (con tensione a vuoto E e resistenza interna R_i) di un amplificatore di potenza. Il resistore di resistenza R_u potrebbe rappresentare la “resistenza

equivalente” di un utilizzatore (ad esempio l'altoparlante in una sala ²). Al fine di massimizzare la potenza del segnale sonoro irradiato dall'altoparlante bisognerebbe realizzare la condizione (51). Molto spesso essa non può essere realizzata a causa della costituzione fisica dei due sistemi. Cosa è possibile fare in questi casi? È evidente che serve a poco aggiungere un altro resistore in serie, come illustrato in figura 21a (la potenza assorbita in più sarebbe in parte dissipata dal resistore che viene aggiunto alla serie).

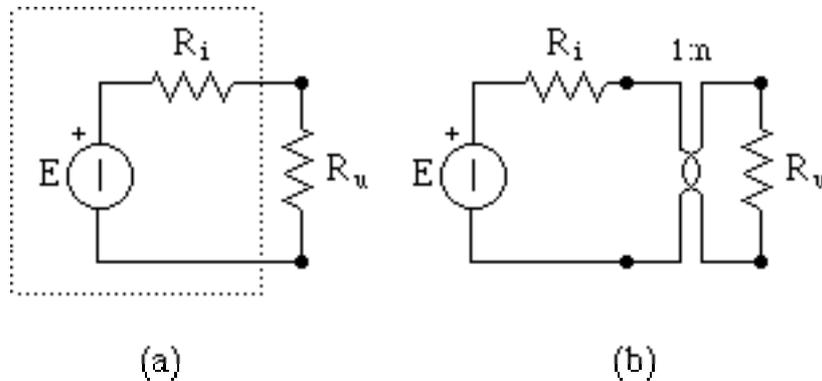


Figura 21

È possibile modificare la resistenza dell'utilizzatore senza alterarne la costituzione fisica e senza “dissipare” potenza utilizzando un trasformatore ideale. Si interponga tra l'amplificatore e l'altoparlante un trasformatore ideale così come illustrato in figura 22. In questo caso la potenza assorbita dal resistore R_u (la resistenza equivalente alla porta “1” vale R_u/n^2 e la potenza elettrica assorbita dal trasformatore ideale è uguale a zero) vale

$$p_u(R_u/n^2R_i) = E^2 \frac{(R_u/n^2R_i)}{[1 + (R_u/n^2R_i)]^2}, \quad (52)$$

e quindi la potenza assorbita dall'altoparlante è massima se

$$n = \sqrt{\frac{R_u}{R_i}}. \quad (53)$$

Tipicamente è $R_u > R_i$, quindi c'è bisogno di un trasformatore con $n > 1$.

6.8 N-poli di resistori lineari

Si consideri un circuito arbitrario costituito da un n-polo N_L , a sua volta costituito da resistori lineari passivi e generatori ideali (e indipendenti) e da un n-polo N non necessariamente lineare o

² Anche se l'altoparlante è completamente diverso dal componente resistore, in prima approssimazione il suo funzionamento può essere schematizzato attraverso un bipolo resistore. Allora come si definisce la resistenza equivalente R_i ? Essa potrebbe essere definita in modo tale che $R_i i^2 \Delta t$ rappresenti l'energia elettrica che nello intervallo Δt è trasformata in energia “acustica” (energia cinetica del mezzo materiale che supporta le onde acustiche). In realtà il circuito equivalente di un altoparlante è molto più complicato e dovrebbe contenere anche induttori.

resistivo (figura 22). Per studiare questo circuito con il metodo dei potenziali di nodo, conviene avere una caratterizzazione in termini di potenziali di nodo, piuttosto che in termini di tensioni descrittive. Si osservi che, sottraendo a ogni potenziale di nodo dell' n -polo il potenziale del terminale comune, si ottengono le tensioni descrittive.

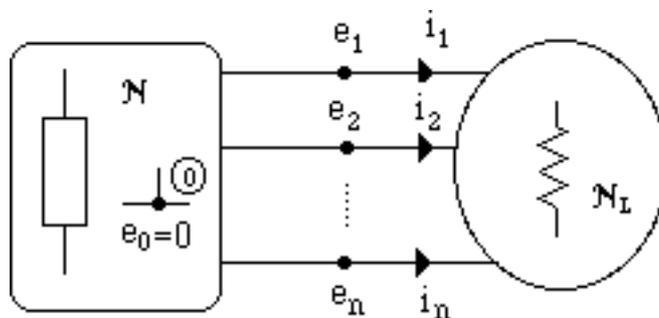


Figura 22 Circuito costituito da un N -polo di resistori lineari e generatori indipendenti collegato a un altro N -polo.

6.8.1 Caratterizzazione di un n -polo di resistori lineari

Si scelga un nodo di riferimento (ad esempio il nodo "0") e si ponga uguale a zero il potenziale di esso. Per formulare le equazioni del circuito in termini di potenziali di nodo bisogna esprimere le correnti degli elementi controllati in tensione in funzione dei potenziali nodali.

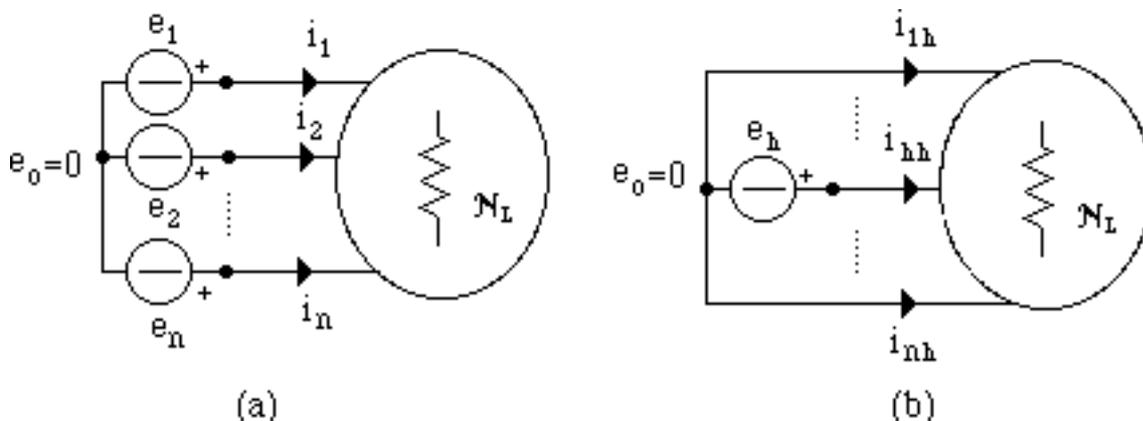


Figura 23

In questo paragrafo viene caratterizzato un n -polo resistivo N_L , utilizzando come variabili indipendenti i potenziali di nodo e_1, e_2, \dots, e_n dei morsetti dell' n -polo e come variabili dipendenti le correnti nei terminali i_1, i_2, \dots, i_n . Dapprima si consideri il caso in cui l' n -polo sia costituito da soli resistori lineari (all'interno dell' n -polo non vi sono generatori indipendenti). La caratterizzazione può essere fatto attraverso un *esperimento concettuale* (figura 23a), in cui si impongono i potenziali di nodo e_1, e_2, \dots, e_n e si determinano le correnti i_1, i_2, \dots, i_n (caratterizzazione su base potenziale dell' n -polo). Si osservi che la caratterizzazione su base corrente non può essere realizzata assegnando ad arbitrio le correnti: solo $n-1$ sono indipendenti. Si assuma che il circuito di figura 23a abbia una e una sola soluzione per ogni valore di e_1, e_2, \dots, e_n . Siccome il circuito è lineare, la relazione cercata può essere determinata attraverso la sovrapposizione degli effetti. A tale scopo si

$$p = \mathbf{e}^T G \mathbf{e} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n G_{kh} e_k e_h. \quad (60)$$

(L'espressione (60) è simile a quella della potenza assorbita da un resistore con conduttanza G sottoposto a una tensione v). L'espressione $\mathbf{e}^T G \mathbf{e}$ prende il nome di forma quadratica associata alla matrice G ; questa denominazione deriva dal fatto che essa è costituita da termini quadratici, del tipo $G_{kh} e_k e_h$.

Osservazione

Se nella (56) poniamo $e_n = 0$, e_1, e_2, \dots, e_{n-1} rappresentano le tensioni descrittive dell' n -polo rispetto al terminale comune “ n ”. La matrice, che lega le correnti e le tensioni descrittive è ottenuta eliminando dalla matrice G l'ultima colonna e l'ultima riga. Questa matrice è in generale invertibile.

6.8.2 Proprietà della matrice delle conduttanze

La matrice delle conduttanze ha delle proprietà generali indipendenti dal modo in cui i resistori sono connessi all'interno dell' n -polo: esse dipendono solo dalla linearità e passività dei resistori.

(a) Le conduttanze proprie sono positive o uguali a zero, $G_{hh} \geq 0$.

L'elemento G_{hh} è definito attraverso la relazione

$$G_{hh} = \left. \frac{i_h}{e_h} \right|_{e_i=0 \quad \forall i \neq h} = \frac{i_{hh}}{e_h}. \quad (61)$$

Esso rappresenta, quindi, la conduttanza equivalente “vista” dal generatore e_h quando tutti gli altri sono spenti. Siccome i resistori sono tutti passivi, essa non può essere mai minore di zero (si sta utilizzando la convenzione dell'utilizzatore). Qualora alcuni resistori fossero attivi, le conduttanze proprie potrebbero essere minori di zero.

(b) Le conduttanze mutue G_{kh} sono negative o uguali a zero, $G_{kh} \leq 0 \quad k \neq h$.

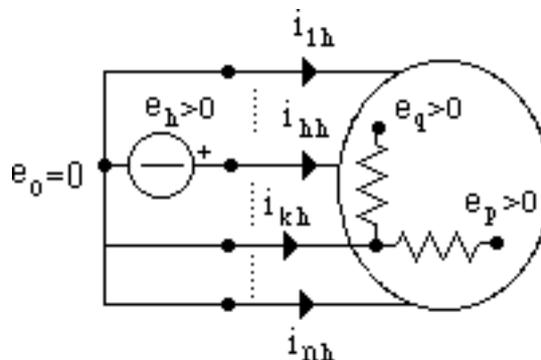


Figura 24

Si assuma come ipotesi di lavoro $e_h > 0$. Per la non amplificazione della tensione e per la passività dei resistori che costituiscono l' n -polo, la corrente i_{kh} non può essere positiva (vedi la figura 24). Il terminale “ k ”, che è a potenziale zero, è connesso attraverso dei resistori

passivi ad altri nodi, interni all'n-polo. I potenziali di questi nodi (nell'esempio di figura e_p e e_q) sono maggiori di zero per la non amplificazione della tensione (il potenziale più grande e quello più piccolo si trovano ai morsetti dell'unico bipolo attivo). Quindi per la passività dei resistori segue che $i_{kh} \leq 0$. Siccome è

$$G_{kh} = \left. \frac{i_k}{e_h} \right|_{e_i = 0 \quad \forall i \neq h} = \frac{i_{kh}}{e_h}, \quad (62)$$

si ha $G_{kh} \leq 0$ per ogni $k \neq h$.

