

PROPRIETÀ ENERGETICHE DEI BIPOLI

4.1 Potenza elettrica. Conservazione delle potenze elettriche.

Si consideri un circuito \mathcal{N} con b bipoli e siano i_1, i_2, \dots, i_b le correnti e v_1, v_2, \dots, v_b le tensioni; per ogni bipolo i riferimenti per i versi della corrente e della tensione siano scelti in base alla convenzione dell'utilizzatore (figura 1a).

Per il k -esimo bipolo ($k=1,2, \dots, b$) del circuito, si definisce la **potenza elettrica assorbita** come

$$p_k(t) = i_k(t)v_k(t) = \hat{i}_k(t)\hat{v}_k(t). \quad (1)$$

Alla grandezza, così definita, si dà il nome di “potenza elettrica” perché, come poi vedremo, essa ha un significato fisico preciso: descrive lo scambio di **energia** tra il k -esimo bipolo e la parte restante del circuito. Nel Sistema Internazionale la potenza si misura in *watt* (W): $1W=1V \cdot 1A$. L'aggettivo “assorbita” sta solo ad indicare che il prodotto è tra la tensione v_k (\hat{v}_k) e la corrente i_k (\hat{i}_k) scelte con la convenzione dell'utilizzatore.

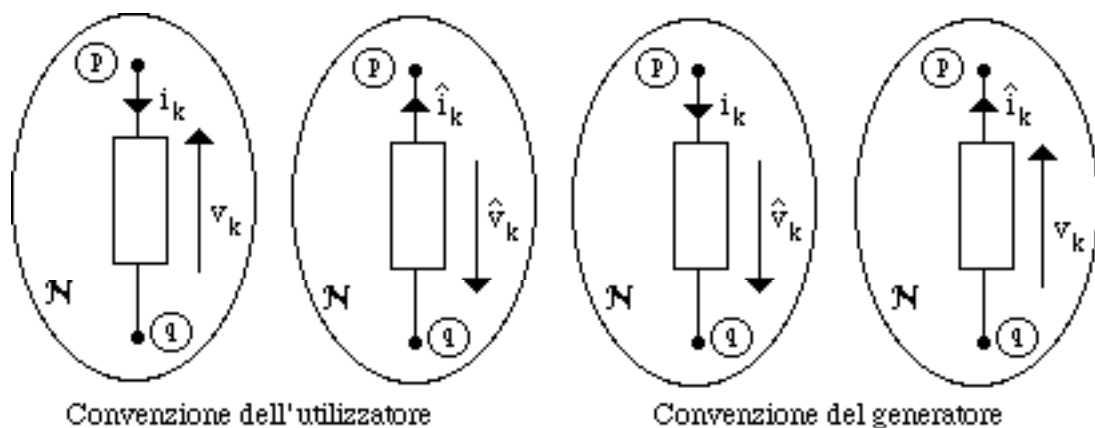


Figura 1 Convenzione dell'utilizzatore (a) e convenzione del generatore (b).

Se si usa la convenzione del generatore, allora al prodotto tra la tensione $\hat{v}_k = -v_k$ (v_k) e la corrente i_k ($\hat{i}_k = -i_k$)

$$\hat{p}_k(t) = i_k(t)\hat{v}_k(t) = \hat{i}_k(t)v_k(t) \quad (2)$$

si dà il nome di potenza elettrica erogata; l'aggettivo “erogata” sta solo a indicare che il prodotto è tra la tensione \hat{v}_k e la corrente i_k scelte con la convenzione del generatore. Siccome è

$$v_k = -\hat{v}_k \text{ e } i_k = -\hat{i}_k, \quad (3)$$

si ha tra la potenza elettrica assorbita e la potenza elettrica erogata dallo stesso bipolo

$$\hat{p}_k(t) = -p_k(t). \quad (4)$$

Si osservi che il segno della potenza elettrica assorbita e della potenza elettrica erogata non dipende dalla particolare scelta del riferimento per il verso della corrente.

La potenza elettrica è un caso particolare di potenza virtuale. Il teorema di Tellegen, presentato nel precedente Capitolo, è applicabile anche quando l'insieme delle correnti i'_1, i'_2, \dots, i'_b e l'insieme delle tensioni $v''_1, v''_2, \dots, v''_b$ appartengono allo stesso circuito, e quindi verificano oltre alle equazioni di Kirchhoff, anche le equazioni costitutive. In questo caso la potenza virtuale assorbita (erogata) dal k-esimo lato coincide con la potenza elettrica assorbita (erogata) dal k-esimo bipolo. Applicando il teorema di Tellegen si ha che, la somma delle potenze elettriche assorbite da tutti i bipoli di un circuito elettrico è in ogni istante uguale a zero.

Conservazione delle potenze elettriche

Si consideri un circuito elettrico. La somma delle potenze elettriche assorbite (erogate) da tutti i bipoli del circuito è uguale a zero, cioè

$$\sum_{k=1}^b i_k v_k = 0. \quad (5)$$

Esempio

Si consideri il circuito di figura 2a (per ogni bipolo è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore) e si scriva la conservazione delle potenze. Si ha

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 = 0. \quad (6)$$

È evidente che i termini della (6) non possono avere lo stesso segno (a meno che non siano tutti nulli; ciò è certamente impossibile se nel circuito circolano correnti): quindi alcuni termini sono positivi e altri negativi. Pertanto in un circuito elettrico la potenza assorbita da alcuni bipoli è positiva mentre quella assorbita dagli altri è negativa.

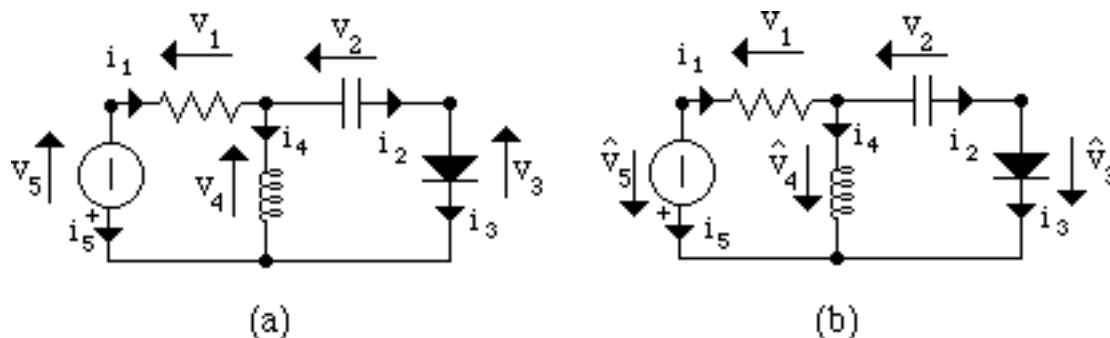


Figura 2

È possibile scrivere la conservazione delle potenze elettriche anche quando su alcuni bipoli si fa la convenzione dell'utilizzatore e su altri la convenzione del generatore, (figura 2b). Partendo dalla (6) e osservando che $\hat{v}_3 = -v_3$, $\hat{v}_4 = -v_4$ e $\hat{v}_5 = -v_5$, si perviene a:

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = \hat{v}_3 i_3 + \hat{v}_4 i_4 + \hat{v}_5 i_5 \Rightarrow p_1 + p_2 = \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \hat{p}_5, \quad (7)$$

cioè la somma delle potenze assorbite dal resistore e dal condensatore è uguale alla somma delle potenze erogate dal generatore ideale di tensione, dall'induttore e dal diodo.

