Università degli Studi di Cassino

Esercitazioni di Elettrotecnica: circuiti in evoluzione dinamica

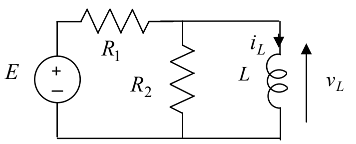
Antonio Maffucci

maffucci@unicas.it

ver.2 – ottobre 2006

1. Circuiti dinamici del primo ordine.

ES. 1.1 Nel seguente circuito è assegnata la corrente nell'induttore all'istante $t = 0$. Ricavare la corrente sull'induttore per $t > 0$, graficarne l'andamento e stimare la durata del transitorio.



$E = 220\,V \quad per \quad t > 0,$

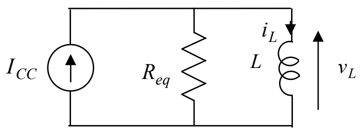
$i_L(0) = 0.4\ A,$

$L = 0.1\,H, \quad R_1 = 1\,k\Omega, \quad R_2 = 200\,\Omega.$

Valutando l'equivalente di Norton ai capi dell'induttore:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 166.67\ \Omega,$$

$$I_{cc} = \frac{E}{R_1} = 0.22\ \text{A},$$



si ottiene la rete equivalente in figura, descritta dalle equazioni:

$$i_L + \frac{v_L}{R} = I_{cc}, \qquad v_L = L\frac{di_L}{dt},$$

dalle quali si ricava facilmente l'equazione differenziale nell'incognita $i_L(t)$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{I_{cc}}{\tau}, \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = 0.60\ \text{ms}$$

Risolvendo l'equazione caratteristica dell'omogenea associata

$$\lambda + \frac{1}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1/\tau = -1.67 \cdot 10^3\ s^{-1},$$

possiamo esprimere la soluzione generale nella forma: $i_L(t) = Ke^{-1.67 \cdot 10^3 t} + i_{LP}(t)$,

dove $i_{LP}(t)$ rappresenta il termine di regime stazionario. In tale condizione l'induttore è equivalente ad un corto-circuito, per cui:

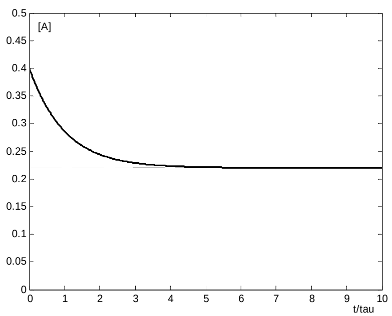
$$i_{LP}(t) = I_{CC} = 0.22\ A.$$

La costante K si ottiene imponendo la continuità della variabile di stato $i_L(t)$ all'istante $t = 0$:

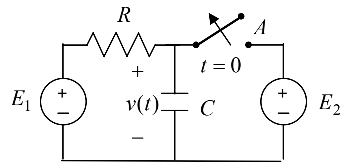
$$i_L(0^-) = 0.4 = i_L(0^+) = K - 0.22 \quad \Rightarrow \quad K = 0.18$$

da cui $i_L(t) = 0.18e^{-1.67 \cdot 10^3 t} + 0.22$ A per $t > 0$,

il cui andamento nel tempo è graficato a lato. La durata del transitorio è stimata in $4\tau = 2.40$ ms.



<u>ES. 1.2</u> Nel seguente circuito all'istante $t = 0$ si apre l'interruttore A. Calcolare la tensione sul condensatore per ogni istante.



$E_1 = 8\,V, \quad E_2 = 2\,V$

$R = 10\,k\Omega, \quad C = 2\,mF$

Per $t < 0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto. Per tale ragione si ha:

$$v(t) = E_2 = 2\,V.$$

Per $t > 0$, applicando la LKT all'unica maglia e la caratteristica del condensatore si ottiene facilmente l'eq. differenziale di primo ordine nell'incognita $v(t)$

$$Ri + v = E_1, \quad i = C\frac{dv}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{E_1}{\tau} \quad \text{dove} \quad \tau = RC.$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è pari a $\lambda = -1/\tau = -0.05\ s^{-1}$, quindi la soluzione generale si esprime nella forma:

$$v(t) = Ke^{-0.05t} + v_P(t),$$

dove $v_P(t)$ è una soluzione particolare che si può valutare calcolando la soluzione di regime. Poiché per $t \to \infty$ si tende ad un regime stazionario, il condensatore si comporta come un circuito aperto ai capi del quale ci sarà

