

CAPITOLO 1

IL MODELLO CIRCUITALE

1.1 Introduzione

I *circuiti elettrici* sono sistemi fisici del tipo esemplificato schematicamente in figura 1. Essi sono costituiti da un insieme di “oggetti”, detti *componenti* (numerati in figura da 1 a 7). Ogni componente è delimitato da una superficie chiusa, detta *superficie limite*, dalla quale fuoriescono due o più conduttori, detti *terminali*. I terminali sono realizzati con conduttori di elevata conducibilità elettrica e possono essere quasi sempre considerati *filiformi* (la loro lunghezza è molto maggiore del diametro). I componenti sono connessi tra loro tramite i terminali per mezzo di opportune “giunzioni” detti *nodi*¹.

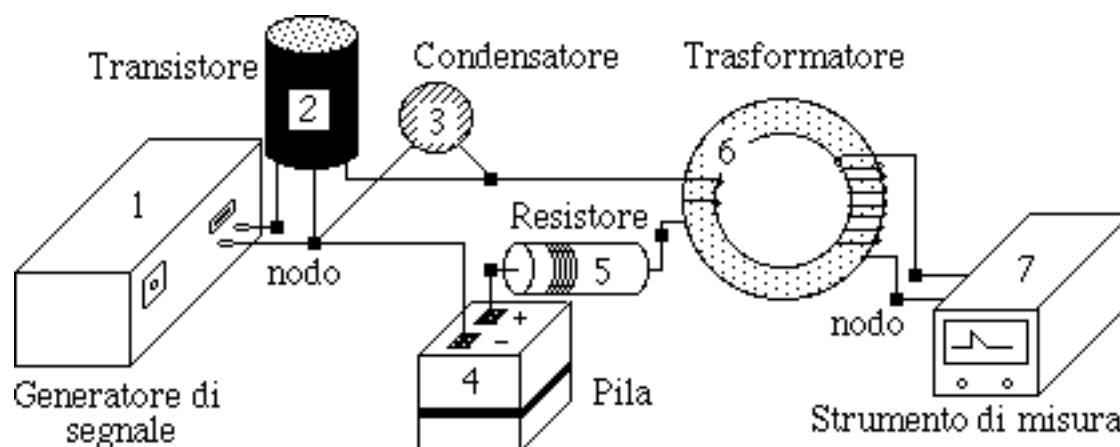


Figura 1 Esempio di circuito elettrico.

Nell'esempio proposto in figura 1, esistono tre tipi di componenti. Quelli numerati 1, 3, 4, 5, 7 hanno due soli terminali e sono, per questo motivo, detti componenti a *due terminali* (gli esempi più comuni sono una lampadina, una stufa elettrica, una batteria, una dinamo, un resistore, un condensatore, un induttore, un diodo a giunzione pn, un generatore di segnale, un amperometro, un voltmetro, un oscilloscopio). Il componente 2 ha, invece, tre terminali ed è quindi detto componente a *tre terminali* (l'esempio più comune è il transistore; ve ne sono di diversi tipi). Il componente 6 ha

¹ Nella realizzazione di un circuito, spesso, è necessario utilizzare ulteriori conduttori filiformi (conduttori di collegamento) per potere connettere i componenti così come il progetto richiede.

quattro terminali, raggruppati a due a due (l'esempio più comune è il trasformatore). Più in generale, in un circuito possono esistere componenti con un numero arbitrario di terminali (si pensi, a esempio, a un circuito integrato oppure a una “scheda elettronica”). A essi si dà il nome di componenti a n terminali. Il singolo componente realizza “funzioni elementari” che dipendono dalla sua struttura fisica, mentre il circuito è progettato per realizzare funzioni più complesse. Esempi tipici di circuiti sono: una rete per il trasporto e la distribuzione di energia elettrica, un circuito alimentatore, un circuito amplificatore, un modulatore, un circuito oscillante, un demodulatore, un filtro, una memoria, un microprocessore.

In un circuito elettrico il funzionamento di ogni singolo componente (e quindi dell'intero circuito) è, in ogni istante, determinato dalla interazione tra il componente stesso e il resto della rete. In altre parole, si può dire che esso è il frutto della interazione tra due diverse esigenze: che il componente si comporti in modo compatibile con la sua specifica natura e che tale comportamento sia a sua volta compatibile con quello di tutti gli altri componenti presenti nella rete.

I circuiti sono progettati e realizzati in modo tale da essere verificata con eccellente approssimazione (in situazione di funzionamento “nominale”) le seguenti condizioni:

- (α) Il funzionamento del singolo componente è descritto adeguatamente e univocamente dalle correnti elettriche che circolano nei suoi terminali e dalle tensioni elettriche tra i suoi terminali: le relazioni tra le tensioni e le correnti del componente dipendono unicamente dalla sua costituzione fisica e non dal circuito in cui il componente è inserito.
- (β) Le interazioni tra i componenti del circuito avvengono esclusivamente attraverso i terminali, cioè attraverso le correnti e le tensioni, e le leggi che le regolano dipendono esclusivamente dal modo in cui i componenti sono collegati e non dalla loro specifica natura.

Le *relazioni costitutive* descrivono il funzionamento dei singoli componenti, e le *leggi di Kirchhoff* ne regolano l'interazione. Le equazioni che ne derivano sono le *equazioni circuitali*. Esse sono l'oggetto di studio di questo libro.

Osservazioni

Il termine *circuito elettrico*, quindi, non sta ad indicare soltanto l'oggetto fisico cui si riferisce, ma qualcosa di più: con esso si indica un sistema elettromagnetico che funziona in modo da verificare le condizioni (α) e (β). In seguito mostreremo, tramite alcuni esempi, come uno stesso sistema possa verificare tali proprietà oppure no, a seconda della velocità di variazione temporale delle sorgenti del campo elettromagnetico, e cioè dei generatori.

Le limitazioni (α) e (β) sono di fondamentale importanza dal punto di vista tecnologico. La condizione (α) assicura che le “caratteristiche” di un componente, in condizione di corretto funzionamento, dipendono esclusivamente dalla sua costituzione fisica e non dal circuito in cui è inserito. Ciò ne consente la costruzione indipendentemente dall'uso che poi se ne farà. Si provi a immaginare come sarebbe complicato costruire un circuito, se le leggi che governano il funzionamento dei componenti dipendessero sensibilmente dal circuito in cui sono inseriti.

La condizione (β) assicura che il funzionamento del circuito dipende solo dal modo in cui i componenti sono collegati, e non dalle loro posizioni (spaziali) relative. Questo è un prerequisito

fondamentale per la robustezza di un circuito (provate a immaginare cosa accadrebbe se il funzionamento di un circuito della memoria di un calcolatore elettronico dipendesse sensibilmente dalla distanza tra i singoli componenti).

Durante il funzionamento di un circuito, lo spazio (sia interno che esterno a ciascun componente e a ciascun terminale), è sede di campi elettrici e magnetici, di correnti elettriche, nonché di distribuzioni di cariche. La dinamica di queste grandezze è descritta dal modello costituito dalle leggi di Maxwell e dalle relazioni costitutive dei mezzi materiali.

Sebbene, una descrizione “esatta” del funzionamento di un circuito richieda, almeno in principio, la soluzione delle equazioni del campo elettromagnetico, un modello approssimato, notevolmente semplificato e al contempo sufficientemente adeguato, è disponibile. Esso è il *modello circuitale*, ed è costituito dall'insieme delle leggi che regolano la dinamica delle correnti e delle tensioni, e cioè le *leggi di Kirchhoff* e le *relazioni costitutive* dei componenti. Queste equazioni possono essere dedotte dalle leggi di Maxwell e dalle relazioni costitutive dei materiali, assumendo alcune limitazioni sul funzionamento del sistema elettromagnetico, limitazioni che, come vedremo, sono caratteristiche peculiari dei circuiti.

Per descrivere in modo non ambiguo queste limitazioni, cominciamo col distinguere le diverse regioni in cui lo spazio fisico può essere suddiviso per effetto della presenza del circuito. Siano:

- $\Sigma_1^c, \Sigma_2^c, \dots, \Sigma_N^c$ le superfici chiuse -*superfici limite* - che delimitano i diversi componenti;
- $\Sigma_1^t, \Sigma_2^t, \dots, \Sigma_r^t$ le superfici chiuse e “tubolari” che delimitano i conduttori terminali;
- $\Omega_1^c, \Omega_2^c, \dots, \Omega_N^c$ le regioni interne alle *superfici limite* $\Sigma_1^c, \Sigma_2^c, \dots, \Sigma_N^c$;
- $\Omega_1^t, \Omega_2^t, \dots, \Omega_r^t$ le regioni interne alle superfici tubolari $\Sigma_1^t, \Sigma_2^t, \dots, \Sigma_r^t$;
- Ω_0 una parte limitata del restante spazio, che avvolga tutto il circuito (per definizione esterno a esso), costituita da materiale isolante.

Indichiamo con Ω_{ext} l'unione delle regioni $\Omega_1^t, \Omega_2^t, \dots, \Omega_r^t$ e Ω_0 e con Ω_{int} l'unione delle regioni $\Omega_1^c, \Omega_2^c, \dots, \Omega_{N-1}^c$ e Ω_N^c : Ω_{ext} rappresenta la regione dello spazio esterna alle superfici limite, quindi la regione esterna ai componenti. Il campo di densità di corrente di conduzione è nullo nella regione Ω_0 , perché il mezzo materiale che riempie Ω_0 è un isolante ($\gamma=0$). Il campo elettrico è nullo nelle regioni $\Omega_1^t, \Omega_2^t, \dots, \Omega_r^t$, perché, per ipotesi, i terminali sono conduttori ideali ($\gamma=\infty$). Ricordiamo che il campo elettrico in un conduttore ideale deve essere necessariamente nullo, altrimenti si avrebbe un campo di densità di corrente illimitato.

1.2 Interazione tra i componenti: un modello di campo approssimato

Le limitazioni da imporre, affinché la condizione (β) sia verificata, e quindi l'interazione tra i componenti sia descrivibile attraverso il modello circuitale, riguardano essenzialmente il campo elettrico e il campo di corrente nella regione Ω_{ext} e sono le seguenti:

- (I) Il flusso del campo di densità di corrente di conduzione attraverso qualsiasi superficie chiusa che non tagli alcuna delle superfici limite $\Sigma_1^c, \Sigma_2^c, \dots, \Sigma_N^c$, deve essere “trascurabile” in ogni istante.
- (II) La circuitazione del campo elettrico lungo qualsiasi linea chiusa Γ che non fori le superfici limite $\Sigma_1^c, \Sigma_2^c, \dots, \Sigma_N^c$, deve essere “trascurabile” in ogni istante.

Diciamo subito che la prima condizione è la generalizzazione della *legge di Kirchhoff per le correnti* e la seconda è la generalizzazione della *legge di Kirchhoff per le tensioni*. Naturalmente, per attribuire un significato non ambiguo ad entrambe le condizioni, occorre specificare il significato del termine “trascurabile” che in esse figura.

Per quel che riguarda la prima condizione cominciamo col notare che se la superficie chiusa Σ non taglia nessun conduttore terminale, allora essa è verificata esattamente, perché il campo $\mathbf{J}$ (stiamo omettendo il pedice “lib”), è identicamente nullo in Ω_0 (ricordiamo che Σ non può tagliare nessuna superficie limite). Pertanto gli unici casi significativi sono quelli in cui viene tagliato almeno un conduttore terminale. È facile convincersi, inoltre che, se Σ taglia un conduttore terminale, allora necessariamente deve tagliare almeno un altro terminale, oppure due volte lo stesso terminale in due sezioni diverse (Σ non può tagliare alcuna superficie limite e stiamo escludendo che vi siano terminali scollegati).

Si consideri, ad esempio, una superficie chiusa orientata Σ che tagli due conduttori terminali, Ω_1^t e Ω_2^t in figura 2a. Si indichino con S_1 e S_2 le parti della superficie Σ passanti per Ω_1^t e Ω_2^t , rispettivamente. Quando si dice che il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la superficie chiusa Σ deve essere trascurabile, si vuole dire che esso deve essere trascurabile rispetto al flusso di $\mathbf{J}$ attraverso ciascuna delle superfici S_1 e S_2 , cioè deve essere

$$\left| \oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \right| = \left| \iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \right| \ll \left| \iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \right| \equiv \left| \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \right|. \quad (1)$$

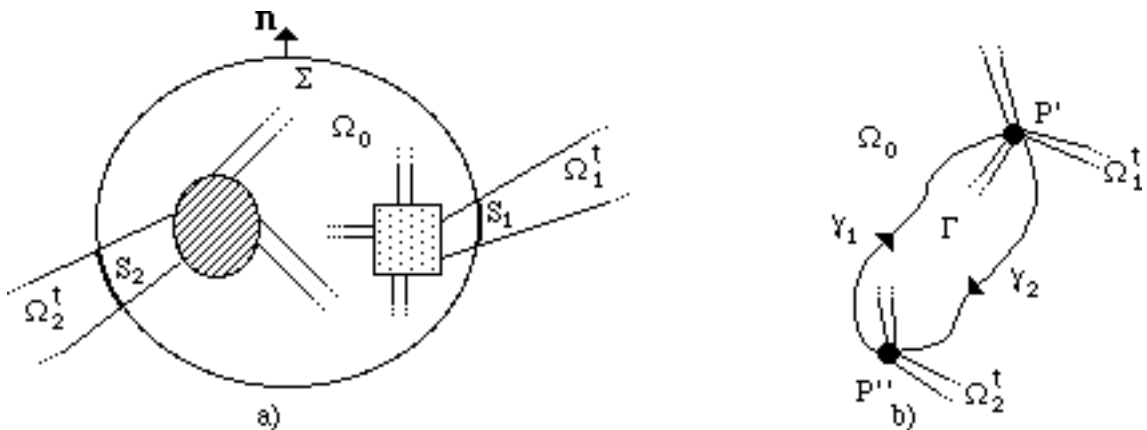


Figura 2 Superficie di riferimento per la (1) (a) e linee di riferimento per la (2) (b).

Analogamente si procede per la circuitazione di $\mathbf{E}$ lungo la linea Γ . È innanzi tutto evidente che, se la linea chiusa Γ appartiene interamente a un conduttore terminale, allora la (II) è verificata esattamente, perché il campo $\mathbf{E}$ è identicamente nullo (Γ non può forare nessuna superficie limite). Pertanto gli unici casi significativi sono quelli in cui Γ passa, almeno in parte, per Ω_0 . Si consideri una linea chiusa e orientata Γ passante in parte per Ω_0 e in parte attraverso le giunzioni di alcuni

conduttori terminali e che non fori nessuna superficie limite, e la si suddivide, ad esempio, in almeno due tratti orientati γ_1 e γ_2 , così come viene descritto in figura 2b. Quando diciamo che la circuitazione di $\mathbf{E}$ lungo la linea chiusa Γ deve essere trascurabile, vogliamo dire che essa deve essere trascurabile rispetto alle tensioni di $\mathbf{E}$ lungo entrambi i tratti γ_1 e γ_2 , cioè deve essere

$$\left| \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right| = \left| \int_{\gamma_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right| \ll \left| \int_{\gamma_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right| \cong \left| \int_{\gamma_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right|. \quad (2)$$

Al limite, nel regime stazionario abbiamo

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (3)$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (4)$$

e le condizioni (I) e (II) sono verificate esattamente. Quando i campi variano nel tempo le relazioni (1) e (2) e quindi le condizioni (I) e (II) sono senz'altro verificate se valgono, rispettivamente, le condizioni (le superfici e linee sono ferme)

$$\left| \frac{d}{dt} \oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \right| \ll \left| \iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right| \cong \left| \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right|, \quad (5)$$

$$\left| \frac{d}{dt} \iint_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right| \ll \left| \int_{\gamma_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right| \cong \left| \int_{\gamma_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right|, \quad (6)$$

dove S_{Γ} è una qualsiasi superficie che ha come orlo la linea Γ . La (3) è stata ottenuta applicando la legge di Ampère-Maxwell e la (4) la legge di Faraday-Neumann.

La condizione (5) è verificata se il fenomeno dell'induzione magnetoelettrica è trascurabile, cioè se sono trascurabili gli effetti della corrente di spostamento nella legge di Ampère-Maxwell rispetto alle correnti di conduzione; la condizione (6) significa che deve essere trascurabile il fenomeno dell'induzione elettromagnetica.

Si dimostra che, affinché entrambe le condizioni (5) e (6) siano verificate, le variazioni temporali dei campi devono essere sufficientemente lente, tanto lente da rendere trascurabili i fenomeni di propagazione elettromagnetica nella regione di spazio Ω_{ext} ². Comunque questa è solo una condizione necessaria. Infatti, in molti sistemi elettromagnetici può essere trascurabile il fenomeno della propagazione, pur non essendo trascurabile il fenomeno dell'induzione elettromagnetica (è il caso, ad esempio, degli induttori e delle macchine elettriche) e in altri sistemi può essere ancora trascurabile il fenomeno della propagazione pur non essendo trascurabile quello dell'induzione magnetoelettrica (è il caso, ad esempio, dei condensatori). Ciò è dovuto al fatto che in un dato sistema elettromagnetico non è detto che entrambi i fenomeni di induzione siano sempre importanti. Pertanto, affinché le (5) e (6) valgano contemporaneamente, deve essere trascurabile nella regione Ω_{ext} non solo il fenomeno della propagazione, ma tutti gli effetti dovuti al solo fenomeno di induzione elettromagnetica o al solo fenomeno di induzione magnetoelettrica.

Ora è chiara la ragione per la quale abbiamo limitato la (I) alle sole superfici Σ che non tagliassero le superfici limite e la (II) alle sole linee γ che non le forassero. Ad esempio, se Σ

² È interessante notare che la limitazione (I) e quindi la (5) sono verificate anche quando il fenomeno di propagazione non è affatto trascurabile, come ad esempio in un'antenna dipolare. Ciò è dovuto al fatto che pur non essendo trascurabile il fenomeno dell'induzione magnetoelettrica, a causa delle particolari simmetrie, il flusso di $\mathbf{D}$ attraverso qualsiasi superficie chiusa che non tagli l'antenna è istante per istante uguale a zero.

tagliasse la superficie limite di un condensatore, certamente la (I) non sarebbe valida, e se la linea γ forasse la superficie limite di un induttore nemmeno la (II) sarebbe più valida (ritorneremo in seguito su questa questione).

Si dimostra che è lecito ignorare gli effetti dovuti alla propagazione, se, come abbiamo già ricordato nel precedente capitolo, la frequenza caratteristica del campo f_c è molto più piccola della frequenza caratteristica $f_{em} = c/L_c$, dove c è la velocità della luce nella regione Ω_{ext} e L_c è la dimensione caratteristica del circuito, ovvero se la dimensione caratteristica del circuito è molto minore della lunghezza d'onda caratteristica del campo elettromagnetico, $L_c \ll \lambda_c = c/f_c$.

