CAPITOLO 5

PROPRIETÀ DEI CIRCUITI DI RESISTORI

Nel presente Capitolo, verrà introdotto il concetto di equivalenza tra bipoli statici e verranno enunciati e dimostrati alcuni teoremi (proprietà) generali sui circuiti di resistori. L'uso del concetto di equivalenza e delle proprietà, che verranno descritte, spesso portano a una drastica semplificazione di problemi altrimenti molto difficili da risolvere. Essi rappresentano anche inestimabili strumenti mediante i quali, in seguito, si ricaveranno un gran numero di risultati. In particolare saranno proposti metodi che consentono di determinare la soluzione di un circuito senza dovere scrivere esplicitamente le equazioni circuitali.

5.1 Bipolo equivalente. Connessione in serie e connessione in parallelo

Un concetto fondamentale nella teoria dei circuiti elettrici è quello di **equivalenza**. In generale può accadere che, due bipoli, che rappresentano componenti di diversa costituzione fisica, hanno la stessa relazione caratteristica.

Definizione: bipoli statici equivalenti

Due bipoli statici si dicono equivalenti se e solo se le loro relazioni costitutive coincidono.

Tramite l'equivalenza tra bipoli è possibile ridurre un circuito di resistori e generatori ideali a un “circuito semplice”, costituito da due soli bipoli fondamentali: un generatore ideale e un resistore. Dopo avere risolto il circuito semplice, tutte le grandezze del circuito in esame possono essere ricostruite tramite delle semplici regole.

La prima fase della procedura (la riduzione al circuito semplice) corrisponde esattamente alla riduzione del sistema di equazioni circuitali a una sola equazione in una sola incognita tramite la procedura dell'eliminazione in avanti per sostituzione nel metodo di Gauss e la seconda parte corrisponde alla procedura dell'eliminazione all'indietro. In questo paragrafo saranno esaminate le caratteristiche di bipoli “composti” costituiti da bipoli statici “elementari” (resistori lineari e generatori ideali) collegati in serie, in parallelo e in serie-parallelo.

Definizione: **bipoli collegati in serie**

I bipoli B_1 e B_2 sono collegati in serie se:

(i) sono connessi a uno stesso nodo (figura 1);

(ii) le correnti nei due bipoli sono uguali (se si scelgono dei riferimenti opportuni, come, ad esempio, quelli mostrati in figura 1).

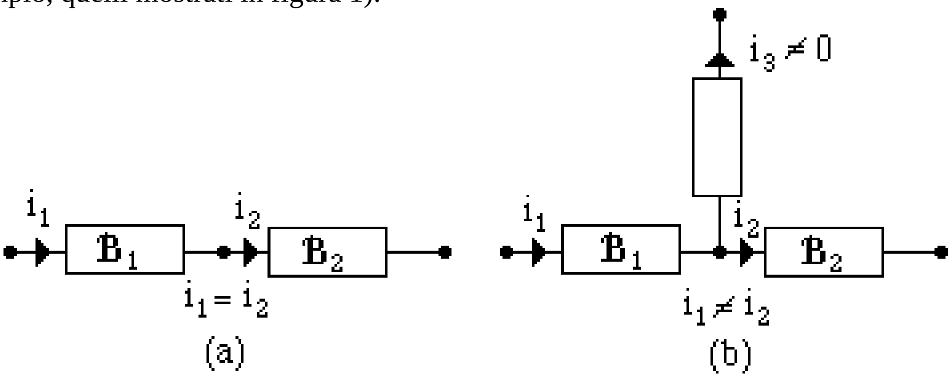


Figura 1 B_1 e B_2 sono collegati in serie (a) e B_3 e B_4 non sono collegati in serie (b).

Definizione: **bipoli collegati in parallelo**

I bipoli B_1 e B_2 sono collegati in parallelo nei nodi “1” e “2”, se i loro terminali sono connessi ai nodi “1” e “2” (così come è illustrato in figura 2).

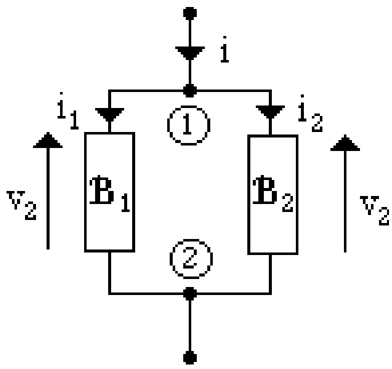


Figura 2 I bipoli B_1 e B_2 sono collegati in parallelo.

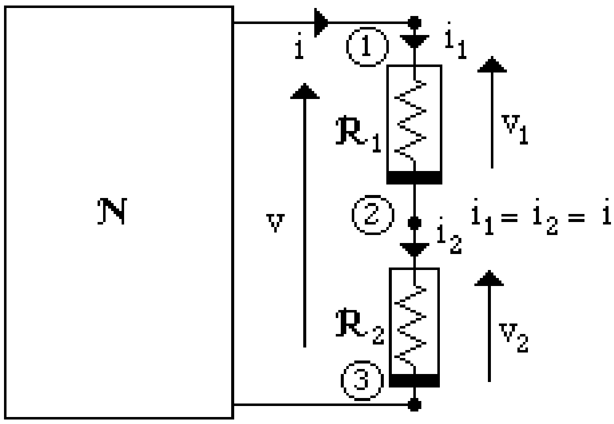


Figura 3 Due resistori connessi in serie insieme col resto del circuito N.

5.1.1 Collegamento di due bipoli statici in serie

Si consideri il circuito illustrato in figura 3, in cui i bipoli statici R_1 e R_2 sono collegati in serie. Ai nodi "1" e "3" è connesso il resto del circuito, denotato con N (esso potrebbe essere costituito anche da bipoli non lineari e dinamici). Si vuole ottenere la relazione caratteristica del bipolo costituito dalla serie dei due bipoli R_1 e R_2.

Applicando la prima legge di Kirchhoff ai nodi "1" e "2", si ottiene:

$$i = i_1 = i_2; \tag{1}$$

applicando la seconda legge di Kirchhoff, si ottiene

$$v = v_1 + v_2. \tag{2}$$

Si assuma, ora, che i due bipoli statici siano controllati in corrente, cioè:

$$v_1 = r_1(i_1) = r_1(i),\ v_2 = r_2(i_2) = r_2(i). \tag{3}$$

Sostituendo le (3) nella (2), si ottiene la relazione caratteristica del bipolo equivalente serie:

$$v = r_1(i) + r_2(i) = r_{eq}(i). \tag{4}$$

Sebbene qualsiasi connessione costituita da due resistori non lineari (controllati in corrente), in serie possa essere rappresenta tramite un opportuno bipolo equivalente, ora analizzeremo solo le connessioni serie fondamentali che si incontrano nei circuiti costituiti da resistori lineari e generatori ideali; a questa classe di circuiti si dà il nome di circuiti resistivi lineari.

- Due resistori lineari in serie

Si considerino due resistori lineari, con resistenze R_1 e R_2, collegati in serie. In questo caso si ha

$$v_1 = r_1(i) = R_1 i,\ v_2 = r_2(i) = R_2 i, \tag{5}$$

e la (4) diventa

$$v = (R_1 + R_2)i, \tag{6}$$

cioè il bipolo resistore con resistenza

$$R_{eq} = (R_1 + R_2), \tag{7}$$

è equivalente al bipolo costituito dal resistore con resistenza R_1 in serie con il resistore di resistenza R_2, figura 4.

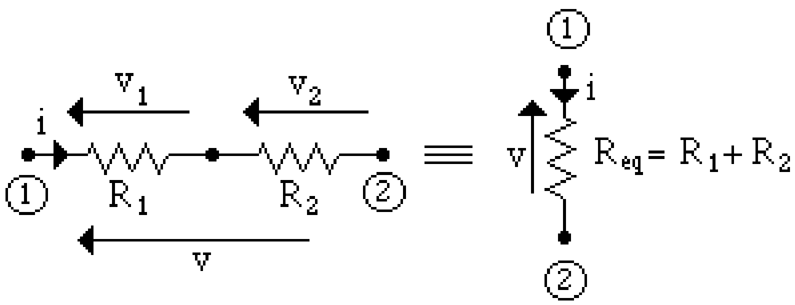


Figura 4 Due resistori collegati in serie.

Esiste una semplice relazione tra la tensione su ogni resistore della serie (v_1 e v_2) e la tensione v della serie. È facile dimostrare che (formule del **partitore di tensione**)

$$v_1 = v\frac{R_1}{R_1+R_2}, \quad v_2 = v\frac{R_2}{R_1+R_2}; \tag{8}$$

i riferimenti per i versi delle tensioni sono quelli illustrati in figura 3.

La sostituzione di due resistori collegati in serie con il resistore equivalente, corrisponde alla riduzione del sistema di equazioni circuitali attraverso l'eliminazione per sostituzione; la ricostruzione delle tensioni su ogni resistore, una volta nota la tensione sulla serie, attraverso le formule del partitore, corrisponde all'eliminazione all'indietro nell'algoritmo di Gauss.

È immediato verificare che nel caso di m resistori in serie $R_1, R_2, \ldots, R_m$, la resistenza del bipolo serie equivalente vale

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_m = \sum_{i=1}^{m} R_i . \tag{9}$$

La tensione v_i del i-esimo resistore è legata alla tensione v della serie tramite la relazione

$$v_i = (\pm)v\frac{R_i}{\sum_{j=1}^{m} R_j}; \tag{10}$$

nella (10) deve essere considerato il segno positivo se le frecce che indicano i riferimenti delle due tensioni sono equi verse o, in caso contrario, il segno negativo.

- Due generatori di tensione ideali in serie

Si considerino due generatori di tensione ideali, con tensioni E_1 e E_2, collegati in serie (figura 5a). In questo caso si ha

$$v_1 = E_1, \; v_2 = E_2, \tag{11}$$

quindi la (4) diventa

$$v = E_1 + E_2; \tag{12}$$

inoltre la corrente i è indipendente dalla tensione v.

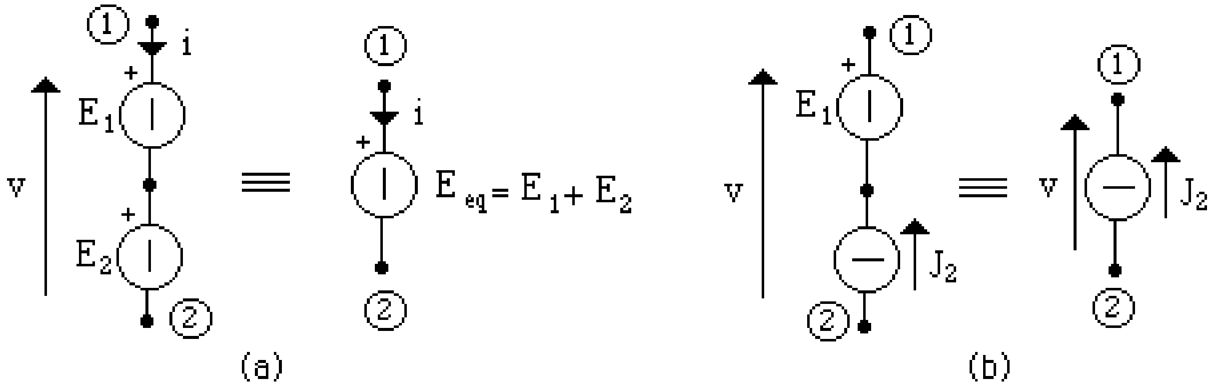


Figura 5 Generatori collegati in serie

Pertanto il bipolo generatore di tensione ideale con tensione

$$E_{eq} = (E_1 + E_2) \qquad (13)$$

è equivalente al bipolo costituito dal generatore di tensione con tensione E_1 in serie con il generatore di tensione E_2.