In generale in circuito la somma delle potenze assorbite da un certo insieme di bipoli è uguale, istante per istante, alla somma delle potenze erogate dalla restante parte dei bipoli, cioè

$$\sum_{i=1}^{\alpha} p_i = \sum_{j=\alpha+1}^b \hat{p}_j. \quad (8)$$

4.2 Significato fisico della potenza elettrica

Cosa rappresenta la potenza elettrica assorbita (o erogata) da un bipolo? Nel limite quasi-stazionario per la potenza elettrica assorbita $p(t)$ (erogata \hat{p}) dal generico bipolo inserito in un circuito vale la relazione approssimata (vedi **Appendice B**)

$$p(t) = vi \cong \oiint_{\Sigma^c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{o } \hat{p}(t) = \hat{v}i \cong \oiint_{\Sigma^c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \text{ dove } \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}) \quad (9)$$

dove $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ è il **vettore di Poynting** e Σ^c è la superficie limite del componente di cui il bipolo è il modello (figura 3); il verso della normale \mathbf{n} è rivolto verso l'interno della superficie limite. Nella (9) la relazione tra la potenza elettrica assorbita (erogata) e il flusso del vettore di Poynting è di eguaglianza approssimata: è ignorata la *potenza elettromagnetica irradiata*. Quando le grandezze elettromagnetiche (e quindi le tensioni e le correnti) variano lentamente nel tempo, quest'ultima è generalmente trascurabile.

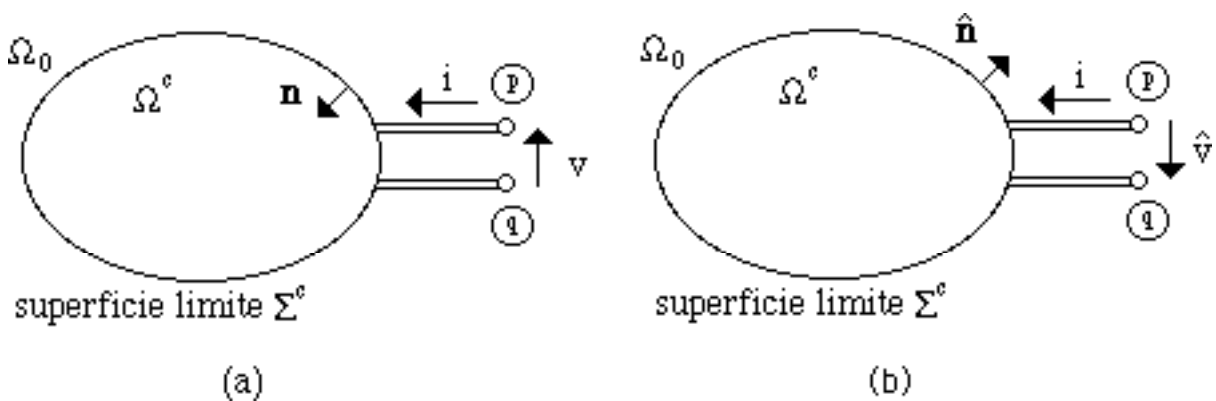


Figura 3 convenzione dell'utilizzatore (a) e convenzione del generatore (b).

Il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie limite Σ^c è legato al campo elettromagnetico all'interno del componente (della regione Ω^c delimitata da Σ^c), dalla relazione (**teorema di Poynting**, vedi **Appendice B**)

$$\oint_{\Sigma^c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{ndS} = \iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega + \iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega^c} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\Omega, \quad (10)$$

e quindi

$$p(t) \equiv \iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega + \iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega^c} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\Omega. \quad (11)$$

Se consideriamo mezzi materiali lineari, isotropi e tempo-invarianti con costante dielettrica ϵ e permeabilità magnetica μ , la (11) diventa (abbiamo supposto anche che la frontiera di Ω^c sia costante nel tempo)

$$p(t) \equiv \iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega + \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\Omega^c} (\epsilon \mathbf{E}^2 / 2) d\Omega + \iiint_{\Omega^c} (\mathbf{B}^2 / 2\mu) d\Omega \right]. \quad (12)$$

Quale è il significato fisico dei tre termini che compaiono a secondo membro della (12)?

- Il termine

$$\delta W = \left(\iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega \right) dt \quad (13)$$

può essere interpretato come lavoro compiuto dal campo elettrico sulle cariche “libere” in moto nella regione Ω^c nell'intervallo di tempo elementare dt (il moto di queste cariche dà luogo al campo di densità di corrente di conduzione \mathbf{J}).

- La grandezza

$$U_e(t) = \iiint_{\Omega^c} (\epsilon \mathbf{E}^2 / 2) d\Omega \quad (14)$$

è la parte di energia immagazzinata nello spazio Ω^c associata al campo elettrico; U_e è positiva perché $\epsilon > 0$.

- La grandezza

$$U_m(t) = \iiint_{\Omega^c} (\mathbf{B}^2 / 2\mu) d\Omega \quad (15)$$

è la parte di energia immagazzinata nello spazio Ω^c associata al campo magnetico; U_m è positiva perché $\mu > 0$.

Allora la (12) può essere riscritta moltiplicando tutti i termini per dt , nella forma seguente:

$$p dt = \delta W + dU_{em}, \quad (16)$$

dove

$$U_{em} = U_e + U_m \quad (17)$$

è l'energia immagazzinata nello spazio Ω^c associata al campo elettromagnetico.

Riassumendo abbiamo:

- La legge della conservazione delle potenze (5) descrive il legame tra le potenze elettriche assorbite dai diversi bipoli del circuito; infatti essa è diretta conseguenza delle sole leggi di Kirchhoff.
- L'equazione (12) esprime la potenza elettrica assorbita dal singolo bipolo come somma di tre contributi: (a) il lavoro, per unità di tempo, compiuto dal campo elettrico sulle cariche in moto all'interno del componente di cui il bipolo è il modello; (b) la variazione, per unità di tempo, dell'energia immagazzinata associata al campo elettrico all'interno del componente; (c) la variazione, per unità di tempo, dell'energia immagazzinata associata al campo magnetico all'interno del componente. Quale termine sia prevalente nella (12) dipende unicamente dalla costituzione fisica del componente e quindi dalla relazione costitutiva del bipolo.