Per potere ignorare, invece, gli effetti dovuti alla sola induzione elettromagnetica o alla sola induzione magnetoelettrica, bisogna garantire che siano trascurabili gli accoppiamenti di tipo induttivo tra i componenti (bisogna che siano trascurabili anche gli accoppiamenti induttivi con i conduttori di collegamento). Non esistono criteri generali che assicurino che questi effetti siano trascurabili. Bisogna necessariamente analizzare, utilizzando i modelli quasi-stazionari, caso per caso gli effetti dovuti a questi accoppiamenti. Comunque, possiamo assumere che tutti i circuiti e i componenti circuitali sono progettati in maniera tale che gli effetti degli accoppiamenti induttivi e della propagazione siano sempre trascurabili quando i circuiti e i componenti funzionano nelle condizioni nominali.

Osservazione

Per quanto sia piccola la derivata temporale del flusso del campo magnetico, la condizione (6) (e quindi la limitazione (II)) può non essere verificata per *ogni* scelta possibile di Γ . Se, ad esempio, si scegliesse il tratto γ_2 (vedi figura 2b) in modo tale che una sua parte sia costituita da N spire perfettamente sovrapposte, la differenza tra le due tensioni non sarebbe più trascurabile per N abbastanza grande. Nella teoria dei circuiti è sufficiente richiedere che la (6) (e quindi la (II)) siano verificate per cammini che escludono percorsi di questo tipo, cioè gli ordini di grandezza delle lunghezze dei singoli tratti e dell'intera curva chiusa devono essere confrontabili tra loro. Ci riferiremo a cammini di questo tipo con l'espressione “cammini ragionevoli”.

Da tutte queste considerazioni, discende che, i circuiti e i componenti sono progettati e realizzati in modo tale che, in condizioni di funzionamento nominale siano verificate le condizioni (I) e (II) per il campo elettromagnetico nella regione Ω_{ext} pur essendo variabile nel tempo. Allora nella regione Ω_{ext} di un circuito è

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \cong 0 \quad (7)$$

per ogni superficie chiusa orientata Σ che non tagli nessuna delle superfici limiti $\Sigma_1^c, \Sigma_2^c, \dots, \Sigma_N^c$ e

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl \cong 0 \quad (8)$$

per ogni linea chiusa orientata Γ che non fori nessuna delle superfici limite $\Sigma_1^c, \Sigma_2^c, \dots, \Sigma_N^c$. Si noti che queste equazioni sono verificate esattamente nel limite stazionario.

Le relazioni (7) e (8) sono le leggi del campo stazionario di corrente in forma integrale nella regione Ω_{ext} . Siccome Ω_{ext} non è né a connessione lineare semplice e né a connessione superficiale semplice, le (7) e (8) non sono, rispettivamente, equivalenti a

$$\text{div} \mathbf{J} \cong 0 \quad \text{in} \quad \Omega_{\text{ext}}, \quad (9)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} \cong \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega_{\text{ext}}, \quad (10)$$

ma contengono vincoli ulteriori. Per ottenere la (7) dalla (9) bisogna imporre che la (7) sia valida almeno per le superfici limite di tutti i componenti e per ottenere la (8) dalla (10) bisogna imporre che la (8) sia valida almeno per tutte le curve chiuse che si sviluppano sulle superfici limite di tutti i componenti. Pertanto la fondatezza delle condizioni (5) e (6), e quindi delle (7) e (8) anche se riguardano superfici e linee esterne alle superfici limite, dipende, ovviamente, anche da ciò che accade all'interno delle superfici limite, e quindi dalla costituzione fisica dei singoli componenti. Comunque ritorneremo su questa questione più avanti, quando verrà analizzato il funzionamento di alcuni componenti canonici.

Le relazioni (7) e (8), da cui derivano, come tra poco vedremo, le leggi di Kirchhoff, garantiscono che l'interazione tra i componenti dipende solo da come essi sono collegati e non dalla loro costituzione fisica, e quindi assicurano che la condizione (β) sia verificata. Tuttavia, esse non bastano da sole, come più avanti vedremo, ad assicurare che sia verificata anche l'altra condizione, quella che abbiamo chiamato (α).

1.3 Corrente elettrica nel terminale e tensione elettrica tra due terminali

Le relazioni (7) e (8) descrivono le interazioni tra i diversi componenti del circuito, e come tra poco vedremo, le leggi di Kirchhoff sono una loro diretta conseguenza. A partire da esse è possibile definire, senza nessuna ambiguità, la *corrente nel generico terminale* e la *tensione tra due generici terminali* di un componente.

Sia S una generica sezione di un terminale di un componente. Si vede subito che il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso S è, con buona approssimazione, indipendente dalla particolare sezione scelta, (basta applicare la (7) a una superficie chiusa che interseca il terminale in due sezioni diverse). Ciò è vero se sono trascurabili gli effetti delle cariche distribuite lungo i terminali, il che è ampiamente verificato se il terminale è abbastanza sottile e la sua lunghezza è molto più piccola della lunghezza d'onda caratteristica. Da ciò discende la possibilità di associare a ciascun terminale, in modo univoco, la corrente elettrica $i = i(t)$ che in esso circola,

$$i = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (11)$$

Per calcolare il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la generica sezione del terminale bisogna orientare la superficie aperta S . Due sono le possibili scelte per il verso della normale $\mathbf{n}$: indichiamo con i_u la corrente ottenuta scegliendo $\mathbf{n}$ uscente dalla superficie limite del componente e con i_e la corrente ottenuta scegliendo $\mathbf{n}$ entrante nella superficie limite. È immediato che $i_u = -i_e$. Le frecce che accompagnano i simboli i_u e i_e in figura 3 stanno a indicare proprio i due possibili versi della normale $\mathbf{n}$. A esse

diamo il nome di *referimenti per il verso della corrente*. Quando il riferimento per il verso della corrente è una freccia entrante nella (uscende dalla) superficie limite del componente allora la normale $\mathbf{n}$ nell'integrale (11) è entrante in (uscende da) essa.

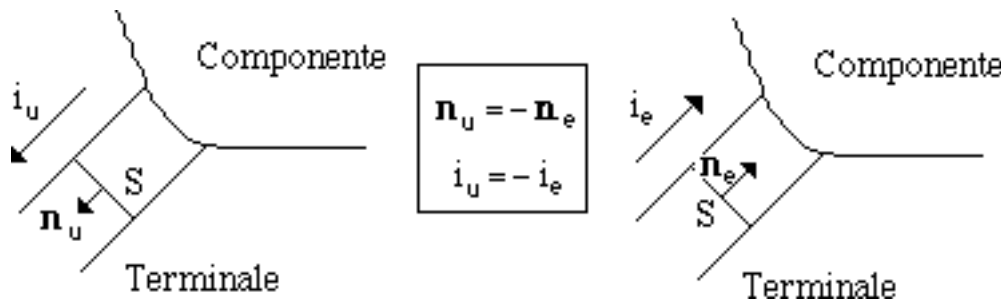


Figura 3 La corrente nel terminale è indipendente dalla particolare sezione. Sono possibili due scelte per i riferimenti del verso della corrente.

Si consideri, ora, la tensione elettrica

$$v = \int_{P_i \gamma P_j} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (12)$$

dove P_i e P_j sono due punti appartenenti ai due terminali (essi possono appartenere allo stesso componente o a componenti diversi) e γ è una linea che li congiunge. Per la condizione (8) v è indipendente dal cammino γ , purché non fori nessuna superficie limite. Si noti anche che v non dipende nemmeno dai particolari punti P_i e P_j scelti nei rispettivi terminali, perché il campo elettrico nei conduttori terminali (supposti ideali) è nullo. Pertanto v è la tensione elettrica tra il terminale “i” e il terminale “j”. Le frecce che accompagnano i simboli v e v^* stanno a indicare le due possibili orientazioni di γ . A esse diamo il nome di *referimenti per il verso della tensione*: il riferimento per il verso della tensione è una freccia che punta verso il terminale “i” (terminale “j”) se il verso di γ va dal terminale “i” al terminale “j” (dal terminale “j” al terminale “i”); la tensione con il riferimento che punta verso il terminale “i” è uguale all'opposto di quella con il riferimento che punta verso il terminale “j”, figura 4. Si osservi che la tensione tra due terminali coincide con la tensione tra le giunzioni a cui i due terminali sono connessi.

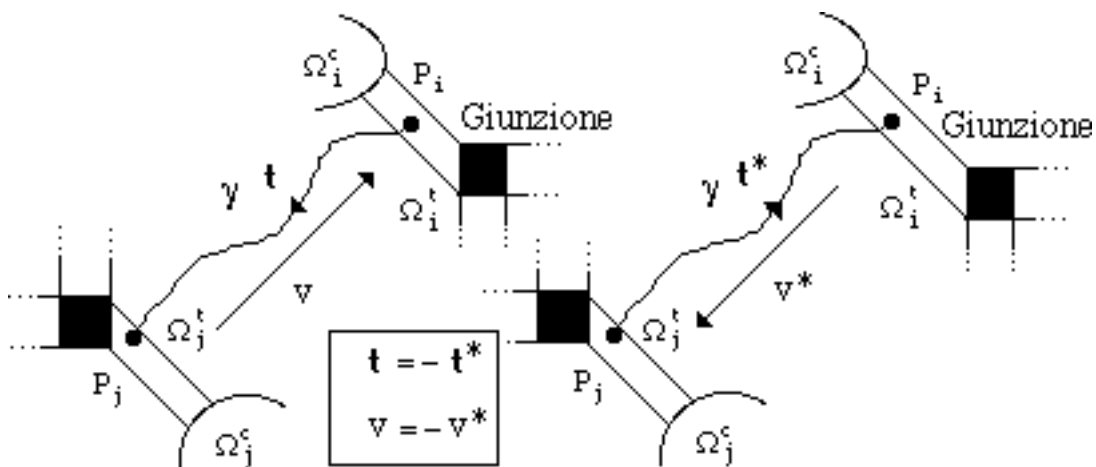


Figura 4 La tensione tra due terminali non dipende dal percorso purché γ non fori nessuna superficie limite. Sono possibili due scelte per i riferimenti dei versi.

Si consideri, ora, un circuito, e si applichino le equazioni (7) e (8). In questo modo è possibile determinare le relazioni tra le correnti (applicando la (7)) e le relazioni tra le tensioni (applicando la (8)) che regolano l'interazione tra i componenti. Facendo uso della definizione di corrente nel terminale e di tensione tra i terminali si ottengono le relazioni

$$\sum_k (\pm) i_k \cong 0, \quad (13)$$

$$\sum_h (\pm) v_h \cong 0. \quad (14)$$

La relazione (13) si riferisce a una qualsiasi superficie chiusa orientata Σ che, come al solito, non tagli alcun componente, e la (14) a una qualsiasi linea chiusa orientata Γ che, come al solito, non fori alcun componente. I riferimenti per i versi delle correnti e delle tensioni sono arbitrari, così come è arbitraria la scelta del verso della normale a Σ e il verso di percorrenza di Γ .

Nella (13) i_k è la corrente del k -esimo terminale che fora la superficie Σ . Essa deve essere sommata con il segno + se il riferimento per il verso di i_k , cioè $\mathbf{n}_k$, è concorde con il versore $\mathbf{n}$ della superficie Σ , e con il segno – se il riferimento per il verso di i_k è discorde con $\mathbf{n}$. Le correnti dei terminali che non forano la superficie Σ in considerazione non compaiono, ovviamente, nella sommatoria.

Nella (14) v_h è la tensione lungo un tratto γ_h di Γ che congiunge due terminali. Essa deve essere sommata con il segno + se il riferimento per il verso di v_h , cioè $\mathbf{t}_k$, è concorde con il versore $\mathbf{t}$ della curva Γ e con il segno – se il riferimento per il verso di v_h è discorde con $\mathbf{t}$.

1.4 Circuiti di bipoli

Da ora in poi ci si limiterà a considerare circuiti costituiti da soli componenti a due terminali. Un esempio è illustrato in figura 5. Risultati analoghi valgono per i circuiti costituiti anche da componenti con più di due terminali: per non appesantire l'esposizione affronteremo più avanti (nel Capitolo 6), quando occorrerà, quest'ultimo aspetto.

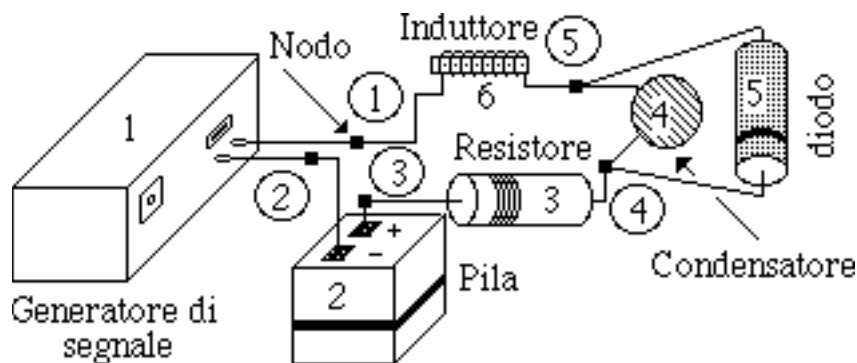


Figura 5. Circuito elettrico costituito da soli componenti a due morsetti.

Cominciamo col descrivere le proprietà caratteristiche fondamentali dei componenti a due terminali. Dalle (7) e (8) discende subito che a ciascuno di essi è possibile associare, in maniera univoca, una corrente elettrica (figura 6a) e una tensione elettrica (figura 6b). La seconda proprietà è conseguenza del fatto che il componente ha due soli terminali. La prima proprietà si ottiene

applicando la (7). Si consideri una superficie chiusa Σ che racchiuda il componente e tagli, quindi, entrambi i terminali. Dalla condizione (7) si ha che la corrente entrante nel terminale “a” è, con buona approssimazione, uguale a quella uscente dal terminale “b”.

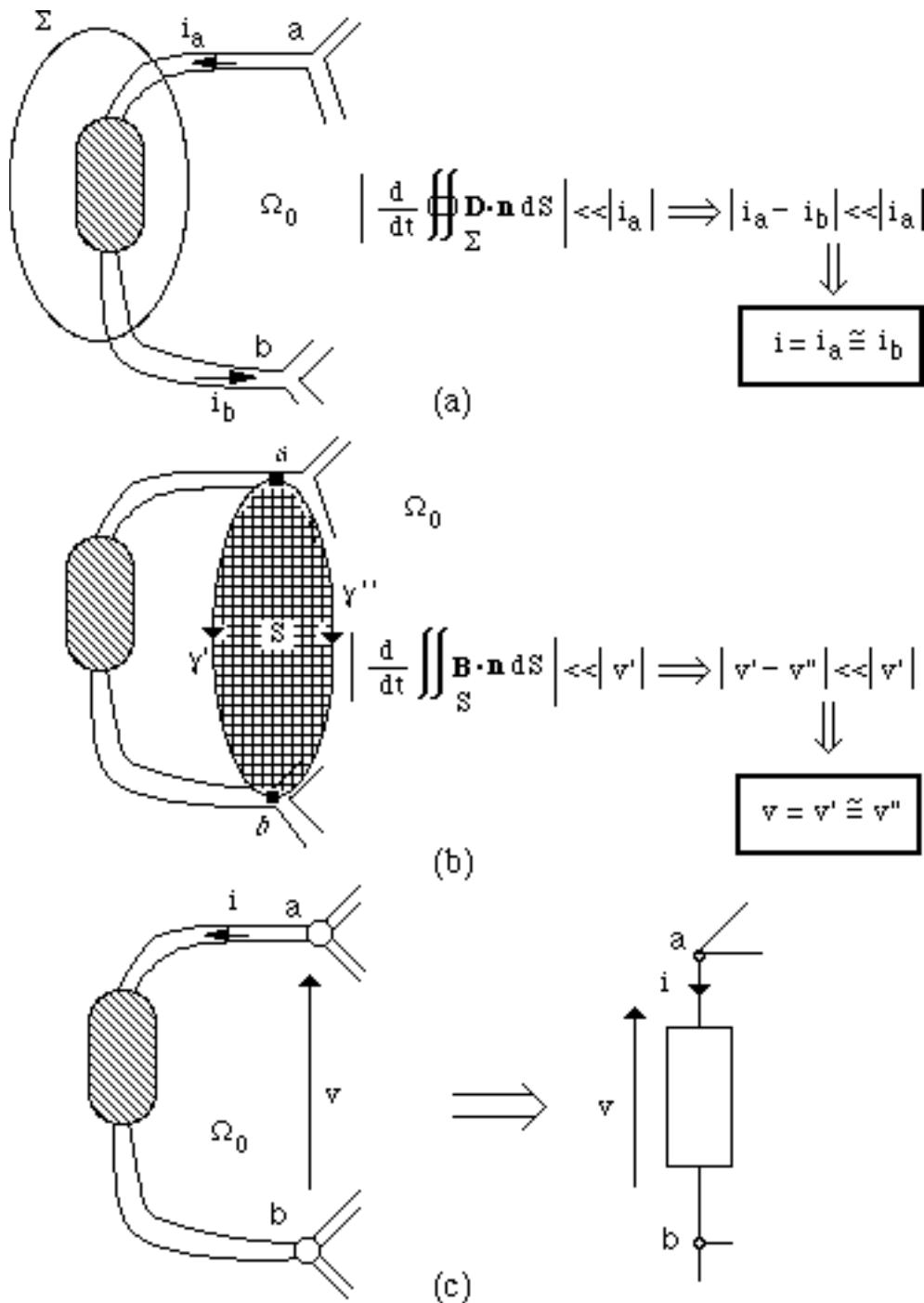


Figura 6 (a) e (b) approssimazioni alla base del concetto di bipolo; (c) il componente a due terminali è rappresentato da un “componente ideale” che è il bipolo.

Dalle considerazioni svolte precedentemente, si ha che, ciascun componente fisico con due terminali può essere rappresentato da un “componente ideale” (figura 6c), anche esso con due terminali, così definito:

- la corrente con riferimento entrante in un terminale è sempre uguale a quella con riferimento uscente dall'altro morsetto.

- la tensione tra i due terminali è indipendente dal particolare cammino purché esso non fori nessuna superficie limite (nemmeno quelle degli altri componenti).

Queste due proprietà del “componente ideale” sono definite con precisione, mentre nei componenti reali, che essi rappresentano, sono verificate approssimativamente (sono verificate esattamente solo nel regime stazionario). Per distinguerli da quelli reali, i componenti ideali saranno chiamati *bipoli*.

Le due condizioni, appena enunciate, non bastano a caratterizzare completamente il concetto di bipolo. Per la condizione (α), il funzionamento di ogni componente a due terminali deve essere descritto univocamente attraverso la corrente i e la tensione v , e la “relazione” tra i e v deve dipendere unicamente dalla sua costituzione fisica (non deve dipendere, ad esempio, dal circuito in cui il componente è inserito). Questa è l'altra proprietà che sta alla base del concetto di bipolo. Questa questione sarà approfondita più avanti.