- Un generatore ideale di tensione in serie con un generatore ideale di corrente

Si consideri un generatore di tensione ideale, con tensione E_1, connesso in serie con un generatore ideale di corrente con corrente J_2, (figura 5b).

In questo caso la tensione della serie non è nota, e la corrente è uguale a J_2 per qualsiasi valore della tensione. Pertanto la serie tra un generatore di corrente ideale e un generatore di tensione ideale è equivalente a un generatore ideale di corrente.

Non è significativo il caso di due generatori ideali di corrente in serie, perché da luogo a un modello incompatibile (a meno che le due correnti non siano eguali e in tal caso il bipolo equivalente è ancora un generatore di corrente con la stessa corrente dei due generatori)

- Un resistore in serie con un generatore di tensione ideale

Si consideri un generatore di tensione ideale, con tensione E connesso in serie con un resistore lineare di resistenza R, (figura 6). La caratteristica del bipolo è equivalente è

$$v = E + Ri . \qquad (14)$$

Essa è la caratteristica del generatore "reale" di tensione; i riferimenti sono quelli illustrati in figura 6. Il generatore reale di tensione è un bipolo <u>attivo</u>

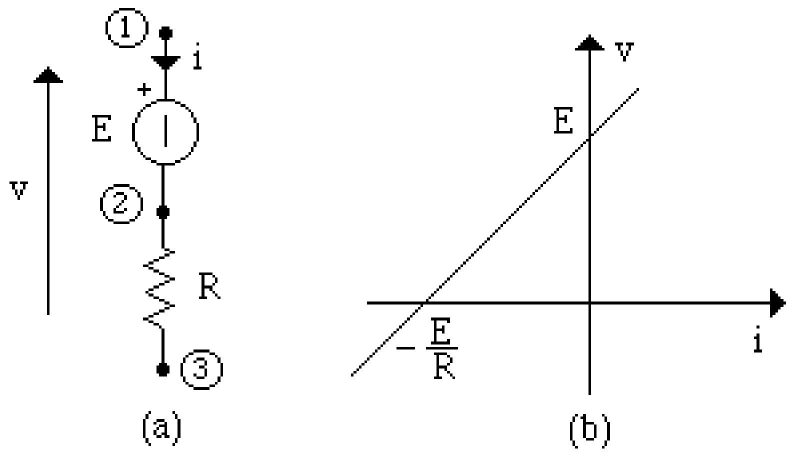


Figura 6 Bipolo equivalente al generatore reale di tensione (a) e curva caratteristica (b).

Infine un generatore di corrente ideale con corrente J collegato in serie a un resistore è equivalente a un generatore di corrente ideale.

5.1.2 Collegamento di due bipoli statici in parallelo

Si consideri il circuito di figura 7, in cui due bipoli statici R_1 e R_2 sono collegati in parallelo tra loro ai nodi “1” e “2”. Anche in questo caso la natura del circuito N è irrilevante se si vuole ottenere solo la caratteristica del bipolo equivalente al parallelo di R_1 con R_2.

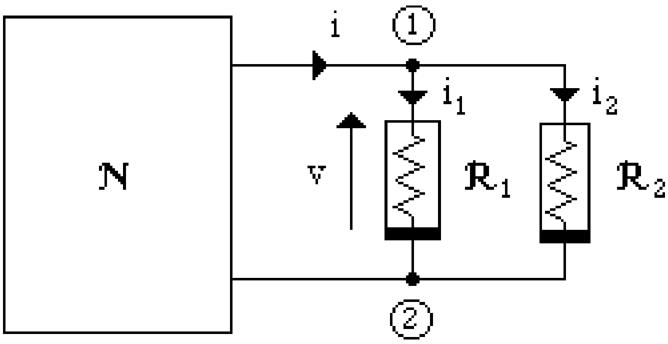


Figura 7 Due resistori connessi in parallelo insieme col resto del circuito N.

Applicando la seconda legge di Kirchhoff, si ha che le tensioni v_1 e v_2 sono eguali, cioè

$$v = v_1 = v_2; \qquad (15)$$

applicando la prima legge di Kirchhoff, si ottiene

$$i = i_1 + i_2. \qquad (16)$$

Si assuma, ora, che i due bipoli siano controllati in tensione, cioè:

$$i_1 = g_1(v_1) = g_1(v), \; i_2 = g_2(v_2) = g_2(v). \qquad (17)$$

Sostituendo le (17) nella (16), si ottiene la relazione caratteristica del bipolo equivalente al parallelo:

$$i = g_1(v) + g_2(v) = g_{eq}(v). \qquad (18)$$

Sebbene il bipolo equivalente parallelo possa essere costruito da due resistori non lineari (controllati in corrente), qui noi considereremo solo le connessioni in parallelo fondamentali, che si incontrano nei circuiti resistivi lineari.

- *Due resistori lineari in parallelo*

Si considerino due resistori lineari, con resistenze R_1 e R_2, collegati in parallelo. Si ha

$$i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v, \qquad (19)$$

cioè il bipolo resistore con conduttanza

$$G_{eq} = (G_1 + G_2) \qquad (20)$$

è equivalente al bipolo costituito dal resistore con conduttanza G_1=1/R_1 in parallelo al resistore di conduttanza G_2=1/R_2, figura 8. Se invece della conduttanza equivalente si considera la resistenza equivalente, si ha

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{21}$$

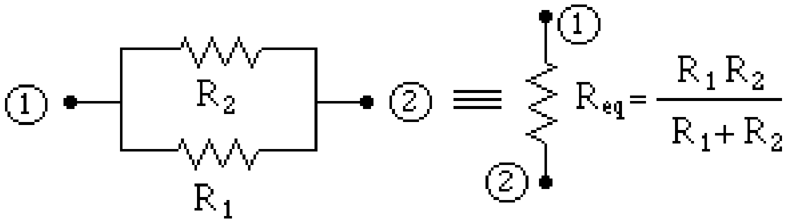


Figura 8 Due resistori collegati in parallelo.

Esiste una semplice relazione tra la corrente in ogni resistore del parallelo (i_1 e i_2) e la corrente i del parallelo. È facile dimostrare che (formule del **partitore di corrente**)

$$i_1 = i\frac{G_1}{G_1 + G_2}, \quad i_2 = i\frac{G_2}{G_1 + G_2}; \tag{22}$$

i riferimenti per i versi delle correnti sono quelli illustrati in figura 8. Se si usano le resistenze, esse diventano:

$$i_1 = i\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad i_2 = i\frac{R_1}{R_1 + R_2}. \tag{23}$$

La sostituzione di due resistori in parallelo con il resistore equivalente, corrisponde di nuovo alla riduzione del sistema di equazioni circuitali attraverso l'eliminazione per sostituzione; la ricostruzione delle correnti in ogni resistore, una volta nota la corrente del parallelo, attraverso le formule del partitore, corrisponde all'eliminazione all'indietro nell'algoritmo di Gauss.

È immediato verificare che nel caso di m resistori in parallelo R_1, R_2, ..., R_m la conduttanza del bipolo parallelo equivalente vale

$$G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{R_i}. \tag{24}$$

La corrente i_j del j-esimo resistore è legata alla corrente totale del parallelo dalla relazione

$$i_j = (\pm) i \frac{G_j}{\sum_{h=1}^{m} G_h}; \tag{25}$$

nella (25) deve essere considerato il segno positivo se le frecce che indicano i riferimenti delle due correnti sono equi verse o, in caso contrario, il segno negativo.

- Due generatori di corrente ideali in parallelo

Si consideri il caso in cui due generatori di correnti ideali, con correnti J_1 e J_2 sono collegati in parallelo. Il bipolo generatore di corrente ideale con corrente

$$J_{eq} = (J_1 + J_2) \tag{26}$$

è equivalente al bipolo costituito dalla serie del generatore ideale di tensione con tensione J_1 con il generatore di tensione J_2, figura 9a.

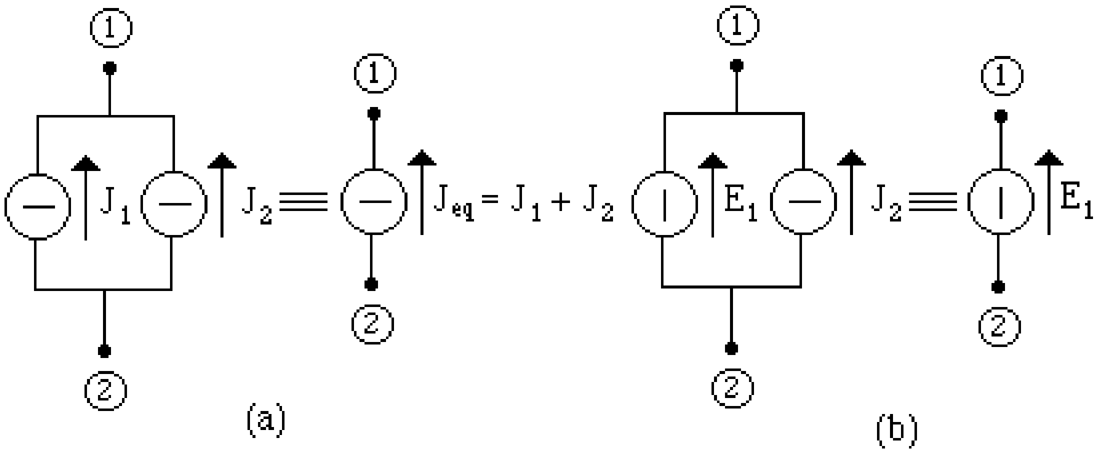


Figura 9 Generatori collegati in parallelo.

- Un generatore ideale di tensione in parallelo con un generatore ideale di corrente

Si considerino un generatore di tensione ideale, con tensione E_1, connesso in parallelo con un generatore ideale di corrente con corrente J_2, (figura 9b). La corrente del parallelo non è nota e la tensione è uguale a E_2 per qualsiasi valore della corrente. Pertanto questo bipolo è equivalente a un generatore di tensione ideale.

Non è significativo il caso di due generatori ideali di tensione in parallelo, perché da luogo a un modello incompatibile (a meno che le due tensioni non siano eguali e in tal caso il bipolo equivalente è ancora un generatore di tensione con la stessa tensione dei due generatori).

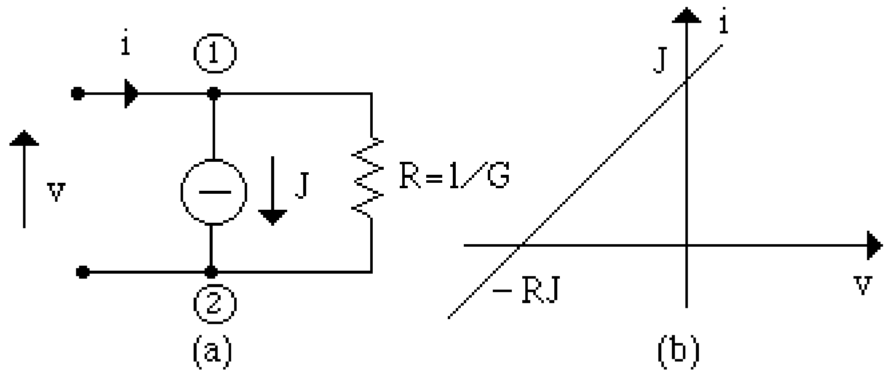


Figura 10 Circuito equivalente al generatore reale di corrente (a) e curva caratteristica (b).