- (c) Le conduttanze mutue G_{kh} sono, in valore assoluto, minori o uguali di G_{hh} , $|G_{kh}| \leq G_{hh} \quad \forall k \neq h$.

Questa proprietà è diretta conseguenza della non amplificazione della corrente in un circuito costituito da resistori passivi e un solo generatore. Infatti si ha (vedi figura 24)

$$G_{hh} = \frac{|i_{hh}|}{|e_h|} \text{ e } |G_{kh}| = \frac{|i_{kh}|}{|e_h|}; \quad (63)$$

e per la non amplificazione della corrente è $i_{hh} \geq |i_{kh}|$.

- (d) La matrice delle conduttanze è simmetrica, $G_{kh} = G_{hk}$.

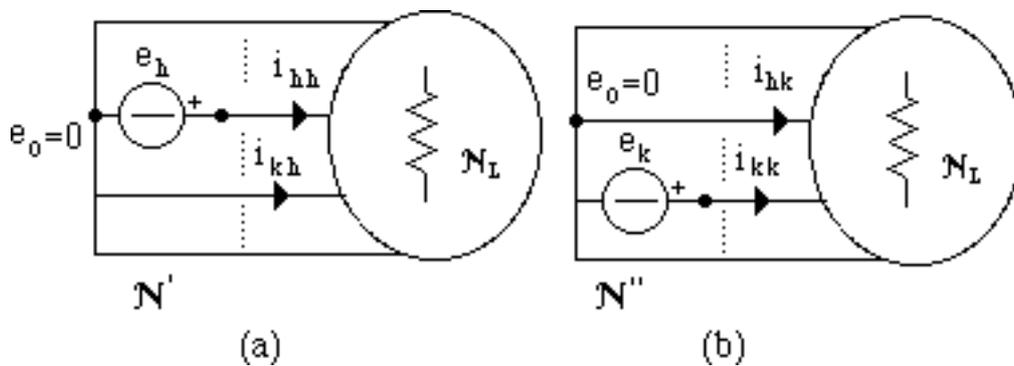


Figura 25

Questa è una immediata conseguenza della proprietà di reciprocità, che vale per i resistori lineari. Infatti si ha

$$G_{kh} = \frac{i_{kh}}{e_h}, \quad G_{hk} = \frac{i_{hk}}{e_k}. \quad (64)$$

Poi applicando la prima forma della proprietà di reciprocità (vedi figura 25; nel circuito N' la causa è e_h e l'effetto è i_{kh} , mentre nel circuito N'' la causa è e_k e l'effetto è i_{hk}), si ottiene

$$\frac{i_{kh}}{e_h} = \frac{i_{hk}}{e_k}. \quad (65)$$

Infine combinando le (64) e (65) si ha $G_{kh} = G_{hk}$.

(e) La somma degli elementi di ciascuna colonna di G (e quindi anche la somma degli elementi di ciascuna riga) è uguale a zero, $\sum_{k=1}^n G_{kh} = 0 \quad h = 1, 2, \dots, n$.

La somma delle correnti i_1, i_2, \dots, i_n deve essere uguale a zero per la legge delle correnti (1).

Allora si ha

$$0 = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n G_{kh} e_h = \sum_{h=1}^n e_h \sum_{k=1}^n G_{kh}. \quad (66)$$

La (63) deve essere verificata indipendentemente dai valori che i potenziali di nodo assumono.

Ciò è possibile se e solo se

$$\sum_{k=1}^n G_{kh} = 0 \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (67)$$

A causa di questa proprietà il determinante della matrice G è uguale a zero e quindi G non è invertibile. Il rango della matrice G è in generale uguale a $n-1$. Questo significa che non è possibile una rappresentazione in cui le correnti i_1, i_2, \dots, i_n siano le variabili indipendenti e i potenziali le variabili dipendenti. Invece è possibile una rappresentazione in cui vengono imposte $n-1$ correnti (la restante deve essere compatibile con la prima legge di Kirchhoff). In questo caso non è possibile determinare univocamente i potenziali: essi sono determinati a meno di una costante additiva arbitraria.

(f) La matrice delle conduttanze è semi definita positiva, $\mathbf{e}^T G \mathbf{e} \geq 0$.

Siccome i resistori sono passivi, per la conservazione della potenza elettrica, la potenza assorbita dall' n -polo $\mathbf{p} = \mathbf{e}^T G \mathbf{e}$ deve essere maggiore o uguale a zero indipendentemente dai valori che i potenziali di nodo assumono; quindi deve essere

$$\mathbf{e}^T G \mathbf{e} \geq 0 \quad \forall \mathbf{e}. \quad (68)$$

Pertanto la forma quadratica $\mathbf{e}^T G \mathbf{e}$ è semi definita positiva³. Questa proprietà potrebbe essere dimostrata a partire da quelle illustrate in precedenza.

Per i circuiti contenenti n -poli di resistori lineari continuano a valere sia la proprietà della sovrapposizione degli effetti che quella di reciprocità.

La caratterizzazione dell' n -polo dipende dalla scelta del nodo di riferimento per i potenziali di nodo? La risposta è no. Se si sceglie un altro nodo di riferimento per i potenziali, il legame tra le correnti i_1, i_2, \dots, i_n (che sono indipendenti dal nodo di riferimento scelto per i potenziali) e i nuovi potenziali e'_1, e'_2, \dots, e'_n ($e'_h = e_h - \bar{e}$) è espresso attraverso la stessa matrice G , cioè la matrice G non dipende dal particolare nodo di riferimento scelto (per i potenziali). Questa proprietà è diretta conseguenza della simmetria della matrice delle conduttanze e della proprietà (e).

³ Una forma quadratica $\mathbf{a}^T L \mathbf{a}$ si dice definita positiva se e solo se è maggiore di zero $\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ed è uguale a zero solo se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; in questo caso la matrice L si dice definita positiva. Una forma quadratica si dice semi definita positiva se può essere uguale a zero anche per $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, comunque non deve mai assumere valori negativi; in questo caso la matrice L si dice semi definita positiva.

Gli elementi indipendenti della matrice delle conduttanze sono $(n^2 - n) / 2$ a causa della proprietà (d) di simmetria e della proprietà (e) relativa alla somma degli elementi di una colonna di G . Gli elementi della parte triangolare alta (TA in figura 26) sono uguali a quelli della parte triangolare bassa (TB in figura 26) a causa della simmetria della matrice; gli elementi della parte triangolare alta sono tra loro indipendenti. Invece gli elementi della diagonale principale (DP in figura 26) dipendono da quelli della parte triangolare alta a causa della proprietà (e) (relazione (67)).

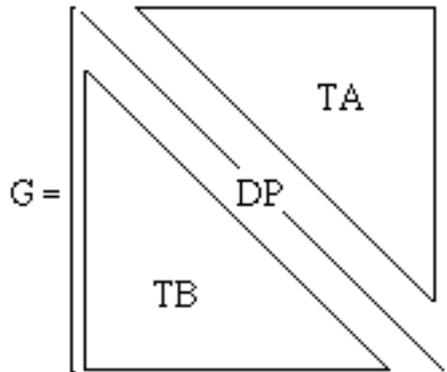


Figura 26

Esempio

Si consideri il quadripolo illustrato in figura 27a e si determini la matrice delle conduttanze. Per quanto appena detto basta determinare la parte triangolare alta della matrice, cioè G_{12} , G_{13} , G_{14} , G_{23} , G_{24} e G_{34} .

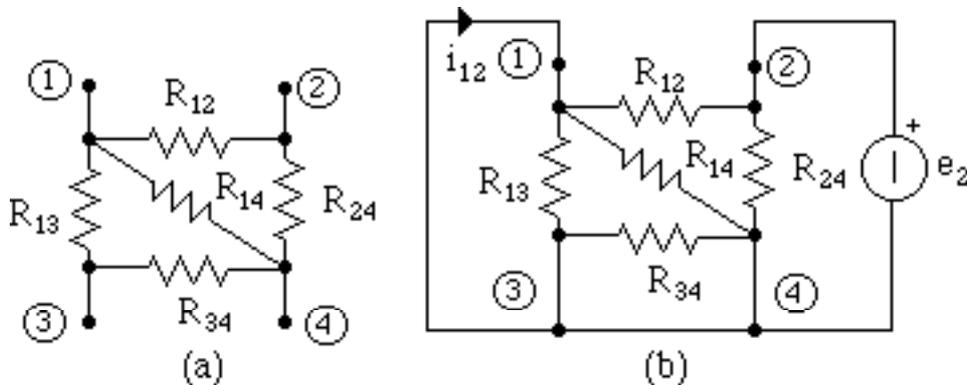


Figura 27

L'elemento G_{12} è così definito $G_{12} = (i_1 / e_2) |_{e_1=e_3=e_4=0}$. Per calcolarlo basta riferirsi al circuito illustrato in figura 27a. Le correnti nei resistori R_{13} e R_{14} sono nulle, perché le tensioni tra i due terminali "1" e "3" e tra i due terminali "1" e "4" sono uguali a zero. Pertanto la corrente i_{12} è uguale (a meno del segno) a quella che circola nel resistore con resistenza R_{12} ; per essa si ha $i_{12} = -e_2 / R_{12}$ e quindi $G_{12} = -1 / R_{12}$. È evidente, allora, che in generale per G_{ij} con i, j si ottiene $G_{ij} = -1 / R_{ij}$.

Si consideri, ora, il caso di un n -polo N_L di resistori lineari e generatori indipendenti (figura 28). Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha

$$\mathbf{i} = G\mathbf{e} + \mathbf{i}^*, \quad (69)$$

dove:

G è la matrice delle conduttanze dell' n -polo, quando tutti i generatori all'interno di N_L sono spenti; \mathbf{i}^* (le correnti di corto circuito) è il vettore delle correnti nei terminali di N_L , quando essi sono collegati al nodo "0" attraverso corto circuiti. La (69) è l'estensione del teorema di Norton a un n -polo resistivo lineare.

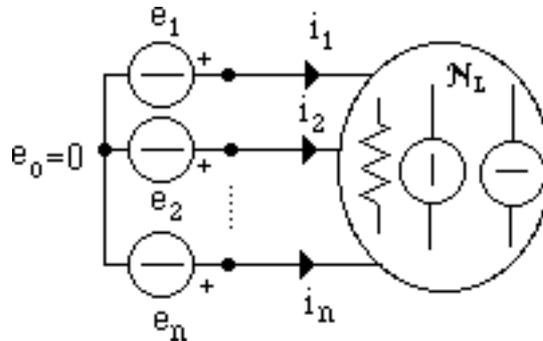


Figura 28

6.8.3 Sintesi di un n -polo resistivo lineare

Il circuito equivalente di un n -polo di soli resistori lineari può essere costruito considerando un polilatero completo di resistori lineari con n vertici: comunque si scelgano due nodi esiste un resistore che li connette direttamente (in figura (29) è mostrato un quadrilatero completo).