In figura 6c è illustrata la rappresentazione schematica di un generico bipolo; questo tipo di rappresentazione è molto utile per indicare i versi dei riferimenti della corrente e della tensione. La corrente i è la corrente nel terminale “a” del componente reale che il bipolo rappresenta con il verso di riferimento entrante nella superficie limite, e la tensione v è la tensione con il verso di riferimento che punta verso il terminale “a”.

Osservazione

Per ciascun bipolo, possono essere fatte due possibili scelte per il verso di riferimento della corrente, e due per quello della tensione. In totale, ne risultano quattro possibili combinazioni (vedi figura 7). Come si vede nella figura 7, le quattro possibilità (a, b, c, d) possono essere raggruppate a due a due: nella (a) e nella (d) la freccia associata alla tensione punta verso il terminale in corrispondenza del quale la freccia della corrente è entrante; nella (b) e nella (c) la freccia associata alla tensione punta verso il terminale in corrispondenza del quale la freccia della corrente è uscente.

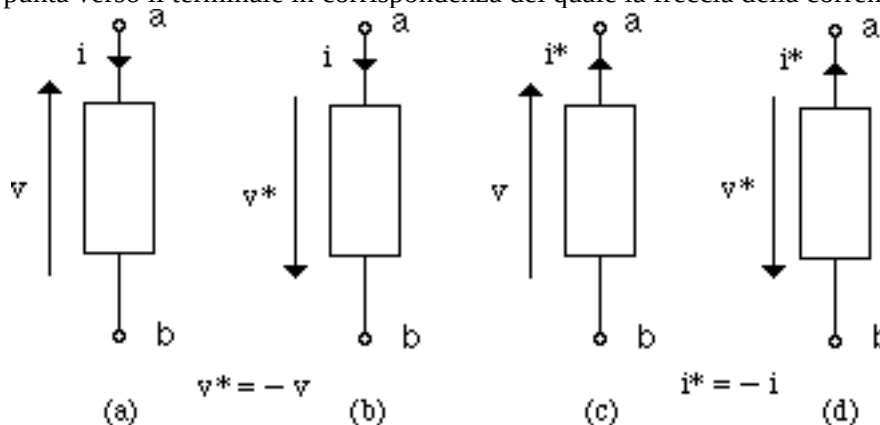


Figura 7 (a) e (d) Convenzione dell'utilizzatore (o convenzione normale); (b) e (c) convenzione del generatore.

Le scelte (a) e (d) vengono indicate dicendo che, in entrambi i casi, si è fatta per il bipolo la “convenzione dell'utilizzatore” o “convenzione normale”; nei casi (b) e (c), si dice, invece, che si è fatta la “convenzione del generatore”. Queste espressioni indicano soltanto i modi in cui si è liberamente deciso di effettuare le due scelte (indipendenti tra loro) per i versi di riferimento della

corrente e della tensione: esse - è bene notarlo esplicitamente - non hanno alcun significato che si riferisca alla natura fisica del bipolo considerato.

In figura 8a è rappresentato il circuito di bipoli corrispondente al circuito elettrico rappresentato in figura 5. Nel circuito di bipoli rappresentato in figura 8a è stata fatta ovunque la convenzione dell'utilizzatore. Salvo avviso contrario, in queste lezioni sarà usata sempre questa convenzione. In questo tipo di rappresentazione vengono messe in evidenza le correnti e le tensioni corrispondenti a ogni componente e il modo in cui i componenti sono tra loro connessi. Come tra poco vedremo le leggi fondamentali della teoria dei circuiti si basano unicamente su questi elementi. È bene notare che in questa rappresentazione non c'è nessuna informazione sulla forma e dimensione dei singoli componenti e né sulla distanza tra di essi.

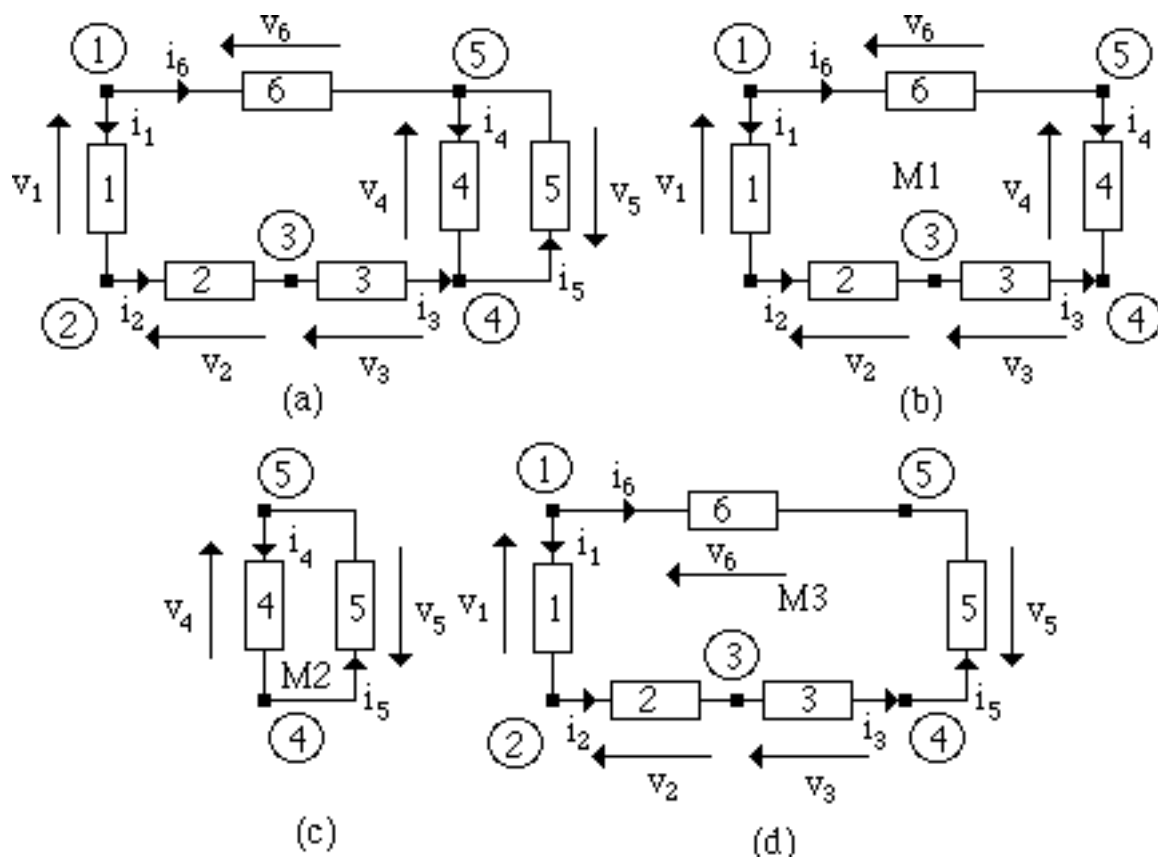


Figura 8 (a) Circuito di bipoli corrispondente al circuito elettrico rappresentato in figura 5; (b), (c) e (d) tre possibili maglie.

1.5 Le leggi di Kirchhoff

Per descrivere l'interazione tra i componenti di un circuito non c'è bisogno di imporre le relazioni (13) per ogni superficie chiusa ammissibile e le relazioni (14) per ogni curva chiusa ammissibile. Come ora faremo vedere è sufficiente considerare solo un sotto insieme finito di esse. Per individuare questo sotto insieme è necessario introdurre alcuni concetti preliminari. Ancora una volta, solo per non appesantire l'esposizione, faremo riferimento a un circuito di soli bipoli.

Definizioni

- Un *nodo* è una qualsiasi giunzione di un circuito in cui i terminali di diversi bipoli sono collegati tra loro, oppure, al limite, un qualsiasi terminale isolato (nell'esempio riportato in figura 8a, abbiamo 5 nodi, che sono stati etichettati con ① ⑤).
- Un *percorso* è un cammino tra i due terminali di uno stesso bipolo che non fori nessuna superficie limite.
- Una *maglia* è un cammino chiuso di percorsi in cui due e solo due di essi incidono in ciascun nodo (nell'esempio riportato in figura 8 abbiamo tre maglie, M1, M2 e M3).

Dalla arbitrarietà della superficie chiusa cui si riferisce la (13), deriva subito che essa può essere applicata, in particolare, a ogni superficie chiusa che contenga al suo interno un solo nodo. Se ne trae, allora, la legge di Kirchhoff per le correnti.

Legge di Kirchhoff per le correnti

In ogni nodo la somma algebrica delle correnti è uguale a zero in ogni istante, cioè

$$\sum_k (\pm) i_k = 0. \quad (15)$$

Nella (15) intervengono con lo stesso segno le correnti il cui riferimento per il verso è entrante nel nodo e con il segno contrario le correnti con riferimento opposto. Ad esempio, la corrente i_k deve essere sommata con il segno + se il verso del suo riferimento è uscente dal nodo e con il segno – se è entrante. Si noti che per scrivere la legge di Kirchhoff per le correnti bisogna, innanzi tutto, assegnare i riferimenti per i loro versi. La scelta dei riferimenti è arbitraria.

Esempio

Applicare la prima legge di Kirchhoff al circuito illustrato in figura.

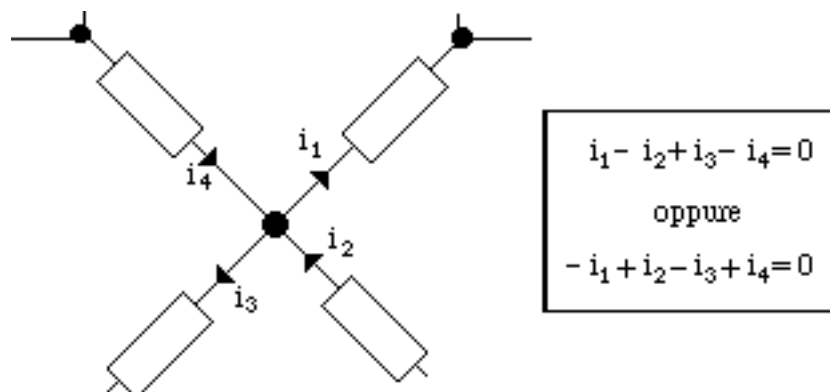


Figura 9 Nodo di un circuito

Dall'arbitrarietà della linea chiusa cui si riferisce la (14), deriva subito che essa può essere applicata, in particolare, a ogni maglia. Se ne trae, allora, la legge di Kirchhoff per le tensioni.

Legge di Kirchhoff per le tensioni

Per ogni maglia, la somma algebrica delle tensioni dei bipoli è uguale a zero in ogni istante, cioè

$$\sum_h (\pm) v_h = 0. \quad (16)$$

Nella (16) intervengono con lo stesso segno le tensioni il cui riferimento per il verso è concorde con il verso orario e con il segno contrario le tensioni con riferimento opposto. Ad esempio, la tensione v_h deve essere sommata con il segno + se il verso del suo riferimento è concorde con il verso orario di percorrenza della maglia, e con il segno – se è discorde. Si noti che per scrivere la legge di Kirchhoff per le tensioni bisogna, innanzi tutto, assegnare i riferimenti per i loro versi. La scelta di questi riferimenti è arbitraria.

Le (15) e (16) vanno, rispettivamente, sotto il nome di *legge di Kirchhoff per le correnti* (LKC) e di *legge di Kirchhoff per le tensioni* (LKT)³ (o equivalentemente *prima legge di Kirchhoff* e *seconda legge di Kirchhoff*, rispettivamente). Le equazioni che si ottengono applicando le leggi di Kirchhoff prendono il nome di *equazioni di Kirchhoff*.

Esempio

Applicare la seconda legge di Kirchhoff alla maglia illustrata in figura

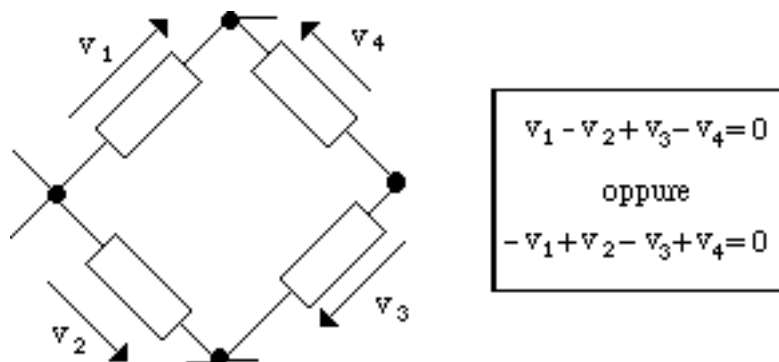


Figura 10 Maglia di un circuito.

Osservazione

A differenza delle relazioni (13) e (14), le leggi di Kirchhoff sono definite con precisione, perché descrivono il funzionamento di un circuito idealizzato, il *circuito di bipoli*. Esse costituiscono le due (e sole) leggi fondamentali della Teoria dei Circuiti e valgono in tutte le circostanze nelle quali valgono le limitazioni (7) e (8) (e soltanto in queste).

Le leggi di Kirchhoff descrivono le interazioni tra i diversi componenti del circuito. Esse non dipendono né dalla natura, né dalle posizioni spaziali relative dei componenti, ma solo dal modo in cui essi sono connessi. Dunque la condizione (β) è ampiamente verificata.

Esempio

Si scrivano le leggi di Kirchhoff per il circuito di bipoli illustrato in figura 11 (esso rappresenta il circuito fisico schematizzato in figura 5). In questo circuito ci sono 6 bipoli, 5 nodi e tre maglie.

³ Il *modello circuitale* è stato ottenuto, a partire dal *modello di campo*, attraverso certe limitazioni e approssimazioni. In letteratura esiste un approccio alternativo (vedi ad esempio, in G. Biorci, FONDAMENTI DI Elettrotecnica Circuiti, UTET), in cui le leggi fondamentali dei circuiti vengono introdotte come postulati. In questo contesto alle leggi fondamentali si dà, spesso, il nome di *Principi di Kirchhoff*. Anche se un approccio assiomatico alla teoria dei circuiti può risultare più agevole di quello che stiamo presentando, in quanto il bagaglio di nozioni preliminari che lo studente deve apprendere è ridotto al minimo, esso, comunque, è estremamente carente dal punto di vista della comprensione fisica. In particolare non dà né gli strumenti necessari a capire i limiti di applicabilità del modello circuitale e né le tecniche per superare questi limiti.

Utilizzando la prima legge di Kirchhoff otteniamo le 5 equazioni per le correnti

$$\begin{aligned}
 \text{nodo 1} \quad & i_1 + i_6 = 0, \\
 \text{nodo 2} \quad & -i_1 + i_2 = 0, \\
 \text{nodo 3} \quad & -i_2 + i_3 = 0, \\
 \text{nodo 4} \quad & -i_3 - i_4 + i_5 = 0, \\
 \text{nodo 5} \quad & i_4 - i_5 - i_6 = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

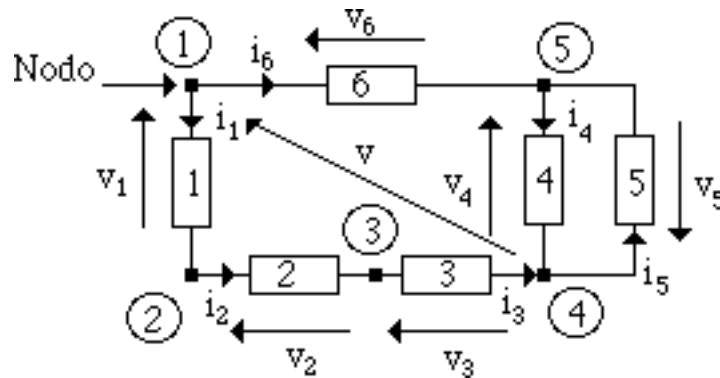


Figura 11 Un circuito di bipoli.

Le maglie del circuito sono:

- M1 bipolo 1-bipolo 2-bipolo 3-bipolo 4-bipolo 6;
- M2 bipolo 4-bipolo 5;
- M3 bipolo 1-bipolo 2-bipolo 3-bipolo 5-bipolo 6.

Applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni alle maglie otteniamo il sistema di equazioni per le tensioni:

$$\begin{aligned}
 \text{M1} \quad & v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_6 = 0, \\
 \text{M2} \quad & v_4 + v_5 = 0, \\
 \text{M3} \quad & v_1 + v_2 + v_3 + v_5 - v_6 = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Le equazioni dei sistemi (17) e (18) non sono tutte indipendenti (una analisi per ispezione diretta mostra che, è possibile estrarre solo sei equazioni indipendenti, quattro dal sistema (17) e due dal sistema (18)); questo argomento verrà trattato ampiamente in seguito.

In un circuito con 6 bipoli le grandezze elettriche da determinare sono le sei correnti $i_1, \dots, i_6$ e le sei tensioni $v_1, \dots, v_6$, quindi le incognite sono dodici. Il sistema di equazioni (17) e (18) contiene solo sei equazioni indipendenti, quindi non è sufficiente a determinare la soluzione del circuito, dove per soluzione del circuito intendiamo l'insieme delle grandezze $i_1, \dots, i_6, v_1, \dots, v_6$. Di conseguenza per ottenere un sistema chiuso e ben posto abbiamo bisogno di altre sei equazioni tra loro indipendenti e indipendenti anche da quelle ottenute tramite le leggi di Kirchhoff. Le equazioni che mancano sono le sei equazioni che descrivono il funzionamento di ciascun bipolo, cioè le relazioni costitutive dei sei bipoli.

Osservazione

Le equazioni, che si ottengono dalle leggi di Kirchhoff, non sono tutte quelle che possono essere ottenute applicando le (13) e (14) a tutte le superfici chiuse e linee chiuse ammissibili. Ad esempio,

se nel circuito rappresentato in figura 8a si applica la (13) ad una superficie chiusa che racchiude il nodo 1 e il nodo 2 si ha $i_2 + i_6 = 0$. È immediato verificare che questa equazione può essere ottenuta combinando le equazioni per le correnti relative ai nodi 1 e 2. In generale l'equazione per le correnti ottenuta applicando la (13) a una qualsiasi superficie chiusa ammissibile può essere ottenuta combinando opportunamente le equazioni di Kirchhoff per le correnti.

Si applichi, ora, la (12) al cammino chiuso (vedi figura 9), costituito dai percorsi relativi ai bipoli 1, 2 e 3 e da una linea γ che congiunga il nodo 1 al nodo 4 (che non fori nessuna superficie limite); si ottiene $v - v_1 - v_2 - v_3 = 0$, dove v è la tensione lungo γ , con il riferimento mostrato in figura 9. Siccome la tensione v non è la tensione di un bipolo, questa equazione non può essere ottenuta come combinazione delle equazioni di Kirchhoff per le tensioni (18). Infatti la tensione v non appare né nelle leggi di Kirchhoff per le tensioni (18) e né nelle incognite del circuito. In generale qualsiasi altra equazione per le tensioni non può essere ottenuta combinando le equazioni di Kirchhoff. Comunque queste equazioni non sono fondamentali per il modello circuitale: esse servono solo a esprimere le tensioni tra terminali non appartenenti a uno stesso bipolo in funzione delle tensioni dei bipoli.

