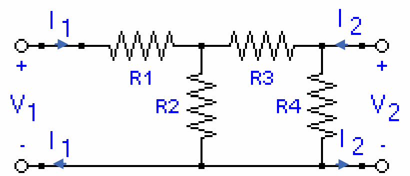
COMPITO DI ELETTROTECNICA (06-02-2004)

COGNOME: ……………………….…………… **NOME:** ……………………….…………… **MATRICOLA:** …………….…….. **α** = ……

(α è un parametro pari all'ultima cifra non nulla della propria matricola, ed è necessario per determinare alcuni dati degli esercizi)

1) Determinare la matrice delle conduttanze del doppio bipolo in figura, ovvero determinare i parametri G_{11}, G_{12}, G_{21} e G_{22} così definiti:



$$\begin{cases} I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2 \\ I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2 \end{cases}$$

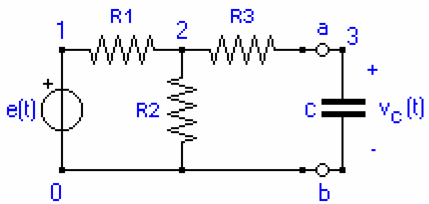
$R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = \alpha\Omega$, $R_4 = 5\Omega$.

2) In relazione al circuito in figura:

a) Semplificare il circuito applicando il teorema di Thevenin ai morsetti a,b.

b) Determinare l'andamento temporale della tensione $v_c(t)$.

c) Codificare la rete con Spice.

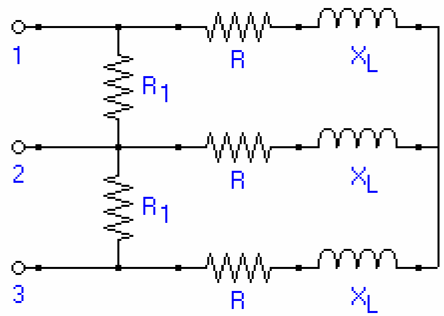


$$e(t) = \begin{cases} E, & t \le 0 \\ -E, & t \ge 0 \end{cases}, \quad E = 10\,V$$

$R_1 = 5\alpha\,\Omega$, $R_2 = 20\Omega$,

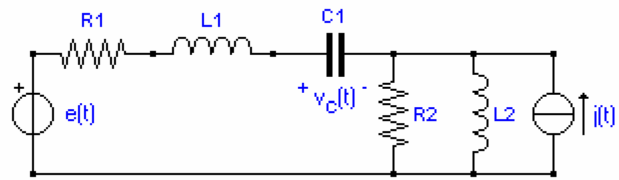
$R_3 = 10\alpha\,\Omega$, $C = 1mF$.

3) Per la rete trifase in figura determinare la corrente di linea $\bar{I}_2$. La terna di alimentazione è simmetrica.



$\overline{V}_{12} = 230\sqrt{3}\,e^{j\pi/6}$, $R = 10\alpha\,\Omega$, $R_1 = 10\,\Omega$, $X_L = 20\alpha\,\Omega$.

4) La rete mostrata in figura è a regime. Calcolare la tensione $v_C(t)$ e la potenza attiva erogata dal generatore di tensione.



$e(t) = 10\alpha\cos(\omega t)$

$j(t) = 10\alpha\sin(\omega t)$

$\omega = 1\,krad/s$

$R_1 = \alpha\,\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $L_1 = 1mH$, $L_2 = 1mH$, $C = 1mF$.

Soluzione della prova del 6/2/2004

1) Il doppio bipolo assegnato è ovviamente reciproco, è ciò comporta che $G_{12} = G_{21}$. Tuttavia si il doppio bipolo "presumibilmente" è non simmetrico, ovvero $G_{11} \neq G_{22}$. Pertanto è necessario determinare G_{11}, G_{21} e G_{22} per riempire la matrice delle conduttanze.
Si calcola che:

$$G_{11} = \left[\frac{I_1}{V_1}\right]_{V_2=0} = \frac{1}{R_1 + R_2 // R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{10+\alpha}{50+15\alpha}$$

$$G_{21} = \left[\frac{I_2}{V_1}\right]_{V_2=0} = -\frac{1}{R_1 + R_2 // R_3}\frac{R_2}{R_2 + R_3} = -\frac{R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = -\frac{10}{50+15\alpha}$$

$$G_{22} = \left[\frac{I_2}{V_2}\right]_{V_1=0} = \frac{1}{R_4 //(R_3 + R_1 // R_2)} = \frac{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}{R_4(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} = \frac{25+3\alpha}{50+15\alpha}$$