4.2.1 Bipoli statici

Nei componenti statici, cioè resistori, generatori, diodi, ..., la potenza istantanea assorbita nel regime stazionario è uguale a $\iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega$. Nel limite lentamente variabile anche se $\frac{dU_{em}}{dt} \neq 0$, questo termine continua ad essere trascurabile rispetto a $\iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega$ perché gli effetti prodotti dall'induzione magnetoelettrica ed elettromagnetica sono trascurabili rispetto a quelli prodotti dalla conduzione (vedi **Appendice B**). Di conseguenza la potenza assorbita dai bipoli statici nel limite lentamente variabile è data da

$$p(t) \cong \iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega, \quad (18)$$

(la (18) è esatta solo nel limite stazionario): la potenza elettrica assorbita è uguale al lavoro, per unità di tempo, compiuto dal campo elettrico sulle cariche “libere” in moto all'interno del componente di cui il bipolo è il modello.

- Resistore

La potenza elettrica assorbita dal resistore lineare può essere espressa in funzione della sola corrente $i(t)$ o della sola tensione $v(t)$ attraverso la relazione costitutiva. Si ottiene

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}, \quad (19)$$

dove R è la resistenza del resistore; la potenza elettrica assorbita da un resistore lineare è positiva se $R > 0$.

Consideriamo ora un resistore lineare realizzato con un conduttore di tipo ohmico. Il lavoro compiuto dal campo elettrico per unità di tempo in questo componente è dato da

$$\iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega = \iiint_{\Omega^c} \eta |\mathbf{J}|^2 d\Omega, \quad (20)$$

dove η è la resistività elettrica del conduttore; esso è positivo perché $\eta > 0$. Sostituendo la (20) nella (18) e utilizzando la (19) si ha:

$$p(t) = Ri^2(t) = \iiint_{\Omega^c} \eta |\mathbf{J}|^2 d\Omega. \quad (21)$$

D'altra parte sappiamo dal primo principio della termodinamica che il lavoro compiuto dal campo elettrico in un mezzo conduttore si trasforma completamente in energia termica (effetto Joule): parte di questa energia uscirà dalla superficie limite sotto forma di calore e la restante parte darà luogo a un incremento dell'energia interna del conduttore e quindi a un innalzamento della sua temperatura. In conclusione $Ri^2(t)$ (o $v^2(t)/R$) rappresenta l'energia termica, per unità di tempo, prodotta per effetto Joule all'interno del resistore. Questo risultato è del tutto generale e vale anche per bipoli resistori che modellano sistemi più complessi del componente resistore.

Anche in un diodo, in un diodo tunnel, in un tiristore la potenza elettrica assorbita è uguale all'energia termica prodotta per unità di tempo. Per ognuno di questi bipoli, come poi vedremo, $p(t) = \iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega$ è sempre maggiore di zero.

- *Generatore ideale di tensione*

Utilizzando l'equazione caratteristica, la potenza elettrica assorbita dal generatore ideale di tensione ($e(t)$ è la tensione “impressa” dal generatore e $i(t)$ è la corrente), può essere espressa attraverso la relazione

$$p(t) = e(t)i(t). \quad (22)$$

Il lavoro, per unità di tempo, compiuto dal campo elettrico all'interno del componente è dato da

$$\iiint_{\Omega^c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega = -\iiint_{\Omega^c} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} d\Omega, \quad (23)$$

(ricordiamo che in un generatore ideale di tensione è $\mathbf{E} + \mathbf{E}_m = \mathbf{0}$), cioè esso è uguale all'opposto del lavoro, per unità di tempo, compiuto sulle cariche “libere” dal campo elettromotore \mathbf{E}_m . Pertanto abbiamo:

$$p(t) = e(t)i(t) = -\iiint_{\Omega^c} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} d\Omega. \quad (24)$$

In una pila $\iiint_{\Omega^c} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} dv$ è uguale a una frazione dell'energia di legame, che per unità di tempo, si libera nelle reazioni chimiche che sono alla base del suo funzionamento (il rendimento di questi sistemi è minore di uno a causa di fenomeni dissipativi di diversa natura fisica). In una dinamo o in un alternatore $\iiint_{\Omega^c} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} dv$ è uguale al lavoro compiuto, nell'unità di tempo, dal sistema meccanico che muove il rotore.

La potenza assorbita da un generatore ideale di tensione può essere sia positiva che negativa: il segno dipende dal circuito in cui il componente è inserito. Ad esempio, in un accumulatore sotto carica è positiva, mentre è negativa quando lo stesso accumulatore, una volta caricato, fa funzionare un calcolatore portatile (almeno fino a quando non si scarica); è negativa in una pila che alimenta una radio. In un alternatore è positiva in alcuni istanti e negativa in altri; comunque il valore medio (su un intervallo di tempo opportuno) è negativo. Considerazioni analoghe possono essere sviluppate per il generatore ideale di corrente.

4.2.2 Bipoli dinamici

Nei bipoli che modellano i componenti dinamici (condensatore e induttore) il lavoro, per unità di tempo, compiuto dal campo elettrico sulle cariche libere in moto è identicamente nullo (il dielettrico di un condensatore ideale ha conducibilità nulla e il filo conduttore di un induttore ideale ha conducibilità infinita). Pertanto per essi abbiamo

$$p(t) = \frac{dU_{em}}{dt}. \quad (25)$$

- Condensatore lineare tempo-invariante

Utilizzando l'equazione costitutiva del bipolo condensatore (si assuma che il condensatore sia lineare e tempo-invariante), si ottiene per la potenza assorbita

$$p = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2 \right); \quad (26)$$

essa è positiva negli istanti in cui la tensione del condensatore cresce in valore assoluto ed è negativa negli istanti in cui decresce se $C > 0$.

Nel condensatore ideale il campo di corrente, e quindi il campo magnetico, sono identicamente nulli nel limite stazionario. Di conseguenza, l'energia immagazzinata nello spazio Ω^c è associata solo al campo elettrico, mentre quella associata al campo magnetico è nulla. Nel limite lentamente variabile, pur essendo il campo magnetico e U_m diversi da zero, U_m è trascurabile rispetto a U_e , perché predominano gli effetti dovuti all'induzione magnetoelettrica su quelli dovuti all'induzione elettromagnetica (vedi **Appendice B**). Pertanto si ha

$$p(t) \cong \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega^c} (\epsilon \mathbf{E}^2 / 2) d\Omega = \frac{dU_e}{dt}. \quad (27)$$

Dalle equazioni (26) e (27) si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[U_e(t) - \frac{1}{2} C v^2(t) \right] = 0. \quad (28)$$

Dovendo essere $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ per $v = 0$ (siamo nel modello quasi-stazionario elettrico), dalla (28) segue necessariamente

$$U_e = \frac{1}{2} C v^2, \quad (29)$$

e quindi $\frac{1}{2} C v^2$ rappresenta proprio l'energia immagazzinata nel condensatore associata al campo elettrico quando la tensione tra le armature è v .

- Induttore lineare tempo-invariante

Utilizzando l'equazione costitutiva del bipolo induttore (si assuma che l'induttore sia lineare e tempo-invariante), si ottiene per la potenza assorbita

$$p = \frac{d}{dt} \left(\frac{L i^2}{2} \right); \quad (30)$$

essa è positiva negli istanti in cui la corrente nell'induttore cresce in valore assoluto ed è negativa negli istanti in cui decresce se $L > 0$.