1.6 Le relazioni costitutive

Nei limiti dell'approssimazione del modello circuitale ciascun componente di un circuito interagisce con gli altri componenti solo attraverso le correnti e le tensioni ai propri terminali. Le leggi che regolano questa interazione sono le leggi di Kirchhoff. Le equazioni che ne derivano, come abbiamo avuto modo di constatare con un semplice esempio, non riescono, però, a definire in maniera univoca le condizioni di lavoro dei singoli elementi, cioè i valori che assumono le correnti e le tensioni. Questa indeterminazione si elimina se si tiene conto del fatto che, sempre nell'approssimazione del modello circuitale, le tensioni e le correnti di ogni componente sono legate tra di loro da relazioni dipendenti unicamente dalla propria costituzione fisica. Più precisamente si può dire che le condizioni di lavoro di ogni singolo componente, e quindi dell'intero circuito, sono il risultato di due distinte esigenze: che il componente si comporti in maniera compatibile con la natura degli altri componenti, così come essi sono collegati nella rete, e che il suo comportamento sia a sua volta compatibile con la sua specifica natura.

Per completare il modello circuitale e quindi anche il quadro delle condizioni, cui i campi elettrici e magnetici debbono soddisfare affinché esso risulti valido, occorre determinare (o assegnare) le relazioni costitutive dei componenti del circuito. Ricordiamo che deve essere verificata la condizione (α): il funzionamento di ogni componente con due terminali deve essere descritto univocamente attraverso la corrente i e la tensione v e la relazione tra i e v deve dipendere unicamente dalla costituzione fisica del componente, e quindi deve essere indipendente dal circuito in cui è inserito. Questa è l'altra proprietà che è alla base del concetto stesso di bipolo. Ciò si verifica solo se la tensione del bipolo, o la corrente, è sufficiente a determinare univocamente il campo elettromagnetico all'interno della superficie limite del bipolo. Diciamo subito che, in generale questa

proprietà può essere verificata solo in maniera approssimata. Come poi vedremo, solo in un caso particolare è verificata esattamente (resistori in regime stazionario).

Per analizzare questo problema c'è bisogno di entrare nella fisica dei singoli componenti. In queste lezioni non sarà analizzato il funzionamento di tutti i possibili componenti elettrici; si limiterà a descrivere solo alcuni e comunque non si scenderà nei dettagli. Tra l'altro non è questo l'obiettivo del corso. Il problema della modellistica è molto ampio e può essere affrontato, in dettaglio, solo in corsi più specialistici. Comunque si cercherà di mettere in evidenza quanto più possibile gli aspetti e le problematiche generali. I componenti che verranno descritti sono il *resistore*, il *generatore di tensione*, il *condensatore* e l'*induttore*. Nel Capitolo 6 sarà descritto l'accoppiamento mutuo tra due circuiti.

Per determinare le relazioni costitutive bisogna risolvere il problema di campo all'interno dei singoli componenti, cioè all'interno delle regioni $\Omega_1^c, \Omega_2^c, \dots, \Omega_N^c$. Il modello di campo che bisogna considerare all'interno della generica regione Ω_k^c dipende dalla costituzione fisica del componente che occupa quella regione: ad esempio, il modello del campo stazionario di corrente per i resistori e generatori, il modello quasi-stazionario elettrico per i condensatori, il modello quasi-stazionario magnetico per gli induttori e trasformatori. Se volessimo analizzare il modello di un diodo, oppure di un transistor o di un amplificatore operazionale, dovremmo utilizzare il modello del campo stazionario di corrente se siamo in bassa frequenza, ovvero il modello quasi-stazionario elettrico se gli effetti dinamici sono importanti. Un bipolo potrebbe essere anche una antenna: in questo caso per caratterizzare il componente bisogna considerare il modello completo delle equazioni di Maxwell.

1.7 Il resistore

Si consideri una barretta a forma cilindrica di materiale conduttore omogeneo ed isotropo, figura 12. La barretta è annegata in un materiale isolante, che oltre a proteggere meccanicamente il conduttore, funziona anche da radiatore termico, favorendo, così, lo smaltimento nell'ambiente circostante del calore prodotto per effetto Joule. Si assuma che: (a) il materiale conduttore abbia un comportamento lineare e isotropo⁴; (b) la barretta abbia una resistività η uniforme. Ai due estremi della barretta sono collegati elettricamente due conduttori con elevata conducibilità γ_t . Entrambi i conduttori fuoriescono dal materiale isolante: essi sono i terminali del resistore. In generale è sempre $\eta\gamma_t \gg 1$; si assumerà $\gamma_t \rightarrow \infty$. Questo è il modo più semplice per realizzare un *resistore*.

Per caratterizzare il funzionamento elettrico di un resistore, cioè per determinare il legame tra la tensione tra i due terminali, $v=v(t)$, e la corrente che in esso fluisce, $i=i(t)$, bisogna pensarlo inserito in un circuito. A tale scopo si faccia riferimento alla schematizzazione illustrata in figura 13.

⁴ La resistività di un materiale conduttore dipende dalla temperatura dello stesso, la quale a sua volta dipende dalla potenza dissipata, che, come vedremo, è uguale al prodotto tra la tensione e la corrente (se si usa la convenzione dell'utilizzatore). Pertanto η non è costante, ma dipende dalla tensione e dalla corrente. Comunque è possibile realizzare il componente in maniera tale che, sia garantita una resistività quasi costante se la tensione di lavoro non supera certi valori.

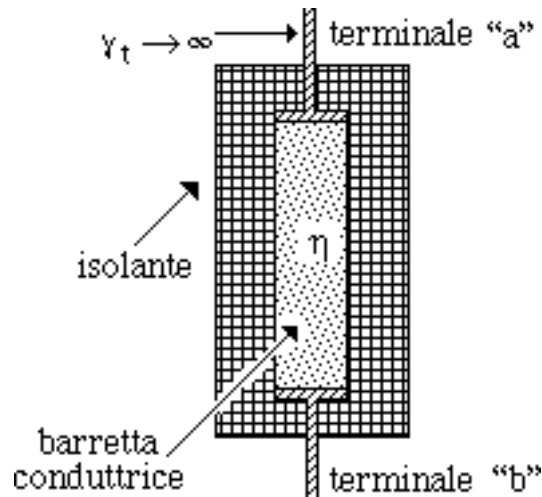


Figura 12 La schematizzazione più semplice di un resistore

La tensione v del resistore (il riferimento per il verso è mostrato in figura 13a) è l'integrale di linea di $\mathbf{E}$ lungo la curva orientata γ_{ab} che unisce i punti P_a e P_b appartenenti, rispettivamente, ai terminali "a" e "b"; la corrente i (il riferimento per il verso è mostrato in figura 13b secondo la convenzione dell'utilizzatore) è il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la superficie S_t che taglia il terminale "a", orientata concordemente con il riferimento scelto per i .

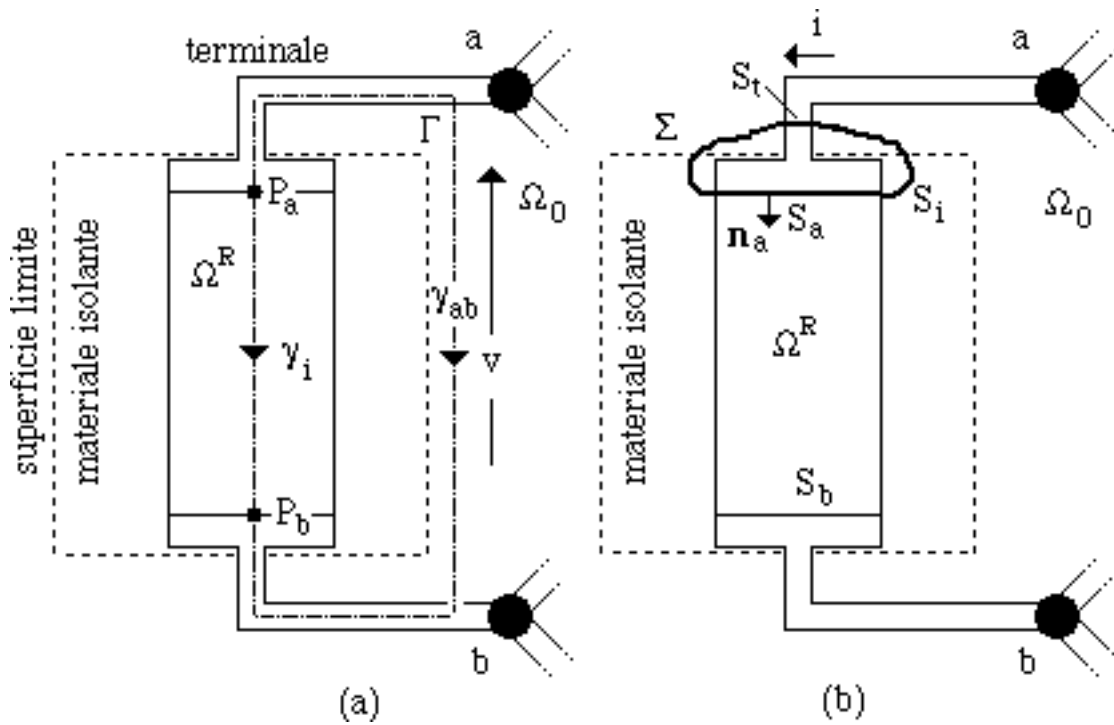


Figura 13

Applicando la legge di Faraday-Neumann alla linea chiusa orientata Γ , ottenuta unendo il tratto γ_{ab} con il tratto γ_i (il verso di percorrenza di Γ è quello concorde con il verso di γ_{ab} , figura 13a), si ottiene

$$v = \int_{\gamma_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \frac{d\Phi_\Gamma}{dt}, \quad (19)$$

dove Φ_Γ è il flusso del campo magnetico $\mathbf{B}$ concatenato con Γ ,

$$\Phi_{\Gamma} = \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS_p, \quad (20)$$

e Σ_{Γ} è una qualsiasi superficie aperta che ha come orlo Γ (il verso della normale $\mathbf{n}$ deve essere scelto in modo tale che, esso sia concorde con il verso di Γ secondo la “regola del cavatappi”).

Applicando, ora, la legge della conservazione della carica alla superficie chiusa orientata Σ , ottenuta unendo le superfici S_a , S_t e S_i (S_a è la superficie di contatto tra la barretta conduttrice e il terminale “a” orientata con la normale che punta verso l'esterno di Σ e S_i è una superficie passante nel mezzo isolante e nel vuoto, figura 13b), si ha

$$i = \iint_{S_a} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_a} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{dQ_{\Sigma}}{dt}, \quad (21)$$

dove Q_{Σ} è la carica racchiusa dalla superficie Σ .

Per determinare la relazione tra la corrente i e la tensione v , bisogna conoscere il campo elettromagnetico all'interno della superficie limite del componente. Pertanto è fondamentale la seguente questione: il campo elettromagnetico all'interno della regione delimitata dalla superficie limite, è univocamente determinato dalla conoscenza della tensione e/o della corrente del bipolo? La possibilità di caratterizzare il funzionamento del bipolo tramite una relazione tra la corrente i e la tensione v , che sia praticamente indipendente dal circuito e dal posto in cui il resistore è inserito (la proprietà fondamentale (α)), dipende dalla risposta a questa questione.

Per rispondere alla domanda è richiesto uno studio accurato del modello di campo. Purtroppo questa strada, al livello introduttivo a cui siamo, risulta essere del tutto impraticabile. Tra l'altro l'obiettivo di queste lezioni non è quello di esaurire l'argomento della modellistica circuitale, bensì quello di introdurre i modelli di alcuni componenti circuitali fondamentali e discutere allo stesso tempo le condizioni che assicurino la proprietà α . Tutto ciò non può che avvenire attraverso un percorso che sia corretto e al tempo stesso quanto più semplice possibile, proprio per facilitarne la comprensione. A tale scopo il funzionamento del resistore verrà studiato partendo dal limite stazionario e considerando, poi, quello che accade quando le grandezze variano nel tempo.

1.7.1 Limite stazionario: un problema di campo stazionario di corrente

Dapprima si consideri il limite stazionario, cioè tutte le grandezze elettromagnetiche siano costanti nel tempo. In questo limite la tensione v nella (19) dipende solo dal campo $\mathbf{E}$ lungo γ_i e la corrente i nella (21) dipende solo dal campo $\mathbf{J}$ su S_a ,

$$v = \int_{\gamma_i} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl, \quad (22)$$

$$i = \iint_{S_a} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (23)$$

La conoscenza della tensione v e/o della corrente i è sufficiente a determinare univocamente i campi $\mathbf{J}$ ed $\mathbf{E}$?

Il campo di corrente nella regione Ω^R (Ω^R è la regione del conduttore con resistività η) è descritto dal modello del campo stazionario di corrente:

$$\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (24)$$

$$\text{div}\mathbf{J} = 0, \quad (25)$$

$$\mathbf{E} = \eta\mathbf{J}. \quad (26)$$

Sulla superficie (di separazione) $\partial\Omega^R$ che delimita la regione Ω^R le leggi del campo di corrente sono:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \quad (27)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = 0, \quad (28)$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore normale a $\partial\Omega^R$ (con verso arbitrario). La superficie $\partial\Omega^R$ è l'unione di tre parti (figura 14): S_a base superiore (regione di contatto con il terminale “a”), S_b base inferiore (regione di contatto con il terminale “b”) e S_l superficie laterale (regione di contatto con l'isolante).

Il campo elettrico è irrotazionale, quindi può essere espresso attraverso il gradiente della funzione potenziale scalare $\varphi = \varphi(P)$, cioè

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi, \quad (29)$$

e la componente tangente è continua ovunque; invece il campo di corrente $\mathbf{J}$ è solenoidale e la componente normale è continua ovunque.

Siccome la resistività è uniforme, dalle equazioni (25) e (26) si ottiene che anche il campo elettrico ha divergenza nulla in Ω^R ,

$$\text{div}\mathbf{E} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^R. \quad (30)$$

In questo caso non esistono cariche libere all'interno del conduttore (se la resistività fosse non uniforme, potrebbero esserci cariche libere in Ω^R): le cariche sono solo superficiali. Esse sono dislocate sulle superfici in corrispondenza delle quali la resistività è discontinua, e cioè sulle superfici di contatto con i terminali e la superficie di contatto con l'isolante. Combinando le equazioni (31) e (32) si ottiene per il potenziale scalare (l'unica incognita del problema) ⁵

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^R. \quad (31)$$

L'equazione (31) è l'*equazione di Laplace*. Essa ha infinite soluzioni e tra tutte le possibili bisogna cercare quella o quelle che verificano ulteriori condizioni: le *condizioni al contorno* sulla superficie $\partial\Omega^R$.

I terminali sono realizzati con conduttori ideali, quindi in essi il campo elettrico è nullo. Dalla continuità della componente tangente del campo elettrico attraverso qualsiasi superficie, si ottiene che essa è nulla sia su S_a che su S_b . Quindi su ognuna di queste superfici la funzione potenziale deve essere necessariamente uniforme (se non lo fosse avremmo certamente una componente tangente di $\mathbf{E}$ diversa da zero). Si ha pertanto,

⁵ Il laplaciano ∇^2 è, per definizione, l'operatore che si ottiene applicando l'operatore divergenza al gradiente di una funzione scalare, $\nabla^2(\cdot) \equiv \text{div}[\text{grad}(\cdot)]$.

z (si faccia riferimento a un sistema di coordinate cilindriche con l'asse z coincidente con l'asse di simmetria della barretta conduttrice e con l'origine sulla base inferiore, figura 14)

$$\varphi = \varphi(z) \quad \text{in} \quad \Omega^R. \quad (35)$$

Una funzione potenziale di questo tipo può verificare la condizione al contorno (32) imponendo che

$$\begin{aligned} \varphi(z=0) &= V_b, \\ \varphi(z=l) &= V_a. \end{aligned} \quad (36)$$

La condizione al contorno (34) è verificata perché il potenziale non dipende dalla coordinata radiale (sulla superficie cilindrica la derivata normale della funzione potenziale è uguale alla derivata parziale rispetto a r); la condizione di simmetria di rotazione è verificata perché φ non dipende dalla coordinata azimutale. Sostituendo la (35) nell'equazione di Laplace, si ottiene ⁶

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0. \quad (37)$$

L'integrale generale della (37) è

$$\varphi(z) = Az + B, \quad (38)$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie. Esse devono essere determinate imponendo le condizioni al contorno (38). Immediatamente si ottiene

$$\varphi(z) = \frac{v}{l} z + V_b \quad \text{per } 0 \leq z \leq l, \quad (39)$$

dove, ricordiamo, v è la tensione del resistore e l è la lunghezza della barretta. Per come è stata costruita la (39), essa è certamente una soluzione dell'equazione di Laplace che verifica le condizioni al contorno (32) e (34). Per la proprietà di unicità, non possono essercene altre e quindi la funzione potenziale (39) è la soluzione del nostro problema.

La funzione potenziale è nota univocamente se si conoscono i valori dei due potenziali V_a e V_b . Se è nota solo la loro differenza, cioè la tensione v , allora la funzione potenziale è nota a meno di una costante arbitraria. Invece il campo elettrico essendo, a meno del segno, il gradiente della funzione potenziale, è univocamente determinato quando è assegnata la sola differenza di potenziale. In questo caso il campo elettrico vale

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{v}{l}, \quad (40)$$

e il campo di densità di corrente è

$$\mathbf{J} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{v}{\eta l}. \quad (41)$$

⁶ In coordinate cartesiane rettangolari (x,y,z) l'espressione del laplaciano è $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$, mentre in coordinate cilindriche (r,ϑ,z) è $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$.

Dunque, nel limite stazionario il campo elettrico e il campo di corrente all'interno del resistore dipendono solo dalla tensione applicata al resistore. Essi sono indipendenti dal modo e dal circuito in cui il resistore è inserito. Questa proprietà è indipendente dalla particolare geometria scelta. Essa è una proprietà generale ed è diretta conseguenza dell'unicità della soluzione.

Sostituendo la (41) nella (23), si ottiene:

$$i = \iint_{S_a} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_a dS = - \iint_{S_a} J_z dS = \frac{S}{l\eta} v, \quad (42)$$

dove S è l'area della sezione trasversale della barretta; il verso della normale $\mathbf{n}_a$ a S_a è in accordo con la convenzione dell'utilizzatore (figura 13b). La (42) è la *relazione costitutiva del resistore* e può essere così riscritta

$$v = Ri \quad \text{o} \quad i = Gv, \quad (43)$$

dove

$$R = \eta \frac{l}{S} \quad \text{e} \quad G = \frac{1}{R}. \quad (44)$$

Le due relazioni (43) esprimono in due modi diversi la *legge di Ohm*. Il parametro fisico R prende il nome di *resistenza* del resistore e G prende il nome di *conduttanza*. Le relazioni (43) sono relazioni lineari tra la corrente e la tensione perché la resistenza R è indipendente sia dalla corrente che dalla tensione. Questa è una diretta conseguenza della linearità delle leggi di Maxwell e della linearità della relazione costitutiva (26) del materiale conduttore con cui è realizzato il resistore.