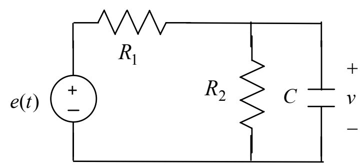
$$v_P(t) = E_1 = 8\,V.$$

Resta da determinare la costante K, che si ottiene dalla condizione iniziale, ottenuta imponendo la continuità della variabile di stato $v(t)$

$$v(0^-) = v(0^+) \quad \Rightarrow \quad 2 = K + 8 \quad \Rightarrow \quad K = -6,$$

da cui $\quad v(t) = 8 - 6e^{-0.05t} \quad t > 0.$

<u>ES. 1.3</u> Dato il seguente circuito, valutare la tensione $v(t)$ per $t > 0$.



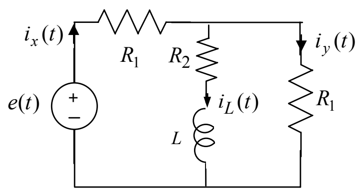
$e(t) = 50\,V \quad t > 0$

$v(t = 0) = 10\,V, \quad C = 1\,mF$

$R_1 = 20\,\Omega, \quad R_2 = 24\,\Omega.$

Risultato: $v(t) = 27.3 - 17.3e^{-91.7t}\ V$.

ES. 1.4 Considerato il seguente circuito, che fino all'istante $t = 0$ lavora in regime stazionario, calcolare la corrente nell'induttore per ogni istante, graficare l'andamento e stimare la durata del transitorio.



$$e(t) = \begin{cases} 10\ V & t < 0 \\ -10\ V & t > 0 \end{cases}$$

$R_1 = 10\,\Omega$
$R_2 = 20\,\Omega$
$L = 2\,mH$

Per $t < 0$ il circuito è in regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito. Per tale ragione, posto $R_a = R_1 // R_2$ si ha:

$$i_L(t) = e(t)\frac{R_a}{R_a + R_1}\frac{1}{R_2} = 0.2\ A \qquad t < 0\,.$$

Per valutare la soluzione per $t > 0$ si può procedere come nell'esercizio 1.1, valutando dapprima l'equivalente di Norton ai capi dell'induttore:

$$R_{eq} = R_2 + \frac{R_1}{2} \qquad \text{e} \qquad I_{cc}(t) = \frac{e(t)}{R_1 + 2R_2}\,,$$

e quindi ricavare l'equazione differenziale nell'incognita $i_L(t)$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{I_{cc}}{\tau}\,, \quad \text{dove} \quad \tau \equiv \frac{L}{R_{eq}} = 80\,\mu\text{s}.$$

Alternativamente si possono ovviamente applicare le leggi di Kirchhoff alla rete di partenza:

$$R_1 i_x + R_1 i_y = e\,, \quad R_1 i_y = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt}\,, \quad i_x = i_y + i_L\,, \text{ da cui } \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = \frac{e}{2L}\,.$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda = -1/\tau = -12.5 \cdot 10^3\ s^{-1}$, quindi la soluzione generale si esprime nella forma:

$$i_L(t) = Ke^{-12.5 \cdot 10^3 t} + i_{LP}(t)\,,$$

dove $i_{LP}(t)$ è la soluzione di regime stazionario:

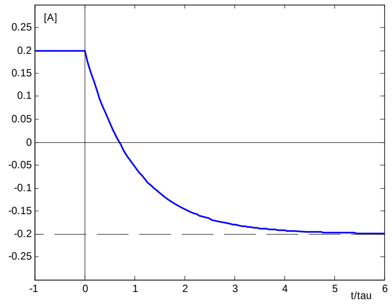
$$i_{LP}(t) = -0.2\ A\,.$$

Imponendo la continuità della corrente $i_L(t)$:

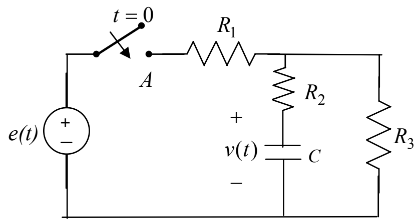
$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \Rightarrow 0.2 = K - 0.2 \Rightarrow K = 0.4\,,$$

da cui: $\quad i_L(t) = -0.2 + 0.4e^{-12.5 \cdot 10^3 t} \qquad t > 0\,.$

Il transitorio si estinguerà in circa $4\tau = 0.32$ ms.