In un induttore ideale il campo elettrico è identicamente nullo nel limite stazionario, e quindi l'energia immagazzinata è associata solo al campo magnetico. Nel limite lentamente variabile, pur essendo il campo elettrico e la parte di energia immagazzinata ad esso associata diversi da zero, la parte di energia immagazzinata associata al campo elettrico è trascurabile rispetto a quella associata al campo magnetico, $U_m \gg U_e$, perché sono predominanti gli effetti dovuti all'induzione elettromagnetica rispetto a quelli dovuti all'induzione magnetoelettrica (vedi **Appendice B**). Pertanto si ha

$$p(t) \cong \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_c} (\mathbf{B}^2 / 2\mu) d\Omega = \frac{dU_m}{dt}. \quad (31)$$

Dalle equazioni (30) e (31) si ha:

$$\frac{d}{dt} [U_m(t) - \frac{1}{2} Li^2(t)] = 0. \quad (32)$$

Dovendo essere $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ per $i = 0$ (siamo nel modello quasi-stazionario magnetico), dalla (32) segue necessariamente

$$U_m = \frac{1}{2} Li^2, \quad (33)$$

quindi $\frac{1}{2} Li^2$ rappresenta proprio l'energia immagazzinata nell'induttore associata al campo magnetico, quando la corrente che circola nell'avvolgimento è i .

Osservazione

Come poi vedremo, le relazioni costitutive dei bipoli induttore e condensatore possono anche descrivere il funzionamento di componenti la cui costituzione fisica è completamente diversa da quelle dei componenti induttore e condensatore che abbiamo introdotto nel Capitolo 2. Ad esempio, è possibile realizzare un induttore utilizzando un condensatore e un elemento statico particolare, il giratore, come faremo vedere nel Capitolo 7. In questo caso l'energia U_m immagazzinata nel bipolo non è più associata al campo magnetico, ma al campo elettrico ed è immagazzinata nel condensatore (il giratore è un elemento statico e quindi non è in grado di immagazzinare energia).

Esempio

Si consideri il circuito di figura 2a. Dalla conservazione delle potenze (6), utilizzando le relazioni costitutive, si ottiene

$$e(t)i_5 = Ri_1^2 + v_3 g(v_3) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li_4^2 + \frac{1}{2} Cv_2^2 \right); \quad (34)$$

$e(t)$ è la tensione del generatore (il riferimento per il verso è indicato in figura 2), R , L e C sono, rispettivamente, la resistenza, l'induttanza e la capacità del resistore, induttore e condensatore e $i_3 = g(v_3)$ è la caratteristica del diodo. In questo circuito, dunque, la potenza elettrica erogata dal generatore ideale di tensione è uguale alla somma della potenza assorbita dal resistore, dal diodo, dall'induttore e dal condensatore.

Utilizzando i risultati appena illustrati, il bilancio delle potenze elettriche espresso attraverso la (34) può essere formulato nel seguente modo. Il lavoro compiuto, durante l'intervallo di tempo dt , dal campo elettromotore agente sui portatori di carica presenti nel generatore è uguale alla somma: 1) della quantità di calore uscente, durante l'intervallo di tempo dt , dal resistore e dal diodo (nei conduttori di collegamento, nel condensatore e nell'induttore non ci sono fenomeni dissipativi; nella realtà ci sono, ma sono trascurabili); 2) della variazione dell'**energia interna totale**. La variazione dell'energia interna totale è somma della variazione dell'**energia interna della materia** e della variazione dell'**“energia interna” del campo elettromagnetico**. La variazione dell'**energia interna della materia** è, a sua volta, uguale alla somma della variazione dell'energia interna, di tipo termico, del pezzo di conduttore con cui è realizzato il resistore e dei pezzi di semiconduttore con cui è realizzato il diodo, che si manifesta in un innalzamento della temperatura, e della variazione dell'energia interna di polarizzazione del dielettrico con cui è realizzato il condensatore e dell'energia interna di magnetizzazione del materiale magnetico con cui è realizzato l'induttore (è stato implicitamente assunto che le temperature del dielettrico e del materiale magnetico fossero costanti). Nel modello circuitale viene ignorata l'energia elettromagnetica che, durante l'intervallo di tempo dt , è scambiata per irradiazione tra i componenti e l'energia elettromagnetica irradiata verso l'infinito.

In conclusione la potenza elettrica assorbita (erogata) dal bipolo, e quindi il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie limite del componente, corrisponde a un vero e proprio termine di energia, che nell'unità di tempo, attraversa la superficie limite: se è positiva, il flusso di energia è dal circuito (in cui il bipolo è inserito), verso il bipolo; se, invece, è negativa il flusso di energia è dal bipolo verso la parte restante del circuito. Quindi l'integrale definito tra t_1 e t_2 della potenza elettrica assorbita rappresenta l'energia assorbita dal bipolo nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) .

4.3 Energia elettrica. Bipoli passivi e bipoli attivi.

L'**energia elettrica assorbita** $W(\bar{t}, t)$ da un bipolo (inserito in un circuito) nell'intervallo di tempo (\bar{t}, t) (\bar{t} è un istante di tempo assegnato), è

$$W(\bar{t}, t) = \int_{\bar{t}}^t p(\tau) d\tau, \quad (35)$$

dove $p(t)$ è la potenza elettrica assorbita dal bipolo. Nel Sistema Internazionale l'unità di misura dell'energia è il *joule*¹ (J): $1\text{J}=1\text{W}\cdot 1\text{s}$. Pertanto la potenza assorbita dal bipolo è uguale alla derivata (rispetto al tempo t) dell'energia assorbita,

$$p(t) = \frac{d}{dt} W(\bar{t}, t). \quad (36)$$

¹ Nella produzione e distribuzione dell'energia elettrica si usa come unità di misura dell'energia il *kilowattora* (kWh): essa è l'energia assorbita da un bipolo in un'ora quando la potenza assorbita è costante ed è uguale a 1kW; $1\text{kWh}=3.6\text{MJ}$.

L'energia elettrica erogata $\hat{W}(\bar{t}, t)$, in un assegnato intervallo di tempo, è l'integrale definito della potenza elettrica erogata $\hat{p} = \hat{p}(t)$.

Prima di proseguire, c'è bisogno di stabilire un'altra convenzione. Con l'espressione “potenza assorbita” (energia assorbita) si intende il prodotto tra la tensione e la corrente del bipolo scelte con la convenzione dell'utilizzatore, mentre con l'espressione “potenza erogata” (energia erogata) si intende il prodotto tra la tensione e la corrente scelte con la convenzione del generatore: queste grandezze, a seconda del bipolo e della dinamica circuitale, possono essere, in generale, positive in alcuni istanti e negative in altri. Invece con l'espressione “il bipolo assorbe energia elettrica” (potenza elettrica) si deve intendere che si sta considerando una condizione di funzionamento, in cui l'energia assorbita (la potenza assorbita) è positiva e con l'espressione “il bipolo eroga energia elettrica” (potenza elettrica) si deve intendere che si sta considerando una condizione di funzionamento, in cui l'energia erogata (la potenza erogata) è positiva.