Osservazione

A seconda dell'applicazione, variano sia le geometrie (resistori a “filo”, resistori a “film”, etc), che i materiali (leghe metalliche, semiconduttori, polimeri, etc), con cui si realizzano i resistori. La resistenza elettrica di un resistore è un parametro che può essere definito per qualsiasi geometria, purché il materiale conduttore, di cui esso è costituito, sia lineare.

In generale, indipendentemente dalla geometria, possiamo definire la resistenza elettrica di un resistore nel modo seguente

Definizione: resistenza elettrica

La resistenza elettrica di un resistore è il rapporto tra la tensione del resistore e la corrente (i versi di riferimento sono scelti in accordo alla convenzione dell'utilizzatore):

$$R \equiv v / i = (V_a - V_b) / \left(\iint_{S_a} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_a dS \right). \quad (45)$$

Questo rapporto è indipendente dalla tensione e dalla corrente se la relazione costitutiva del conduttore è lineare e dipende unicamente dalla geometria e dalla resistività. Esso è positivo se la resistività è positiva. La resistenza elettrica descrive completamente il funzionamento del resistore in regime stazionario, indipendentemente dal modo e dal circuito in cui è inserito.

La resistenza elettrica si misura nel SI in *ohm* (Ω): $1\Omega=1V/1A$ (sottomultipli e multipli di uso comune: $1m\Omega=10^{-3}\Omega$ (milli ohm), $1k\Omega=10^3\Omega$ (chilo ohm), $1M\Omega=10^6\Omega$ (mega ohm)). L'unità di misura della conduttanza elettrica G nel SI è il *siemens* (S): $1S=1/1\Omega$.

Sulla superficie $\partial\Omega^R$ che delimita la barretta c'è una carica libera superficiale. Essa nasce a causa della brusca variazione nella resistività del materiale. Ad esempio, in corrispondenza della superficie di base S_a la componente normale del campo elettrico è nulla dalla parte del terminale ed è, invece, diversa da zero dalla parte della barretta se nel terminale circola una corrente. Di conseguenza ci deve essere una carica libera di tipo superficiale. Queste cariche sono le “uniche sorgenti” del campo elettrico in regime stazionario.⁷

1.7.2 Cosa accade quando le grandezze variano nel tempo?

Per semplicità, si supponga che tutte le grandezze varino nel tempo con legge sinusoidale, (cioè la dinamica temporale di ogni grandezza scalare e di ciascuna componente dei campi vettoriali è del tipo $a_0 \sin(2\pi f t + \varphi_0)$). Si supponga, inoltre, di disporre di un sistema con cui potere stabilire, a piacere, il valore da assegnare alla frequenza f . Non ci preoccupiamo per il momento, di come ciò possa essere fatto.

Senza affrontare il problema del calcolo dei campi elettrici, magnetici e di corrente per l'esempio considerato, limitiamoci qui a riportare i risultati.

È innanzi tutto di per sé evidente che, la rapidità di variazione nel tempo dei fenomeni elettromagnetici che si verificano nel circuito è fissata dal valore che noi decidiamo volta per volta di assegnare alla frequenza f . I risultati della soluzione del problema possono essere così sommariamente riassunti:

- Fino a che la frequenza f è abbastanza bassa (diciamo $0 \leq f < f_R$), il campo della densità di corrente è ancora distribuito in modo abbastanza uniforme ed è diretto lungo z : gli effetti dovuti ai fenomeni di induzione elettromagnetica e magnetoelettrica prodotti dalla corrente e dalle cariche del resistore sono trascurabili (modello del campo stazionario di corrente). Nelle relazioni (19) e (21) continuano a essere trascurabili, rispettivamente, i termini $d\Phi_T/dt$ e dQ_Z/dt . In queste condizioni, se sono trascurabili anche gli effetti dovuti ai fenomeni di induzione prodotti dalle correnti e dalle cariche degli altri componenti, (questa condizione è quasi sempre verificata) il funzionamento del resistore dipende solo dalla tensione tra i suoi morsetti (continua a essere indipendente dal modo e dal circuito in cui è inserito) e la corrente $i = i(t)$ e la tensione $v = v(t)$ obbediscono ancora alla legge di Ohm (43).

Al di sopra della frequenza caratteristica f_R il funzionamento del componente può dipendere ancora dalla sola tensione e corrente, se gli effetti dovuti agli accoppiamenti induttivi e propagativi con gli altri componenti sono trascurabili, ma il legame tra la corrente e la tensione è

⁷ In regime stazionario, in corrispondenza di una superficie S di discontinuità della resistività (ad esempio, sull'interfaccia tra due conduttori con diverse conducibilità), la continuità della componente normale di $\mathbf{J}$ impone che sia $\eta_1 E_{n1} = \eta_2 E_{n2}$. Pertanto la componente normale di $\mathbf{E}$ è certamente discontinua, quindi deve esserci su S una densità di carica libera di tipo superficiale.

dipendente dalla frequenza e quindi non è più di tipo statico, cioè del tipo definito dalla relazione (43).

Quanto vale la frequenza caratteristica f_R ? Per determinarla bisogna considerare gli effetti dovuti ai fenomeni di induzione e di propagazione. È possibile stimare questa frequenza ragionando nel modo seguente.

Quando si aumenta di poco il valore della frequenza potrebbe accadere che: (a) il fenomeno di induzione elettromagnetica non è più trascurabile, mentre quello di induzione magnetoelettrica lo è ancora; (b) prevale il fenomeno dell'induzione magnetoelettrica; (c) entrambi i fenomeni di induzione non sono più trascurabili.

- Nel caso (a) il campo elettrico non è più irrotazionale e nella relazione (19) il termine $d\Phi_r/dt$ non è più trascurabile, mentre il campo di corrente continua a essere con buona approssimazione ancora solenoidale. La frequenza caratteristica f_{ind} , al di sopra della quale, nella (19), l'effetto dell'induzione elettromagnetica è confrontabile con quello della conduzione, è data da $f_{ind} \approx R/L_0$; L_0 è un coefficiente (detto coefficiente di autoinduzione), che lega il flusso Φ_r alla corrente $i(t)$ (sul significato di questo coefficiente ritorneremo più avanti, quando illustreremo il bipolo induttore).

A causa dell'induzione elettromagnetica accade, anche, che il campo di corrente si distribuisce in modo non uniforme, addensandosi nella regione esterna del conduttore e indebolendosi in quella centrale (si presenta, cioè, un nuovo fenomeno, noto come *effetto pelle*; esso è un caso particolare del fenomeno della *diffusione del campo magnetico*). La frequenza caratteristica f_d , in corrispondenza della quale l'effetto pelle si manifesta in maniera molto pronunciata, cresce quasi linearmente al crescere della resistività η e pressoché come $1/r_0^2$ al decrescere del raggio r_0 della barretta. Una stima di f_d è data dalla relazione $f_d \approx \eta/(\mu_0 r_0^2)$ (si assuma che la barretta conduttrice abbia permeabilità magnetica μ_0). Utilizzando l'espressione della resistenza elettrica (44), si ottiene $f_d \approx R/(\mu_0 l) \approx 10^6 (R/l)$. Nella maggior parte dei casi è $(R/l) \geq 1 \Omega/cm$ e quindi $f_d \geq 100$ MHz, ed essendo $L_0 \geq \mu_0 l$ si ha $f_{ind} \leq f_d$.

- Nel caso (b) il campo elettrico continua a essere con buona approssimazione ancora irrotazionale, ma il campo di corrente non è più conservativo nel flusso e nella relazione (21) il termine dQ_Σ/dt non è più trascurabile. In questo caso la corrente di spostamento nel resistore è confrontabile con quella di conduzione. La frequenza caratteristica f_r (in corrispondenza della quale questo fenomeno si manifesta in maniera molto pronunciata), è data da $f_r \approx 1/(\eta\epsilon_0)$ ($1/f_r$ è il tempo caratteristico di *rilassamento delle cariche nei corpi conduttori*). Anche in questo caso il legame tra la tensione e la corrente è dipendente dalla frequenza e il funzionamento del componente dipende dalla sola tensione, se gli effetti dovuti agli accoppiamenti induttivi (induzione elettrica) con gli altri componenti sono trascurabili.
- Nel caso (c) gli effetti di entrambi i fenomeni di induzione non sono trascurabili e nelle relazioni (13) e (14) non sono più trascurabili i termini $d\Phi_r/dt$ e dQ_Σ/dt : non possono essere più trascurati gli effetti dovuti alla *propagazione del campo elettromagnetico*. Il componente può irradiare in misura significativa energia (confrontabile con quella dissipata per effetto Joule) nello spazio circostante sotto forma di onde elettromagnetiche coerenti. Esso è diventato, in sostanza, una vera e propria antenna. La frequenza caratteristica di propagazione f_p (in corrispondenza

della quale questo fenomeno si manifesta in maniera molto pronunciata), è inversamente proporzionale alla lunghezza caratteristica del componente e vale $f_p \approx c/l = 1/(l\sqrt{\epsilon_0\mu_0})$; per $l=1\text{cm}$, f_p vale circa 30 GHz.

Abbiamo, quindi, quattro frequenze caratteristiche. Osserviamo subito che f_d , f_r e f_p non sono tra loro indipendenti, ma sono legate dalla relazione notevole $(l/r_0)f_p = \sqrt{f_d f_r}$, cioè la frequenza caratteristica di propagazione è la media geometrica tra quella di diffusione e quella di rilassamento. Dalle espressioni di f_r e f_d si vede subito che

$$\begin{aligned} f_d > (l/r_0)f_p > f_r & \quad \text{se } R > R_0 \\ f_r > (l/r_0)f_p > f_d & \quad \text{se } R < R_0 \end{aligned}$$

dove $R_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cong 377 \, \Omega$. Pertanto la frequenza caratteristica di propagazione non può essere mai la più piccola, e quindi f_R è la più piccola tra f_r e $f_{ind} \leq f_d$.

Cosa accade se la tensione $v(t)$ e la corrente $i(t)$ non sono sinusoidali? Se sono verificate alcune condizioni, che non sono affatto restrittive dal punto di vista applicativo, è sempre possibile rappresentare qualsiasi funzione tramite una somma discreta o continua di opportune funzioni sinusoidali con diverse frequenze. Pertanto, se le frequenze delle sinusoidi significative, che compongono le funzioni del tempo rappresentative della tensione e della corrente, verificano la condizione $0 \leq f < f_R$, il funzionamento del resistore obbedisce ancora alla relazione costitutiva (43).

Possiamo così riassumere. Se $0 \leq f < f_R$, il funzionamento del resistore è descritto abbastanza accuratamente dal modello del campo stazionario di corrente e quindi la (43) è la relazione tra la corrente $i = i(t)$ e la tensione $v = v(t)$ provvedendo che gli accoppiamenti induttivi con gli altri componenti siano trascurabili. Un resistore viene progettato e realizzato in maniera tale che l'intervallo di frequenze $(0, f_R)$ sia quanto più ampio possibile. Usando particolari geometrie è possibile realizzare resistori con $f_R \approx 100\text{MHz}$.

A questo punto possiamo introdurre il modello del resistore ideale, cioè il *bipolo resistore*. La relazione caratteristica del bipolo resistore è

$$v(t) = Ri(t). \quad (46)$$

La relazione (46) è lineare⁸ e di tipo istantaneo, cioè la tensione di un resistore in un generico istante t dipende solo dal valore della corrente in quell'istante (e viceversa) e non dalla storia precedente, tramite una relazione di diretta proporzionalità. Il simbolo del bipolo resistore è illustrato in figura 15.

⁸ La relazione $f(x)$ si dice lineare se, comunque si scelgano x_1 e x_2 e le costanti α_1 e α_2 si ha $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$; la funzione Kx è lineare (K è una costante), mentre $Kx+h$, x^2 , ... non sono lineari.

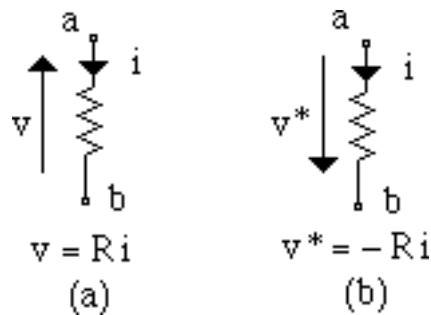


Figura 15 Simbolo del bipolo resistore ideale.

1.8 Il generatore di tensione costante

Il componente fisico, a cui si dà il nome di *generatore di tensione costante* (ad esempio, una pila), può essere schematizzato tramite una barretta a forma cilindrica (come nel caso del resistore), figura 16. La relazione costitutiva del materiale conduttore con cui è realizzata la barretta è

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}^* = \eta \mathbf{J}, \quad (47)$$

dove η è la resistività del materiale ed $\mathbf{E}^*$ è un campo elettromotore noto, indipendente sia da $\mathbf{E}$ che da $\mathbf{J}$ (ad esempio, in una pila è di natura chimica). La barretta è annegata in un materiale isolante. Per semplicità si assuma $\mathbf{E}^*$ uniforme nella barretta e diretto lungo l'asse di simmetria del cilindro. Come nel resistore, ai due estremi della barretta sono connessi elettricamente due conduttori con elevata conducibilità.

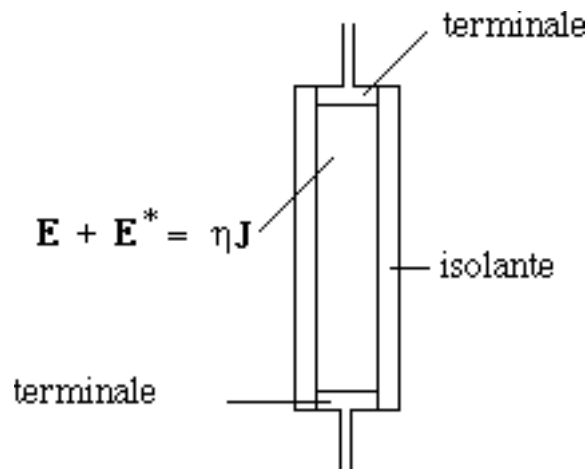


Figura 16 Rappresentazione schematica di una pila.

L'analisi di questo componente è, in sostanza, identica a quella svolta per il resistore e le leggi del campo sono le stesse. In particolare il potenziale elettrico deve verificare ancora l'equazione di Laplace nella barretta, perché sia η che $\mathbf{E}^*$ sono uniformi e quindi la divergenza di $\mathbf{E}$ è nulla. Inoltre deve verificare le stesse condizioni al contorno sulle interfaccia tra la barretta e i terminali e sulla superficie laterale di contatto con l'isolante (quest'ultima deriva dal fatto che, avendo assunto il campo elettromotore $\mathbf{E}^*$ diretto come l'asse del cilindro, la componente normale di $\mathbf{E}^*$ sulla superficie laterale è nulla). Pertanto sia la funzione potenziale che il campo elettrico hanno la stessa espressione ottenuta per il resistore (vedi la (39) e la (40)). L'espressione del campo $\mathbf{J}$ sarà diversa

perché è diversa la relazione costitutiva. Sostituendo la (47) nella (40), si ottiene (l è la lunghezza della barretta)

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\eta} \left(-\frac{v}{l} + E^* \right) \hat{\mathbf{z}}, \quad (48)$$

quindi, la corrente i vale

$$i = \frac{S}{\eta l} (v - E^* l). \quad (49)$$

La (49) può essere riscritta nella forma

$$v = R_g i + V_0, \quad (50)$$

dove

$$\begin{aligned} R_g &= \frac{\eta l}{S}, \\ V_0 &= E^* l. \end{aligned} \quad (51)$$

Alla grandezza R_g si dà il nome di *resistenza interna del generatore* (la resistenza che si avrebbe se fosse $E^* = 0$) e a V_0 il nome di *tensione a vuoto* (la tensione che si ha quando la corrente è nulla). La relazione (50) è la *relazione caratteristica del generatore reale di tensione*. Come nel caso del resistore, essa descrive adeguatamente il funzionamento di un generatore di tensione costante se le frequenze delle armoniche più significative, che compongono le funzioni del tempo rappresentative della tensione e della corrente, verificano la condizione $0 \leq f < f_G$; f_G è una frequenza caratteristica che ha una struttura simile a quella introdotta nel caso del resistore.

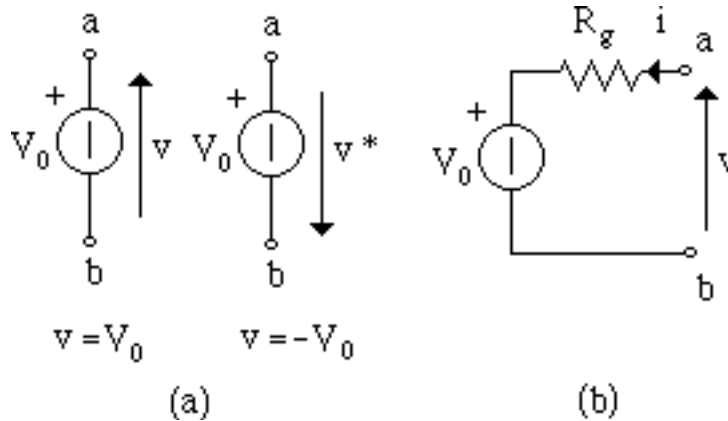


Figura 17 (a) Il simbolo del generatore ideale di tensione; (b) circuito equivalente del generatore di tensione “reale”.

Ogni generatore è realizzato ed è fatto funzionare in modo tale che gli effetti della resistenza interna siano trascurabili. Una generatore di tensione è caratterizzato da una resistività molto piccola, al limite tendente a zero. La caratteristica del *generatore ideale di tensione* ($R_g = 0$) è

$$v = V_0. \quad (52)$$

La tensione di un generatore ideale di tensione, quindi, non dipende dalla corrente che in esso circola. In figura 17a viene mostrato il simbolo del generatore di tensione ideale. Il contrassegno “+” sta a

indicare il riferimento per il verso della tensione a vuoto. Un generatore di tensione reale può essere rappresentato attraverso un bipolo generatore ideale di tensione V_0 in serie con un resistore di resistenza R_g , figura 17b.

La tensione di un generatore di tensione può anche variare nel tempo, come ad esempio negli alternatori o nei generatori di segnale.

1.9 Il condensatore

Il componente, a cui si dà il nome di condensatore, può essere schematizzato tramite due armature (due corpi conduttori), tra le quali è interposto un dielettrico (figura 18) con costante dielettrica relativa abbastanza più grande di uno. Sia le armature che i terminali hanno elevatissima conducibilità elettrica. Si assuma che il dielettrico sia perfettamente isolante, lineare, omogeneo ed isotropo e che i conduttori abbiano conducibilità infinita.