2) a) Applicando il teorema di Thevenin, si trova facilmente che la tensione a vuoto e la resistenza equivalente valgono:

$$e_{TH}(t) = e(t)\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \begin{cases} \dfrac{E\,R_2}{R_1 + R_2} & \text{per } t < 0 \\ -\dfrac{E\,R_2}{R_1 + R_2} & \text{per } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{40}{\alpha+4} & \text{per } t < 0 \\ -\dfrac{40}{\alpha+4} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

$$R_0 = R_3 + R_1 // R_2 = \frac{R_1R_3 + (R_1R_2 + R_2R_3)}{R_1 + R_2} = \frac{10\alpha(6+\alpha)}{\alpha+4}$$

b) Dal circuito equivalente di Thevenin si ricava subito la condizione iniziale, che è $v_C(0) = \dfrac{40}{\alpha+4}$.
Dall'analisi dello stesso circuito si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R_0C}v_C = \frac{e_{TH}(t)}{R_0C}$$

Pertanto la soluzione omogenea è del tipo: $v_{C0}(t) = K\,e^{-t/\tau}$, con $\tau = R_0C$.

La soluzione particolare può essere trovata facilmente osservando che il sistema, esaurito il transitorio, funziona in regime stazionario. Pertanto la soluzione particolare è $v_{CP}(t) = -\dfrac{40}{\alpha+4}$.

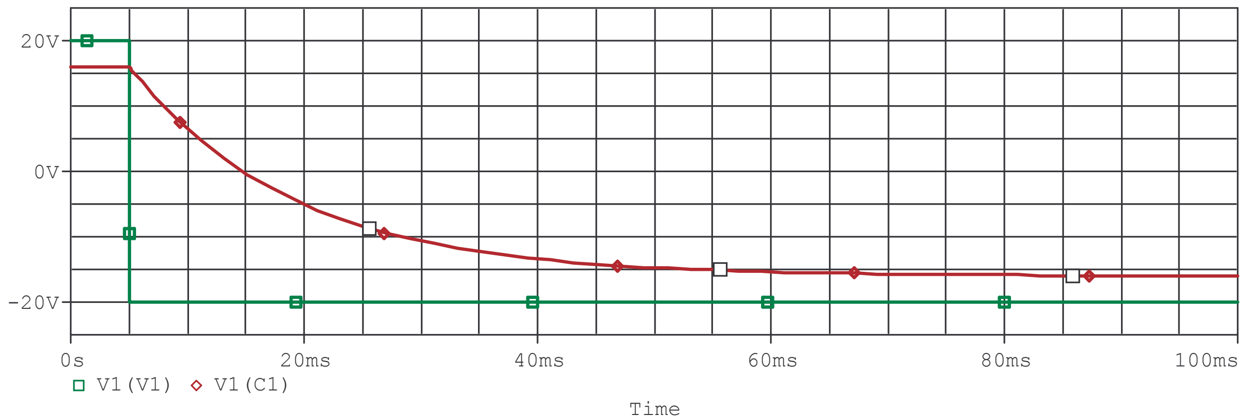
Pertanto la soluzione è $v_C(t) = -\dfrac{40}{\alpha+4} + K\,e^{-t/\tau}$.

Imponendo le condizioni iniziali si trova $K = \dfrac{40}{\alpha+4}$.

Pertanto alla fine si ottiene: $v_C(t) = \dfrac{40}{\alpha+4}(2\,e^{-t/\tau} - 1)$.

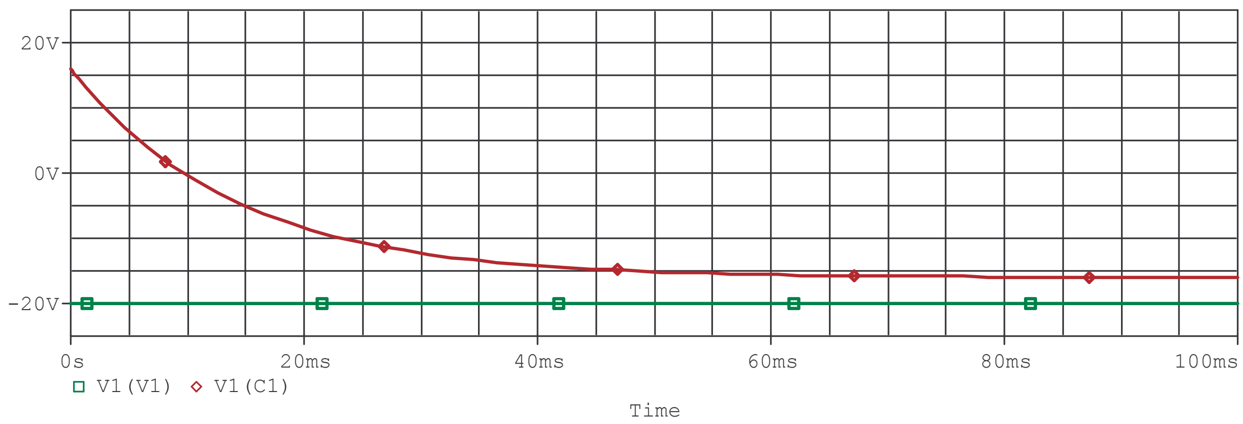
Per quanto riguarda il listato Spice, il generatore assegnato si simula con il comando PWL. Tale comando non accetta valori di tempo negativi: pertanto, per simulare la fase a $t < 0$ si deve di fatto traslare il gradino (e quindi la soluzione) in avanti nel tempo. In seguito è stata traslata di 5 ms.

```
Esercizio 2
* Prova del 6/2/2004
* Le resistenze R1 ed R3 vanno moltiplicate per alfa
R1 2 1 5
R2 2 0 20
R3 2 3 10
C1 3 0 1m
V1 1 0 PWL(0 20 0.005 20 0.0051 -20 0.1 -20)
.TRAN 1e-6 0.1
.PROBE
.END
```