- Un resistore in parallelo con un generatore di corrente ideale

Si consideri un generatore di corrente ideale, con corrente J, connesso in parallelo con un resistore lineare di resistenza R e quindi conduttanza G=1/R. La caratteristica del bipolo equivalente è

$$i = J + Gv. \tag{27}$$

Essa è la caratteristica del generatore "reale" di corrente; i riferimenti sono quelli illustrati in figura 10. Il generatore reale di corrente è un bipolo <u>attivo</u>.

Infine il parallelo tra un generatore di tensione ideale con tensione E e un resistore è equivalente a un generatore di tensione ideale.

Esempio

Si consideri il circuito rappresentato in figura 11. Esso può essere ridotto utilizzando le equivalenze serie e parallelo a un circuito "semplice" costituito dal generatore ideale di tensione e da un resistore lineare. Le regole del partitore di tensione e di corrente consentono, poi, di ricostruire tutte le tensioni e le correnti del circuito.

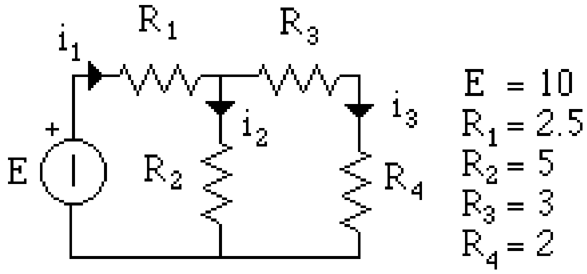


Figura 11

Il generatore di tensione è in serie con il resistore di resistenza R_1 e il resistore di resistenza R_3 è in serie con il resistore di resistenza R_4. Se fosse nota la corrente i_1, attraverso le regole del partitore di corrente si potrebbero determinare le altre due correnti e quindi, anche, le tensioni su ogni resistore.

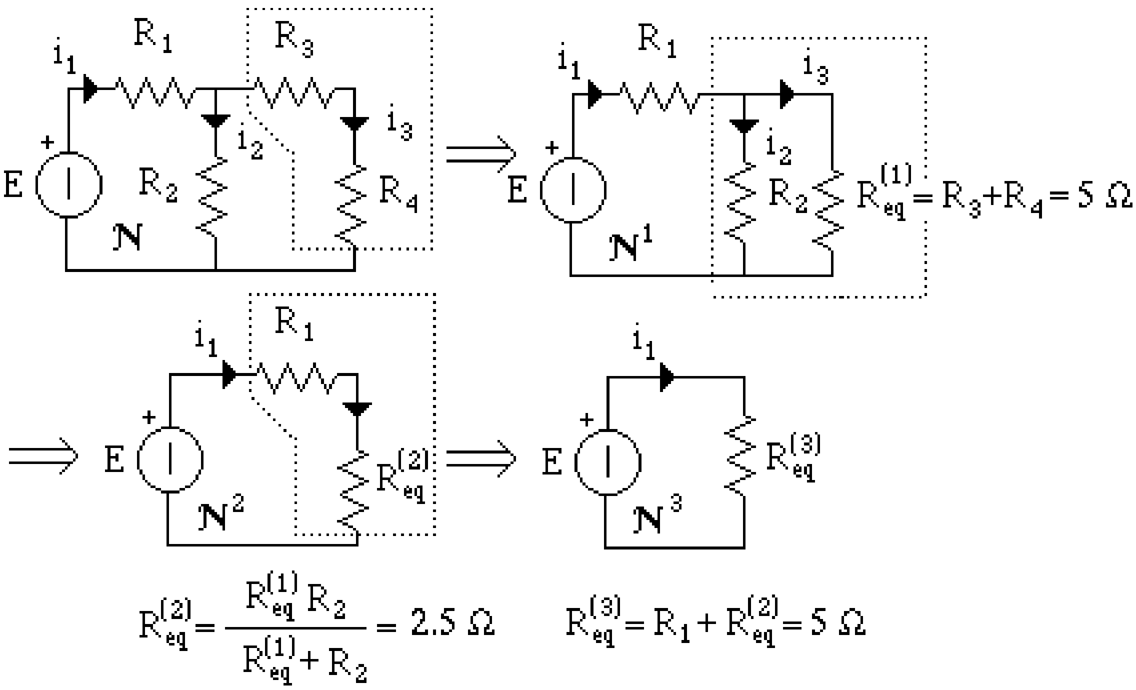


Figura 12

La corrente i_1 può essere determinata riducendo il circuito a un circuito "semplice" costituito dal generatore e da un solo resistore. La procedura di riduzione è descritta in figura 12. La corrente i_1 vale

$$i_1 = \frac{E}{R_{eq}^{(3)}} = 2\,.$$

Utilizzando la formula del partitore di corrente è possibile calcolare le correnti i_2 e i_3 (i resistori con resistenze R_2 e $R_{eq}^{(1)}$ sono in parallelo nel circuito N^1). Si ottiene

$$i_2 = \frac{R_{eq}^{(1)}}{R_2 + R_{eq}^{(1)}} = i_1 \;\; e \;\; i_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_{eq}^{(1)}} = \mathrm{i}_1 .$$

Infine le tensioni dei resistori valgono

$$v_1 = R_1 i_1 = 5, \mathrm{v}_2 = R_2 i_2 = 5, \mathrm{v}_3 = R_3 i_3 = 3, \mathrm{v}_4 = R_4 i_4 = 2.$$

Questo esempio mostra come si può risolvere un circuito con un solo generatore senza utilizzare esplicitamente le equazioni circuitali (le equazioni di Kirchhoff e le equazioni costitutive). La procedura descritta è equivalente alla soluzione del sistema di equazioni circuitali con il metodo di Gauss: la riduzione del circuito avviene per ispezione ed è guidata dalle proprietà del grafo.

Tutti i circuiti resistivi con un solo generatore possono essere risolti in questo modo? Purtroppo la risposta è no. Si consideri, ad esempio, il circuito illustrato in figura 13. In questo caso non è possibile individuare né collegamenti in parallelo né collegamenti in serie. È ancora possibile determinare un resistore equivalente al bipolo di resistori N. La resistenza del resistore equivalente può essere determinata attraverso degli strumenti di analisi che saranno introdotti in seguito. Per ora il lettore calcoli la corrente i che circola nel resistore con resistenza R usando il metodo dei potenziali di nodo.

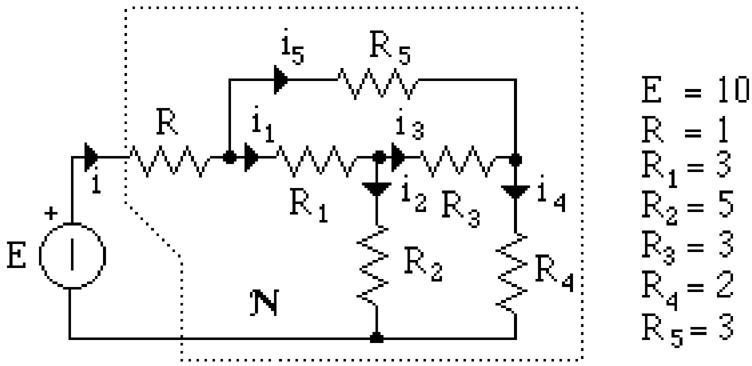


Figura 13

5.2 Proprietà dei circuiti resistivi lineari

In questo paragrafo, saranno enunciate e dimostrate alcune proprietà generali dei circuiti resistivi lineari, ovvero il teorema della sovrapposizione degli effetti, il teorema di Thévenin-Norton. Essi costituiscono utili strumenti di analisi per i circuiti resistivi lineari.

5.2.1 Circuito resistivo lineare con un solo generatore

Si consideri un circuito costituito da resistori lineari e un solo generatore ideale, ad esempio un generatore ideale di tensione (figura 14). Siano $\mathbf{i} = (\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \ldots, \mathrm{i}_b)^T$ e $\mathbf{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_b)^T$ le correnti e le tensioni del circuito. I lati sono stati ordinati in modo tale che il generatore di tensione ideale corrisponda al lato “b”. Gli altri (b–1) lati sono resistori lineari; la resistenza del k-esimo resistore è indicata con R_k (1•k•b–1).

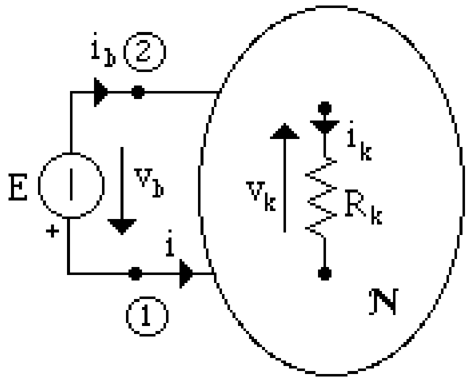


Figura 14 Circuito resistivo lineare con un solo generatore.

Le equazioni circuitali sono

$$
\begin{aligned}
&A\mathbf{i} = \mathbf{0},\\
&B\mathbf{v} = \mathbf{0},\\
&\mathbf{v}_R - R\mathbf{i}_R = \mathbf{0},\\
&\mathrm{v}_b = \mathrm{E};
\end{aligned}
\tag{28}
$$

A e *B* sono, rispettivamente, una matrice di incidenza ridotta e una matrice di maglia fondamentale del circuito, $\mathbf{i}_R = (\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \ldots, \mathrm{i}_{b-1})^T$ e $\mathbf{v}_R = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_{b-1})^T$ sono le correnti e le tensioni dei $(b-1)$ resistori e R è la matrice diagonale $R = \mathrm{diag}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_{b-1})$. L'equazione matriciale $\mathbf{v}_R - R\mathbf{i}_R = \mathbf{0}$ rappresenta l'insieme delle equazioni costitutive $\mathrm{v}_k - \mathrm{R}_k \mathrm{i}_k = 0$ dei (b–1) resistori (1•k•(b–1)).

Siano

$$\tilde{\mathrm{i}}_j = \mathrm{H}_j, \quad \tilde{\mathrm{v}}_j = \mathrm{K}_j \qquad 1 \le j \le b, \tag{29}$$

le correnti e le tensioni del circuito per E=1. Siccome il sistema di equazioni (28) è lineare (perché le equazioni caratteristiche dei resistori sono lineari), la sua soluzione è data da

$$\mathrm{i}_j = \mathrm{H}_j \mathrm{E}, \ \ \mathrm{v}_j = \mathrm{K}_j \mathrm{E} \quad 1 \le j \le b. \tag{30}$$

A causa della linearità ogni corrente e ogni tensione è direttamente proporzionale alla tensione del generatore di tensione (oppure alla corrente del generatore di corrente nel caso in cui nel circuito vi fosse un solo generatore di corrente indipendente). I fattori H_j, omogenei con una conduttanza, e i fattori adimensionali K_j sono costanti dipendenti unicamente dai parametri circuitali (e non dalla tensione E del generatore).

La corrente i nel terminale “1” del bipolo N vale

$$\mathrm{i} = \mathrm{E} / \mathrm{R}_{eq}, \tag{31}$$

dove $\mathrm{R}_{eq} = -1/\mathrm{H}_b$. Dunque un qualsiasi bipolo N costituito da soli resistori lineari (senza generatori) può essere sempre rappresentato da un bipolo resistore equivalente con resistenza R_{eq}.