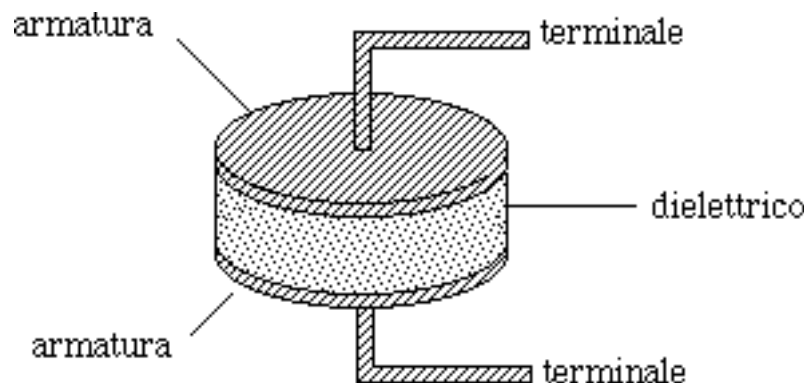


Figura 18 Schematizzazione di un condensatore.

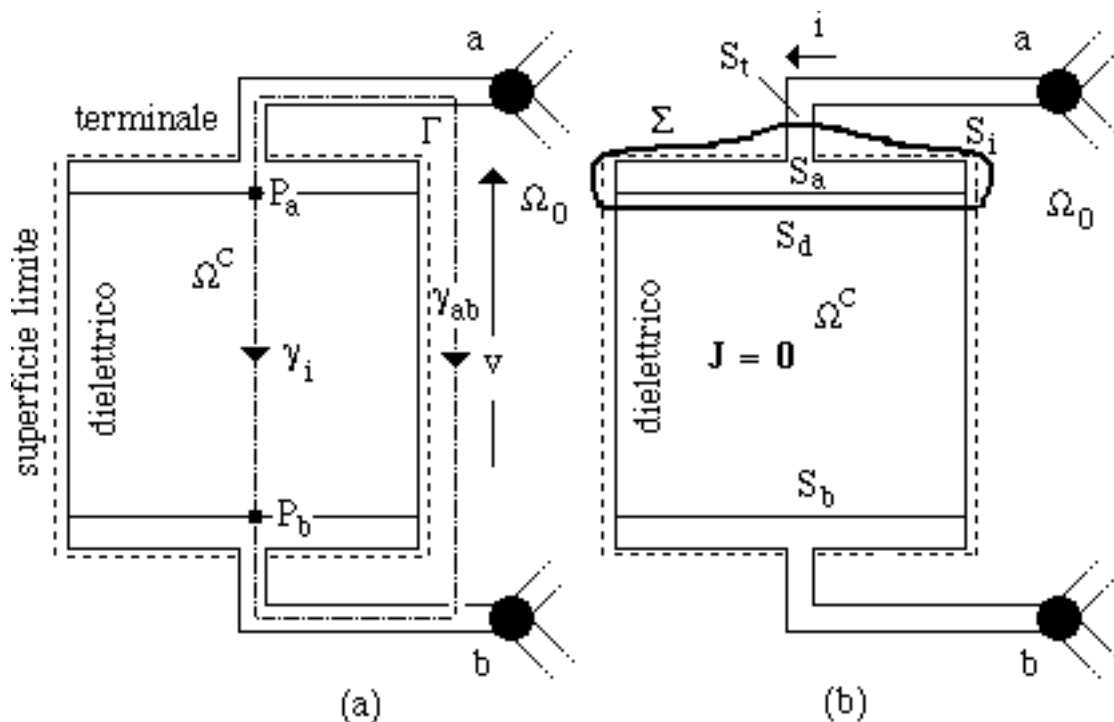


Figura 19

Per caratterizzare il funzionamento del condensatore bisogna determinare la relazione tra la tensione $v(t)$ e la corrente $i(t)$, così come abbiamo fatto per il resistore e il generatore (si suppone sempre che il componente in esame sia inserito in un circuito). La regione occupata dal dielettrico è indicata con Ω^c (figura 19); si noti che in qualsiasi condizione di funzionamento $\mathbf{J}=\mathbf{0}$ in Ω^c .

La tensione v del condensatore (il riferimento per il verso è mostrato in figura 19a) è l'integrale di linea di $\mathbf{E}$ lungo la curva orientata γ_{ab} che unisce i punti P_a e P_b appartenenti, rispettivamente, ai terminali “a” e “b”; la corrente i (con il riferimento per il verso mostrato in figura 19b) è il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la superficie S_t , che taglia il terminale “a”, orientata concordemente con il riferimento scelto per i , secondo la convenzione dell'utilizzatore.

Applicando, come nel resistore, la legge di Faraday-Neumann alla linea chiusa orientata Γ , ottenuta unendo il tratto γ_{ab} con il tratto γ_i (il verso di percorrenza di Γ è quello concorde con il verso di γ_{ab} , figura 19a), si ottiene

$$v = \int_{\gamma_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \frac{d\Phi_\Gamma}{dt}, \quad (53)$$

dove Φ_Γ è il flusso del campo magnetico $\mathbf{B}$ concatenato con Γ .

Applicando, ora, la legge della conservazione della carica alla superficie chiusa orientata Σ , ottenuta unendo le superfici S_d , S_t e S_i (S_d è una superficie aperta che taglia il dielettrico e S_i è una superficie passante per il vuoto, figura 19b), si ha

$$i = \frac{d}{dt} \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dQ_\Sigma}{dt}, \quad (54)$$

dove Q_Σ è la carica libera all'interno di Σ ; il flusso di corrente attraverso S_d è nullo perché nel dielettrico è $\mathbf{J}=\mathbf{0}$. In un dielettrico ideale non ci sono cariche libere, perché inizialmente abbiamo $\rho_{lib} = 0$ e in ogni istante successivo è $\partial\rho/\partial t = -\text{div}\mathbf{J} = 0$. Pertanto Q_Σ è uguale alla sola carica libera di tipo superficiale, che si trova sull'armatura “a” del condensatore, e quindi:

$$i(t) = \frac{dQ_a}{dt}. \quad (55)$$

Qual è il legame tra la carica $Q_a = Q_a(t)$ e la tensione $v=v(t)$?

1.9.1 Limite lentamente variabile

Per descrivere il funzionamento del condensatore non è possibile trascurare gli effetti dovuti alla corrente di spostamento, altrimenti dalla (54) avremmo sempre $i=0$. In condizione di funzionamento lentamente variabile ($0 \leq f < f_c$, dove f_c è una frequenza caratteristica del condensatore; in seguito vedremo quanto vale), invece, possono essere trascurabili i fenomeni di induzione elettromagnetica,

$$v \cong \int_{\gamma_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_p. \quad (56)$$

Pertanto, il funzionamento del condensatore nel limite lentamente variabile è descritto abbastanza accuratamente dal modello quasi-stazionario elettrico. Il campo elettrico nella regione Ω^c (Ω^c è la

regione riempita di dielettrico con costante dielettrica ϵ) è descritto dalle equazioni (abbiamo già visto che nel dielettrico è assente la carica libera):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (58)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (59)$$

Come per il resistore, il campo elettrico è irrotazionale, quindi $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ dove $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ è il potenziale scalare. Siccome la costante dielettrica è uniforme, dalle equazioni (58) e (59) si ottiene che anche il campo elettrico ha divergenza nulla in Ω^c . Da queste considerazioni si ha immediatamente

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^c. \quad (60)$$

Allo scopo di determinare le condizioni al contorno, si decomponga il contorno $\partial\Omega^c$ di Ω^c in tre parti: S_a base superiore (regione di contatto armatura “a” - dielettrico); S_b base inferiore (regione di contatto armatura “b” - dielettrico); S_l superficie laterale (interfaccia dielettrico-vuoto).

Le armature sono realizzate con conduttori ideali, quindi in essi il campo elettrico è nullo. Utilizzando la continuità della componente tangente del campo elettrico attraverso qualsiasi superficie, si ottiene che essa è nulla sia su S_a che su S_b e quindi su ognuna di queste superfici la funzione potenziale deve essere necessariamente uniforme. Possiamo porre, pertanto,

$$\begin{aligned} \varphi &= V_a \quad \text{su} \quad S_a, \\ \varphi &= V_b \quad \text{su} \quad S_b; \end{aligned} \quad (61)$$

V_a e V_b sono, rispettivamente, i potenziali elettrici dei terminali “a” e “b”, e sono legati alla tensione del condensatore dalla relazione:

$$v = V_a - V_b, \quad (62)$$

(il riferimento per il verso di v è segnato in figura 19a).

Siccome su S_l non c'è carica superficiale libera (essa è inizialmente assente e in ogni istante successivo è $\partial\sigma/\partial t = -\mathbf{n}_l \cdot (\mathbf{J}^d - \mathbf{J}^v) = 0$ perché $\mathbf{J} = \mathbf{0}$), sull'interfaccia dielettrico-vuoto bisogna imporre la continuità della componente normale di $\mathbf{D}$. Pertanto la derivata normale della funzione potenziale è data da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_n^v \quad \text{su} \quad S_l, \quad (63)$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto. Si assuma $\epsilon_0/\epsilon \ll 1$. In questo limite è ragionevole operare la seguente approssimazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cong 0 \quad \text{su} \quad S_l. \quad (64)$$

Con questa approssimazione le condizioni al contorno per la funzione potenziale sono le stesse del caso del resistore. Si noti che fino a questo momento l'impostazione del problema è stata del tutto generale (non è stato mai fatto riferimento alla particolare geometria considerata).

Nel caso particolare in esame anche la geometria è la stessa di quella considerata per il resistore. Pertanto si ha

$$\varphi(z) = \frac{V}{d} z + V_b \quad \text{per } 0 \leq z \leq d, \quad (65)$$

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{V}{d}, \quad (66)$$

dove d è la distanza tra le due armature; si sta utilizzando il sistema di riferimento usato nel caso del resistore.

Ora bisogna determinare la carica sull'armatura "a" (sull'interfaccia armatura "a" - dielettrico si ha una carica superficiale libera perché nell'armatura metallica c'è una corrente di conduzione). Essa è determinata applicando la legge

$$D_{nd} - D_{na} = \sigma_a, \quad (67)$$

all'interfaccia armatura "a" - dielettrico; σ_a è la densità di carica superficiale e la normale $\mathbf{n}$ deve puntare verso il dielettrico. Il campo elettrico nel dielettrico è dato dalla (66), invece il campo elettrico nell'armatura è nullo, quindi si ha

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon}{d} V; \quad (68)$$

si noti che $\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{z}}$. Siccome la densità di carica è uniforme su S_a , la carica sull'armatura "a" vale

$$Q_a = S \frac{\varepsilon}{d} V. \quad (69)$$

In questo ultimo passaggio è stata fatta un'ulteriore approssimazione, cioè è stata ignorata la carica che eventualmente si trova sulla restante parte dell'armatura (nella (69) è stata tenuta in conto solo la carica sull'interfaccia armatura-dielettrico; il contributo ignorato è trascurabile se $\varepsilon_0/\varepsilon \ll 1$).

Osservazione

Come nel caso del resistore, il campo elettrico all'interno del condensatore dipende solo dalla tensione $v(t)$ ad esso applicata. Ricordiamo, però, che nel caso del condensatore questa proprietà è una conseguenza dell'approssimazione (64), invece nel resistore è verificata esattamente. Essa sarebbe verificata esattamente solo se fosse $\varepsilon_0 / \varepsilon \rightarrow 0$, ad esempio dovrebbe essere nulla la costante dielettrica del vuoto oppure infinita la costante dielettrica del dielettrico (in un mondo immaginario, dove fosse $\varepsilon_0 = 0$, non si avrebbe propagazione).

Cosa accadrebbe qualora l'approssimazione (64) non fosse valida? In questo caso continua a valere la (63); la difficoltà è che il termine E_n^v nella (63) non è noto. Per determinarlo bisogna calcolare il campo nella regione esterna al condensatore. Esso, in linea di principio, dipenderà da tutto ciò che all'esterno della sua superficie limite. Quindi, se l'approssimazione (64) non fosse valida, il campo elettrico nel condensatore non dipenderebbe solo dalla tensione sul condensatore ma anche dalla restante parte del circuito. Ad esempio, non sarebbero trascurabili gli effetti dovuti ai fenomeni di induzione elettrostatica che nascerebbero dall'interazione con gli altri corpi conduttori (alcuni di questi effetti potrebbero essere schematizzati attraverso capacità parziali che dipenderebbero dalla

distanza tra i componenti). È evidente che in questo caso verrebbe meno l'ipotesi (α) e non avrebbe più significato il concetto di bipolo. In realtà, pur non essendo verificata la (64), gli effetti dovuti all'accoppiamento con le altre parti metalliche del circuito sono praticamente insignificanti per come sono realizzati i condensatori e per le distanze minime tra i componenti imposte dalla loro stessa dimensione. Allora, se gli effetti dovuti all'accoppiamento con le altre parti del circuito sono trascurabili, il problema esterno alla superficie limite è anch'esso descritto dall'equazione di Laplace, con condizioni di regolarità all'infinito per il potenziale. Per calcolare il potenziale in tutto lo spazio bisogna imporre sull'interfaccia dielettrico-vuoto, oltre alla continuità della componente normale di $\mathbf{D}$, anche la continuità della funzione potenziale (questa continuità garantisce la continuità della componente tangente del campo elettrico). Questo calcolo non può essere svolto analiticamente, ma solo per via numerica attraverso tecniche approssimate. Con queste approssimazioni, cioè o vale la (64), oppure sono trascurabili gli effetti dovuti all'accoppiamento con le altre parti metalliche del circuito, il condensatore è un *sistema isolato*. Di conseguenza le cariche sulle due armature non possono che essere, in ogni istante, uguali in valore assoluto ed opposte in segno, cioè $Q_a = -Q_b$ (il condensatore è supposto inizialmente scarico), e quindi la carica totale deve essere nulla (condensatore a *induzione completa*). In queste condizioni di funzionamento la relazione (7), applicata a una qualsiasi superficie chiusa che contenga il condensatore, non è che una esatta conseguenza della legge della conservazione della carica. In particolare si ha $i_a = i_b = i$ (i_a è la corrente entrante nel terminale “a” e i_b è la corrente uscente dall'altro terminale). Nel caso in cui l'approssimazione di condensatore a induzione completa non valesse, bisognerebbe considerare il contributo alla carica dovuto a tutti gli altri conduttori presenti nel circuito. Ciò può essere realizzato tramite le capacità parziali.

La (69) è la relazione costitutiva del condensatore e può essere così riscritta

$$Q_a = C v, \quad (70)$$

dove

$$C = \epsilon \frac{S}{d}. \quad (71)$$

Il parametro fisico C prende il nome di *capacità* del condensatore.

Osservazione

A seconda dell'applicazione, variano sia le geometrie (condensatori a multi strato, film metallizzati, etc), che i materiali (elettroliti, mica, tantalio, etc), con cui si realizzano i condensatori.

La capacità è un parametro che può essere definito per qualsiasi tipo di forma del condensatore, purché il dielettrico sia lineare e il condensatore sia, con buona approssimazione, a induzione completa. Come per i resistori, per geometrie complesse bisogna ricorrere ai metodi numerici per determinare il campo elettrico all'interno del dielettrico.

Definizione: Capacità

La capacità C di un condensatore (a induzione completa) è il rapporto tra la carica Q_a accumulata su un'armatura e la tensione $v = V_a - V_b$ tra le armature (la freccia di riferimento per la tensione deve puntare verso l'armatura sulla quale si considera la carica),

$$C \equiv Q_a / v = \left(\oint_{\Sigma_a} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \right) / (V_a - V_b). \quad (72)$$

Questo rapporto è indipendente dalla tensione e dalla carica perché la relazione costitutiva del dielettrico è lineare e si suppone che il condensatore sia a induzione completa. La capacità è positiva perché la costante dielettrica è positiva.

La relazione (70), tramite questo parametro, descrive completamente il funzionamento del condensatore, indipendentemente dal modo e dal circuito in cui è inserito; essa dipende solo dalla geometria e dalla costante dielettrica del materiale. L'unità di misura della capacità è il *farad* (F): $1F = 1C/1V$; è molto frequente l'uso dei sottomultipli $1mF = 10^{-3} F$ (milli farad), $1\mu F = 10^{-6} F$ (micro farad), $1nF = 10^{-9} F$ (nano farad), $1pF = 10^{-12} F$ (pico farad).

Nel caso stazionario la corrente nel condensatore è nulla come si vede dall'equazione (54): il condensatore si comporta come un resistore con resistenza infinita, cioè per ogni valore di tensione la corrente è identicamente nulla. Ciò è dovuto al fatto che il dielettrico ideale ha conducibilità elettrica nulla. In realtà se si portassero in conto gli effetti della piccolissima conducibilità di un dielettrico “reale”, nel limite stazionario il condensatore si comporterebbe come un resistore, con una resistenza elettrica elevatissima $R_c = \eta_c \epsilon / C$, dove η_c è la resistività del dielettrico “reale”.

1.9.2 Cosa accade quando $f > f_c$?

Al crescere del valore della frequenza (diciamo, per $f > f_c$), il fenomeno dell'induzione elettromagnetica diventa non più trascurabile, il campo elettrico non può essere più ritenuto irrotazionale e nella (53) non è più trascurabile il termine $d\Phi_T / dt$. La relazione tra la carica e la tensione comincia a dipendere dalla frequenza. La frequenza caratteristica f_i , al di sopra della quale ciò avviene, è inversamente proporzionale al raggio r_0 dell'armatura e la costante di proporzionalità è la velocità di propagazione della luce nel dielettrico, $f_i \approx c_d / r_0$ dove $c_d = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0}$. Poi, man mano che la frequenza cresce ancora, comincia a non essere più trascurabile il fenomeno della propagazione del campo elettromagnetico. Il componente può irraggiare in misura significativa energia nello spazio circostante sotto forma di energia elettromagnetica. Esso diventa, in sostanza, una vera e propria antenna.

Un'altra limitazione in frequenza è dovuta al dielettrico: esistono frequenze caratteristiche nell'intorno delle quali la costante dielettrica varia al variare della frequenza e quindi la relazione costitutiva (59) non è più valida. La frequenza caratteristica f_c è la più piccola tra queste frequenze. Al di sopra della frequenza f_c il funzionamento del componente dipende ancora dalla sola tensione e corrente, se gli effetti dovuti agli accoppiamenti induttivi e propagativi con gli altri componenti sono trascurabili, ma il legame tra tensione e carica elettrica è dipendente dalla frequenza e quindi non è più di tipo statico come quello definito dalla relazione costitutiva (70).