ES. 1.5 Il seguente circuito è a riposo fino a $t = 0$, istante in cui si chiude l'interruttore A. Calcolare: a) la costante di tempo τ del circuito;
b) la tensione ai capi del condensatore per $t > 0$ (tracciarne anche il grafico).



$e(t) = 10\cos(\omega t)$
$\omega = 100 rad/s$
$R_1 = 20\,\Omega,\quad R_2 = 5\,\Omega$
$R_3 = 10\,\Omega,\quad C = 1\,mF$

a) Per calcolare la costante di tempo basta valutare la resistenza dell'equivalente di Thévenin visto ai capi del condensatore:

$$R_{eq} = (R_1 // R_3) + R_2 = \frac{35}{3}\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \tau = R_{eq}C = 11.7\ ms$$

b) Per $t < 0$ il circuito è a riposo, quindi $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$. Per $t > 0$, ricavando la tensione a vuoto dell'equivalente di Thévenin visto ai capi del condensatore si ha:

$$V_0(t) = \frac{e(t)R_3}{R_1 + R_3}\,.$$

Applicando le leggi di Kirchhoff al circuito ottenuto sostituendo ai capi di C il generatore equivalente di Thévenin si ricava l'equazione differenziale nell'incognita v_c:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{\tau} = \frac{V_0}{\tau}\,.$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è pari a $\lambda = -1/\tau = -85.5\ s^{-1}$, quindi la soluzione generale si esprime nella forma:

$$v_c(t) = A\exp(-85.5t) + v_{cp}(t)\,,$$

dove $v_{cp}(t)$ è la soluzione di regime sinusoidale, valutabile attraverso il metodo fasoriale. Posto:

$$\overline{E} = 10, \quad \dot{Z}_1 = R_1 = 20, \qquad \dot{Z}_2 = R_2 - \frac{j}{\omega C} = 5 - 10j, \quad \dot{Z}_3 = R_3 = 10,$$

e applicando ripetutamente la regola del partitore di tensione si ha, posto $\dot{Z}_x = \dot{Z}_2 // \dot{Z}_3$:

$$\overline{V}_2 = \overline{E}\frac{\dot{Z}_x}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_c = \frac{\overline{V}_2 \dot{Z}_c}{R_2 + \dot{Z}_c} = 2.17e^{-j0.86}$$

da cui: $v_{cp}(t) = 2.17\cos(100t - 0.86)$ V

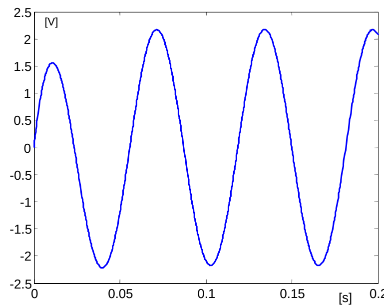
Dalla condizione iniziale si ha:

$$v_c(0^+) = 0 = A + 2.17\cos(-0.86) \quad \Rightarrow \quad A = -1.41$$

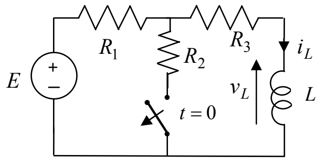
Quindi in definitiva si ottiene la tensione

$$v_c(t) = -1.41\exp(-85.5t) + 2.17\cos(100t - 0.86) \quad V$$

il cui andamento è tracciato nella figura a lato.



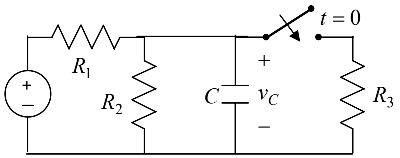
ES. 1.6 Il seguente circuito è in regime stazionario fino a $t=0$, istante in cui si apre l'interruttore *A*. Calcolare la tensione ai capi dell'induttore in ogni istante e tracciarne il grafico.



$E = 220\,V$, $L = 0.1\,H$,
$R_1 = 1\,k\Omega$, $R_2 = R_3 = 500\,\Omega$.

Risultato: $v_L(t) = 0$ *per* $t<0$; $v_L(t) = 88.5e^{-1.5\cdot 10^4 t}$ V per $t>0$.