Se i resistori che costituiscono il bipolo N sono passivi, allora per R_{eq} vale la relazione

$$\mathrm{R}_{eq} \ge 0. \tag{32}$$

(la dimostrazione è semplice, si usi la conservazione delle potenze elettriche).

5.2.2 Sovrapposizione degli effetti

Si consideri, ora, un circuito costituito da resistori lineari e da più generatori ideali, ad esempio, un circuito con un generatore ideale di tensione e uno di corrente (figura 15). La proprietà che verrà dimostrata è indipendente dal numero e dal tipo di generatori ideali presenti; soltanto per semplificare la notazione ne sono stati considerati solo due.

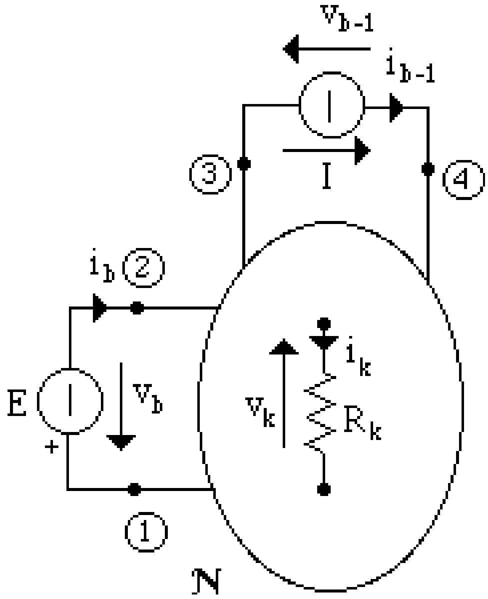


Figura 15 Circuito resistivo lineare con due generatori indipendenti.

Siano $\mathbf{i} = (i_1, i_2, ..., i_b)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_b)^T$ le correnti e le tensioni del circuito. I lati sono stati ordinati in modo tale che: al generatore di tensione ideale corrisponda il lato "b" e al generatore di corrente ideale il lato "b–1". Gli altri (b–2) lati sono resistori lineari e la resistenza del k-esimo resistore è indicata con R_k (1•k•b–2).

Le equazioni circuitali sono

$$
\begin{aligned}
&A\mathbf{i} = \mathbf{0},\\
&B\mathbf{v} = \mathbf{0},\\
&\mathbf{v}_R - R\mathbf{i}_R = \mathbf{0},\\
&i_{b-1} = J,\\
&v_b = E;
\end{aligned}
\tag{33}
$$

in questo caso $\mathbf{i}_R = (i_1, i_2, ..., i_{b-2})^T$ e $\mathbf{v}_R = (v_1, v_2, ..., v_{b-2})^T$ sono le correnti e le tensioni dei (b–2) resistori e R è la matrice diagonale $R = \mathrm{diag}(R_1, R_2, ..., R_{b-2})$. L'equazione matriciale $\mathbf{v}_R - R\mathbf{i}_R = \mathbf{0}$ rappresenta l'insieme delle equazioni caratteristiche $v_k - R_k i_k = 0$ dei (b–2) resistori (1•k•(b–2)).

Si considerino ora i due problemi ausiliari, così definiti:

problema N' problema N"

$$
\begin{aligned}
&A\mathbf{i}' = \mathbf{0}, && A\mathbf{i}'' = \mathbf{0},\\
&B\mathbf{v}' = \mathbf{0}, && B\mathbf{v}'' = \mathbf{0},\\
&\mathbf{v}'_R - R\mathbf{i}'_R = \mathbf{0}, && \mathbf{v}''_R - R\mathbf{i}''_R = \mathbf{0},\\
&\mathrm{i}'_{b-1} = \mathrm{J}, && \mathrm{i}''_{b-1} = 0,\\
&\mathrm{v}'_b = 0; && \mathrm{v}''_b = \mathrm{E}.
\end{aligned}
$$

Siccome il sistema (33) è lineare, la sua soluzione può essere espressa come

$$
\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \mathbf{i}' + \mathbf{i}'',\\
\mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \mathbf{v}''.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

(Si è implicitamente assunto che il sistema (33) e i due problemi ausiliari ammettano una e una sola soluzione).

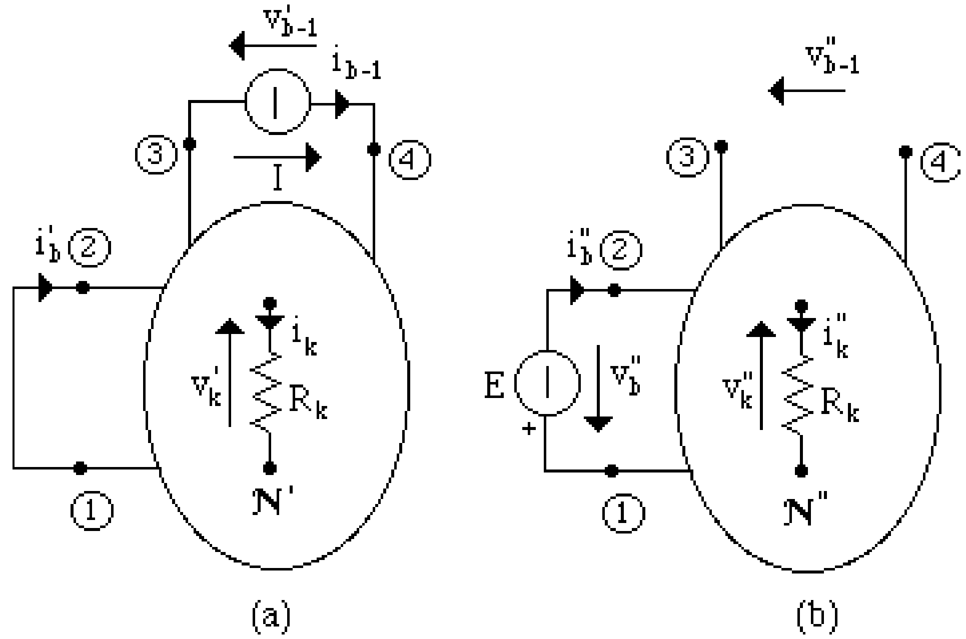


Figura 16

Le equazioni del problema N' sono le equazioni circuitali del circuito N quando si "spegne" il generatore di tensione (spegnere un generatore di tensione equivale a sostituirlo con un bipolo corto circuito), e quindi sono le equazioni del circuito ausiliario di figura 16a, mentre le equazioni del problema N" sono le equazioni circuitali del circuito N quando si "spegne" il generatore di corrente (spegnere un generatore di corrente equivale a sostituirlo con un bipolo circuito aperto) e quindi sono le equazioni del circuito ausiliario di figura 16b.

Le (34), ovvia conseguenza della linearità delle equazioni del circuito, si prestano a questa interpretazione circuitale.

Proprietà della sovrapposizione degli effetti

La generica corrente (tensione) in un circuito di resistori lineari e di generatori ideali, è la somma delle correnti (tensioni) che ciascuno dei generatori ideali produrrebbe se agisse da solo, essendo gli altri "spenti".

Una immediata conseguenza della proprietà della sovrapposizione e delle (29), (30) e (34) è che qualsiasi corrente i_j $(1 \le j \le b)$ del circuito N di figura 15 è data da una espressione del tipo (cioè è una combinazione lineare delle sorgenti),

$$i_j = H_j E + Q_j J, \qquad (35)$$

e qualsiasi tensione v_j $(1 \le j \le b)$ è data da una espressione del tipo

$$v_j = K_j E + P_j J, \qquad (36)$$

dove i fattori H_j, K_j, P_j, Q_j sono costanti dipendenti unicamente dai parametri circuitali e non dai generatori ideali.

Esempio

Si consideri il circuito rappresentato in figura 17 e si determini la potenza assorbita dal resistore R_1. Essa vale

$$p_1 = R_1 i_1^2 = i_1^2 .$$

Per determinare la corrente i_1 si può usare la sovrapposizione degli effetti, le equivalenze serie e parallelo e le regole del partitore di tensione e di corrente.

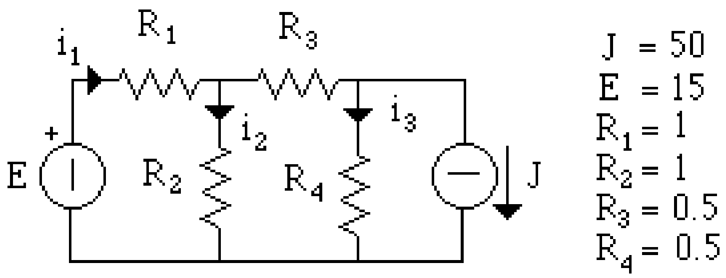


Figura 17 Circuito resistivo lineare con due generatori indipendenti.

Applicando la sovrapposizione degli effetti, la corrente i può essere espressa come

$$i_1 = i_1' + i_1''$$

dove i_1' è la corrente nel resistore R_1 quando è spento il generatore di corrente ed è acceso quello di tensione e i_1'' è la corrente nel resistore R_1 quando è spento il generatore di tensione ed è acceso quello di corrente.

- Calcolo di i_1'.

Il generatore di tensione è in serie con il resistore di resistenza R_1 e il resistore di resistenza R_3 è in serie con il resistore di resistenza R_4 (figura 18); inoltre la serie R_3_R_4 è in parallelo con R_2. La corrente i_1' può essere determinata riducendo il circuito N' a un circuito "semplice" costituito dal generatore di tensione e da un solo resistore. La procedura di riduzione è descritta in figura 18. Allora la corrente i_1' vale