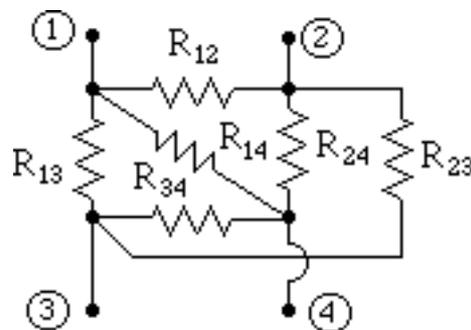


Figura 29 Quadrilatero completo.

Si indichi con R_{ij} la resistenza del resistore che connette il nodo "i" al nodo "j". È immediato verificare che il numero di resistori in un polilatero completo è $(n^2 - n) / 2$, (per ogni coppia di nodi c'è un solo resistore). Allora si ha la relazione

$$R_{ij} = -\frac{1}{G_{ij}}. \quad (70)$$

La formula (70) può essere usata per costruire l' n -polo di resistori corrispondente a una assegnata matrice delle conduttanze (purché la matrice verifichi le proprietà innanzi descritte).

Osservazione

La matrice di un n -polo con $n > 3$ non può essere, in generale, sintetizzata attraverso una configurazione a stella con n resistori. La matrice di un tripolo può essere sintetizzata sia attraverso

una configurazione a triangolo (polilatero completo con $n=3$) e sia con una configurazione a stella con tre resistori.

6.8.4 La trasformazione stella-triangolo

Un circuito costituito da tre resistori connessi a stella può essere sempre “rappresentato” con uno in cui i resistori sono connessi a triangolo e viceversa. Si sta estendendo il concetto di equivalenza al caso di elementi circuitali con più di due terminali.

Per determinare la relazione di equivalenza, cioè la relazione tra le resistenze della configurazione a stella (R_1, R_2, R_3) e le resistenze della configurazione a triangolo (R_{12}, R_{23}, R_{31}), bisogna imporre che, comunque si scelgano le tre correnti i_1, i_2, i_3 (purché sia verificata la condizione $i_1 + i_2 + i_3 = 0$), le tensioni della configurazione a triangolo ($v_{12}^T, v_{23}^T, v_{31}^T$) coincidano con quelle della configurazione a stella ($v_{12}^S, v_{23}^S, v_{31}^S$), figura 30.

Le regole di trasformazione possono essere determinate imponendo che la matrice delle conduttanze della configurazione a stella sia uguale a quella della configurazione a triangolo. Noi qui troveremo le regole di trasformazione usando la sovrapposizione degli effetti. Si considerino i due circuiti illustrati in figura 30. Ognuno di essi ha tre terminali ed è costituito da tre resistori. In figura 30a i resistori sono connessi in modo tale da ricordare una “stella” (**connessione a stella**), mentre in figura 30b sono connessi in modo tale da ricordare un “triangolo” (**connessione a triangolo**).

Per determinare il legame tra (R_1, R_2, R_3) e (R_{12}, R_{23}, R_{31}) conviene, allo scopo di ridurre la complessità di calcolo, imporre l'equivalenza per delle terne particolari di correnti. Si imponga l'equivalenza per la terna

$$i_1 = I^{(1)}, i_2 = -I^{(1)}, i_3 = 0. \quad (71)$$

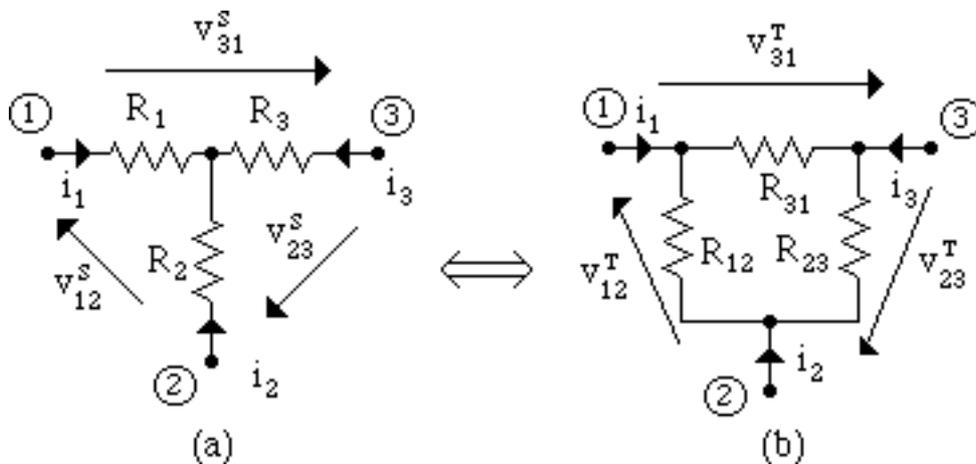


Figura 30 Tre resistori connessi a stella (a) e connessi a triangolo (b).

Le tensioni v_{31}^S e v_{31}^T valgono (vedi figura 30)

$$\begin{aligned} v_{31}^S &= -R_1 I^{(1)}, \\ v_{31}^T &= -\frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I^{(1)}. \end{aligned} \quad (72)$$

Imponendo $v_{31}^s = v_{31}^T$, si ottiene la relazione

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (73)$$

Imponendo, ora, l'equivalenza per le due terne indipendenti

$$\begin{aligned} i_1 = 0, i_2 = I^{(2)}, i_3 = -I^{(2)}, \\ i_1 = I^{(3)}, i_2 = 0, i_3 = -I^{(3)}, \end{aligned} \quad (74)$$

si ottengono le altre due relazioni

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_3 &= \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \end{aligned} \quad (75)$$

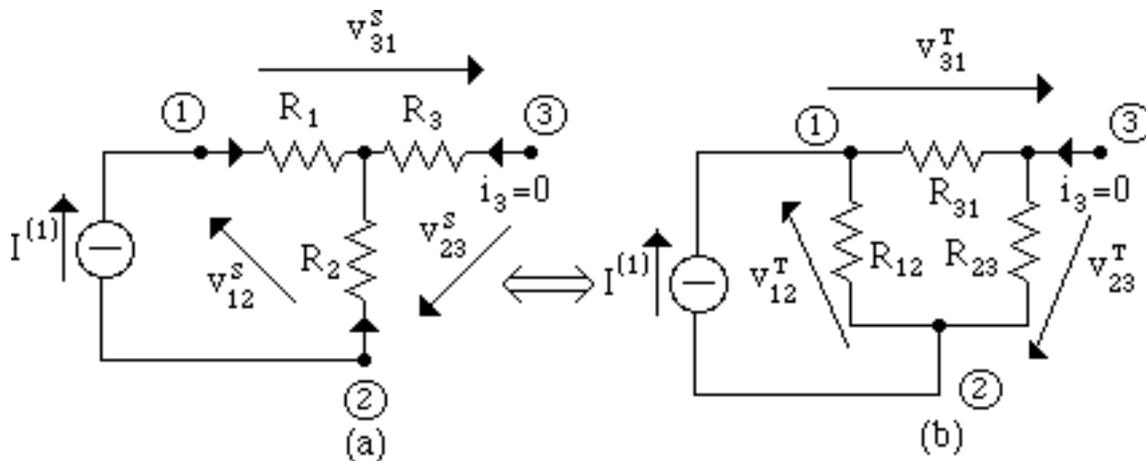


Figura 31

Il lettore verifichi che, dalle (73) e (75), si ottiene anche $v_{12}^T = v_{12}^s$ e $v_{23}^T = v_{23}^s$. Le relazioni (73) e (75) sono state ottenute imponendo l'equivalenza per tre particolari terne di correnti. Per la proprietà della sovrapposizione degli effetti l'equivalenza è assicurata per qualsiasi altra terna di correnti (il lettore dimostri che è sempre possibile scomporre una terna arbitraria di correnti nella sovrapposizione di tre terne del tipo (71) e (74)).

Formule per la trasformazione triangolo↔stella

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_3 &= \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \end{aligned} \quad (76)$$

La trasformazione inversa è descritta dalle relazioni (formule della **trasformazione stella↔triangolo**)

$$\begin{aligned}
 R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \\
 R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, \\
 R_{31} &= R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}.
 \end{aligned}
 \tag{77}$$

Il lettore determini le relazioni (76) e (77) imponendo che la matrice delle conduttanze della configurazione a triangolo e della configurazione a stella siano uguali.

Esempio

La soluzione del circuito illustrato nella figura 13 del Capitolo 5 può essere semplificata notevolmente se si sostituisce il triangolo costituito dai resistori di resistenze (R_1, R_3, R_5) con la stella equivalente (R_a, R_b, R_c) :

$$\begin{aligned}
 R_a &= \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = 1, \\
 R_b &= \frac{R_3 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = 1, \\
 R_c &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = 1.
 \end{aligned}$$

Così facendo si ottiene il circuito equivalente N_{eq} illustrato in figura 32. Esso può essere risolto attraverso l'equivalenza serie e parallelo e le formule dei partitori. Il lettore determini la corrente i che circola nel resistore R in questo modo e la confronti con quella ottenuta applicando il metodo dei potenziali di nodo.

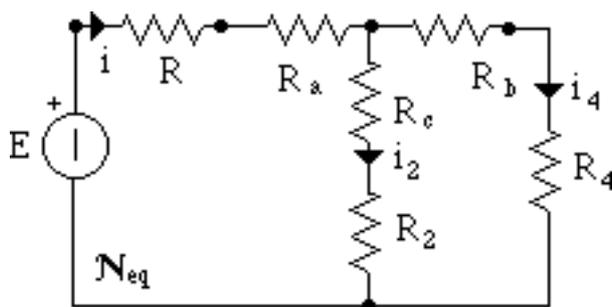


Figura 32

6.9 M-porte di resistori lineari

Nel precedente Capitolo un generico bipolo costituito da resistori lineari e generatori ideali è stato caratterizzato attraverso il generatore equivalente di Thévenin-Norton. Nel precedente paragrafo un generico n-polo di resistori lineari e generatori indipendenti è stato caratterizzato attraverso l'uso dei potenziali di nodo attraverso la matrice delle conduttanze e il vettore delle correnti di corto circuito.

Un generico doppio bipolo, e più in generale un M-porte, costituito da resistori lineari e generatori ideali può essere caratterizzato allo stesso modo, utilizzando la proprietà della sovrapposizione degli effetti.

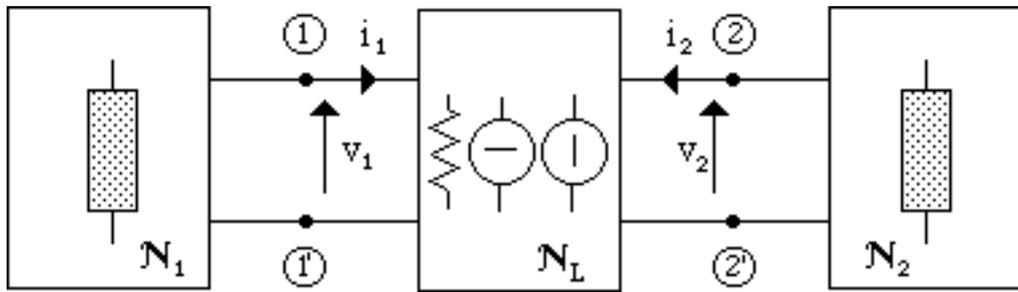


Figura 33 Circuito costituito da un doppio bipolo di resistori lineari e generatori indipendenti collegato a due bipoli.