Un bipolo può erogare energia elettrica in alcuni intervalli di tempo e assorbirla in altri. Ci sono bipoli che non possono mai erogare più energia elettrica di quella assorbita in precedenza e bipoli che, invece, possono. I bipoli (così come tutti gli altri elementi circuitali) vengono classificati in due tipi, i **bipoli attivi** e i **bipoli passivi**, a seconda se possono erogare più energia elettrica di quella assorbita in precedenza o possono erogare una quantità di energia elettrica al più uguale a quella assorbita prima.

Definizione: bipolo passivo e bipolo attivo

Un bipolo si dice **passivo** se, per ogni condizione di funzionamento, non può erogare più energia elettrica di quanto ne abbia assorbita in precedenza.

Se esiste almeno una condizione di funzionamento in cui il bipolo eroga più energia elettrica di quanto ne abbia assorbita in precedenza ², allora esso si dice **attivo**.

4.4 Proprietà energetiche dei bipoli statici

I bipoli statici sono caratterizzati da un legame “istantaneo” tra tensione e corrente: il valore della tensione in un generico istante dipende solo dal valore della corrente in quell'istante e viceversa. Per questi bipoli il segno della potenza assorbita dipende solo dai quadranti del piano $v-i$ per i quali la curva caratteristica passa.

Si considerino i bipoli statici che hanno la curva caratteristica passante solo per il primo e il terzo quadrante del piano $v-i$ (figura 4a; i bipoli sono caratterizzati usando la convenzione dell'utilizzatore). La potenza assorbita da questi bipoli è sempre positiva o al più uguale a zero; essa non può essere mai negativa. È evidente, allora, che per questi bipoli l'energia assorbita in un qualsiasi intervallo di tempo è sempre positiva, cioè

² In questo caso l'energia elettrica erogata dal componente fisico, di cui il bipolo rappresenta un modello, è ottenuta trasformando un'energia di natura diversa da quella elettrica (ad esempio, energia chimica o meccanica), in energia elettrica.

$$W(t^*, t) = \int_{t^*}^t p(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall t > t^* \quad (37)$$

e per ogni t^* . Pertanto essi non possono mai erogare energia e quindi sono passivi. Questi bipoli non possono mai restituire, nemmeno in parte, l'energia elettrica assorbita. Un resistore con resistenza positiva, un diodo a giunzione pn sono esempi di bipoli passivi; l'energia elettrica che essi assorbono viene trasformata interamente in energia termica.

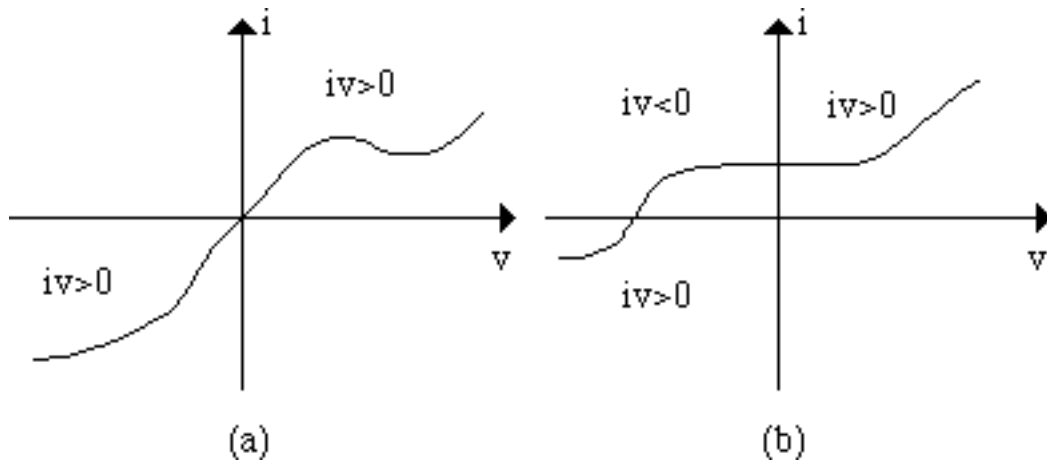


Figura 4 Bipolo passivo (a) e bipolo attivo (b).

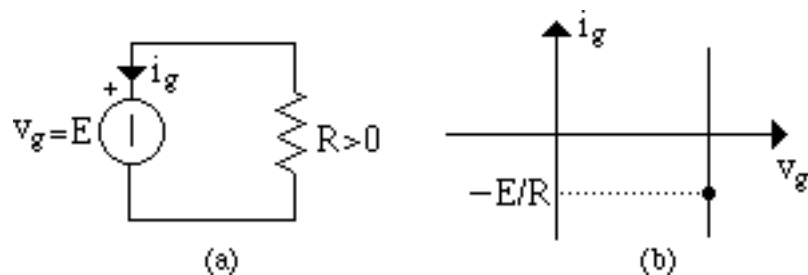


Figura 5 Un circuito semplice costituito da un bipolo attivo e da uno passivo (a) e caratteristica del generatore di tensione (b).

Quando la curva caratteristica passa anche per il secondo e/o quarto quadrante del piano v - i (figura 4b), la potenza assorbita può essere negativa (anche in intervalli di tempo illimitati). Ad esempio, si consideri il circuito illustrato in figura 5. Esso consiste di un generatore ideale di tensione collegato a un resistore lineare con resistenza R positiva. Si assuma, come ipotesi di lavoro, che la tensione E del generatore sia positiva; quindi abbiamo

$$i_g = -\frac{E}{R} < 0. \quad (38)$$

Il punto di lavoro del generatore di tensione si trova nel quarto quadrante del piano v_g - i_g (figura 5), e la potenza assorbita dal generatore $p_g = E i_g$ è in ogni istante negativa; quindi l'energia assorbita in un qualsiasi intervallo di tempo dal generatore di tensione è sempre negativa, cioè

$$\int_{t^*}^t p_g(\tau) d\tau < 0 \quad \forall t > t^* \quad (39)$$

e per ogni t^* . Pertanto si può concludere che il generatore di tensione è un bipolo attivo (si arriverebbe alla stessa conclusione se il generatore indipendente di tensione fosse tempo variante).

Nell'esempio considerato il generatore di tensione produce l'energia elettrica che viene assorbita dal resistore: il generatore di tensione trasforma, ad esempio, energia di natura chimica o di natura meccanica in energia elettrica, invece il resistore trasforma l'energia elettrica assorbita in energia termica.

Osservazione

Un generatore può anche funzionare in modo tale da assorbire potenza. Si consideri, ad esempio, il circuito illustrato in figura 6, e si determinino le potenze assorbite dai due generatori di tensione.

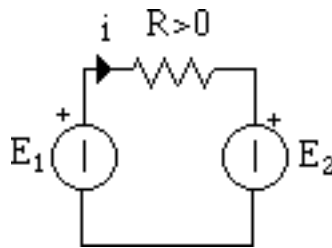


Figura 6

La potenza assorbita dal generatore di tensione “1” è $p_1 = -E_1(E_1 - E_2)/R$ e la potenza assorbita dal generatore “2” è $p_2 = E_2(E_1 - E_2)/R$. Se $E_1 > E_2$, la potenza assorbita dal generatore “1” è negativa, mentre quella assorbita dall'altro generatore “2” è positiva; dunque un generatore eroga energia (il generatore “1”), mentre l'altro l'assorbe (il generatore “2”).