In conclusione possiamo dire che, se le tensioni e le correnti variano lentamente (cioè le frequenze delle sinusoidi significative che compongono $v(t)$ e $i(t)$ verificano la condizione $0 \leq f < f_c$), il

funzionamento del condensatore è descritto abbastanza accuratamente dal modello quasi-stazionario elettrico e la (70) insieme alla (54) descrivono la relazione tra la corrente e la tensione, provvedendo che siano trascurabili gli effetti dovuti al fenomeno di induzione elettrostatica. Un condensatore viene progettato e realizzato in maniera tale che l'intervallo di frequenze $(0, f_c)$ sia quanto più ampio possibile. Usando particolari geometrie e dielettrici è possibile realizzare condensatori con $f_c \approx 100\text{MHz}$.

Per distinguere il modello del condensatore dal componente reale, si usa il simbolo mostrato in figura 20. Il funzionamento del bipolo condensatore ideale è descritto da

$$\begin{cases} i = \frac{dQ}{dt} \\ Q = Cv \end{cases} \quad (73)$$

se si adotta la convenzione dell'utilizzatore. Se la capacità è costante nel tempo si ottiene

$$i = C \frac{dv}{dt}. \quad (74)$$

La (74) è la relazione costitutiva di un condensatore lineare e tempo invariante. Questa relazione è di tipo dinamico, a differenza di quanto accade per il resistore: in un condensatore la corrente in un generico istante dipende dal valore della derivata della tensione in quell'istante, e quindi dalla storia della tensione in un intorno di quell'istante. Dall'equazione (74) si ottiene la relazione costitutiva in forma integrale, cioè

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (75)$$

Dalla (75) è ancora più evidente il fatto che il legame tra la tensione e la corrente di un condensatore è di tipo dinamico: la tensione all'istante t dipende dalla tensione all'istante t_0 e dalla storia della corrente nell'intervallo (t_0, t) .

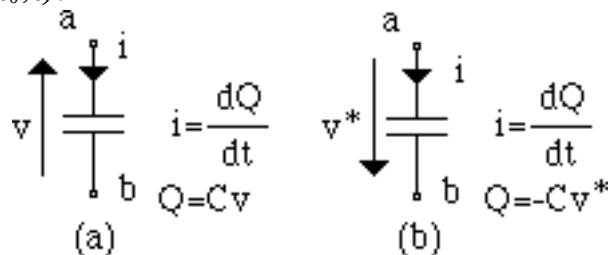


Figura 20 Simbolo del bipolo condensatore ideale lineare e tempo-invariante.

1.10 L'induttore

Un induttore è costituito da un avvolgimento di molte spire (figura 21), realizzato con conduttore “filiforme” (la superficie del conduttore è smaltata con vernice isolante) di elevata conducibilità elettrica. Il supporto materiale, sul quale è avvolto il filo conduttore, può avere diverse forme (ad esempio, cilindrica, toroidale) e può essere fatto di materiale con permeabilità magnetica confrontabile con quella del vuoto (come, ad esempio, la plastica) oppure di materiale ferromagnetico (come, ad esempio, il ferro dolce, la ferrite, etc).

Si assuma che le proprietà magnetiche del supporto siano descrivibili tramite una relazione costitutiva $\mathbf{B}$ - $\mathbf{H}$ lineare, omogenea e isotropa (i fenomeni di saturazione, di isteresi e di anisotropia vengono ignorati qualora il supporto fosse fatto di materiale ferromagnetico). Inoltre si assuma infinita la conducibilità del conduttore.

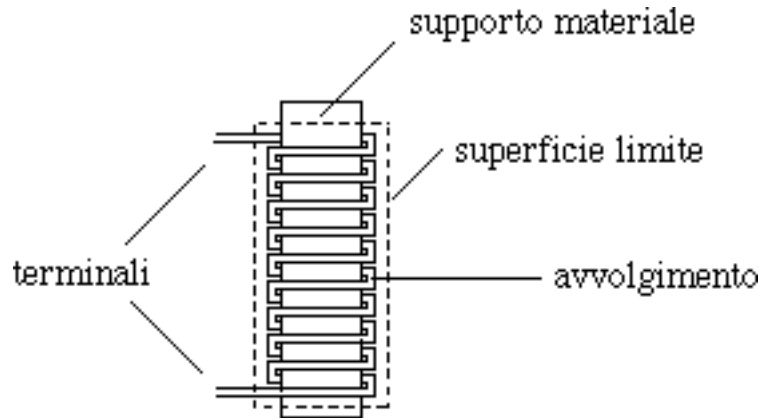


Figura 21 Rappresentazione schematica di un induttore.

Per caratterizzare il funzionamento dell'induttore bisogna determinare la relazione tra la tensione $v=v(t)$ e la corrente $i=i(t)$; come al solito, si supponga che l'induttore sia inserito in un circuito (figura 22). Si noti che in qualsiasi condizione di funzionamento $\mathbf{E}=\mathbf{0}$ all'interno del conduttore.

La tensione v dell'induttore (con il riferimento per il verso mostrato in figura 22a) è l'integrale di linea di $\mathbf{E}$ lungo la curva orientata γ_{ab} che unisce i punti P_a e P_b appartenenti, rispettivamente, ai terminali "a" e "b" (in generale i terminali sono realizzati con lo stesso filo conduttore con cui è realizzato l'avvolgimento). La corrente i (con il riferimento per il verso mostrato in figura 22b) è il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la superficie S_t , che taglia il terminale "a", orientata concordemente con il riferimento scelto per il verso di i .

Applicando la legge di Faraday-Neumann alla linea chiusa orientata Γ , ottenuta unendo il tratto γ_{ab} con il tratto γ_c interno al conduttore (il verso di percorrenza di Γ coincide con quello di γ_{ab} , figura 22a), si ottiene

$$v = -\frac{d\Phi_\Gamma}{dt}, \quad (76)$$

dove Φ_Γ è il flusso del campo magnetico $\mathbf{B}$ concatenato con Γ (il contributo del tratto γ_c alla circuitazione di $\mathbf{E}$ è nullo).

Applicando la legge della conservazione della carica alla superficie chiusa orientata Σ ottenuta unendo le superfici S_c , S_t e S_v (S_c è una generica sezione orientata dell'avvolgimento con la normale che punta verso l'esterno di Σ e S_v è una superficie passante per il vuoto, figura 22b), si ha

$$i = \iint_{S_c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \iint_{S_v} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (77)$$

Qual è il legame tra il flusso $\Phi_\Gamma = \Phi_\Gamma(t)$ e la corrente $i=i(t)$?

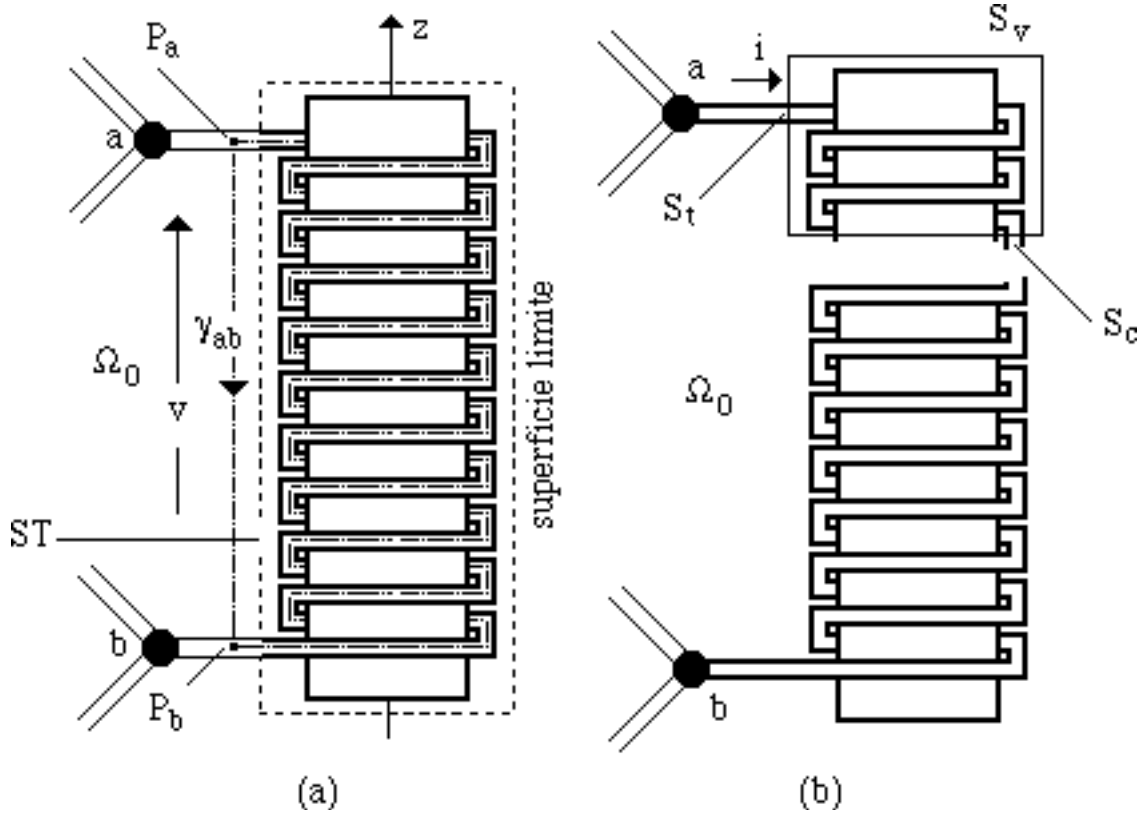


Figura 22

1.10.1 Limite lentamente variabile

Per descrivere il funzionamento dell'induttore non è possibile trascurare gli effetti dovuti all'induzione elettromagnetica, altrimenti dalla (76) avremmo sempre $v=0$. In condizione di funzionamento lentamente variabile (ovvero per $0 \leq f < f_I$, dove f_I è una frequenza caratteristica dell'induttore; in seguito vedremo quanto vale), invece, sono trascurabili i fenomeni di induzione magnetoelettrica e quindi gli effetti della corrente di spostamento,

$$i(t) \cong \iint_{S_c} \mathbf{J}(\mathbf{P};t) \cdot \mathbf{n} dS_p. \quad (78)$$

Il funzionamento dell'induttore nel limite lentamente variabile è descritto in modo abbastanza accurato dal modello quasi-stazionario magnetico.

Nel modello quasi-stazionario magnetico il campo magnetico nella regione Ω' (Ω' è la regione racchiusa dalla superficie limite dell'induttore) è descritto dalle equazioni (in questo caso risulta conveniente utilizzare la formulazione integrale delle leggi del campo magnetico):

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (79)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_{S_\gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (80)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (81)$$

Sulla superficie limite $\partial\Omega'$ bisogna imporre la continuità della componente normale di $\mathbf{B}$ e della componente tangente di $\mathbf{H}$.

Nel funzionamento stazionario il campo di corrente è solenoidale, quindi il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso qualsiasi sezione S_c dell'avvolgimento è uguale alla corrente i ; di conseguenza la corrente è uniforme lungo l'avvolgimento.

I campi $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ sono indipendenti dalla coordinata azimutale θ perché la struttura è assi-simmetrica (le spire di conduttore filiforme sono serrate). Le equazioni (79)-(81) consentono di calcolare in maniera molto semplice il campo $\mathbf{H}$ e quindi $\mathbf{B}$ all'interno del solenoide cilindrico (figura 23) se si assume che il campo è anche uniforme lungo l'asse. Questa ipotesi sarebbe esattamente verificata se il solenoide avesse lunghezza infinita. Comunque il campo di un solenoide di lunghezza illimitata approssima abbastanza bene il campo all'interno di un solenoide lungo, cioè un solenoide la cui lunghezza è molto più grande del raggio.

Si cerchi la soluzione delle equazioni (79)-(81) nella forma

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{r}}H_r(r) + \hat{\boldsymbol{\theta}}H_\theta(r) + \hat{\mathbf{z}}H_z(r), \quad (82)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}}B_r(r) + \hat{\boldsymbol{\theta}}B_\theta(r) + \hat{\mathbf{z}}B_z(r). \quad (83)$$

Prima di tutto si dimostrerà che le componenti radiali sono identicamente nulle. A tale scopo si applichi la legge della conservazione del flusso (79) alla superficie chiusa orientata Σ (Σ è costituita dall'unione delle due superfici di base S_1 e S_2 e dalla superficie laterale S_3) a forma di cilindro mostrata in figura 23; si ha

$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS + \iint_{S_3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_3 dS = 0. \quad (84)$$

È immediato verificare che, essendo il campo $\mathbf{B}$ indipendente da z , il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso S_1 è uguale all'opposto del flusso attraverso S_2 (l'orientazione di S_1 è discorde con quella di S_2). Pertanto dalla (84) si ha che il flusso attraverso la superficie cilindrica S_3 deve essere identicamente nullo per ogni possibile S_3 , cioè

$$\iint_{S_3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_3 dS = 0. \quad (85)$$

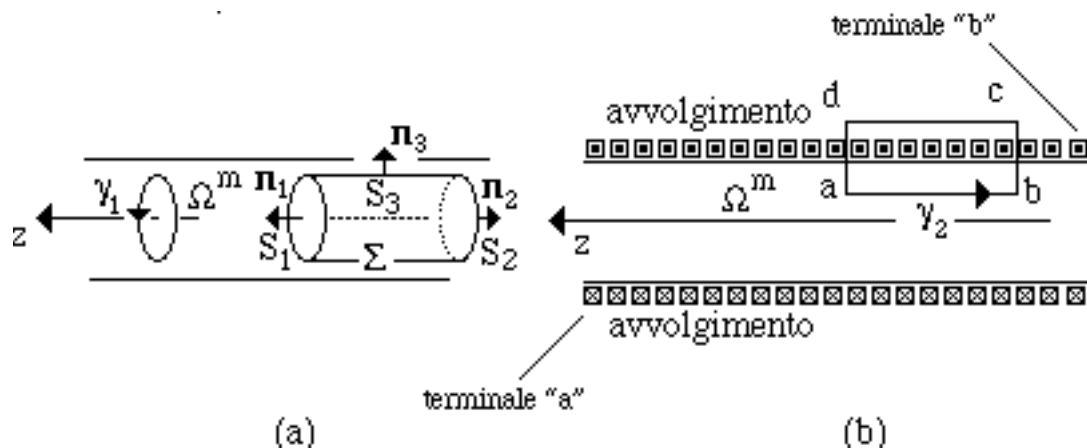


Figura 23 □ indica che il riferimento per la corrente è uscente dal foglio, mentre ⊗ indica che è entrante.

Siccome la normale a S_3 è diretta radialmente e il campo è indipendente dalla coordinata azimutale, la componente radiale di $\mathbf{B}$ deve essere identicamente nulla; la (81) implica che anche la componente radiale di $\mathbf{H}$ deve essere nulla ovunque.

Anche la componente azimutale del campo $\mathbf{H}$ è identicamente nulla. Per dimostrarlo basta applicare la legge di Ampere (80) alla curva γ_1 mostrata in figura 23a. Essa è una circonferenza di raggio r con l'asse coincidente con quello del solenoide; quindi il versore $\mathbf{t}$ a essa tangente coincide con il versore fondamentale $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e la circuitazione vale

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = 2\pi r H_{\theta}(r). \quad (86)$$

Siccome γ_1 non concatena nessuna corrente, dalla (86) si ha che $H_{\theta}(r)=0$ e quindi dalla (81) $B_{\theta}(r)=0$.

Infine bisogna determinare la componente H_z . Per determinarla basta applicare la legge di Ampere alla curva orientata γ_2 ; si ottiene

$$\int_{ab} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{bc} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{cd} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{da} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = n i, \quad (87)$$

dove n è il numero di spire concatenate dalla curva γ_2 . I termini relativi ai tratti b-c e d-a sono nulli perché il campo non ha componente radiale. Quindi si ha

$$\int_{ab} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = n i - \int_{cd} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl. \quad (88)$$

Il termine relativo al tratto c-d dipende dal campo all'esterno del solenoide. Questo campo, nel limite di solenoide lungo, non dipende dalle correnti che circolano nel solenoide: esso dipende solo da eventuali altre correnti presenti nello spazio circostante. Pertanto, il campo magnetico in Ω' dipende sia dalla corrente che circola nell'induttore, sia dalle correnti che circolano nelle altre parti del circuito (anche se queste correnti non compaiono nell'equazione (80), il loro effetto entra tramite le condizioni al contorno su $\partial\Omega'$). È possibile progettare e realizzare il circuito e il componente in modo tale che questa influenza non abbia effetti importanti (nei casi più difficili si possono utilizzare degli schermi magnetici). Si assuma che gli effetti delle altre correnti siano trascurabili, quindi l'unica sorgente del campo magnetico $\mathbf{B}$ presente nel solenoide sia la corrente circolante nell'avvolgimento. Allora abbiamo

$$\int_{cd} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl \cong 0, \quad (89)$$

$$H_z(r) \cong -\left(\frac{n}{h}\right)i, \quad (90)$$

dove h è la lunghezza del tratto a-b. È ragionevole assumere che il filo conduttore sia avvolto in maniera (N/l) uniforme. In questo caso (n/h) è il numero di spire per unità di lunghezza ed è uguale a N/l dove N è il numero di spire dell'avvolgimento e l è la lunghezza del solenoide. Si noti che H_z è indipendente da r , quindi il campo è uniforme. Utilizzando la relazione costitutiva (81) si ha

$$\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}}\mu\left(\frac{N}{l}\right)i. \quad (91)$$

Il campo magnetico all'interno del supporto materiale dell'avvolgimento dipende solo dalla corrente dell'induttore, nel resistore e nel condensatore il campo elettrico dipende solo dalla tensione applicata. Ricordiamo, però, che questa proprietà è una conseguenza dell'approssimazione (89); in questo modo vengono ignorati gli effetti dovuti alle correnti circolanti nella parte restante del

circuito. Anche nel condensatore la corrispondente proprietà era il risultato di una approssimazione, l'approssimazione (64); in quel caso venivano ignorati gli effetti dovuti alle cariche presenti sugli altri corpi conduttori del circuito. Cosa accadrebbe qualora questa approssimazione non fosse valida? In questo caso il campo magnetico $\mathbf{B}$ all'interno del solenoide dipenderebbe sensibilmente dalle correnti che circolano negli altri componenti.