Si consideri, ora, un circuito arbitrario costituito da un doppio bipolo lineare resistivo N_L e da due bipoli N_1 e N_2 non necessariamente lineari o statici (figura 33). Il funzionamento del circuito alle due porte (ovvero le tensioni v_1 e v_2 e le correnti i_1 e i_2), dipende solo dalle equazioni costitutive dei due bipoli e dalla caratteristica del doppio bipolo N_L .

6.9.1 Caratterizzazione di un m-porte di resistori lineari

Il doppio bipolo resistivo lineare N_L può essere caratterizzato in diversi modi:

- caratterizzazione su **base tensione**: le tensioni v_1 e v_2 sono le variabili indipendenti e le correnti i_1 e i_2 sono le variabili dipendenti;
- caratterizzazione su **base corrente**: le correnti i_1 e i_2 sono le variabili indipendenti e le tensioni v_1 e v_2 sono le variabili dipendenti;
- caratterizzazione **ibrida**: ad esempio, la tensione v_1 e la corrente i_2 sono le variabili indipendenti e la corrente i_1 e la tensione v_2 sono le variabili dipendenti.

- Caratterizzazione su base tensione

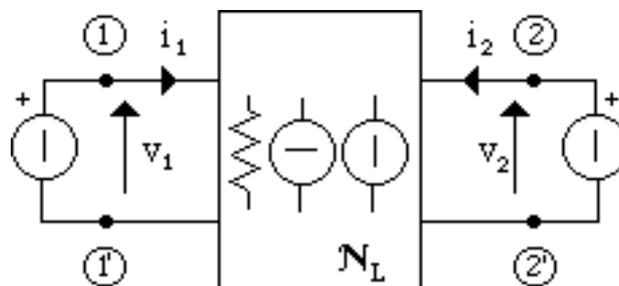


Figura 34 Caratterizzazione su base tensione di un doppio bipolo.

Per costruire la caratteristica del doppio bipolo N_L su base tensione (e quindi il doppio bipolo equivalente), c'è bisogno di determinare la relazione tra le tensioni v_1 e v_2 e le correnti i_1 e i_2 per tutti i valori di tensione ammissibili. Ciò può essere fatto attraverso un *esperimento concettuale* (figura 34), in cui si impongono le tensioni v_1 e v_2 attraverso due generatori di tensione ideali e si

determinano le correnti i_1 e i_2 . Si assuma che il circuito di figura 34 abbia una e una sola soluzione per ogni coppia v_1 e v_2 .

Siccome il circuito è lineare, la relazione cercata può essere determinata attraverso la sovrapposizione degli effetti. A tale scopo si considerino i due circuiti ausiliari rappresentati in figura 35. Il primo, N , è stato ottenuto spegnendo nel circuito di figura 34 tutti i generatori di N_L mentre il secondo, N^* , è stato ottenuto spegnendo i due generatori di tensione “ausiliari” di valore v_1 e v_2 .

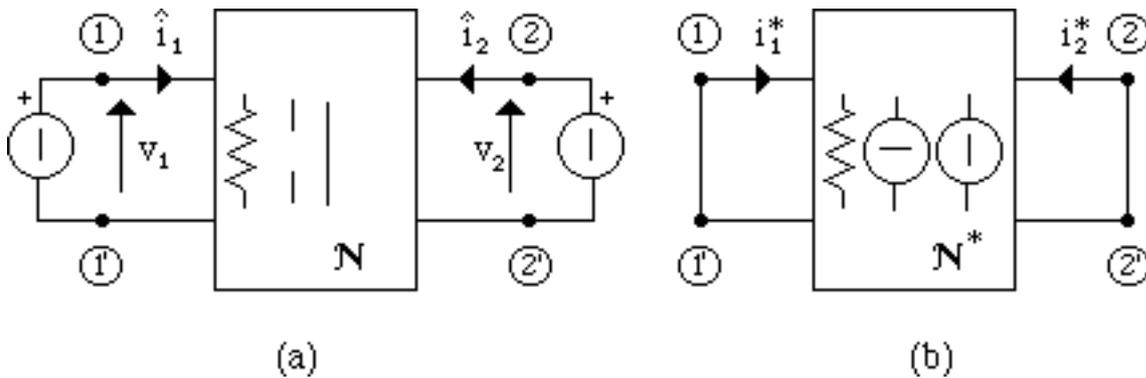


Figura 35

Caratterizzazione del doppio bipolo N

Il doppio bipolo N costituito da soli resistori lineari può essere caratterizzato usando, di nuovo, la sovrapposizione degli effetti. Si considerino i due circuiti rappresentati in figura 36; nel circuito N_1 , è $v_2=0$ (figura 36a), mentre nel circuito N_2 è $v_1=0$ (figura 36b).

Siccome nel circuito N_1 c'è un solo generatore e i resistori sono tutti lineari, le correnti i_{11} e i_{21} sono direttamente proporzionali alla tensione v_1 ; allora i_{11} e i_{21} possono essere espresse tramite le relazioni

$$i_{11} = G_{11}v_1, \quad i_{21} = G_{21}v_1, \tag{78}$$

dove G_{11} e G_{21} sono due costanti che hanno la dimensione di una conduttanza. Il fattore G_{11} (conduttanza propria) rappresenta la conduttanza del resistore equivalente visto dal generatore di tensione v_1 quando $v_2=0$.

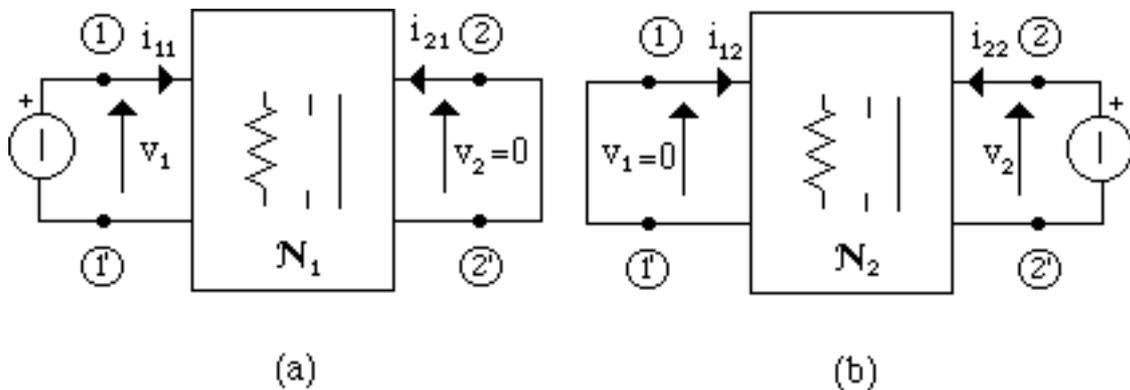


Figura 36

Anche il circuito N_2 ha un solo generatore e i resistori sono tutti lineari; quindi le correnti i_{12} e i_{22} sono direttamente proporzionali alla tensione v_2 ; allora i_{12} e i_{22} possono essere espresse tramite le relazioni

$$i_{12} = G_{12}v_2, \quad i_{22} = G_{22}v_2, \quad (79)$$

dove G_{12} e G_{22} sono due costanti che hanno sempre la dimensione di una conduttanza. Il fattore G_{22} (conduttanza propria) rappresenta la conduttanza del resistore equivalente visto dal generatore di tensione v_2 quando $v_1=0$. Utilizzando la sovrapposizione degli effetti si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{i}_1 &= G_{11}v_1 + G_{12}v_2, \\ \hat{i}_2 &= G_{21}v_1 + G_{22}v_2. \end{aligned} \quad (80)$$

La (80) è la relazione caratteristica del doppio bipolo N di resistori lineari quando i generatori sono spenti. Essa può essere rappresentata in forma matriciale. Posto $\hat{\mathbf{i}} = (\hat{i}_1, \hat{i}_2)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, la (80) diventa

$$\hat{\mathbf{i}} = G\mathbf{v}, \quad (81)$$

dove la matrice quadrata $G_{2 \times 2}$ è data da

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Alla matrice G si dà il nome di **matrice delle conduttanze del doppio bipolo**. Gli elementi appartenenti alla diagonale principale sono le *conduttanze proprie*; gli altri elementi prendono il nome di *conduttanze mutue*.

La potenza assorbita dal doppio bipolo vale

$$p = \hat{i}_1 v_1 + \hat{i}_2 v_2 = \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{i}}. \quad (83)$$

Utilizzando la (81), si ha

$$p = \mathbf{v}^T G \mathbf{v}. \quad (84)$$

Le stessa matrice può essere introdotta per caratterizzare un M -porte di resistori lineari. La matrice delle conduttanze di un M -porte è una matrice quadrata $M \times M$ e il generico elemento G_{kh} ($k, h = 1, 2, \dots, M$) è così definito

$$G_{kh} = \frac{i_k}{v_h} \Big|_{v_j = 0 \quad \forall j \neq h}. \quad (85)$$

Così come accade per l' n -polo, la matrice delle conduttanze di un doppio bipolo lineare e passivo e più in generale di un M -porte, ha delle proprietà generali indipendenti dalla particolare struttura.

*Caratterizzazione del doppio bipolo N^**

Nel circuito illustrato in figura 35b le sorgenti sono solo quelle interne al circuito N_L ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$). Si indichi con $\mathbf{i}^* = (i_1^*, i_2^*)^T$ il vettore delle correnti di N_L quando le tensioni $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ sono uguali a zero (le cosiddette **correnti di corto circuito**). Le **correnti di corto circuito** $\mathbf{i}^* = (i_1^*, i_2^*)^T$ sono indipendenti dalle tensioni $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, dipendono solo dalla struttura interna del bipolo resistivo N_L .

Utilizzando, ora, la sovrapposizione degli effetti, si ha per il doppio bipolo N_L

$$\mathbf{i} = G\mathbf{v} + \mathbf{i}^* \quad (86)$$

Il vettore $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^T$ rappresenta le correnti del doppio bipolo N_L . La (86) è la caratteristica del doppio bipolo N_L . Essa rappresenta la generalizzazione del teorema di Norton ai doppi bipoli resistivi lineari.

È evidente che la relazione (86) vale anche quando l'elemento circuitale ha un numero di porte maggiore a due e quindi per un qualsiasi M-porte: l'unica ipotesi che bisogna fare è che l'M-porte sia costituito da resistori lineari e generatori ideali.