$$i_1' = \frac{E}{R_{eq}^{(3)}} = 10 \ .$$

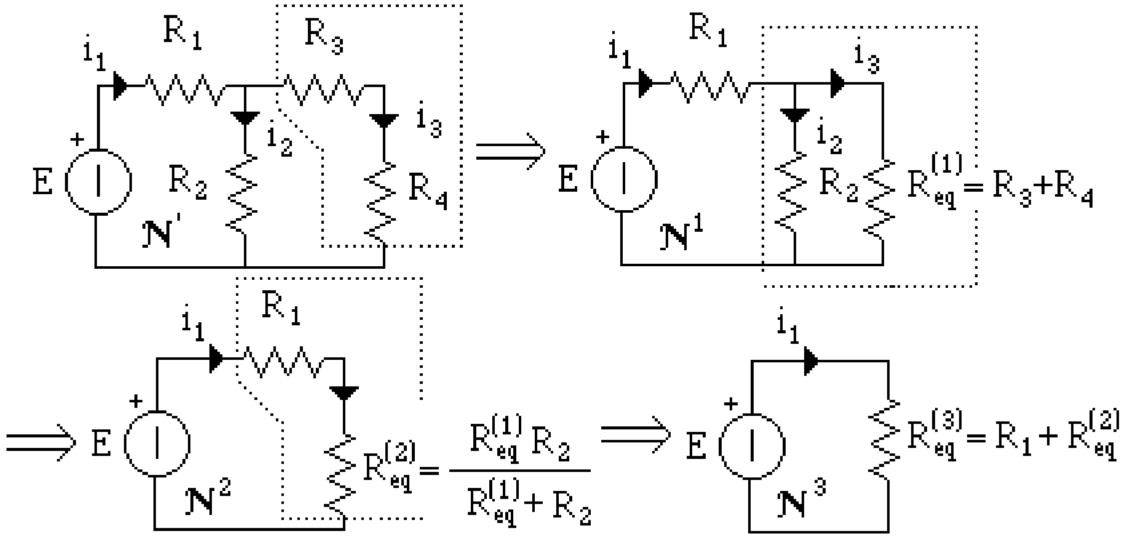


Figura 18

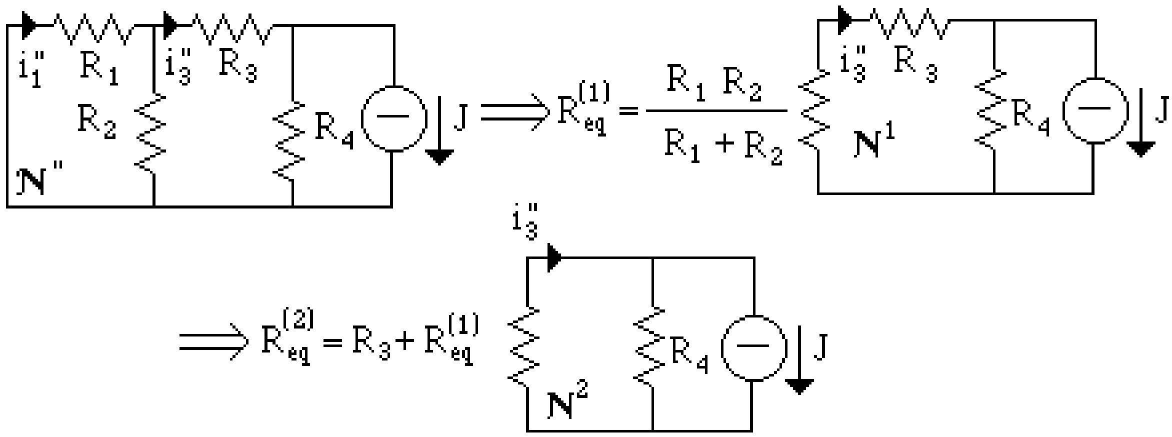


Figura 19

- Calcolo di i_2'.

La corrente i_3'' nel circuito N'' (figura 19) può essere calcolata usando la formula del partitore di corrente (R_4 e $R_{eq}^{(2)}$ sono in parallelo); applicandola si ottiene

$$i_3'' = J \frac{R_4}{R_4 + R_{eq}^2} = 16.67 \ .$$

A questo punto, essendo nota la corrente i_3'', la corrente i_1'' nel circuito N (figura 19) può essere calcolata usando, ancora, la formula del partitore di corrente (R_1 e R_2 sono in parallelo); applicandola si ottiene

$$i_1'' = i_3'' \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 8.33 \ .$$

Allora corrente la corrente i_1 vale $i_1 = i_1' + i_1'' = 16.25$ e quindi la potenza assorbita dal resistore di resistenza R_1 vale $p_1 \cong 264.1$.

5.2.3 Teorema di Thévenin-Norton

Nella prima parte di questo capitolo è stato dimostrato che ogni bipolo resistivo lineare senza generatori può essere rappresentato da un resistore equivalente lineare.

Si consideri, ora, un circuito costituito da un bipolo N_L, composto da resistori lineari e generatori indipendenti e da un bipolo N non necessariamente lineare o resistivo (esso può essere anche di tipo dinamico), figura 20. Il bipolo resistivo N_L può essere rappresentato tramite un bipolo equivalente che ha la stessa caratteristica i-v. Infatti, per quanto riguarda N, la soluzione dipende esclusivamente dalla caratteristica del bipolo N_L (è del tutto insignificante conoscere quali elementi all'interno di N_L realizzino tale caratteristica).

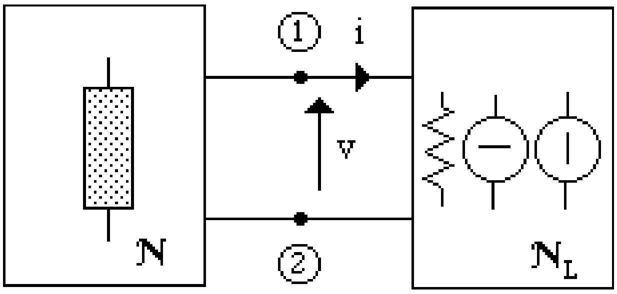


Figura 20 Circuito costituito da un bipolo resistivo lineare con generatori indipendenti e un bipolo non necessariamente lineare o resistivo.

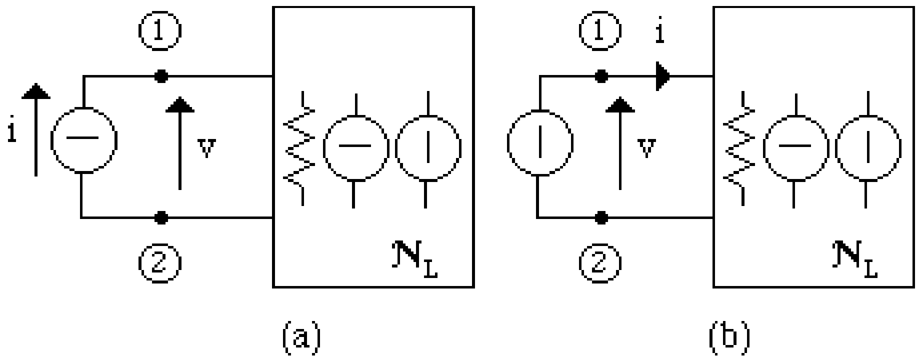


Figura 21 Caratterizzazione su base corrente (a) e su base tensione (b) del bipolo N_L.

Per costruire la caratteristica i-v di N_L e quindi il bipolo equivalente, bisogna determinare la relazione tra la corrente i e la tensione v per tutti i valori di corrente e di tensione ammissibili. Ciò può essere fatto attraverso un *esperimento concettuale* (figura 21), in cui si impone la corrente i attraverso un generatore di corrente indipendente e si determina la tensione v (caratterizzazione su base corrente del bipolo), oppure si impone la tensione v attraverso un generatore indipendente di tensione e si determina la corrente i (caratterizzazione su base tensione del bipolo). Le due caratterizzazioni sono equivalenti, fatta eccezione di due casi molto particolari.

Si consideri la caratterizzazione su base corrente. Bisogna determinare la relazione che lega la tensione v alla corrente imposta i. Si assuma che il circuito di figura 21a abbia una e una sola soluzione per ogni valore di i. Siccome il circuito è lineare, la relazione cercata può essere determinata attraverso la sovrapposizione degli effetti. A tale scopo si considerino i due *circuiti ausiliari* rappresentati in figura 22. Il primo è stato ottenuto spegnendo nel circuito di figura 21a tutti i generatori di N_L mentre il secondo è stato ottenuto spegnendo solo il generatore di corrente "ausiliario" di valore i.

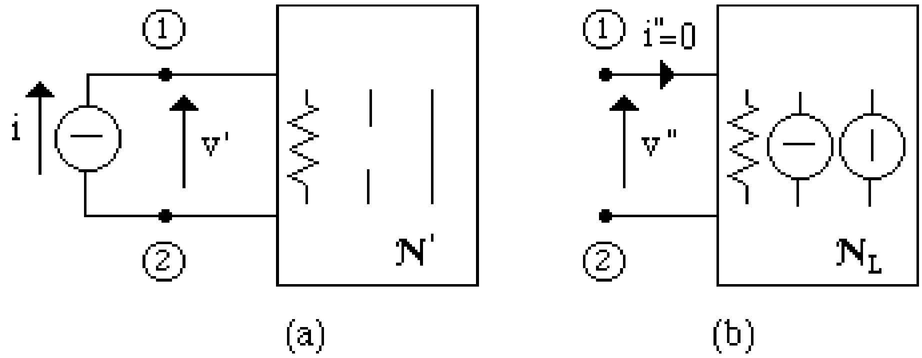


Figura 22

Il bipolo N' è costituito da soli resistori lineari, circuiti aperti (corrispondenti ai generatori di correnti spenti) e corto circuiti (corrispondenti ai generatori di tensione spenti). Esso può essere rappresentato tramite il resistore equivalente. Sia R_{eq} la resistenza equivalente di N'; allora la tensione v' vale

$$v' = R_{eq} i \,. \qquad (37)$$

Nel circuito illustrato in figura 22b le sorgenti sono solo quelle interne al circuito N_L (i"=0). Si indichi con E^* la tensione di N_L quando la corrente i è uguale a zero (la cosiddetta **tensione a circuito aperto** o **a vuoto**). La **tensione a vuoto** è indipendente dalla corrente i, dipende solo dalla struttura interna del bipolo resistivo N_L. Utilizzando la sovrapposizione degli effetti si ha

$$v = v' + v'',$$

cioè

$$v = R_{eq} i + E^* . \qquad (38)$$

La (38) è la caratteristica del bipolo N_L. Essa coincide con la caratteristica del generatore reale di tensione.

Si consideri ora la caratterizzazione su base tensione e si assuma che il circuito di figura 21b ammetta una e una sola soluzione per ogni valore di v. Il lettore dimostri, applicando la sovrapposizione degli effetti, che la relazione tra la corrente i e la tensione v vale

$$i = G_{eq} v + J^*, \qquad (39)$$

dove G_{eq} è la conduttanza equivalente del bipolo N_L quando tutti i generatori sono spenti e J^* è la corrente nel terminale "1" quando il bipolo N_L è collegato a un corto circuito.

Quando $R_{eq} \neq 0$ e $G_{eq} \neq 0$ le relazione (38) e (39) sono invertibili e quindi il bipolo può essere caratterizzato sia in tensione che in corrente e valgono le relazioni

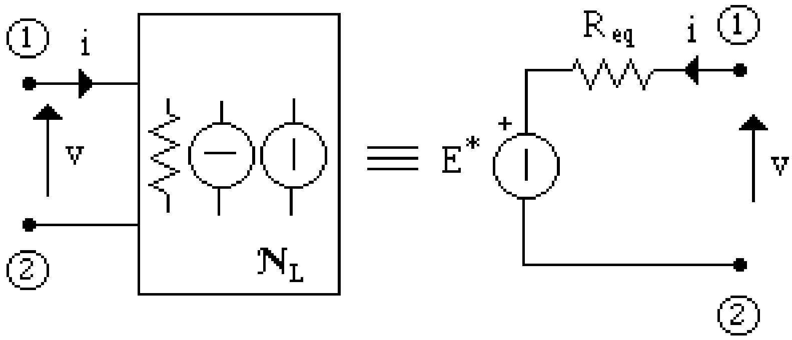
$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}}, \quad J^* = -\frac{E^*}{R_{eq}} . \qquad (40)$$

Utilizzando la seconda delle (40) è possibile determinare la resistenza equivalente di Thévenin dalla tensione a vuoto E^* e dalla corrente di corto circuito J^*. Questo è un risultato assai interessante dal punto di vista pratico, perché consente di determinare il circuito equivalente di un sistema elettrico assimilabile a un bipolo attraverso due misure (la misura della tensione vuoto e la misura della corrente di corto circuito).

Il lettore provi a individuare dei casi in cui $R_{eq} = 0$ o $G_{eq} = 0$; può anche accadere che $E^* = 0$ e / o $J^* = 0$, pur essendovi dei generatori.