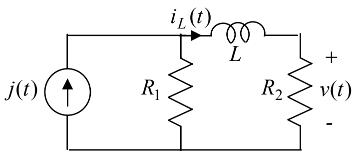
ES. 1.7 Il seguente circuito è in regime stazionario fino a $t=0$, istante in cui si chiude l'interruttore. Calcolare la tensione sul condensatore in ogni istante e tracciarne l'andamento.

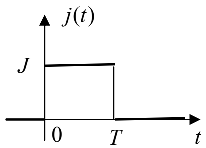


$E = 220\,V$, $C = 1\,F$,
$R_1 = R_3 = 1\,k\Omega$, $R_2 = 500\,\Omega$.

Risultato: $v_C(t) = 73.33$ V per $t<0$; $v_C(t) = 54.59 + 18.74e^{-4\cdot 10^{-3} t}$ V per $t>0$.

ES. 1.8 La seguente rete dinamica è a riposo per $t<0$.
a) Tracciare l'andamento della tensione ai capi di R_2 per $t>0$.
b) Calcolare l'energia dissipata da R_2 nell'intervallo $0<t<5\,ms$.





$J = 40\,A$, $T = 1\,ms$
$R_1 = 30\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$
$L = 50\,mH$

Essendo $v(t) = R_2 i_L(t)$ è opportune risolvere il problema nell'incognita $i_L(t)$, variabile di stato.
Per $t<0$ il circuito è a riposo, quindi $i_L(t) = 0$.
Per $0<t<T$, valutando l'equivalente di Norton ai capi di *L* si ottiene:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad \text{e} \quad I_{cc}(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2} J\,,$$

da cui l'equazione differenziale nell'incognita $i_L(t)$:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{I_{cc}}{\tau}, \qquad \text{con} \qquad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = 1\,\text{ms}.$$

L'omogenea associata fornisce un'equazione caratteristica avente radice $\lambda = -1/\tau = -10^3\ s^{-1}$. La soluzione assume quindi la forma:

$$i_L(t) = Ke^{-1000t} + i_{LP}(t)\,,$$

dove $i_{LP}(t)$ è la soluzione di regime stazionario, quindi assumendo *L* come corto circuito:

$$i_{LP}(t) = J\frac{R_1}{R_1+R_2} = 24\ A.$$

Resta da determinare la costante *K*, che si ottiene dalla condizione iniziale:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = K + 24 \quad \Rightarrow \quad K = -24\,,$$

da cui $\quad v(t) = R_2 i_L(t) = 480(1-e^{-1000t}) \quad$ per $0<t<T$.

Per $t>T$ l'equazione differenziale sarà

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = 0\,,$$

e quindi tutta la soluzione coincide con la soluzione dell'omogenea

$$i_L(t) = He^{-1000t}\,,$$

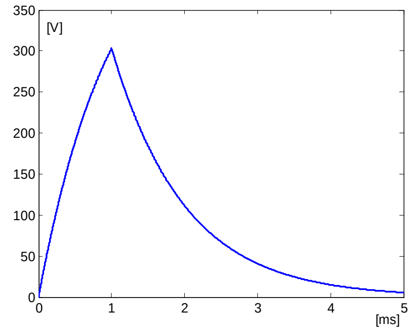
dove *H* è una costante arbitraria, determinata imponendo la condizione iniziale per $t = T^+$

$$i_L(T^+) = i_L(T^-) \quad \Rightarrow$$
$$24(1\text{-}e^{-1}) = He^{-1} \quad \Rightarrow \quad H = 41.24$$

da cui

$$v(t) = R_2 i_L(t) \approx 825e^{-1000t}\ \text{V per } t>T.$$

L'andamento della soluzione è tracciato nel grafico a lato.