- Caratterizzazione su base corrente

Si consideri ora la caratterizzazione su base corrente e si assuma che il circuito ammetta una e una sola soluzione per ogni valore di $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^T$, figura 37. Il lettore dimostri, applicando la sovrapposizione degli effetti, che la relazione tra la tensione $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ e la corrente $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^T$ vale

$$\mathbf{v} = R\mathbf{i} + \mathbf{v}^* \quad (87)$$

dove R è la **matrice delle resistenze** “vista” dalla coppia di generatori di corrente $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^T$ (una matrice quadrata $M \times M$ per un M-porte) quando i generatori interni al doppio bipolo sono spenti e $\mathbf{v}^* = (v_1^*, v_2^*)^T$ sono le tensioni sulle due porte quando esse sono collegate a due circuiti aperti (le cosiddette tensioni a vuoto). Il generico elemento R_{ij} della matrice delle resistenze è dato da

$$R_{ij} = \left. \frac{v_i}{i_j} \right|_{i_h = 0 \ \forall h \neq j \text{ e } \mathbf{v}^* = \mathbf{0}} \quad (88)$$

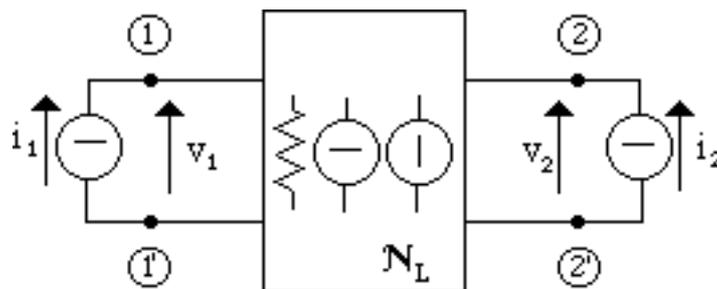


Figura 37 Caratterizzazione su base corrente.

La (87) è l'estensione ai doppi bipoli e agli M-porte del teorema di Thévenin.

- Caratterizzazione ibrida

Si consideri ora la caratterizzazione ibrida, dove $\mathbf{x} = (v_1, i_2)^T$ sono le variabili indipendenti (rispettivamente, la tensione sulla porta “1” e la corrente della porta “2”), e $\mathbf{y} = (i_1, v_2)^T$ (rispettivamente, la corrente della porta “1” e la tensione sulla porta “2”), sono le variabili dipendenti, figura 38. Il lettore dimostri, applicando la sovrapposizione degli effetti, che la relazione tra $\mathbf{x} = (v_1, i_2)^T$ e $\mathbf{y} = (i_1, v_2)^T$ è

$$\mathbf{y} = H\mathbf{x} + \mathbf{y}^*, \quad (89)$$

dove H è la **matrice ibrida** “vista” dalla coppia di generatori $\mathbf{x} = (v_1, i_2)^T$ (una matrice quadrata $M \times M$ per un M-porte) quando i generatori interni al doppio bipolo sono spenti e $\mathbf{y}^* = (i_1^*, v_2^*)^T$ rappresenta la corrente nella porta “1” quando è collegata a un corto circuito e la tensione sulla porta “2” quando è collegata a un circuito aperto. Gli elementi della matrice ibrida sono

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{i_2=0}, & h_{12} &= \left. \frac{i_1}{i_2} \right|_{v_1=0} \\ h_{21} &= \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0}, & h_{22} &= \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{v_1=0} \end{aligned} \quad (90)$$

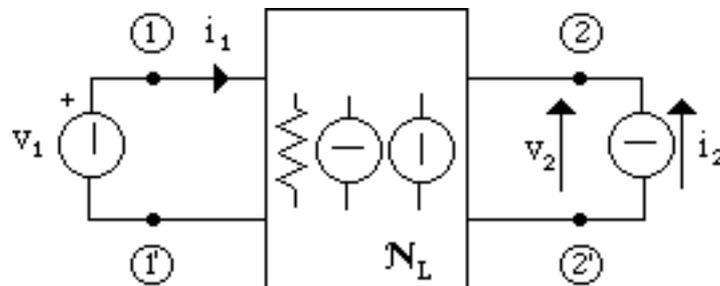


Figura 38 Caratterizzazione ibrida.

L'elemento h_{11} rappresenta la conduttanza vista dal generatore v_1 quando la porta “2” è collegata a un circuito aperto e l'elemento h_{22} rappresenta la resistenza vista dal generatore i_2 quando la porta “1” è collegata a un corto circuito. Gli elementi fuori diagonale h_{12} e h_{21} sono numeri puri: h_{21} rappresenta il rapporto tra la tensione della porta “2” e la tensione della porta “1”, quando la porta “2” è collegata a un circuito aperto; h_{12} rappresenta il rapporto tra la corrente della porta “1” e la corrente della porta “2”, quando la porta “1” è collegata a un corto circuito.

La potenza elettrica assorbita dal doppio bipolo può essere espressa attraverso la matrice ibrida; si ha

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = \mathbf{x}^T H \mathbf{x}. \quad (91)$$

6.9.2 Proprietà delle matrici delle conduttanze, resistenze e ibride

Ora studieremo le proprietà delle matrici delle conduttanze, resistenze e ibride di un doppio bipolo e più in generale di un M-porte.

- Proprietà della matrice delle conduttanze

(a) *Le conduttanze proprie sono maggiori o uguali a zero, $G_{ii} \geq 0$.*

Questa è una immediata conseguenza della passività (su ogni porta del doppio bipolo si sta utilizzando la convenzione dell'utilizzatore). Qualora alcuni resistori fossero attivi, le conduttanze proprie potrebbero essere minori di zero.

(b) *Le conduttanze mutue possono essere positive o negative, a seconda dei versi di riferimento per le tensioni.*

Si assuma, ad esempio, che nel circuito N_1 (figura 36a), la conduttanza mutua G_{21} sia positiva. Si consideri, ora, lo stesso circuito ma con i terminali “2” e “2” scambiati. Per la nuova conduttanza mutua \tilde{G}_{21} si ha

$$\tilde{G}_{21} = \frac{\tilde{i}_{21}}{v_1} = -\frac{i_{21}}{v_1} = -G_{21} < 0. \quad (92)$$

(c) *Se tutti i resistori che costituiscono il doppio bipolo sono passivi, allora vale la proprietà $|G_{kh}| \leq G_{hh} \forall h, k$.*

Questa proprietà è diretta conseguenza della non amplificazione della corrente in un circuito costituito da resistori passivi e un solo generatore. Sia i_{kh} la corrente nella porta “k” quando il generatore di tensione v_h sulla porta “h” è acceso e tutti gli altri sono spenti (un generatore di tensione spento si comporta come se fosse un corto circuito). Allora si ha

$$G_{hh} = \frac{i_{hh}}{|v_h|} \text{ e } |G_{kh}| = \frac{|i_{kh}|}{|v_h|}, \quad (93)$$

e per la non amplificazione della corrente è

$$i_{hh} \geq |i_{kh}|. \quad (94)$$

(d) *La matrice delle conduttanze è simmetrica, $G_{kh} = G_{hk}$.*

Questa è una immediata conseguenza della proprietà di reciprocità, che vale per circuiti costituiti da resistori lineari. Infatti si ha

$$G_{hk} = \frac{i_{hk}}{v_k}, \quad G_{kh} = \frac{i_{kh}}{v_h}, \quad (95)$$

e per la reciprocità (la prima forma)

$$\frac{i_{hk}}{v_k} = \frac{i_{kh}}{v_h}. \quad (96)$$

(Nel circuito di figura 36a la causa è v_1 e l'effetto è i_{21} , mentre nel circuito di figura 36b la causa è v_2 e l'effetto è i_{12}).

(e) La matrice delle conduttanze è semi definita positiva, $\mathbf{v}^T G \mathbf{v} \geq 0$.

Siccome i resistori sono passivi, per la conservazione della potenza elettrica, la potenza assorbita dal doppio bipolo $\mathbf{v}^T G \mathbf{v}$ deve essere maggiore o uguale a zero indipendentemente dai valori che le tensioni di porta assumono; quindi deve essere

$$\mathbf{v}^T G \mathbf{v} \geq 0 \quad \forall \mathbf{v}. \quad (97)$$

Pertanto la forma quadratica $\mathbf{v}^T G \mathbf{v}$ deve essere semi definita positiva. A differenza di quanto accade nell'n-polo, la matrice delle conduttanze può essere definita positiva. Essa è certamente definita positiva se nel doppio bipolo non ci sono corto circuiti e/o circuiti aperti, ma solo resistori con resistenze diverse da zero e limitate. Quando G è definita positiva, il suo determinante è diverso da zero e quindi è invertibile. Questa proprietà può essere dimostrata a partire da quelle discusse in precedenza.

- Proprietà della matrice delle resistenze

La matrice delle resistenze ha le stesse proprietà della matrice delle conduttanze; si ha (il lettore le dimostri):

$$\begin{aligned} R_{ii} &\geq 0, \\ R_{ij} &\leq 0 \text{ o } R_{ij} \geq 0, \\ R_{ii} &\geq |R_{ji}|, \\ R_{ij} &= R_{ji}, \\ \mathbf{i}^T R \mathbf{i} &\geq 0. \end{aligned} \quad (98)$$

Per dimostrare la simmetria della matrice R bisogna utilizzare la seconda forma della proprietà di reciprocità.

Se il doppio bipolo può essere caratterizzato sia in corrente che in tensione, allora si ha

$$\begin{aligned} R &= G^{-1}, \\ \mathbf{i}^* &= -R^{-1} \mathbf{v}^*. \end{aligned} \quad (99)$$

- Proprietà della matrice ibrida

Consideriamo ora la matrice ibrida.

(a) Gli elementi h_{11} e h_{22} sono maggiori o uguali a zero.

Questa è una immediata conseguenza della passività (su ogni porta del doppio bipolo si sta utilizzando la convenzione dell'utilizzatore).

(b) Gli elementi h_{12} e h_{21} possono essere positivi o negativi.

La dimostrazione è simile a quella svolta per la matrice G .

(c) Gli elementi h_{12} e h_{21} verificano la condizione $|h_{kh}| \leq 1$.

Questa proprietà è diretta conseguenza della non amplificazione della tensione e della corrente in un circuito costituito da resistori passivi e un solo generatore.

(d) La matrice ibrida è anti-simmetrica, cioè $h_{12} = -h_{21}$.

Questa è una immediata conseguenza della **terza forma della reciprocità**, che vale per circuiti costituiti da resistori lineari. Infatti dalla **terza forma della reciprocità** si ha

$$h_{21} = \frac{v_{21}}{v_1} = -\frac{i_{12}}{i_2} = -h_{12}, \quad (100)$$

dove v_{21} è la tensione sulla porta “2” quando $i_2 = 0$ e i_{12} è la corrente nella porta “1” quando $v_1 = 0$.

(e) La matrice ibrida è semi definita positiva, $\mathbf{x}^T H \mathbf{x} \geq 0$.

Siccome i resistori sono passivi, per la conservazione della potenza elettrica, la potenza assorbita dal doppio bipolo $\mathbf{x}^T H \mathbf{x}$ deve essere maggiore o uguale a zero:

$$\mathbf{x}^T H \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}. \quad (101)$$

La (101) può essere ottenuta direttamente dalle proprietà (a) e (d). Infatti a causa dell'antisimmetria della matrice H , si ha

$$p = \mathbf{x}^T H \mathbf{x} = h_{11}v_1^2 + h_{22}i_2^2; \quad (102)$$

per la proprietà (a), h_{11} e h_{22} sono positivi o nulli e quindi $p \geq 0$.