Teorema di Thévenin-Norton

Si assuma che il circuito ottenuto collegando il bipolo resistivo “lineare” N_L a un generatore ideale di corrente ammetta una e una sola soluzione. Allora N_L può essere rappresentato attraverso il **generatore** (reale) **equivalente di tensione**

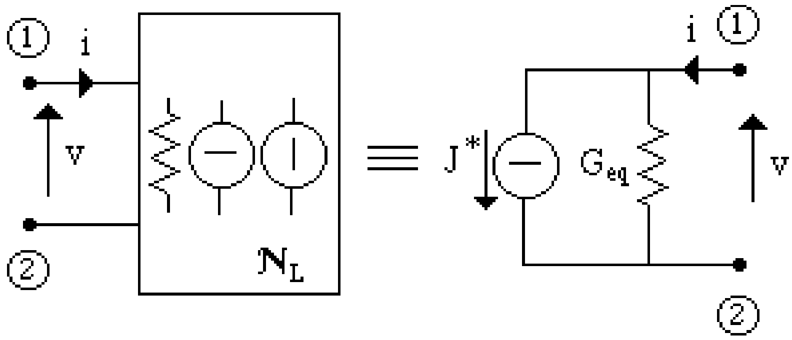


dove:

R_{eq}, detta **resistenza equivalente di Thévenin**, è la resistenza equivalente del bipolo N_L, dopo avere spento tutti i generatori ideali all'interno di N_L;

E^*, detta **tensione di circuito aperto**, (o tensione a vuoto), è la tensione fra i terminali “1” e “2” di N_L quando esso è collegato a un circuito aperto.

Si assuma che il circuito ottenuto collegando il bipolo resistivo “lineare” N_L a un generatore ideale di tensione ammetta una e una sola soluzione. Allora N_L può essere rappresentato attraverso il **generatore** (reale) **equivalente di corrente**



dove:

G_{eq}, detta **conduttanza equivalente di Norton**, è la conduttanza equivalente del bipolo N_L, dopo avere spento tutti i generatori all'interno di N_L;

J^*, detta **corrente di corto circuito**, è la corrente nel terminali “1” di N_L quando esso è collegato a un corto circuito.

In conclusione possiamo sostituire qualsiasi parte di un circuito, assimilabile a un bipolo resistivo lineare con generatori indipendenti, con due soli elementi circuitali, o un generatore reale di tensione oppure un generatore reale di corrente, senza influenzare la soluzione della restante parte del circuito.

Esempio

Si determini nel circuito illustrato in figura 23a la potenza assorbita dal resistore R_4, $p_4 = R_4 i_4^2$. In questo caso la corrente i_4 non può essere determinata solo attraverso le equivalenze serie e parallelo e le formule dei partitori, perché vi sono delle connessioni tipo “triangolo” o tipo “stella”.

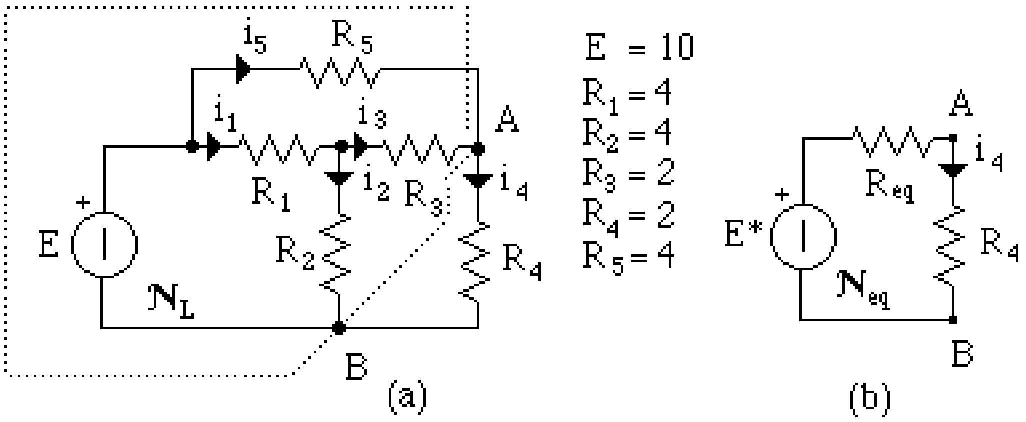


Figura 23 Circuito in esame (a) e circuito equivalente ottenuto applicando Thévenin (b).

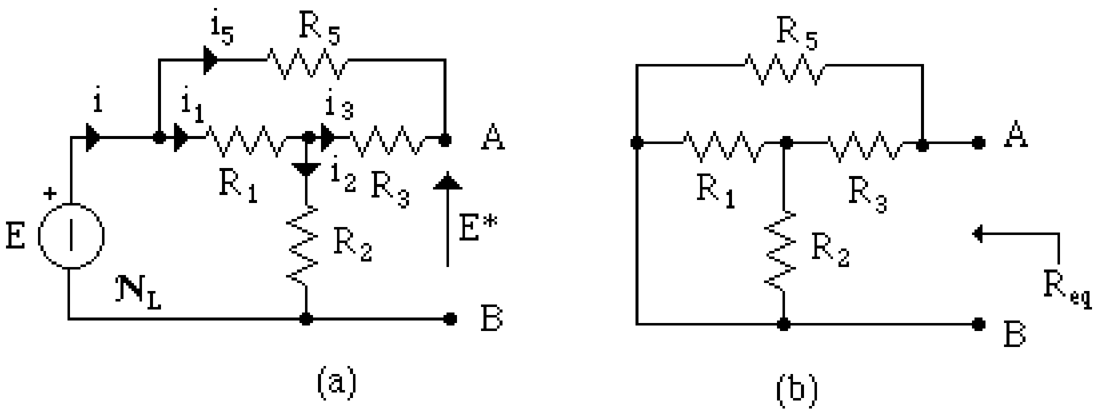


Figura 24 Bipolo resistivo “lineare” N_L (a) e bipolo resistivo “lineare” N_L con il generatore spento (b).

Il calcolo di i_4 può essere semplificato notevolmente se si usa il generatore equivalente di tensione per rappresentare la parte del circuito racchiusa dalla linea tratteggiata in figura 23a. In figura 23b è rappresentato il circuito equivalente ottenuto applicando Thévenin. Bisogna determinare i parametri E^* e R_{eq}.

- Calcolo di E^*

Per calcolare E^* bisogna risolvere il circuito di figura 24a. Questo circuito può essere risolto con l'equivalenza serie e parallelo e le formule dei partitori. Il resistore R_3 è in serie con R_5; la serie R_3_R_5 è a sua volta in parallelo con R_1; questo parallelo è, infine, in serie con R_2. Quindi la resistenza equivalente R, che vede il generatore E, vale

$$R = \frac{R_1(R_3 + R_5)}{R_1 + R_3 + R_5)} + R_2 = 6.4 .$$

La corrente i è data da $i = E / R = 1.5625$. Per determinare E^* basta conoscere la corrente i_5. Infatti applicando la seconda legge di Kirchhoff si ottiene $E^* = E - R_5 i_5$. La corrente i_5 può essere determinata utilizzando il partitore di corrente. Si ottiene

$$i_5 = i\frac{R_1}{R_1 + R_3 + R_5} = 0.625 .$$

Quindi abbiamo $E^* = E - R_5 i_5 = 7.5$.

- Calcolo di R_{eq}.

Per calcolare R_{eq} si possono applicare le equivalenze serie e parallelo al bipolo illustrato in figura 24b. Il resistore R_1 è in parallelo con R_2; il parallelo R_1_R_2 è a sua volta in serie con R_3; questa serie è, infine, in parallelo con R_5. Quindi la resistenza equivalente R_{eq} vale

$$R_{eq} = \frac{R_5\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3\right)}{R_5 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3} = 2 .$$

Ora è possibile calcolare la corrente i_4. Si ha

$$i_4 = \frac{E^*}{R_{eq} + R_4} 1.875.$$

La potenza assorbita dal resistore R_4 vale $p_4 = R_4 i_4^2 \cong 7.0$.

Il lettore determini la potenza erogata dal generatore di tensione del circuito effettivo, rappresentato in figura 23a. Essa non coincide con quella erogata dal generatore di tensione del circuito equivalente rappresentato in figura 23b. Perché?

Esempio

Si determini nel circuito illustrato in figura 25 la tensione del diodo.

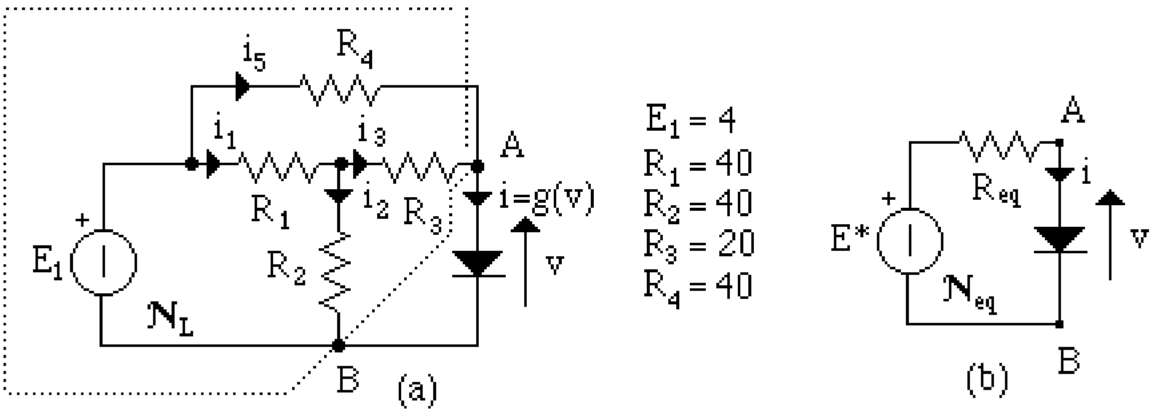


Figura 25

Il calcolo di v può essere semplificato notevolmente se si usa di nuovo il generatore equivalente di tensione per rappresentare la parte del circuito racchiusa dalla linea tratteggiata in figura 25a. In figura 25b è rappresentato il circuito equivalente ottenuto applicando Thévenin.

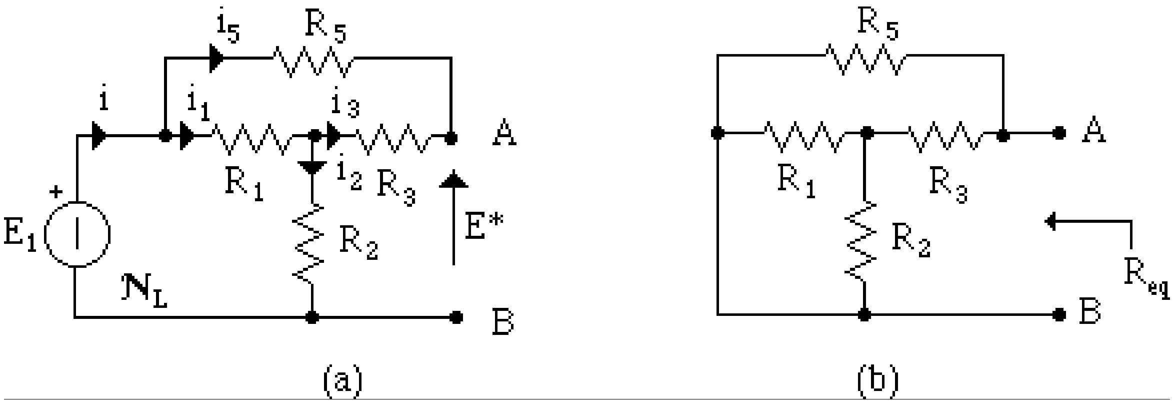


Figura 26

La tensione a vuoto e la resistenza equivalente valgono $E^* = 3$, $R_{eq} = 20$. Pertanto la tensione v deve verificare l'equazione non lineare

$$v + 20g(v) = 3;$$

si assuma per il diodo la caratteristica $g(v) = 10^{-9}[\exp(v/0.05) - 1]$, (diodo esponenziale). L'equazione non lineare può essere risolta per via grafica (figura 27): $y = (3 - v)/20$ è la caratteristica del bipolo resistivo lineare (la retta di carico), e $y = g(v)$ è l'equazione costitutiva del diodo. La soluzione è $v \cong 0.9$ e $i \cong 0.1$. Il lettore risolva l'equazione non lineare utilizzando, anche, il metodo di Newton-Raphson.