Per calcolare l'energia dissipata da R_2 nell'intervallo $[0,\ t_{fin}]$ con $t_{fin} = 5\,\text{ms}$, basta integrare la potenza istantanea assorbita:

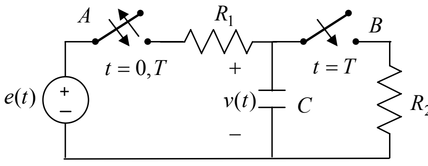
$$W_{R_2}(0,t_{fin}) = \int_0^{t_{fin}} \frac{v^2(t)}{R_2}dt = \int_0^{T} \frac{v^2(t)}{R_2}dt + \int_T^{t_{fin}} \frac{v^2(t)}{R_2}dt = \int_0^{T} \frac{480^2(1-e^{-1000t})^2}{20}dt + \int_T^{t_{fin}} \frac{825^2 e^{-2000t}}{20}dt$$

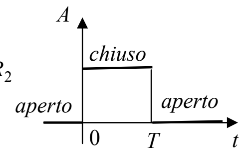
$$W_{R_2}(0,t_{fin}) = 25.48\ \text{J}$$

ES. 1.9 La seguente rete rappresenta un semplice circuito di carica e scarica di un condensatore. La carica avviene tra l'istante $t=0$ e l'istante $t=T$, intervallo in cui l'interruttore *A* resta chiuso. Per $t>T$, invece, il condensatore C viene collegato al resto della rete attraverso la chiusura dell'interruttore B. Supponendo la rete a riposo per $t<0$, valutare:

a) la tensione sul condensatore $v(t)$ per $0<t<T$;

b) l'energia massima $W_{\max}$ erogabile da *C* per $t>T$;

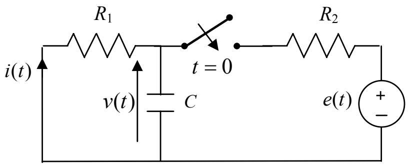




$e(t)=100 sin(20t)\ V$
$R_1=10\ \Omega$
$C=10\ mF$
$T=2\ s$

Risultato: *a)* $v(t)=40e^{-10t}+44.7\sin(20t-1.11)$ V per $0<t<T$;
b) $W_{\max}=8.64\ J$;

ES. 1.10 Nella seguente rete è nota la tensione ai capi del condensatore all'istante di chiusura dell'interruttore $t=0$. Valutare la corrente *i(t)* nel resistore R_1 per $t>0$



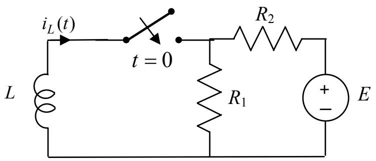
$e(t)=\sin(100t)$ V
$R_1=15\ \Omega,\ R_2=10\,\Omega,$
$C=1$ mF, $v(0^+)=1\,V.$

Risultato: $i(t)=-0.08e^{-t/0.006}-0.03\sin(100t-0.54)$ A

ES. 1.11 Nella seguente rete l'interruttore si chiude all'istante $t=0$, istante in cui la corrente circolante in *L* è nota. Calcolare:

a) il circuito equivalente di Thevenin ai capi di *L* per *t* > 0;

b) la corrente che circola nell'induttore per *t* > 0.

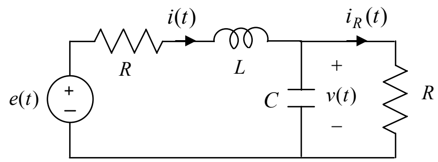


$E=10$ V, $i_L(0)=2$ A
$R_1=5\ \Omega,\ R_2=4\,\Omega,\ L=1$ mH.

Risultato: *a)* $R_{eq}=2.22\ \Omega,\ E_0=5.55\ V$
b) $i_L(t)=-2.5+4.5e^{-t/\tau}$ A, con $\tau=0.45$ ms.

2. Circuiti dinamici del secondo ordine.

ES. 2.1 La seguente rete è in regime stazionario fino all'istante $t=0$. Calcolare la tensione sul condensatore in ogni istante, graficarne l'andamento e stimare la durata del transitorio.



$e(t)=\begin{cases}2\ \text{V} & \text{per } t<0\\ -2\ \text{V} & \text{per } t>0\end{cases}$

$R=1\Omega,\ L=1\ \mu H,\ C=1\ \mu F$

Per $t<0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Per tale ragione:

$$v(t)=e(t)\frac{R}{2R}=1\,V,\qquad i(t)=\frac{e(t)}{2R}=1\ A.$$

Per la continuità delle variabili di stato si avrà: $v(0^-)=v(0^+)=1\,V$ e $i(0^-)=i(0^+)=1\ A$.