A differenza delle matrici delle resistenze e delle conduttanze, non può esserci nessuna relazione tra gli elementi della diagonale principale della matrice ibrida H e quelli fuori della diagonale.

Prima di passare al problema della sintesi di un doppio bipolo vogliamo soffermarci sulla caratterizzazione ibrida di un M -porte con $M > 2$ e sulle proprietà della matrice.

Si consideri un M -porte di resistori lineari e passivi con $M > 2$ e lo si caratterizzi alimentando le prime m_e porte con generatori di tensioni e le restanti m_j con generatori ideali di corrente ($m_e + m_j = M$), figura 39.

Siano $\mathbf{v}_e = (v_1, v_2, \dots, v_{m_e})^T$ e $\mathbf{i}_e = (i_1, i_2, \dots, i_{m_e})^T$, rispettivamente, le tensioni e correnti relative alle porte caratterizzate in tensione, e $\mathbf{v}_j = (v_{m_e+1}, \dots, v_M)^T$ e $\mathbf{i}_j = (i_{m_e+1}, \dots, i_M)^T$, rispettivamente, le tensioni e correnti relative alle porte caratterizzate in corrente. Per la linearità, la relazione caratteristica dell' M -porte è

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{v}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_e & S_{ej} \\ S_{je} & R_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{i}_j \end{bmatrix}; \quad (103)$$

nella relazione (103) compare una matrice a blocchi.

Il blocco G_e rappresenta la matrice delle conduttanze (una matrice quadrata $m_e \times m_e$) “vista” dai generatori di tensione (rappresentati da \mathbf{v}_e), quando i generatori di corrente (rappresentati da \mathbf{i}_j), sono spenti; essa, quindi, ha le proprietà della matrice delle conduttanze descritte in precedenza.

Il blocco R_j rappresenta la matrice delle resistenze (una matrice quadrata $m_j \times m_j$) vista dai generatori di corrente quando i generatori di tensione sono spenti; essa, quindi, ha le proprietà della matrice delle resistenze descritte in precedenza.

Il blocco S_{ej} (una matrice rettangolare $m_e \times m_j$ di elementi adimensionali) descrive il contributo dei generatori di corrente alle correnti nei generatori di tensione (quando i generatori di tensione sono spenti) e il blocco S_{je} (una matrice rettangolare $m_j \times m_e$ di elementi adimensionali) descrive il contributo dei generatori di tensione alle tensioni nei generatori di corrente (quando i generatori di corrente sono spenti). Tra gli elementi della matrice S_{ej} non c'è nessuna relazione, e così anche tra gli elementi di S_{je} . Invece c'è una semplice e interessante relazione tra S_{ej} e S_{je} . Applicando la terza forma della proprietà di reciprocità, si ottiene

$$S_{ej} = -S_{je}^T. \quad (104)$$

Inoltre per la non amplificazione delle tensioni e delle correnti gli elementi di S_{ej} sono, in valore assoluto, minori di uno. Nel caso $M=2$, la (104) dà la proprietà illustrata precedentemente.

A causa della (104), la potenza elettrica assorbita dall'M-porte vale

$$p = \mathbf{v}_e^T G_e \mathbf{v}_e + \mathbf{i}_j^T R_j \mathbf{i}_j. \quad (105)$$

In un circuito costituito da M-porte resistivi lineari continua a valere sia la proprietà della sovrapposizione degli effetti, che quella di reciprocità.

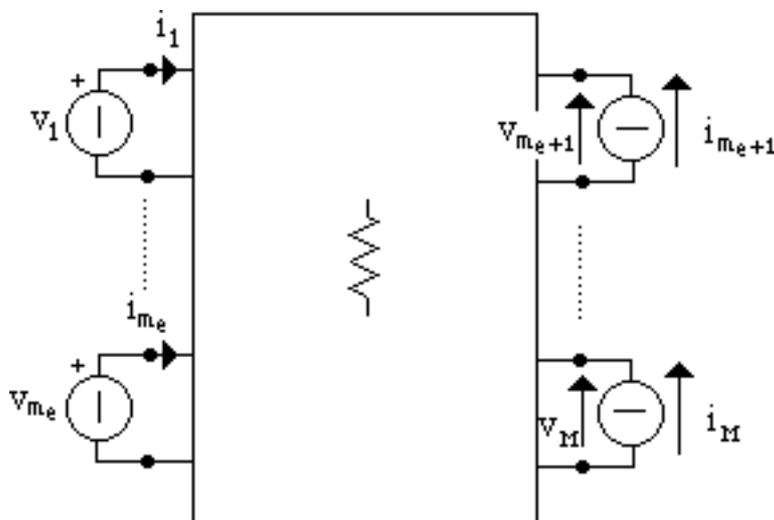


Figura 39 Caratterizzazione ibrida di un M-porte (con $M > 2$).

6.9.3 Sintesi di un doppio bipolo resistivo lineare

Ogni rappresentazione (R , G e H) di un doppio bipolo di soli resistori è caratterizzata da tre parametri indipendenti, quindi sono necessari (e anche sufficienti) tre resistori per costruire un doppio bipolo equivalente o per realizzare un doppio bipolo di resistori corrispondente a una assegnata matrice (R , G e H).

Il circuito equivalente di un doppio bipolo di soli resistori lineari può essere costruito considerando un doppio bipolo del tipo illustrato in figura 40: alla configurazione rappresentata in figura 40a si dà il nome di configurazione a “T”, invece a quella rappresentata in figura 40b si dà il nome di configurazione a “Π”. Conviene rappresentare la matrice delle resistenze tramite la configurazione a “T” e la matrice delle conduttanze tramite la configurazione a “Π”.

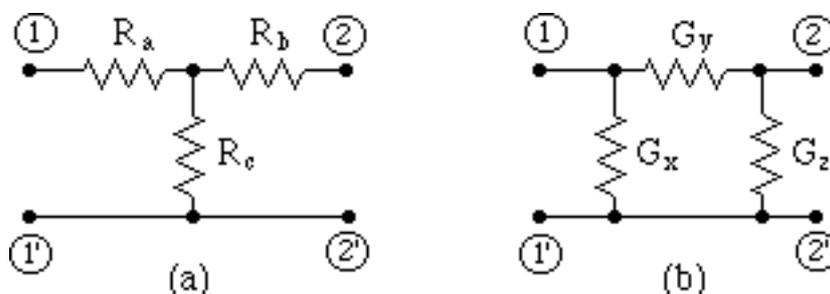


Figura 40 Configurazione a “T” (a) e configurazione a “Π” (b).

- **Matrice delle resistenze della configurazione a “T”.**

Per il doppio bipolo di figura 40a si ottiene la matrice delle resistenze

$$\begin{aligned} R_{11} &= \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = R_a + R_c, \\ R_{22} &= \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = R_b + R_c, \\ R_{21} = R_{12} &= \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = R_c. \end{aligned} \quad (106)$$

Allora per i resistori della configurazione a “T” si ha

$$\begin{aligned} R_a &= R_{11} - R_{12}, \\ R_b &= R_{22} - R_{12}, \\ R_c &= R_{12}. \end{aligned} \quad (107)$$

Se R_{12} è negativo, bisogna invertire la coppia di terminali di una delle due porte per ottenere una resistenza R_c positiva.

I parametri ibridi della configurazione a “T” sono:

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{i_2=0} = (R_a + R_c)^{-1}, \\
 h_{22} &= \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{v_1=0} = R_b + \frac{R_a R_c}{R_a + R_c}, \\
 -h_{12} &= h_{21} = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0} = \frac{R_c}{R_a + R_c}.
 \end{aligned} \tag{108}$$

- *Matrice delle conduttanze della configurazione a “II”.*

Per il doppio bipolo di figura 40b si ottiene la matrice delle conduttanze

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = G_x + G_y, \\
 G_{22} &= \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = G_y + G_z, \\
 G_{21} &= G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = -G_y.
 \end{aligned} \tag{109}$$

Allora per i resistori della configurazione a “II” si ha

$$\begin{aligned}
 G_x &= G_{11} + G_{12}, \\
 G_y &= -G_{12}, \\
 G_z &= G_{22} + G_{12}.
 \end{aligned} \tag{110}$$

Se G_{12} fosse positivo, allora bisognerebbe invertire la coppia di terminali di una delle due porte per ottenere una conduttanza G_y positiva.

6.10 Induttori accoppiati (trasformatore)

Se un induttore viene posto nelle immediate vicinanze di un altro elemento analogo, accade che il flusso concatenato con le spire di ognuno dei due dipende sia dalla corrente che circola nel primo avvolgimento che da quella che circola nel secondo. Siamo in presenza, quindi, di un doppio bipolo che chiameremo “accoppiamento” mutuo.

Gli induttori mutuamente accoppiati sono diffusamente impiegati nei circuiti di comunicazione, nelle apparecchiature di misura e nei sistemi di potenza. I trasformatori che si utilizzano nelle reti di potenza che trasmettono e distribuiscono l'energia elettrica sono induttori accoppiati. Anche i motori e i generatori elettrici possono essere rappresentati tramite induttori accoppiati tempo-varianti. Ci limiteremo a descrivere il caso più semplice, ma non per questo meno significativo, in cui ci sono due avvolgimenti e l'accoppiamento mutuo è tempo-invariante.

6.10.1 Equazioni costitutive di due induttori accoppiati

Si consideri un toro costituito da materiale ferromagnetico: tipicamente ferrite o lamine sottili di acciaio speciale. Si avvolgono su tale toro due bobine (avvolgimenti di “filo” conduttore smaltato con vernice isolante), come illustrato in figura 41; si ottiene un doppio bipolo. A esso si dà il nome **induttori accoppiati** o **circuiti mutuamente accoppiati**.

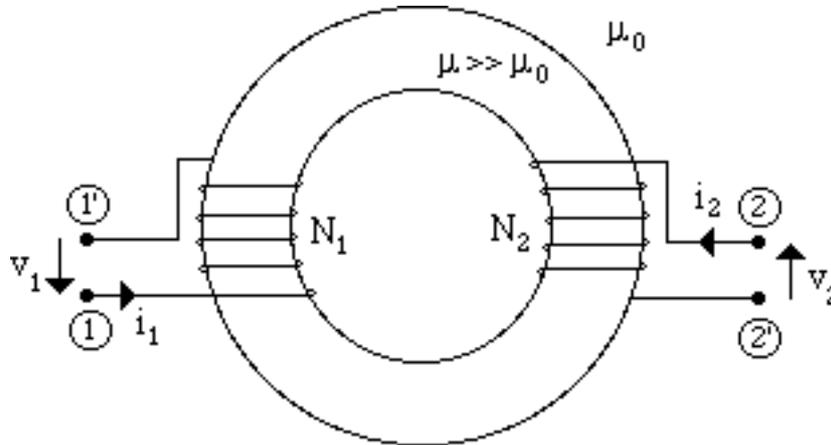


Figura 41 Due circuiti, avvolti attorno a un nucleo toroidale, accoppiati magneticamente.