Proprietà energetiche dei bipoli statici

Un bipolo statico con la caratteristica passante, solo per il primo e il terzo quadrante del piano $v-i$ è **passivo**.

Un bipolo statico con la caratteristica passante anche per il secondo e/o quarto quadrante è **attivo**.

Il resistore lineare con resistenza maggiore di zero, il cortocircuito, il circuito aperto, il nullatore, l'interruttore, il diodo a giunzione pn, il diodo zener, il diodo tunnel e il tiristore (con il terminale di “porta” scollegato) sono tutti bipoli passivi. Il generatore ideale e il generatore reale di tensione, e il generatore ideale e il generatore reale di corrente e il noratore sono bipoli attivi.

Definizione: bipolo strettamente passivo

Un bipolo statico passivo si dice **strettamente passivo** se

- la potenza assorbita è sempre maggiore di zero quando la tensione e la corrente sono diverse da zero;
- la potenza assorbita è uguale a zero se e solo se la tensione e la corrente sono contemporaneamente uguali a zero.

Il bipolo corto circuito e il bipolo circuito aperto sono passivi ma non sono strettamente passivi. Il resistore passivo, il diodo a giunzione pn, il diodo zener, il diodo tunnel e il tiristore sono bipoli strettamente passivi. La stretta passività implica che se la potenza assorbita è nulla allora la tensione e la corrente sono entrambe nulle.

Esercizio

Il lettore dimostri che: (a) in un circuito costituito da soli bipoli strettamente passivi tutte le correnti e tutte le tensioni sono nulle; (b) la massima potenza che è in grado di erogare un generatore reale di tensione o di corrente è limitata.

4.5 Proprietà energetiche dei bipoli dinamici lineari tempo-invarianti

Allo scopo di illustrare le caratteristiche energetiche fondamentali dei bipoli dinamici lineari tempo-invarianti si consideri, ad esempio, un condensatore lineare e tempo-invariante.

L'energia $W(t_0, t)$ assorbita nell'intervallo (t_0, t) dal condensatore vale (C è la capacità del condensatore)

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} \left[C v^2(\tau) / 2 \right] d\tau = \frac{1}{2} C v^2(t) - \frac{1}{2} C v^2(t_0). \quad (40)$$

Essa non dipende dalla storia della tensione nell'intervallo (t_0, t) , ma solo dai valori che $v(t)$ assume negli estremi dell'intervallo: dal valore della tensione $v(t_0)$ nell'istante iniziale e dal valore della tensione $v(t)$ nell'istante finale. Quando la tensione nell'istante finale $v(t)$ è uguale a quella nell'istante iniziale $v(t_0)$, allora l'energia assorbita dal condensatore è identicamente nulla, indipendentemente dalla sua forma d'onda. Un bipolo con questa proprietà si dice **conservativo**.

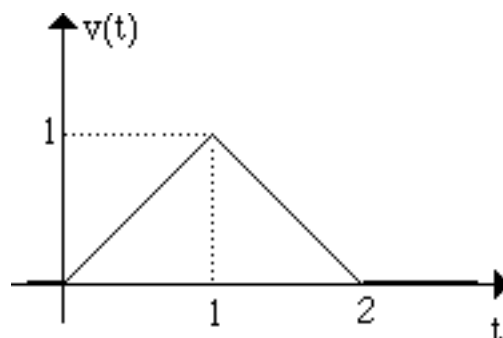


Figura 7

Si consideri, ad esempio, un condensatore con una capacità di $1 \mu\text{F}$ e si assuma che la forma d'onda della tensione del condensatore sia quella illustrata in figura 7. L'energia assorbita dal condensatore nell'intervallo $(0, 2)$ è uguale a zero: nell'intervallo $(0, 1)$ assorbe $0.5 \mu\text{J}$, e nell'intervallo $(1, 2)$ la restituisce interamente al circuito a cui è collegato (l'energia erogata nell'intervallo $(1, 2)$ è uguale a $0.5 \mu\text{J}$).

Analogamente per l'induttore lineare e tempo invariante si ha che, l'energia $W(t_0, t)$ assorbita nell'intervallo (t_0, t) vale (L è l'induttanza dell'induttore)

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} \left[Li^2(\tau)/2 \right] d\tau = \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(t_0). \quad (41)$$

Essa non dipende dalla storia della corrente nell'intervallo (t_0, t) , ma solo dai valori che essa assume negli estremi dell'intervallo: dal valore della corrente $i(t)$ nell'istante iniziale e dal valore della corrente $i(t_0)$ nell'istante finale. Quando la corrente nell'istante finale $i(t)$ è uguale a quella nell'istante iniziale $i(t_0)$, allora l'energia assorbita dall'induttore è identicamente nulla, indipendentemente dalla sua forma d'onda.

In conclusione i condensatori e gli induttori lineari tempo-invarianti sono **bipoli conservativi**: l'energia che assorbono viene immagazzinata. L'energia immagazzinata può essere restituita in parte o tutta al circuito in cui sono inseriti.

Il condensatore e l'induttore sono bipoli passivi o sono bipoli attivi?

Si consideri dapprima il condensatore con capacità positiva, $C > 0$. L'energia $W(t_0, t_1)$ assorbita dal condensatore nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) dipende sia dalla tensione iniziale $v(t_0)$ che dalla tensione finale $v(t_1)$. Fissata la tensione finale $v(t_1) = V$ (siccome è $C > 0$), il valore massimo dell'energia assorbita $W(t_0, t_1)$ si ottiene quando la tensione iniziale è nulla. Questo massimo è uguale a $(CV^2)/2$ ed esso rappresenta la massima energia che il condensatore è in grado di assorbire quando la tensione finale è V . Se, invece della tensione finale si fissa la tensione iniziale $v(t_0) = V$ (siccome è $C > 0$) il valore minimo di $W(t_0, t_1)$ si ottiene quando la tensione finale è nulla. Questo minimo è uguale a $-(CV^2)/2$, e rappresenta, in valore assoluto, la massima energia che il condensatore può erogare quando la tensione iniziale è V . Pertanto se l'energia immagazzinata nel condensatore al generico istante T è $(CV^2)/2$, l'energia che il condensatore può erogare per $t > T$ non può essere più grande di $(CV^2)/2$, e quindi non può essere più grande dell'energia che è stata assorbita per $t < T$. Di conseguenza il condensatore con $C > 0$ è un bipolo passivo. Se la capacità fosse minore di zero (sempre con la convenzione dell'utilizzatore), allora il bipolo sarebbe attivo.

Per l'energia elettrica assorbita dal condensatore passivo vale la proprietà

$$W(t, t^*) = \int_{t^*}^t p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} Cv^2(t) \geq 0 \quad \forall t > t^*, \quad (42)$$

dove t^* è un istante in cui la tensione del condensatore è uguale a zero.