L'evoluzione dinamico del circuito per $t>0$ sarà descritta dalle seguenti equazioni derivate imponendo le leggi di Kirchhoff e le caratteristiche dei bipoli:

$$Ri+L\frac{di}{dt}+v=e\,,\qquad i=\frac{v}{R}+C\frac{dv}{dt}.$$

Da tali equazioni si perviene al sistema delle *equazioni di stato*:

$$\frac{di}{dt}=\frac{e-v}{L}-\frac{Ri}{L}\qquad \frac{dv}{dt}=\frac{i}{C}-\frac{v}{CR}.$$

L'equazioni differenziale nell'incognita $v(t)$ sarà quindi

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)\frac{dv}{dt}+\frac{2}{LC}v=\frac{e}{LC}.$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è la seguente:

$$\lambda^2+2\cdot10^6\lambda+2\cdot10^6=0\,,$$

e fornisce le radici $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta=10^6(-1\pm j)$. La soluzione dell'omogenea associata può quindi essere espressa nella forma:

$$v_0(t)=e^{\alpha t}[k_1\cos(\beta t)+k_2\sin(\beta t)]\,.$$

A tale soluzione va aggiunta la soluzione di regime stazionario che, per effetto delle considerazioni svolte precedentemente, sarà banalmente pari a: $v_p(t)=-1\,V$. La soluzione generale per $t>0$ assume quindi la forma:

$$v(t)=e^{\alpha t}[k_1\cos(\beta t)+k_2\sin(\beta t)]-1\,.$$

Le costanti arbitrarie si determinano imponendo la continuità delle variabili di stato nell'istante $t = 0$. Tale proprietà impone le seguenti condizioni iniziali su $v(t)$ e su $v'(t)$:

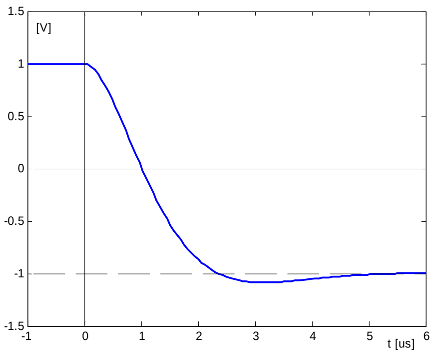
$$v(0^+) = 1 = k_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{C}\left[i(0^+) - \frac{v(0^+)}{R}\right] = 0 = \alpha k_1 + \beta k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -\frac{\alpha k_1}{\beta} = 2 .$$

La soluzione è, quindi:

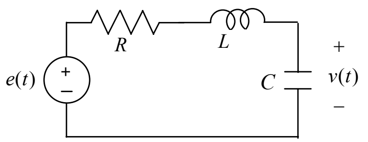
$$v(t) = -1 - 2e^{-10^6 t}[\cos(10^6 t) + \sin(10^6 t)] \quad V.$$

L'andamento della tensione in ogni istante di tempo è riportato nel grafico a lato.



La costante di tempo della rete è pari a $\tau = -1/\alpha = 1\ \mu s$, mentre il periodo delle delle oscillazioni naturali è pari a $T = -2\pi/\beta = 6.28\ \mu s$.
Durante il transitorio, quindi, è visibile meno di una oscillazione naturale completa.

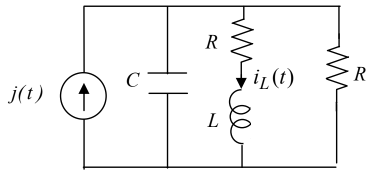
ES. 2.2 Nella seguente rete sono assegnati i valori delle grandezze di stato all'istante $t = 0$. Calcolare la tensione sul condensatore per $t > 0$.



$v(0) = 1$ V, $i(0) = 0$ A
$E = 1$ V per $t > 0$
$R = 1\Omega, L = 1\mu H, C = 1\mu F$

Risultato: $v_C(t) = e^{-5\cdot 10^5 t}[\cos(8.7\cdot 10^5 t) + 0.57\sin(8.7\cdot 10^5 t)]$ V per $t > 0$.