La caratteristica di funzionamento di questo doppio bipolo può essere ricavata applicando il modello quasi stazionario magnetico (in questo componente gli effetti dovuti alla *corrente di spostamento elettrico* sono trascurabili nel limite lentamente variabile). Dalla legge di Faraday-Neumann si ottengono le due equazioni (sono le stesse equazioni che sono state scritte per l'induttore nel Capitolo 2)

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d\phi_1}{dt}, \\ v_2 &= \frac{d\phi_2}{dt}, \end{aligned} \quad (111)$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono, rispettivamente, i flussi concatenati con la bobina “1” e la bobina “2” del campo magnetico prodotto dalle correnti i_1 e i_2 che circolano nelle due bobine. Il flusso del campo magnetico concatenato con la bobina “j” ($j=1, 2$) vale

$$\phi_j = \iint_{S_{\gamma_j}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_j ds, \quad (112)$$

dove S_{γ_j} è una qualsiasi superficie che ha come orlo la linea chiusa γ_j costituita dal conduttore filiforme della j-esima bobina e dal segmento che unisce i due terminali della bobina stessa, e il verso della normale \mathbf{n}_j deve essere concorde, secondo la regola del cavatappi, con il riferimento scelto per il verso della corrente i_j . Abbiamo supposto che la conducibilità del conduttore con cui sono realizzati i due avvolgimenti sia infinita.

Si assuma che l'anello toroidale sia costituito da un materiale magnetico ideale (isotropo), in cui siano trascurabili gli effetti dovuti ai fenomeni non lineari (come la saturazione e l'isteresi magnetica

) e con permeabilità magnetica molto grande rispetto a quella del vuoto; allora la relazione costitutiva del materiale magnetico è lineare (μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto),

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu \gg \mu_0. \quad (113)$$

Inoltre, si assuma che siano trascurabili anche gli effetti delle correnti indotte nell'anello toroidale a causa della variazione nel tempo del campo magnetico (un materiale magnetico può essere un buon conduttore di corrente elettrica).

Sotto queste ipotesi: (a) vale la sovrapposizione degli effetti; (b) solo le correnti di conduzione nelle due bobine producono campo magnetico; (c) la relazione tra i flussi e le correnti è di tipo statico. La relazione è di tipo statico perché si suppone che siano trascurabili i fenomeni di isteresi magnetica e gli effetti delle correnti indotte nel nucleo e perché nel modello quasi-stazionario magnetico il legame tra le correnti e il campo \mathbf{H} è di tipo statico (**legge di Ampere**). Allora per i flussi ϕ_1 e ϕ_2 si ha

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2, \\ \phi_2 &= \phi_{21} + \phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2, \end{aligned} \quad (114)$$

dove L_1 , L_2 , M_{12} e M_{21} sono quattro parametri costanti nel tempo e indipendenti dalle due correnti i_1 e i_2 . Il flusso $\phi_{11} = L_1 i_1$ è il flusso concatenato con la prima bobina quando la corrente i_2 nella seconda bobina è uguale a zero, e $\phi_{22} = L_2 i_2$ è il flusso concatenato con la seconda bobina quando la corrente i_1 nella prima bobina è uguale a zero. Quindi L_1 e L_2 sono, rispettivamente, i coefficienti di autoinduzione della bobina “1” e della bobina “2”. Se le due bobine sono realizzate in modo tale da poter essere schematizzate come dei solenoidi lunghi, per i due coefficienti L_1 e L_2 si hanno le espressioni approssimate

$$\begin{aligned} L_1 &= \mu \frac{N_1^2 S}{h}, \\ L_2 &= \mu \frac{N_2^2 S}{h}. \end{aligned} \quad (115)$$

Si è assunto che i due solenoidi cilindrici hanno la stessa lunghezza h e la stessa sezione S ; N_1 e N_2 sono, rispettivamente, i numeri di spire degli avvolgimenti “1” e “2”.

I coefficienti M_{12} e M_{21} sono detti coefficienti di mutua induzione: M_{12} rappresenta il flusso del campo magnetico concatenato con la bobina “1” prodotto da una corrente unitaria che circola nella bobina “2” quando $i_1 = 0$, mentre M_{21} rappresenta il flusso del campo magnetico concatenato con la bobina “2” prodotto da una corrente unitaria che circola nella bobina “1” quando $i_2 = 0$.

Se si definiscono i flussi medi di auto e mutua induzione

$$\phi_{11m} = \frac{L_1 i_1}{N_1}, \quad \phi_{12m} = \frac{M_{12} i_2}{N_1}, \quad \phi_{21m} = \frac{M_{21} i_1}{N_2}, \quad \phi_{22m} = \frac{L_2 i_2}{N_2}, \quad (116)$$

si può affermare che

$$\phi_{1d} = \phi_{11m} - \phi_{21m}, \quad \phi_{2d} = \phi_{22m} - \phi_{12m} \quad (117)$$

sono i flussi medi di dispersione al primario e secondario, rispettivamente. In pratica se l'accoppiamento è “perfetto” c'è da aspettarsi che ϕ_{1d} e ϕ_{2d} siano nulli. In altri termini c'è da aspettarsi che una corrente circolante nel primo avvolgimento produca, mediamente, lo stesso flusso concatenato per spira sia nel primo che nel secondo avvolgimento. Si dimostra facilmente che tale condizione comporta che

$$L_1 L_2 = M_{12} M_{21}. \quad (118)$$

I coefficienti di autoinduzione sono intrinsecamente positivi (con la convenzione dell'utilizzatore), mentre quelli di mutua induzione possono essere positivi o negativi. Consideriamo il flusso ϕ_{12} . Esso è dato da $\phi_{12} = \iint_{S_{\gamma_1}} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_1 dS$ dove S_{γ_1} è una qualsiasi superficie aperta che ha come orlo il primo avvolgimento e \mathbf{n}_1 è il verso della normale orientata concordemente, secondo la regola del cavatappi, con il verso di riferimento della corrente i_1 . Nei due circuiti accoppiati illustrati in figura 41 il verso del campo magnetico \mathbf{B}_2 è orario se i_2 è positiva e il verso di \mathbf{n}_1 è orario, e quindi ϕ_{12} e il coefficiente di mutua induzione sono positivi. Se si sceglie, ad esempio, il riferimento opposto per il verso di i_2 (deve essere cambiato anche il riferimento per il verso della tensione v_2 perché si è scelta la convenzione dell'utilizzatore su ciascuna porta), allora il segno del coefficiente di mutua induzione è negativo. Considerazioni simili valgono per ϕ_{21} .

Per i flussi del campo magnetico e le correnti esiste una proprietà di reciprocità analoga a quella che esiste in un circuito resistivo per le tensioni e le correnti. Si considerino i due induttori accoppiati con $i_1 \neq 0$ e $i_2 = 0$: la corrente i_1 nella bobina “1” può essere considerata come “causa” e il flusso $\phi_{12} = M_{12}i_1$, concatenato con la bobina “2”, come effetto. Dualmente si considerino i due induttori accoppiati con $i_2 \neq 0$ e $i_1 = 0$. In questo caso la corrente i_2 nella bobina “2” può essere considerata come causa e il flusso $M_{21}i_2$, concatenato con la bobina “1”, come effetto. È possibile dimostrare, utilizzando le equazioni del modello quasi stazionario magnetico (**Appendice C**), che il rapporto tra la causa e l'effetto nei due circuiti accoppiati con $i_2 = 0$ è uguale al rapporto tra causa ed effetto nei due circuiti accoppiati con $i_1 = 0$, quindi

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (119)$$

Il coefficiente di mutua induzione è stato indicato con M e si misura in *henry* [H], come i coefficienti di autoinduzione.

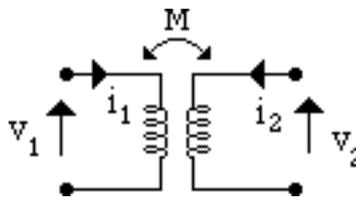


Figura 42 Simbolo degli induttori accoppiati con nodi contrassegnati: se i due riferimenti per i versi delle correnti sono entrambi concordi o discordi con il contrassegno, allora M è positivo.

Allora le equazioni costitutive dei due circuiti accoppiati sono (in questo corso sono presi in considerazione solo induttori accoppiati tempo-invarianti)

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \quad (120)$$

(Queste equazioni non valgono nel caso in cui M fosse variabile nel tempo). Due induttori accoppiati costituiscono un doppio bipolo dinamico: il valore delle due tensioni v_1 e v_2 nel generico istante t non dipende solo dal valore delle due correnti in quell'istante, ma anche dai valori che esse assumono in un intorno di t .

Osservazione

I motori e i generatori elettrici (dinamo e alternatori) possono essere rappresentati da induttori accoppiati tempo-varianti (cioè con coefficienti di mutua induzione variabili nel tempo).

Applicando la relazione (14) e ricordando che è possibile trascurare i fenomeni di induzione magnetoelettrica, si ottiene per la potenza elettrica assorbita dai due induttori accoppiati

$$p(t) = i_1 v_1 + i_2 v_2 = \frac{dW_m}{dt}, \quad (121)$$

dove

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = \iiint (\mathbf{B}^2 / \mu) dv \geq 0 \quad (122)$$

è l'energia immagazzinata nel componente associata al campo magnetico; essa è positiva. Pertanto l'energia $W(t_0, t)$ che il doppio bipolo assorbe nell'intervallo di tempo (t_0, t) vale

$$W(t_0, t) = W_m[i_1(t), i_2(t)] - W_m[i_1(t_0), i_2(t_0)]. \quad (123)$$

La potenza assorbita da due induttori accoppiati è una forma differenziale (cioè è espressa attraverso derivate), perché il doppio bipolo è di tipo dinamico. Inoltre la potenza elettrica assorbita è un differenziale esatto (cioè è una forma differenziale esprimibile attraverso la derivata di una funzione delle correnti, $W_m(i_1, i_2)$) perché i due coefficienti di mutua induzione M_{12} e M_{21} sono uguali. Pertanto l'energia assorbita in un intervallo di tempo (t_0, t) dipende solo dai valori che la funzione $W_m(i_1, i_2)$ assume negli istanti iniziale t_0 e finale t , e quindi solo dai valori iniziali e finali delle due correnti i_1 e i_2 e non dalla loro storia. Quando i valori delle correnti nell'istante finale $i_1(t)$, $i_2(t)$ sono uguali ai valori che esse assumono negli istanti iniziali $i_1(t_0)$, $i_2(t_0)$, allora l'energia assorbita dai due induttori accoppiati è uguale a zero, comunque sia la forma d'onda delle correnti nell'intervallo (t_0, t) . (Questa proprietà non è valida quando M varia nel tempo).

Osservazione

Se fosse possibile avere $M_{12} \neq M_{21}$, non sarebbe possibile esprimere la potenza assorbita come la derivata di una funzione delle correnti e quindi l'energia assorbita dipenderebbe dalla storia temporale delle correnti.