Risultati analoghi valgono per l'induttore: se $L > 0$ l'induttore è passivo (il lettore lo dimostri). Per l'energia elettrica assorbita dall'induttore passivo vale la proprietà

$$W(t, t^*) = \int_{t^*}^t p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} Li^2(t) \geq 0 \quad \forall t > t^*, \quad (43)$$

dove t^* è un istante in cui la corrente nell'induttore è uguale a zero.

Le (40) e (41) non valgono se il condensatore e l'induttore sono tempo-varianti (cioè quando la capacità e l'induttanza variano nel tempo). In questi casi si ha

$$v \frac{d}{dt} [C(t)v] \neq \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C(t)v^2 \right), \quad (44)$$

$$i \frac{d}{dt} [L(t)i] \neq \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L(t)i^2 \right). \quad (45)$$

In generale i condensatori e gli induttori tempo-varianti non sono passivi.

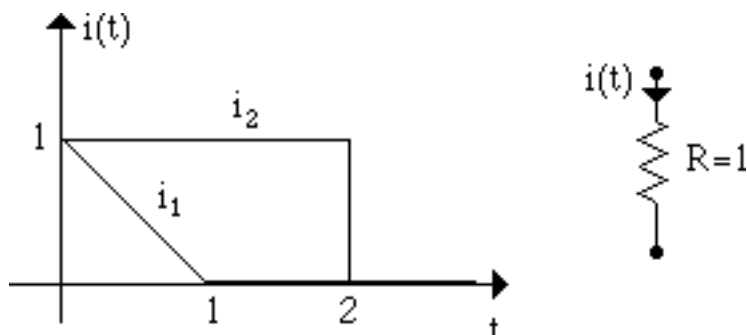


Figura 8

Osservazione

I bipoli statici non sono conservativi. In essi l'energia assorbita in un dato intervallo di tempo (t_0, t) dipende dalla intera storia della corrente (o della tensione) in quell'intervallo di tempo. Si consideri, ad esempio, l'energia assorbita da un resistore lineare con resistenza $R=1$, nell'intervallo di tempo $(0, 2)$, e la si valuti per le due forme d'onda della corrente illustrate in figura 8. Pur avendo le due forme d'onda gli stessi valori iniziali e finali, si ha $\int_0^2 i_1^2(\tau) d\tau \neq \int_0^2 i_2^2(\tau) d\tau$.

L'energia che assorbe un bipolo statico passivo, a differenza di quanto accade in un bipolo conservativo, è trasformata interamente in energia termica, e quindi, non può mai essere restituita (nemmeno in parte) sotto forma di energia elettrica in "modo spontaneo" (violerebbe il secondo principio della termodinamica). Per questo motivo i bipoli statici passivi vengono detti **bipoli dissipativi**.

Esempio

Si consideri il circuito illustrato in figura 9. Il generatore di corrente fornisce una corrente costante diversa da zero nell'intervallo di tempo $(0, 1)$; la forma d'onda della corrente imposta è illustrata in figura 9a. La tensione sul condensatore nell'istante $t = 0$ è nulla e l'interruttore resta aperto fino a $t=1$; nell'istante $t=1$ l'interruttore si chiude. Nell'intervallo di tempo $(0, 1)$, siccome l'interruttore è aperto, si ha $i(t)=j(t)$, e quindi

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t j(\tau) d\tau; \quad (46)$$

pertanto la tensione sul condensatore vale

$$v(t) = t \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (47)$$

In questo intervallo di tempo il generatore di corrente eroga potenza e l'energia assorbita dal condensatore è uguale 0.5 mJ: all'istante $t=1$ questa energia è tutta immagazzinata nel condensatore

(sotto forma di energia interna del campo elettrico e di energia interna di polarizzazione del dielettrico).

Per $t > 1$ il generatore di corrente è spento, l'interruttore è chiuso, e quindi $i = -v/R = -v$. Pertanto si ha per la tensione v

$$\frac{dv}{dt} + 10^3 v = 0, \quad (48)$$

$$v(t=1) = 1. \quad (49)$$

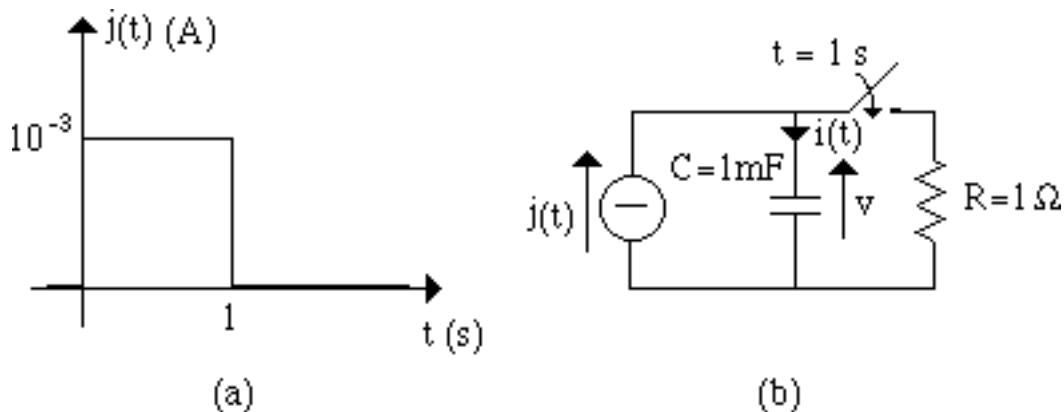


Figura 9 Carica e scarica di un condensatore.

La soluzione dell'equazione (48) con la condizione iniziale (49) è

$$v(t) = e^{-(t-1)/10^{-3}} \quad (t \geq 1). \quad (50)$$

Per $t > 1$ nel circuito, pur non essendovi generatori accesi, fluisce una corrente, a causa dell'energia che è stata immagazzinata nel condensatore per $t < 1$: l'energia, che nell'istante $t=1$ è immagazzinata nel condensatore, viene dissipata interamente nel resistore nell'intervallo di tempo $(1, +\infty)$.

4.6 Bipoli dinamici non lineari tempo-invarianti

Si consideri, ora, un condensatore non lineare e tempo-invariante, controllato in carica e sia $v=h(q)$ la relazione algebrica tra la carica e la tensione (in questo caso tempo invarianza significa che la funzione $h=h(q)$ non dipende esplicitamente dal tempo). L'energia assorbita $W(t_0, t)$ nell'intervallo di tempo (t_0, t) vale

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} \{W_e[q(\tau)]\} d\tau = W_e[q(t)] - W_e[q(t_0)], \quad (51)$$

dove $W_e(q)$ è una primitiva della funzione $h=h(q)$, cioè

$$\frac{dW_e}{dq} = h(q). \quad (52)$$

Come nel caso lineare, se la caratteristica del condensatore è tempo invariante, l'energia assorbita dal condensatore non lineare nell'intervallo di tempo (t_0, t) dipende unicamente dal valore iniziale $q(t_0)$ e

dal valore finale $q(t)$ della carica e non dalla storia intermedia. Pertanto anche un condensatore non lineare e tempo-invariante è un bipolo conservativo.