ES. 2.3 Il seguente circuito è in regime stazionario fino a $t = 0$. Calcolare:
- **a) il valore delle grandezze di stato all'istante $t = 0^+$**
- **b) la corrente $i_L(t)$ per t > 0**



$$j(t) = \begin{cases} 20 \ A & t < 0 \\ 0 \ A & t > 0 \end{cases}$$

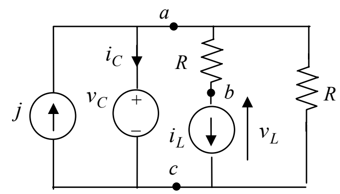
$R = 2\ \Omega$
$L = 10\ \mu H$
$C = 5\ \mu F$

a) Per $t < 0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Per tale ragione:

$$i_L(t) = j(t)/2 = 10\ A \ , \quad v_C(t) = j(t)R/2 = 20\ V \qquad t < 0 .$$

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 20\ V$ e $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 10\ A$.

b) Per $t > 0$ il circuito è in evoluzione libera. Per ottenere le equazioni di stato si possono imporre le equazioni di Kirchhoff e le caratteristiche, come fatto nell'esercizio 1.1. Un metodo più efficace consiste nella risoluzione preliminare del *circuito resistivo associato*.
Questo circuito può essere studiato applicando, ad esempio, il metodo dei potenziali nodali modificato. Considerando *c* come nodo di riferimento e osservando che il potenziale del nodo *a* è pari a v_c mentre quello del nodo *b* è pari a v_L si ha:



$$\frac{v_C - v_L}{R} = i_L, \qquad i_L + \frac{v_C}{R} + i_C - j = 0 .$$

Le variabili non di stato saranno esprimibili come:

$$v_L = v_C - Ri_L, \qquad i_C = -i_L - \frac{v_C}{R} + j .$$

Ricordando le caratteristiche dei bipoli dinamici, da queste equazioni si ottengono immediatamente le equazioni di stato della rete:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_C - Ri_L}{L}, \qquad \frac{dv_C}{dt} = \frac{-i_L + j}{C} - \frac{v_C}{RC} .$$

Ricavando v_C dalla prima e sostituendola nella seconda si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{2}{LC} i_L = 0 ,$$

la cui equazione caratteristica fornisce $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta = 10^5(-1.5 \pm 1.3j)$. La soluzione è, quindi:

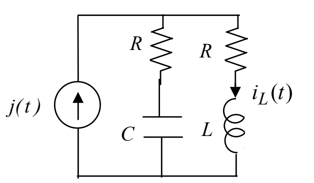
$$i_L(t) = \exp(\alpha t)[k_1 \cos(\beta t) + k_2 sin(\beta t)] ,$$

dove le costanti k_1, k_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su i_L e su di_L/dt:

$$i_L(0^+) = 10 = k_1, \qquad \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = \frac{v_C(0^+) - Ri_L(0^+)}{L} = 0 = \alpha k_1 + \beta k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -\frac{\alpha k_1}{\beta} = 11.5 .$$

Pertanto la soluzione sarà: $i_L(t) = \exp(-1.5\cdot 10^5 t)[10\cos(1.3\cdot 10^5 t) + 11.5 sin(1.3\cdot 10^5 t)] \qquad t > 0$.

ES. 2.4 Il seguente circuito è in regime sinusoidale fino $t=0$, istante in cui il generatore si spegne. Calcolare la corrente $i_L(t)$ in ogni istante e tracciarne l'andamento.



$$j(t)=\begin{cases}10\cos(100t)\;\;A & t<0\\ 0\;\;A & t>0\end{cases}$$

$R=0.5\,\Omega$

$L=10\;mH$

$C=50\;mF$

Per $t<0$ il circuito è in regime sinusoidale, quindi si può ricorrere al metodo fasoriale, ponendo:

$$\bar J=10,\;\dot Z_1=\dot Z_C+\dot Z_R=0.5-0.2j,\;\dot Z_2=\dot Z_L+\dot Z_R=0.5+j.$$

Per il partitore di corrente, la corrente dell'induttore sarà

$$\bar I_L=\bar J\frac{\dot Z_1}{\dot Z_1+\dot Z_2}=2.07-3.66j=4.21\exp(-1.06j)\quad\Rightarrow\quad i_L(t)=4.21\cos(100t-1.06)\;\;A.$$

Applicando la LKC si ricava: $\bar I_C=\bar J-\bar I_L=7.93+3.66j$, da cui la tensione:

$$\bar V_C=\dot Z_C\bar I_C=1.74\exp(-1.14j)\quad\Rightarrow\quad v_C(t)=1.74\cos(100t-1.14)\;\;V.$$

Per la continuità delle variabili di stato: $v_c(0^-)=v_c(0^+)=0.73\,V$, $i_L(0^-)=i_L(0^+)=2.07\;A$.