In alternativa, se non si vuole traslare il transitorio, si può usare il comando IC. La condizione iniziale nel listato seguente vale solo se $\alpha = 1$.

```
Esercizio 2
* Prova del 6/2/2004
* Le resistenze R1 ed R3 vanno moltiplicate per alfa
* La condizione iniziale va calcolata in base ad alfa
R1 2 1 5
R2 2 0 20
R3 2 3 10
C1 3 0 1m IC=16
V1 1 0 -20
.TRAN 1e-6 0.1 UIC
.PROBE
.END
```



3) La terna di tensioni è simmetrica. Assegnata la tensione $\overline{V}_{12} = 230\sqrt{3}\ e^{j\frac{\pi}{6}}$, e possibile ricavare tutte le altre tensioni di alimentazione.

$$\overline{V}_{23} = 230\sqrt{3}\ e^{j\frac{3}{2}\pi},\ \overline{V}_{31} = 230\sqrt{3}\ e^{j\frac{5}{6}\pi}$$

$$\overline{E}_1 = 230,\ \overline{E}_2 = 230\ e^{-j\frac{2}{3}\pi},\ \overline{E}_3 = 230\ e^{-j\frac{4}{3}\pi}$$

La corrente $\overline{I}_2$ può essere calcolata come somma della corrente che circola nel carico L-R equilibrato e delle correnti che circolano nelle due resistenze verticali R_1.
La corrente che attraversa il carico equilibrato, contrassegnata con l'apice per distinguerla dalla corrente di linea, vale:

$$\overline{I}_2' = \frac{\overline{E}_2}{R + j\,X_L} = -\frac{1}{\alpha}\frac{23}{10}\left[2 + \sqrt{3} + j\left(1 - 2\sqrt{3}\right)\right]$$

Le correnti che attraversano le due resistenze valgono:

$$\overline{I}'_{R_1} = \frac{\overline{V}_{12}}{R_1} = 23\sqrt{3}\ e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\overline{I}''_{R_1} = \frac{\overline{V}_{23}}{R_1} = 23\sqrt{3}\ e^{j\frac{3}{2}\pi}$$

Pertanto la corrente $\overline{I}_2$ vale

$$\underline{\overline{I}_2 = \overline{I}_2' - \overline{I}'_{R_1} + \overline{I}''_{R_1} = \frac{23}{10\alpha}\left[-15\alpha - 2 - \sqrt{3} + j\left(-15\alpha\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{3}\right)\right]}$$

È possibile sviluppare i calcoli ed ottenere la corrente $\overline{I}_2$ nel dominio del tempo, ma il risultato precedente è sufficiente.

4) La serie L-C è in risonanza e quindi equivale ad un corto circuito.
Per prima cosa, scegliamo i fasori da associare alla tensione ed alla corrente erogata dai generatori: $\overline{E} = 10\alpha\,j$, $\overline{I} = 10\alpha$.
Detta $\dot{Z}_2$ l'impedenza equivalente al parallelo R_2-L_2, è possibile trasformare il generatore di corrente e l'impedenza $\dot{Z}_2$ in parallelo ad esso in un generatore di tensione, di valore $\dot{Z}_2\overline{I}$, ed un'impedenza $\dot{Z}_2$ ad esso in serie. Questa trasformazione porta ad un circuito con un'unica maglia, per la quale, detta $\overline{I}_1$ la corrente che la attraversa, si può scrivere la seguente LKT:

$$\overline{E} - R_1\overline{I}_1 - \dot{Z}_2\overline{I}_1 - \dot{Z}_2\overline{I} = 0,$$

da cui:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E} - \dot{Z}_2 \bar{I}}{R_1 + \dot{Z}_2} = \alpha \frac{-10}{\alpha + j(1+\alpha)}$$

Pertanto la tensione $\bar{V}_C$ vale:

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{I}_1}{j\omega C} = j\alpha \frac{10}{\alpha + j(1+\alpha)},$$

mentre la potenza attiva erogata dal generatore di tensione vale:

$$P_e = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\bar{E}\,\bar{I}_1^{\,*}\right\} = \mathrm{Re}\left\{-50\alpha^2 \frac{(1+\alpha)+\alpha j}{2\alpha^2+2\alpha+1}\right\} = -50\alpha^2 \frac{(1+\alpha)}{2\alpha^2+2\alpha+1}$$