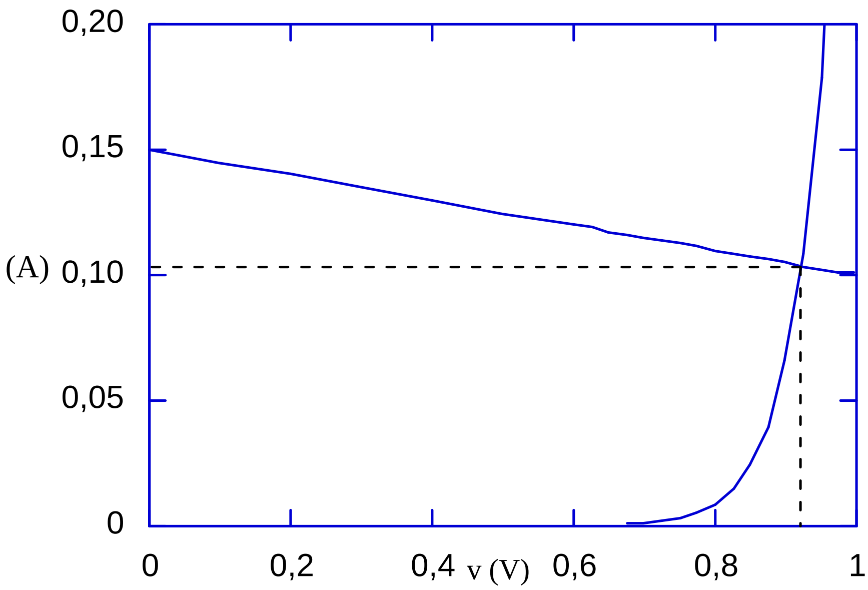


Figura 27

5.3 Teoremi di reciprocità

Esistono tre forme diverse della proprietà di reciprocità.

• **Prima forma della proprietà di reciprocità**

Si consideri un circuito resistivo lineare e due lati “a” e “b”. Di questo circuito si considerino due versioni distinte, il circuito N', in cui il lato “a” è un generatore di tensione con tensione E'_a e il lato “b” è un corto circuito e l'altro N", in cui il lato “b” è un generatore di tensione E''_b e il lato “a” è un corto circuito (figura 28; su ogni bipolo è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore). Nel “rettangolo” è rappresentata la parte del circuito costituita da soli resistori lineari: essa è la stessa per entrambi i circuiti, cioè i resistori sono gli stessi resistori e sono collegati allo stesso modo; si indichi con N_R il numero di resistori.

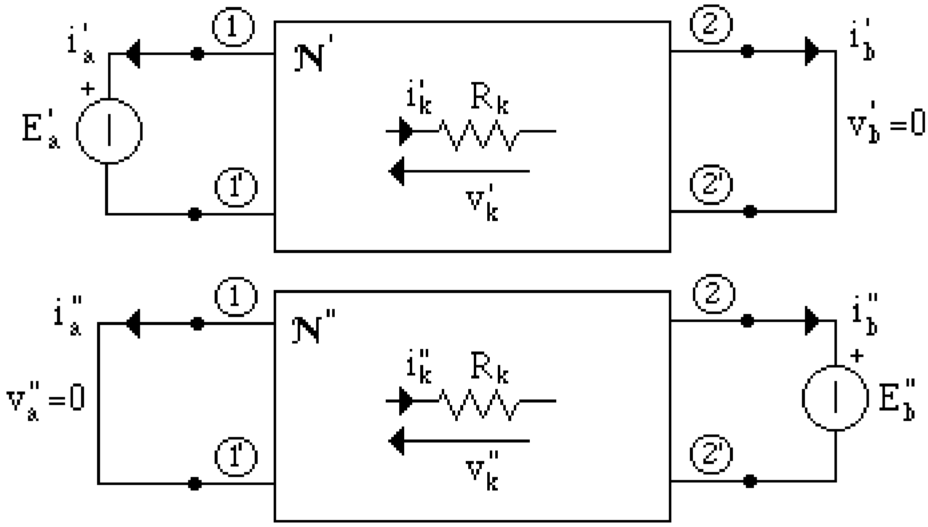


Figura 28

Allora vale la relazione

$$\frac{i'_b}{E'_a} = \frac{i''_a}{E''_b}. \qquad (41)$$

Dimostrazione

I circuiti N' e N" hanno lo stesso grafo, quindi è possibile applicare la conservazione delle potenze virtuali. Si considerino le potenze virtuali ottenute prendendo le tensioni del circuito N' e le correnti del circuito N". Per esse si ottiene

$$E'_a i''_a + \sum_{j=1}^{N_R} v'_j i''_j = 0, \qquad (42)$$

perché la potenza virtuale $v'_b i''_b$ assorbita dal lato “b” è uguale a zero. Si considerino, ora, le potenze virtuali ottenute prendendo le correnti del circuito N' e le tensioni del circuito N". Per esse si ottiene

$$E''_b i'_b + \sum_{j=1}^{N_R} v''_j i'_j = 0; \qquad (43)$$

la potenza virtuale $v''_a i'_a$ assorbita dal lato "a" è uguale a zero.

I termini $\sum_{j=1}^{N_R} v'_j i''_j$ e $\sum_{j=1}^{N_R} v''_j i'_j$ rappresentano le potenze virtuali assorbite dai resistori. Essi sono eguali perché i resistori sono lineari. Infatti, utilizzando le equazioni costitutive dei resistori lineari, si ha

$$v'_j = R_j i'_j \text{ e } v''_j = R_j i''_j, \tag{44}$$

e quindi si ha l'identità

$$\sum_{j=1}^{N_R} v'_j i''_j = \sum_{j=1}^{N_R} R_j i'_j i''_j = \sum_{j=1}^{N_R} R_j i''_j i'_j = \sum_{j=1}^{N_R} v''_j i'_j. \tag{45}$$

Dalle (42), (43) utilizzando la (45) si ottiene immediatamente la (41).

Alla proprietà (41) è possibile dare questa interpretazione. Nel circuito N' è possibile considerare la tensione E'_a del generatore di tensione collegato ai nodi "1" e "1'" come causa e come effetto la corrente i'_b nel corto circuito collegato ai nodi "2" e "2'"; invece nel circuito N" si ha una situazione completamente duale. Allora <u>il rapporto tra effetto e causa nel circuito</u> N'<u> è uguale al rapporto tra effetto e causa nel circuito </u>N".

Osservazione

La relazione (45) non vale quando i resistori sono non lineari; ad esempio, per resistori non lineari controllati in tensione si ha, in generale, $g(v'_i)v''_i \neq g(v''_i)v'_i$. La (45) non vale nemmeno se i bipoli sono lineari e dinamici. Ad esempio se nel lato k-esimo c'è un condensatore si ha $C_i \dfrac{dv'_i}{dt} v''_i \neq C_i \dfrac{dv''_i}{dt} v'_i$.

• **Seconda forma della proprietà di reciprocità**

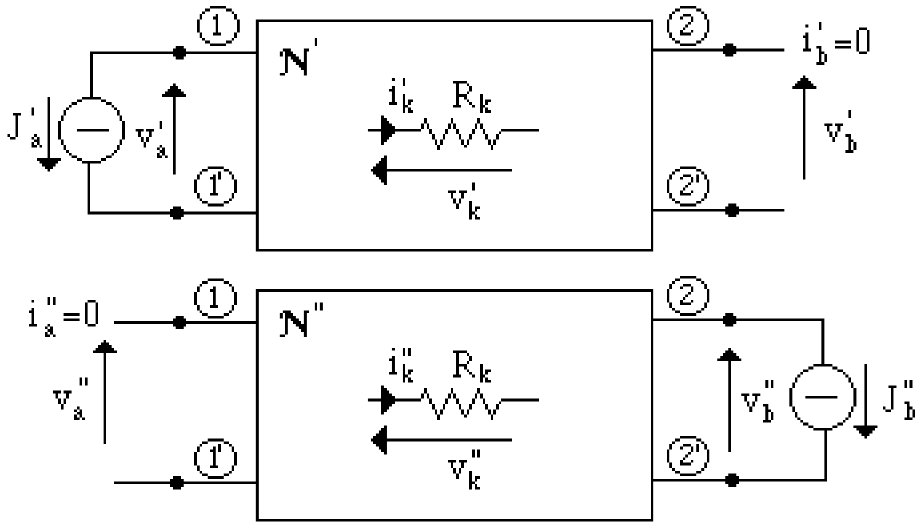


Figura 29

Si consideri, ora, il caso in cui il lato "a" del circuito N' è un generatore di corrente con corrente J'_a e il lato "b" è un circuito aperto; invece nel circuito N" il lato "b" è un generatore di corrente J''_b

e il lato "a" è un circuito aperto (figura 29; su ogni bipolo è stata fatta sempre la convenzione dell'utilizzatore). Allora vale la relazione

$$\frac{v_b'}{J_a'} = \frac{v_a''}{J_b''}. \tag{46}$$

I lettore dimostri la (46) utilizzando, ancora, la conservazione delle potenze virtuali.

• **Terza forma della proprietà di reciprocità**

Si consideri, ora, il caso in cui il lato "a" del circuito N' è un generatore di tensione con tensione E_a' e il lato "b" è un circuito aperto; invece il lato "b" del circuito N" è un generatore di corrente con corrente J_b'' e il lato "a" è un corto circuito (figura 30; su ogni bipolo è stata fatta sempre la convenzione dell'utilizzatore).

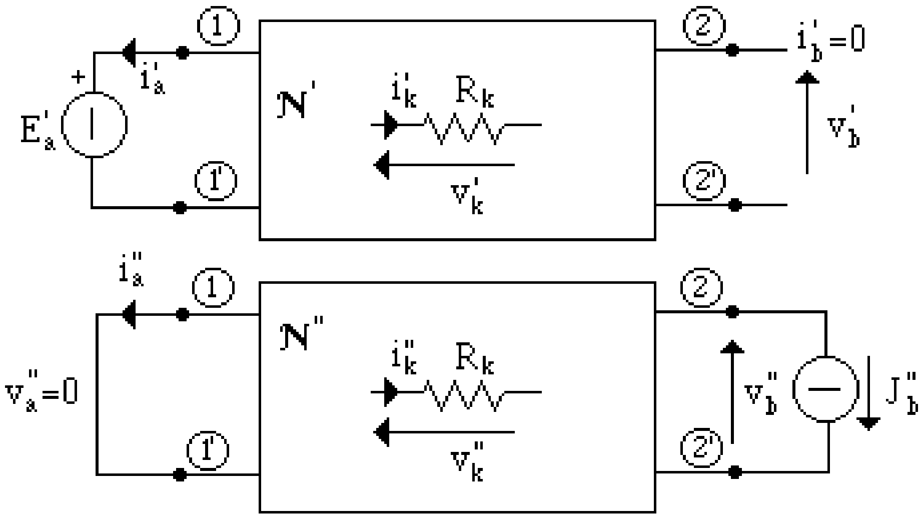


Figura 30

Allora vale la relazione

$$\frac{v_b'}{E_a'} = -\frac{i_a''}{J_b''}. \tag{47}$$

I lettore dimostri la (47) utilizzando sempre la conservazione delle potenze virtuali.