L'energia $W(t_0, t_1)$ assorbita dai due induttori accoppiati nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) dipende dai valori delle correnti nell'istante iniziale $i_1(t_0)$, $i_2(t_0)$, e nell'istante finale $i_1(t_1)$, $i_2(t_1)$. Fissati i valori delle correnti nell'istante iniziale, $i_1(t_0) = I_1$ e $i_2(t_0) = I_2$, siccome $W_m(i_1, i_2) > 0$, il valore minimo di $W(t_0, t_1)$ si ottiene quando $i_1(t_1) = 0$, $i_2(t_1) = 0$. In questo caso il massimo del valore assoluto di $W(t_0, t_1)$ è uguale a $W_m(I_1, I_2)$ e rappresenta la massima energia che i due induttori sono in grado di erogare quando le correnti iniziali sono $i_1(t_0) = I_1$ e $i_2(t_0) = I_2$. Se, invece delle correnti iniziali si fissano quelle finali, $i_1(t_1) = I_1$ e $i_2(t_1) = I_2$, siccome $W_m(i_1, i_2) > 0$, il valore massimo di $W(t_0, t_1)$ si ottiene quando le correnti iniziali sono nulle. Il massimo di $W(t_0, t_1)$ è uguale ancora a $W_m(I_1, I_2)$, e rappresenta la massima energia che i due induttori accoppiati possono assorbire per raggiungere la condizione finale $i_1(t_1) = I_1$ e $i_2(t_1) = I_2$. Pertanto due induttori accoppiati tempo invarianti non possono erogare più energia elettrica di quanta ne abbiano assorbita in precedenza, e quindi sono un doppio bipolo passivo.

Gli induttori accoppiati immagazzinano l'energia elettrica che assorbono; essa può essere restituita, completamente, sotto forma di energia elettrica al circuito in cui sono inseriti: due induttori accoppiati sono un doppio bipolo passivo e conservativo. Alla grandezza definita positiva $W_m(i_1, i_2)$ si dà il nome di **energia immagazzinata negli induttori accoppiati**.

Il coefficiente di mutua induzione è spesso espresso in funzione del **coefficiente d'accoppiamento** k definito da

$$k \equiv \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (124)$$

Il coefficiente di accoppiamento non può assumere un qualsiasi valore, esso deve verificare la relazione

$$|k| \leq 1, \quad (125)$$

ovvero è impossibile ottenere un coefficiente di accoppiamento maggiore di uno. Quando $k=0$, si ha $M=0$, cioè non esiste interazione tra i due induttori (questa è la condizione che è stata invocata tra gli induttori di un circuito quando sono stati introdotti i bipoli induttori).

La relazione (125) è una diretta conseguenza del fatto che l'energia immagazzinata è semi definita positiva. L'energia immagazzinata può essere riscritta nel modo seguente

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 \left(i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) i_2^2 \geq 0. \quad (126)$$

Siccome L_1 e L_2 sono maggiori di zero, se fosse ammissibile $|k| > 1$, sarebbe possibile avere una energia immagazzinata minore di zero con la coppia di correnti $i_1 = -(M/L_1) i_2$, i_2 .

6.10.2 Circuiti perfettamente accoppiati e circuiti equivalenti

Si consideri il caso limite $k = \pm 1$; in questo caso si ha l'accoppiamento più forte e si dice che l'accoppiamento è perfetto. Un trasformatore è progettato e realizzato in modo tale da essere quanto

più possibile vicino alla condizione di accoppiamento perfetto. Quando l'accoppiamento è perfetto, dalla (126) si ha

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 \left(i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2 \geq 0. \quad (127)$$

In questo caso se

$$i_1 = -(M/L_1) i_2, \quad (128)$$

l'energia immagazzinata è uguale a zero pur essendo $i_1 \neq 0$, $i_2 \neq 0$. Perché ciò accada, il campo magnetico prodotto dalle due correnti deve essere uguale a zero in ogni punto dello spazio, cioè il campo prodotto dalla corrente i_1 deve cancellare il campo dovuto alla corrente i_2 in ogni punto dello spazio. Ciò è chiaramente impossibile da realizzare in pratica, però è possibile avvicinarsi a questa condizione usando un toro di materiale ferromagnetico a elevata permeabilità magnetica, $\mu \gg \mu_0$. Quando è verificata questa condizione le linee di campo di \mathbf{B} sono praticamente confinate nel toro di materiale magnetico: il toro si comporta come se fosse un tubo di flusso per il campo \mathbf{B} , cioè si può ritenere che, la componente normale di \mathbf{B} alla superficie limite del toro è nulla. (È immediata l'analogia con il campo di corrente che si instaura in un toro conduttore con conducibilità elettrica molto più grande dello spazio materiale in cui è immerso).

Si assuma che il toro di materiale magnetico sia un tubo di flusso per \mathbf{B} ; in questo caso il flusso del campo magnetico attraverso qualsiasi sezione del toro è costante. Con questa ipotesi è semplice calcolare il coefficiente di mutua induzione. Si consideri il flusso $\phi_{21} = M_{21} i_1$ concatenato con la bobina "2" del campo magnetico prodotto dalla corrente i_1 che circola nella bobina "1", quando $i_2 = 0$. Il flusso ϕ_{21} è uguale a N_2 volte il flusso $\bar{\phi}_{21}$ concatenato con una singola spira della bobina "2". D'altronde il flusso $\bar{\phi}_{21}$ coincide con il flusso di \mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_1 è il campo prodotto dalla corrente i_1), attraverso una qualsiasi sezione trasversale del toro, e quindi con il flusso $\bar{\phi}_{11}$ concatenato con una singola spira della bobina "1". Il flusso $\phi_{11} = L_1 i_1$ è uguale a N_1 volte il flusso $\bar{\phi}_{11}$. Da queste considerazioni segue che

$$\phi_{12} = N_2 \bar{\phi}_{12} = N_2 \bar{\phi}_{11} = \frac{N_2}{N_1} \phi_{11} = \frac{N_2}{N_1} L_1 i_1. \quad (129)$$

Allora, utilizzando la (129) e la prima delle (115) si ottiene per M

$$M = \mu \frac{N_1 N_2 S}{h}. \quad (130)$$

I due coefficienti di autoinduzione dati dalla (115) e il coefficiente di mutua induzione (130) verificano la condizione di accoppiamento perfetto. In realtà il toro di materiale magnetico non è un tubo di flusso perfetto e quindi k , in valore assoluto, è minore di uno, anche se il suo valore resta prossimo a tale numero.

Due induttori perfettamente accoppiati hanno una notevole proprietà. Le equazioni costitutive (120) possono essere così riscritte

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right) \\ v_2 &= M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{M} \frac{di_2}{dt} \right). \end{aligned} \tag{131}$$

Nel caso limite di accoppiamento perfetto è $L_1/M = M/L_2$, quindi dalla (131) si ottiene

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M}. \tag{132}$$

Questa relazione ricorda quella del trasformatore ideale con costante di trasformazione

$$n = \frac{L_1}{M}. \tag{133}$$

- Circuito equivalente di due induttori accoppiati perfettamente.

Il doppio bipolo costituito da due induttori accoppiati perfettamente è equivalente a un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da un induttore, così come illustrato in figura 43.

Si consideri il circuito di figura 43a. Applicando la relazione caratteristica del trasformatore ideale, si ottiene proprio la relazione costitutiva di due induttori accoppiati,

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{d(i_1 - \bar{i}_1)}{dt} = L_1 \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{n} \frac{di_2}{dt} \right) = L_1 \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right), \\ v_2 &= \frac{v_1}{n} = \frac{M}{L_1} v_1 = M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right) = M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{M} \frac{di_2}{dt} \right). \end{aligned} \tag{134}$$

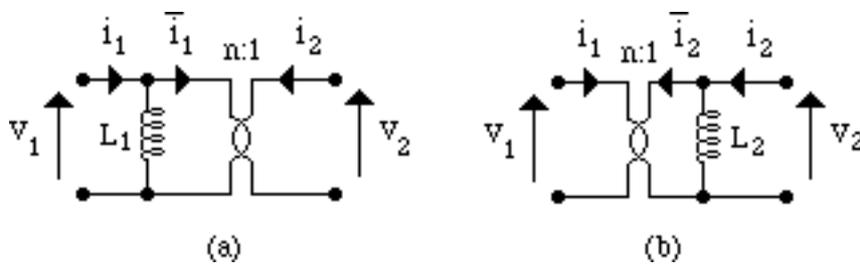


Figura 43 Doppio bipoli equivalenti a due induttori accoppiati perfettamente: $n = L_1/M$.

- Circuito equivalente di due induttori accoppiati: accoppiamento non perfetto ($|k| < 1$).

Il doppio bipolo costituito da due induttori accoppiati non perfettamente è equivalente a un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da due induttori, così come illustrato in figura 44.

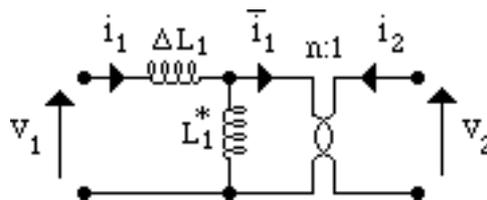


Figura 44 Doppio bipolo equivalente a due induttori accoppiati con $|k| < 1$.

Si considerino due induttori accoppiati non perfettamente, cioè $M^2 < L_1 L_2$. Assegnata una qualsiasi terna L_1 , L_2 e M , è sempre possibile rappresentare L_1 come

$$L_1 = L_1^* + \Delta L_1, \quad (135)$$

dove

$$L_1^* = \frac{M^2}{L_2}, \quad (136)$$

$$\Delta L_1 = L_1 - \frac{M^2}{L_2}. \quad (137)$$

Queste considerazioni giustificano il circuito equivalente di un accoppiamento non perfetto illustrato in figura 44. L'induttanza ΔL_1 è legata ai flussi dispersi: essa descrive il contributo al flusso concatenato con la prima bobina dovuto alle "linee di campo di \mathbf{B} " che non concatenano l'altro avvolgimento; per $k^2 \rightarrow 1$, $\Delta L_1 \rightarrow 0$. L_1^* è detta induttanza magnetizzante: essa tiene conto del flusso comune a entrambe le bobine.

Se in un circuito ci sono due induttori accoppiati continua a valere la proprietà della sovrapposizione degli effetti; non valgono la proprietà di non amplificazione e la proprietà della reciprocità, perché il doppio bipolo è di tipo dinamico.

È interessante osservare che un trasformatore progettato e costruito per ottenere le migliori prestazioni possibili tende ad essere un "trasformatore ideale". Infatti perché l'accoppiamento sia perfetto occorre che le due bobine siano strettamente avvolte su di un nucleo di materiale ferromagnetico ad elevata permeabilità relativa, $\mu_r = (\mu / \mu_0) \gg 1$. In tali condizioni, infatti, $\Delta L_1 \rightarrow 0$ e $k^2 \rightarrow 1$. Inoltre nel limite $\mu_r \rightarrow \infty$ si ha $L_1^* \rightarrow \infty$ e quindi la corrente magnetizzante che circola nell'induttore di induttanza L_1^* deve tendere a zero e di conseguenza il circuito equivalente di figura 44 si riduce al solo trasformatore ideale.