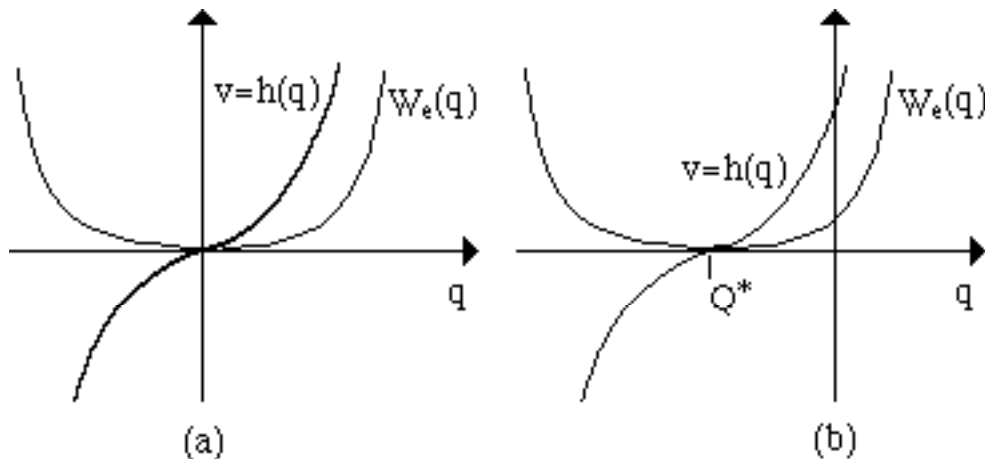


Figura 10 Esempi di caratteristiche non lineari.

La primitiva $W_e = W_e(q)$ della funzione $h=h(q)$ è determinata univocamente a meno di una costante additiva. Se la curva caratteristica $h=h(q)$ del condensatore è del tipo illustrato in figura 10, cioè solo un tratto finito di essa passa per il secondo e/o quarto quadrante, allora è sempre possibile determinare una primitiva tale che

$$W_e(q) \geq 0. \quad (53)$$

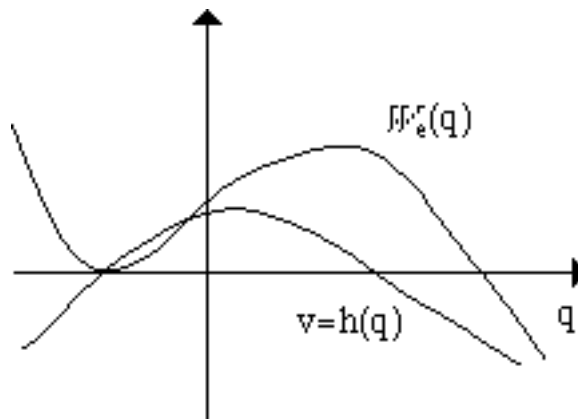


Figura 11

Se invece la curva caratteristica $h=h(q)$ del condensatore è del tipo illustrato in figura 11, cioè un tratto non limitato di essa passa per il secondo e/o quarto quadrante, allora non esiste nessuna primitiva di $h=h(q)$ che verifica la (53).

Si assuma che la (53) sia verificata e si indichi con Q^* il valore della carica per cui $W_e = 0$. Potendo esprimere l'energia elettrica assorbita dal condensatore nell'intervallo (t_0, t_1) come

$$W(t_0, t_1) = W_e[q(t_1)] - W_e[q(t_0)], \quad (54)$$

ed essendo $W_e(q) \geq 0$, si ha che: (a) $W_e(Q) > 0$ rappresenta la massima energia che il condensatore può assorbire quando la carica finale è Q (la carica iniziale è Q^*); (b) $W_e(Q) > 0$ rappresenta la massima energia che il condensatore è in grado di erogare quando la carica iniziale è Q (e la carica finale è Q^*). Pertanto se solo un tratto finito della caratteristica del condensatore passa attraverso il

secondo e/o il quarto quadrante del piano q-v, allora il condensatore non può erogare più energia elettrica di quanta ne abbia assorbita in precedenza, e quindi è passivo; invece il condensatore con la caratteristica illustrata in figura 11 (sempre con la convenzione dell'utilizzatore), è attivo.

Così come nel caso lineare, alla grandezza $W_e = W_e(q)$ si dà il nome di **energia immagazzinata nel condensatore**. Per il condensatore con la caratteristica illustrata in figura 10a $W_e(q)$ è uguale all'energia elettrica che bisogna fornire al condensatore, a partire dalla condizione iniziale $q=0$, per realizzare la configurazione di campo elettrico corrispondente al valore di tensione $v=v(q)$. Invece per il condensatore con la caratteristica illustrata in figura 10b, $W_e(q)$ è uguale all'energia elettrica che bisogna fornire al condensatore a partire dalla carica iniziale Q^* .

Pertanto, per un condensatore passivo non lineare esiste un istante di tempo t^* (finito) tale che è verificata la proprietà

$$w(t, t^*) = \int_{t^*}^t p(\tau) d\tau = W_e[q(t)] \geq 0 \quad \forall t > t^* \quad (55)$$

dove t^* è l'istante in cui $q=Q^*$.

Il caso dell'induttore non lineare e tempo-invariante (in assenza di fenomeni isteretici) è completamente duale.

Alla luce dei risultati fin qui descritti, il concetto di passività potrebbe essere riformulato, in questo modo: un bipolo è **passivo** se per qualsiasi condizione di funzionamento esiste almeno un istante di tempo t^* ³ (finito) tale che

$$\int_{t^*}^t p(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall t > t^* \quad (56)$$

Se esiste almeno una condizione di funzionamento per la quale la relazione (56) non è verificata (cioè non esiste nessun istante di tempo t^* per cui la (56) è verificata), allora il bipolo è **attivo**.

La relazione (56) non implica che non vi possano essere degli intervalli di tempo (nell'intervallo (t^*, t)) in cui l'energia elettrica assorbita dal bipolo non possa essere negativa. Possono esistere degli intervalli di tempo in cui il bipolo eroga energia elettrica, solo che essa non può mai essere di più di quella assorbita in precedenza. Ad esempio, l'energia assorbita nell'intervallo (t_1, t) può essere negativa, però in valore assoluto non può essere più grande dell'energia assorbita nell'intervallo (t^*, t_1) .

È facile convincersi che questa nuova formulazione del concetto di passività è del tutto equivalente a quella precedente, fatta eccezione che per un caso. Infatti secondo la (56) sarebbe passivo anche un bipolo che in un intervallo (\hat{t}, t^*) , precedente a (t^*, t) , ha sempre erogato energia elettrica. Comunque questo caso non si verifica mai per i bipoli fondamentali che vengono presi in considerazione in queste lezioni.

³ Per il componente circuitale, di cui il bipolo rappresenta un modello, t^* potrebbe rappresentare "l'istante" in cui esso è stato costruito, o un istante successivo opportuno (potrebbe anche accadere che $t^* \rightarrow -\infty$). In letteratura la passività è, spesso, espressa attraverso la condizione $\int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall t$.