5.4 Teoremi di non amplificazione

5.4.1 Teorema di non amplificazione delle tensioni

Si consideri un circuito costituito da un solo bipolo attivo e da resistori strettamente passivi (i resistori possono essere non lineari). Allora, la tensione dell'unico bipolo attivo è, in valore assoluto, la più grande tra tutte le tensioni del circuito.

Dimostrazione

Innanzi tutto si scelga il riferimento per la tensione v_a dell'unico bipolo attivo in modo tale che essa sia positiva e si indichino i nodi ai quali esso è collegato così come è indicato in figura 31a (questa è solo un'ipotesi di lavoro). Si consideri un generico nodo del circuito (diverso dai nodi "1" e "n") e lo si indichi con "s". Si scelgano i riferimenti per i versi delle correnti dei bipoli collegati con il nodo "s" come quelli illustrati in figura 31b: il riferimento per il verso di i_{js} è quello che va dal nodo "j" al nodo "s". La scelta di questi riferimenti per i versi delle correnti è anche essa un'ipotesi di lavoro (la tesi del teorema non dipende dai riferimenti scelti; se si scelgono i riferimenti in questo modo è più semplice dimostrarla).

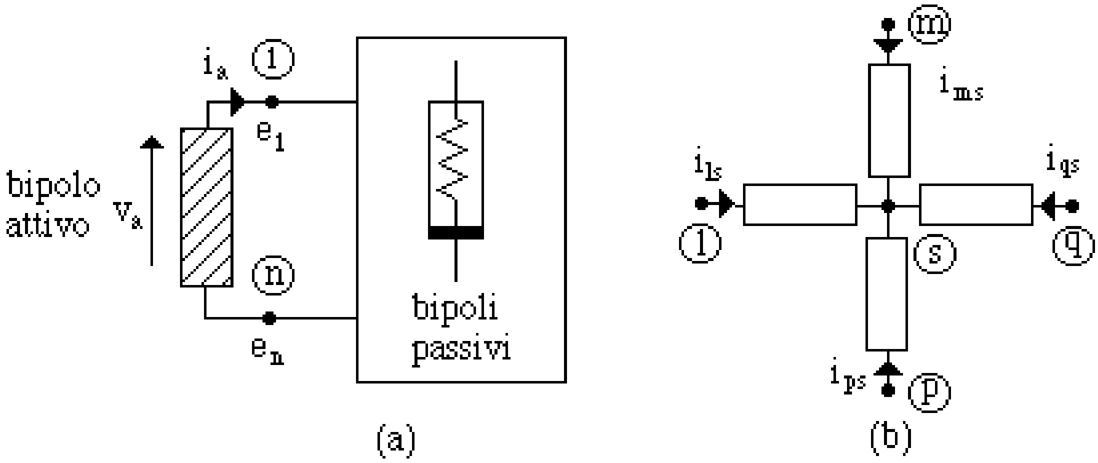


Figura 31

Applicando la prima legge di Kirchhoff al nodo "s" si ha

$$\sum_j i_{js} = 0, \tag{48}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i lati connessi al nodo "s". Dalla (48) segue necessariamente che:

(i) o tutte le correnti sono nulle;

(ii) oppure alcune sono positive, altre sono negative e altre nulle.

Escludiamo per ora la prima possibilità. Allora si ha almeno una corrente positiva e un'altra negativa con i riferimenti scelti per i versi delle correnti; si assuma

$$i_{ls} > 0, \tag{49}$$

$$i_{ms} < 0. \tag{50}$$

Siccome tutti i bipoli collegati al nodo "s" sono statici e strettamente passivi, si ha

$$p_{ls} = i_{ls}v_{ls} > 0, \tag{51}$$

$$p_{ms} = v_{ms}i_{ms} > 0. \tag{52}$$

Dalle (49)-(52) si ottiene

$$v_{ls} = e_l - e_s > 0, \tag{53}$$

$$v_{ms} = e_m - e_s < 0, \tag{54}$$

dove e_m, e_s ed e_l sono i potenziali dei nodi "m", "s" e "l". Dalle relazioni (53) e (54) si ottiene che il potenziale del nodo "s" non è né il più grande e né il più piccolo dell'insieme dei potenziali nodali $e_1, e_2, ..., e_n$ del circuito. Se invece tutte le correnti che interessano il nodo "s" fossero nulle, essendo i bipoli strettamente passivi, avremmo che tutte le tensioni sarebbero nulle. Anche in questo caso il potenziale del nodo “s” non è né il più grande e né il più piccolo dell'insieme dei potenziali nodali $e_1, e_2, \ldots, e_n$ del circuito. Ciò vale per ogni nodo interno al circuito di resistori strettamente passivi.

L'insieme dei potenziali $e_1, e_2, \ldots, e_n$ è un insieme finito e limitato. Pertanto esso deve ammettere necessariamente un massimo e un minimo. Siccome il potenziale di qualsiasi nodo diverso da “1” e “n” non può essere né il massimo e né il minimo, allora e_1 è il potenziale massimo ed e_n è il potenziale minimo (perché si è assunto $e_1 - e_n = v_a \geq 0$). Quindi è possibile ordinare i nodi in modo tale da avere per i potenziali la relazione d'ordine

$$e_1 \geq e_2 \geq \ldots \geq e_{n-1} \geq e_n . \tag{55}$$

Dunque la tensione sull'unico bipolo attivo è la più grande, in valore assoluto, tra tutte quelle del circuito.

Osservazione

La relazione (55) potrebbe non valere se ad uno stesso nodo fossero collegati solo bipoli passivi (e non strettamente passivi), come, ad esempio, “circuiti aperti”. Qualora ciò accadesse si potrebbero avere tensioni sui bipoli “circuito aperto”, in valore assoluto, più grandi di quella dell'unico bipolo attivo. L'esempio più semplice è costituito da due condensatori in serie in funzionamento stazionario (ricordiamo che il condensatore in funzionamento stazionario si comporta come un “circuito aperto”).

La relazione (55) non vale neanche per i bipoli dinamici passivi. Ad esempio per un condensatore con capacità positiva, pur essendo passivo, il segno della potenza assorbita può essere in alcuni istanti positivo e in altri negativo, a seconda se sta aumentando o diminuendo l'energia in esso immagazzinata.

5.4.2 Teorema di non amplificazione delle correnti

> Si consideri un circuito costituito da un solo bipolo attivo e da resistori strettamente passivi (i resistori possono essere non lineari). Allora, la corrente dell'unico bipolo attivo è, in valore assoluto, la più grande tra le correnti del circuito.

Dimostrazione

Innanzi tutto si assuma, come ipotesi di lavoro, positiva la corrente nell'unico bipolo attivo (con il riferimento e il verso indicato in figura 32a, cioè

$$i_a > 0 . \tag{56}$$

Poi si scelgano i versi di riferimento delle correnti nei resistori passivi in modo tale che siano orientati dal nodo a potenziale più alto a quello a potenziale più basso. Si consideri, ad esempio, un circuito con il grafo orientato illustrato in figura 32.

Si consideri la corrente i_k che circola nel k-esimo resistore strettamente passivo. È facile verificare che esiste sempre un insieme di taglio così costituito: il lato attivo, il k-esimo lato strettamente passivo e lati corrispondenti ad altri bipoli strettamente passivi. Si indichi con i_h la corrente che circola nel generico resistore di questo secondo insieme di bipoli. L'insieme di taglio, così definito, partiziona i nodi i due sottoinsiemi: l'insieme dei nodi in “alto” e l'insieme dei nodi in “basso”. Applicando a esso la prima legge di Kirchhoff, si ottiene

$$i_a = i_k + \sum_h i_h \,. \tag{57}$$

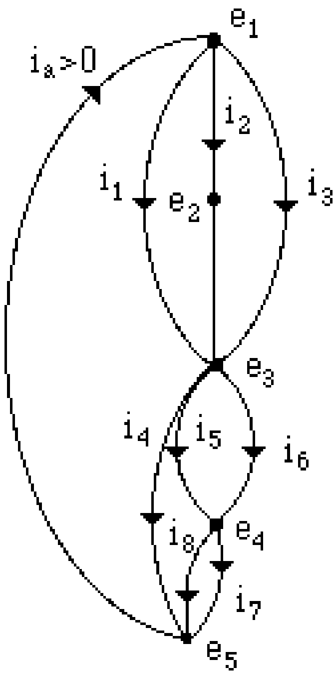


Figura 32

Ad esempio applicando la (57) al grafo illustrato in figura 32, si ha:

- per l'insieme di taglio costituito dal lato attivo e dai lati 1, 2 e 3

$$i_a = i_1 + i_2 + i_3 \,; \tag{58}$$

- per l'insieme di taglio costituito dal lato attivo e dai lati 4, 5 e 6

$$i_a = i_4 + i_5 + i_6 \,; \tag{59}$$

- per l'insieme di taglio costituito dal lato attivo e dai lati 4, 7 e 8

$$i_a = i_4 + i_7 + i_8 \,. \tag{60}$$

Per costruzione, i potenziali dei nodi in “alto” sono più grandi dei potenziali dei nodi in “basso”, quindi per le tensioni sui resistori passivi si ha

$$v_k \geq 0 \qquad k = 1, 2, \ldots \,. \tag{61}$$

Siccome tutti i resistori sono strettamente passivi, deve essere

$$p_k = v_k i_k > 0 \qquad k = 1, 2, \ldots \,; \tag{62}$$

la potenza assorbita è nulla solo quando sia la tensione v_k che la corrente i_k sono nulle. Dalla (61) e (62) segue immediatamente che, la corrente in ogni lato strettamente passivo non può mai essere negativa, cioè deve essere

$$i_k \geq 0 \qquad k = 1, 2, \ldots \,. \tag{63}$$

Siccome nella (57), (e nelle (58), (59) e (60)), tutti i termini a destra sono non negativi, deve valere la relazione

$$i_a \geq i_k \geq 0 \qquad k = 1, 2, \dots \quad . \tag{64}$$

Osservazione

La relazione (64) è stata ottenuta assumendo che i resistori siano strettamente passivi. Cosa accade, se, ad esempio, nel circuito vi sono anche corto circuiti? La potenza assorbita da un corto circuito è sempre uguale a zero, pur essendo la corrente diversa da zero e quindi non è strettamente passivo. Si assuma, ad esempio, che il lato 5 del circuito rappresentato in figura 32 sia un corto circuito. Se il lato 6 è strettamente passivo, allora la corrente i_6 è uguale a zero. Inoltre dalla (60) segue che la corrente i_4 è minore, al più uguale a i_a. Quindi dalla (59) si ha che anche la corrente che circola nel corto circuito i_5 è minore, al più uguale a i_a.

Si assuma, ora, che vi siano due corto circuiti in parallelo, ad esempio il lato 5 e il lato 6. In questo caso i_5 e i_6 potrebbero essere più grandi, in valore assoluto, di i_a; nella maglia costituita dai bipoli 5 e 6 potrebbe circolare una corrente arbitraria (l'esempio più semplice è costituito da due induttori in parallelo in funzionamento stazionario).