Ora bisogna determinare il flusso concatenato con la curva chiusa Γ . Esso è la somma di due contributi. Il primo, che è anche quello più rilevante, è il flusso concatenato con le N spire dell'avvolgimento; il secondo è il flusso attraverso la striscia ST mostrata in figura 22a. Questo secondo termine è trascurabile, sia perché il campo all'esterno del solenoide è trascurabile e sia perché la sua area è molto più piccola dell'area equivalente a quella delle N spire. Siccome il campo $\mathbf{B}$ è uniforme ed è diretto normalmente al piano della spira, il flusso ϕ concatenato con una spira vale (si ricordi che la singola spira deve essere orientata concordemente con il verso di Γ)

$$\phi = -\mu \frac{S}{l} N i. \quad (92)$$

Pertanto $-\Phi_\Gamma$ è dato da

$$-\Phi_\Gamma = \mu \frac{S}{l} N^2 i. \quad (93)$$

Nella letteratura si definisce il flusso Φ concatenato con un circuito (il flusso dell'induttore) orientando la normale concordemente al riferimento scelto per il verso della corrente i ; invece Φ_Γ è definito orientando la normale concordemente al riferimento scelto per la tensione. Quando si usa la convenzione dell'utilizzatore le due orientazioni sono discordi, invece quando si usa la convenzione del generatore sono concordi. In queste lezioni si userà sempre la convenzione dell'utilizzatore, e quindi vale la relazione

$$\Phi = -\Phi_\Gamma, \quad (94)$$

e il flusso Φ dell'induttore vale

$$\Phi = \left(\mu \frac{S}{l} N^2 \right) i, \quad (95)$$

e la (76) diventa

$$v = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (96)$$

La (95) è la relazione caratteristica dell'induttore lineare, che riscriviamo nel modo seguente

$$\Phi = Li, \quad (97)$$

dove

$$L = \left(\frac{S}{l} N^2 \right) \mu. \quad (98)$$

Il parametro fisico L prende il nome di *induttanza* dell'induttore o *coefficiente di autoinduzione*.

Osservazione

A seconda dell'applicazione, variano sia le geometrie (solenoidi cilindrici corti, solenoidi toroidali, etc), che i materiali (ferro dolce, ferriti, materiali non magnetici, etc), con cui si realizzano gli induttori.

L'induttanza di un induttore è un parametro che può essere definito per qualsiasi geometria, purché il comportamento del materiale sia lineare e gli effetti degli accoppiamenti, dovuti all'induzione elettromagnetica, con le altre parti del circuito siano trascurabili. Per geometrie complesse bisogna ricorrere ai metodi numerici per il calcolo dei campi.

Definizione: Induttanza

L'induttanza L di un induttore è il rapporto tra il flusso Φ del campo $\mathbf{B}$ concatenato con l'avvolgimento Γ prodotto dalla corrente che in esso circola e la corrente stessa (S_r è una qualsiasi superficie orientata che ha come orlo l'avvolgimento, con la normale orientata concordemente al riferimento scelto per il verso della corrente),

$$L \equiv \Phi / i = \left(\iint_{S_r} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \right) / i. \quad (99)$$

L'induttanza è un parametro indipendente dalla corrente e dal flusso perché: (a) la relazione costitutiva del materiale magnetico è lineare; (b) l'induttore non è accoppiato ad altre parti del circuito. Inoltre L è positiva perché la permeabilità magnetica è positiva. La relazione (97), tramite questo parametro, descrive completamente il funzionamento dell'induttore, indipendentemente dal modo e dal circuito in cui è inserito; essa dipende solo dalla geometria e dalla permeabilità magnetica del materiale. Nel caso in cui l'approssimazione (89) non valesse, bisognerebbe considerare il contributo al flusso dovuto alle altre correnti presenti nel circuito. Ciò può essere fatto tramite i coefficienti di mutua induzione.

L'induttanza nel SI si misura in *henry* (H): $1\text{H}=1\text{Wb}/1\text{A}$; è molto frequente l'uso dei sottomultipli $1\text{mH}=10^{-3}\text{H}$ (milli henry), $1\mu\text{H}=10^{-6}\text{H}$ (micro henry), $1\text{nH}=10^{-9}\text{H}$ (nano henry).

Nel caso stazionario la tensione dell'induttore è nulla come si vede dall'equazione (96): l'induttore si comporta come un resistore con resistenza nulla, cioè per ogni valore di corrente la tensione è identicamente nulla. In realtà se portassimo in conto gli effetti dovuti alla piccola resistività del conduttore con cui è realizzato l'avvolgimento, la tensione sarebbe diversa da zero.

1.10.2 Cosa accade quando $f > f_i$?

Al crescere della frequenza (diciamo, per $f_i < f$), si osserva che il fenomeno dell'induzione magnetoelettrica non è più trascurabile, nella relazione (77) non è più trascurabile il termine di corrente di spostamento e il campo di corrente non può essere più ritenuto solenoidale. La relazione tra il flusso e la corrente comincia a dipendere dalla frequenza. La frequenza caratteristica f_i è inversamente proporzionale al raggio delle spire; la costante di proporzionalità è la velocità di propagazione della luce nel supporto materiale dell'avvolgimento. Poi, man mano che la frequenza cresce, comincia a non essere più trascurabile il fenomeno della propagazione di onde elettromagnetiche. Il componente può irradiare in misura significativa energia nello spazio

circostante sotto forma di energia elettromagnetica. Esso diventa, in sostanza, una vera e propria antenna.

In conclusione possiamo dire che, se le tensioni e le correnti variano lentamente (cioè le frequenze delle sinusoidi significative, che compongono $v(t)$ e $i(t)$, verificano la condizione $0 \leq f < f_l$), il funzionamento dell'induttore è descritto abbastanza accuratamente dal modello quasi-stazionario magnetico e la (96) insieme alla (97) descrivono la relazione tra la corrente e la tensione, provvedendo che siano trascurabili gli effetti dovuti ai fenomeni di accoppiamento mutuo con gli altri conduttori del circuito. Un induttore viene progettato e realizzato in maniera tale che l'intervallo di frequenze $(0, f_l)$ sia quanto più ampio possibile (anche per gli induttori in aria e in ferrite è possibile arrivare fino a frequenze dell'ordine di 100 MHz).

Per distinguere il modello dell'induttore dal componente reale, si usa il simbolo mostrato in figura 24. La relazione caratteristica del bipolo induttore ideale è

$$\begin{cases} v = \frac{d\Phi}{dt} \\ \Phi = Li \end{cases} \quad (100)$$

con la convenzione dell'utilizzatore. Se il coefficiente di autoinduzione è costante nel tempo si ha

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (101)$$

La (101) è la relazione costitutiva dell'induttore lineare e tempo-invariante. Essa è una relazione lineare di tipo dinamico come quella dell'induttore: per un induttore la tensione in un generico istante dipende linearmente dal valore della derivata della corrente in quell'istante, e quindi dalla storia della corrente in un intorno di quell'istante. Dall'equazione (101) si ottiene la relazione costitutiva in forma integrale, cioè

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \quad (102)$$

Dalla (102) è ancora più evidente il fatto che il legame tra la tensione e la corrente di un induttore è di tipo dinamico: la corrente all'istante t dipende dalla corrente all'istante t_0 e dalla storia della tensione nell'intervallo (t_0, t) .

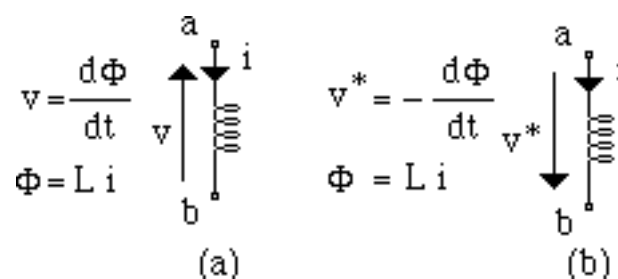


Figura 24 Simbolo del bipolo induttore lineare tempo-invariante.

Esempio Un circuito semplice di tipo “statico”

Un circuito costituito da un generatore reale di tensione e un resistore è detto *circuito semplice statico*. Un arbitrario circuito siffatto può essere rappresentato come illustrato in figura 25a, dove con

G si è indicato il generatore di tensione (E_0 è la tensione a vuoto e R_0 è la resistenza interna del generatore di tensione) e con R il resistore (di resistenza R).

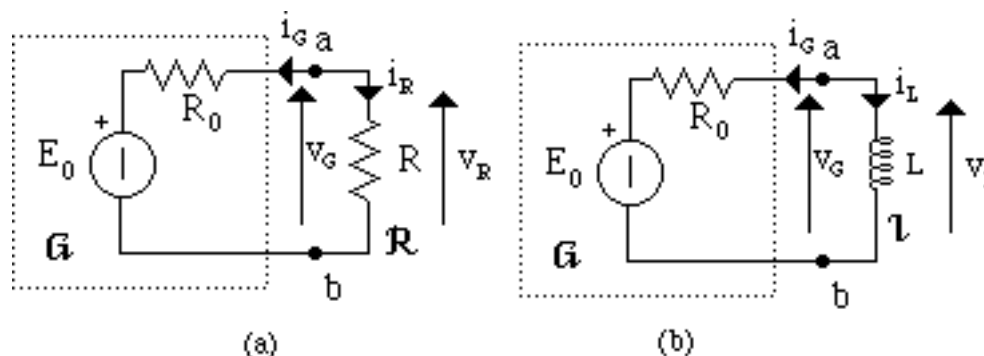


Figura 25 (a) un circuito semplice di tipo statico; (b) un circuito semplice di tipo dinamico.

Applicando la prima legge di Kirchhoff a uno dei due nodi che connettono il generatore G al resistore R, si ottiene

$$i_G + i_R = 0, \quad (103)$$

e applicando la seconda legge di Kirchhoff all'unica maglia del circuito si ottiene:

$$v_G - v_R = 0. \quad (104)$$

Applicando le leggi di Kirchhoff sono state ottenute due equazioni indipendenti in quattro incognite. Abbiamo bisogno di altre due equazioni indipendenti: esse sono le relazioni costitutive dei due bipoli. Usando la convenzione dell'utilizzatore si ha

$$\begin{aligned} \text{per il generatore} \quad v_G &= E_0 + R_0 i_G, \\ \text{per il resistore} \quad v_R &= R i_R. \end{aligned} \quad (105)$$

Combinando le equazioni (103)-(105) si ottiene la soluzione del circuito:

$$\begin{aligned} -i_G = i_R &= \frac{E_0}{R_0 + R}, \\ v_G = v_R &= E_0 \frac{R}{R_0 + R}. \end{aligned} \quad (106)$$

Se la resistenza interna del generatore reale di tensione tende a zero, la soluzione del circuito è

$$\begin{aligned} -i_G = i_R &= \frac{E_0}{R}, \\ v_G = v_R &= E_0. \end{aligned} \quad (107)$$

Esempio Un circuito semplice di tipo “dinamico”

Un circuito costituito da un generatore reale di tensione e un induttore è detto *circuito semplice dinamico*. Un arbitrario circuito siffatto può essere rappresentato come illustrato in figura 25b, dove con I si è indicato l'induttore (di induttanza L).

Applicando le leggi di Kirchhoff e le equazioni costitutive, si ottiene il sistema di equazioni algebriche-differenziali

$$\begin{array}{ll}
\text{LKC} & i_G + i_L = 0, \\
\text{LKT} & v_G - v_L = 0, \\
\text{generatore} & v_G - R_0 i_G = E_0, \\
\text{induttore} & v_L - L \frac{di_L}{dt} = 0.
\end{array} \tag{109}$$

Combinando queste equazioni si ottiene per la corrente nell'induttore $i=i(t)$

$$L \frac{di}{dt} + R_0 i = E_0. \tag{110}$$

La soluzione più generale possibile dell'equazione differenziale (110) (quella che le contiene tutte) è

$$i(t) = K e^{-t/\tau} + \frac{E_0}{R_0}, \tag{111}$$

dove K è una costante arbitraria e $\tau = L/R$. Per determinare la costante K (e quindi l'andamento temporale della corrente che circola nel circuito), c'è bisogno di un'ulteriore informazione, non contenuta né nelle leggi di Kirchhoff e né nelle relazioni costitutive: il valore della corrente nell'induttore in un istante di tempo. Si assuma di conoscere il valore della corrente all'istante $t=0$ e lo si indichi con I_0 . Allora si ottiene:

$$K = I_0 - \frac{E_0}{R_0}, \tag{112}$$

quindi

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} + (1 - e^{-t/\tau}) \frac{E_0}{R_0}. \tag{113}$$

É facile verificare che nel limite $R_0 \rightarrow 0$ si ha

$$i(t) = I_0 + \frac{E_0}{L} t. \tag{114}$$

Esempio Circuito illustrato in figura 5

Si scrivano le equazioni del circuito illustrato in figura 5. Le equazioni che è possibile ottenere applicando le leggi di Kirchhoff, sono già state determinate (vedi l'esempio svolto a pagina 37). Le equazioni che descrivono il funzionamento dei singoli bipoli sono

$$\begin{array}{ll}
\text{bipolo 1} & v_1 = e(t), \quad \text{bipolo 4} \quad C dv_4 / dt - i_4 = 0, \\
\text{bipolo 2} & v_2 = E_0, \quad \text{bipolo 5} \quad g(v_5) - i_5 = 0, \\
\text{bipolo 3} & v_3 - R i_3 = 0, \quad \text{bipolo 6} \quad v_6 - L di_6 / dt = 0.
\end{array} \tag{115}$$

Il componente 1, cioè il generatore di segnale, può essere modellato attraverso un generatore di tensione ideale con tensione variabile nel tempo e il componente 2, cioè il diodo, attraverso un legame non lineare tra i valori istantanei della corrente e della tensione. In seguito descriveremo in dettaglio anche le relazioni caratteristiche di questi componenti.

L'insieme di equazioni (115) è costituito da equazioni tutte indipendenti tra loro, cioè non è possibile in alcuna maniera ottenere una di esse a partire dalle altre cinque. Ciò è conseguenza del

fatto che una generica grandezza, sia essa una tensione, sia essa una corrente, compare solo e soltanto in una sola equazione.

L'insieme di equazioni ottenuto applicando le leggi di Kirchhoff è costituito da 8 equazioni (il sistema di equazione (17) più il sistema di equazione (18)). Queste equazioni non sono tutte indipendenti tra loro, come una semplice analisi per ispezione mostra, cioè alcune di esse possono essere ottenute tramite opportune combinazioni lineari delle restanti. Da questo insieme è possibile estrarre solo sei equazioni indipendenti; ad esempio quelle che si ottengono applicando la prima legge di Kirchhoff ai nodi 1, 2, 3 e 4 e la seconda legge di Kirchhoff alle maglie M1 e M2. Unendo a queste l'insieme (115) si ottiene un sistema di 12 equazioni nelle 12 incognite $i_1, \dots, i_6, v_1, \dots, v_6$ (in questo caso l'insieme, così ottenuto, è costituito da equazioni che sono tutte indipendenti tra loro):

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_6 = 0, \\ -i_1 + i_2 = 0, \\ -i_2 + i_3 = 0, \\ -i_3 - i_4 + i_5 = 0, \\ v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_6 = 0, \\ v_4 + v_5 = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} v_1 = e(t), \\ v_2 = E_0, \\ v_3 - Ri_3 = 0, \\ Cdv_4/dt - i_4 = 0, \\ g(v_5) - i_5 = 0, \\ v_6 - Ldi_6/dt = 0. \end{array} \right. \quad (116)$$

Questo è il sistema di equazioni che bisogna risolvere; in seguito mostreremo che bisogna conoscere i valori della tensione del condensatore e della corrente dell'induttore in un istante, per potere determinare la soluzione del circuito da quell'istante in poi.

Il sistema di equazioni (116) è abbastanza complicato: ci sono equazioni differenziali, equazioni algebriche lineari e equazioni non lineari. Lo scopo fondamentale della teoria dei circuiti è: (a) studiare le proprietà del sistema di equazioni del circuito; (b) formulare metodi di soluzione semplici e robusti che sfruttino al meglio tutte le proprietà delle equazioni circuitali.

1.11 Considerazioni finali

Il funzionamento dei componenti che abbiamo appena descritto è stato studiato utilizzando modelli approssimati delle equazioni di Maxwell. Alla base del funzionamento del resistore e del generatore di tensione costante c'è il modello del campo stazionario di corrente, alla base del condensatore c'è il modello quasi-stazionario elettrico e alla base dell'induttore c'è il modello quasi-stazionario magnetico⁹.

Utilizzando questi modelli è possibile descrivere anche il funzionamento di tanti altri componenti. Il funzionamento di un diodo, di un transistor, di un amplificatore operazionale è descrivibile nell'ambito del modello del campo stazionario di corrente se siamo in bassa frequenza, ovvero del modello quasi-stazionario elettrico se gli effetti dinamici sono importanti. Invece, il funzionamento di un trasformatore, di un motore elettrico, di un alternatore o di un altoparlante è descrivibile

⁹ Per un approfondimento dei modelli quasi-stazionari il lettore può consultare: Hermann A. Haus e James R. Melcher, *Electromagnetic Fields and Energy* (Prentice Hall, 1989); L. De Menna, G. Miano, "Linear Circuit Elements", in *Encyclopedia of Electrical and Electronic Engineering*, John Wiley & Sons Inc., febbraio 1999.

nell'ambito di un modello quasi-stazionario magnetico (in questi ultimi tre casi c'è bisogno delle equazioni della meccanica). Il modello quasi-stazionario magnetico riveste un ruolo fondamentale nei sistemi di potenza e il modello quasi-stazionario elettrico lo riveste nei sistemi in cui vengono elaborati i segnali.

Osservazione

La relazione funzionale che caratterizza il funzionamento dell'induttore può essere anche realizzata tramite un sistema fisico completamente diverso da un filo conduttore avvolto su di un cilindro. Come poi vedremo, connettendo in modo opportuno amplificatori operazionali, resistori e un condensatore è possibile realizzare un induttore. Così anche le relazioni costitutive del resistore, del generatore di tensione costante e del condensatore possono descrivere il funzionamento di altri sistemi fisici completamente diversi dai resistori, generatori di tensione costanti e condensatori. Le relazioni costitutive che abbiamo trovato analizzando i componenti fondamentali dei circuiti lineari sono anche i mattoni elementari con cui rappresentare il funzionamento di tanti altri sistemi elettrici, ben più complessi dei componenti da cui siamo partiti.

Prima di terminare questo argomento, è utile fare un breve cenno al modo in cui potremmo valutare, seppure in modo approssimato, l'errore commesso utilizzando il modello circuitale.

Si supponga di avere determinato la soluzione del circuito, attraverso il modello circuitale. Una volta note tutte le tensioni e le correnti, è possibile valutare i campi elettrici e magnetici utilizzando le equazioni di Maxwell. Siccome tutte le correnti e le cariche sono note, seppure in maniera approssimata, questo calcolo è estremamente più semplice (anche nel caso in cui volessimo risolvere le equazioni di Maxwell complete) di quello che sarebbe necessario se volessimo risolvere il circuito utilizzando direttamente le equazioni di Maxwell. Si ricordi che nel modello di campo di partenza le correnti e le cariche sono anche esse incognite del problema: sono noti solo i *campi elettromotori*. Note le distribuzioni dei campi è possibile verificare in dettaglio la correttezza delle approssimazioni alla base del modello circuitale. Ad esempio, se l'effetto dell'accoppiamento magnetico tra due induttori influenza il corretto funzionamento del circuito, è possibile proporre degli aggiustamenti che eliminino questo problema (ad esempio, allontanando i due induttori, oppure, se ciò non è possibile, utilizzando opportuni schermi). Queste problematiche sono oggetto di studio del corso di **Compatibilità Elettromagnetica**.