Per $t>0$ il circuito è in evoluzione libera. Applicando la LKT all'unica maglia si ottiene:

$$v_C+2Ri_L+L\frac{di_L}{dt}=0.$$

Derivando tale equazione e sostituendovi la caratteristica di C si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{2R}{L}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=0,$$

la cui equazione caratteristica ammette le radici $\lambda_1=-72.4$ e $\lambda_1=-27.6$. La soluzione si può esprimere, quindi, nella forma:

$$i_L(t)=k_1\exp(\lambda_1 t)+k_2\exp(\lambda_2 t),$$

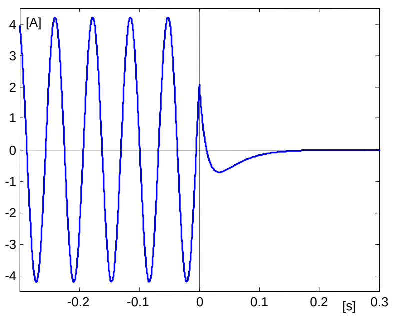
dove le costanti k_1,k_2 sono determinate dalle condizioni iniziali su i_L e su di_L/dt:

$$i_L(0^+)=2.07=k_1+k_2,$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+}=-\frac{v_C(0^+)+2Ri_L(0^+)}{L}=-280=\lambda_1k_1+\lambda_2k_2.$$

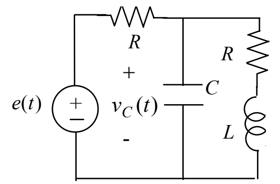
Risolvendo tale sistema si ottengono: $k_1=4.98$, $k_2=-2.91$ quindi per $t>0$ la soluzione è data da:

$$i_L(t)=4.98\exp(-72.4t)-2.91\exp(-27.6t)\;\text{A}.$$



Andamento della soluzione in ogni istante.

ES. 2.5 Con riferimento al seguente circuito, in regime stazionario per $t<0$, calcolare la tensione $v_C(t)$ e la potenza $p_C(t)$ assorbita dal condensatore in ogni istante



$$e(t)=\begin{cases}20\;\;V & t<0\\ -20\;\;V & t>0\end{cases}$$

$R=1\,\Omega$

$L=5\;\mu H$

$C=5\;\mu F$

Per $t<0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Per tale ragione:

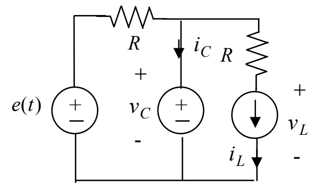
$$i_L(t)=e(t)/2R=10\;A\;,\quad v_C(t)=e(t)/2=10\,V\qquad\qquad t<0.$$

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-)=v_c(0^+)=10\,V$ e $i_L(0^-)=i_L(0^+)=10\;A$.

Osserviamo che, essendo $i_c(t)=0$, si ha banalmente $p_c(t)=v_c(t)i_c(t)=0$.

Per $t>0$ il circuito è forzato dal generatore *e(t)*, a partire dalle condizioni iniziali individuate precedentemente. Risolvendo il circuito resistivo associato mostrato in figura:

$$i_C=\frac{e-v_C}{R}-i_L\,,\qquad v_L=v_C-Ri_L$$



si ottengono le equazioni di stato:

$$\frac{dv_C}{dt}=\frac{e}{RC}-\frac{v_C}{RC}-\frac{i_L}{C},\qquad\frac{di_L}{dt}=\frac{v_C}{L}-\frac{Ri_L}{L}.$$

Ricavando i_L dalla prima e sostituendola nella seconda si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2v_c}{dt^2}+\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)\frac{dv_c}{dt}+\frac{2}{LC}v_c=\frac{1}{RC}\frac{de}{dt}+\frac{e}{LC}.$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata fornisce: $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta=2\cdot10^5(-1\pm j)$, quindi la soluzione si può esprimere nella forma:

$$v_C(t)=e^{\alpha t}[k_1\cos(\beta t)+k_2 sin(\beta t)]+v_{CP}(t),$$

dove $v_{CP}(t)$ è una soluzione particolare che può essere scelta come la soluzione di regime a cui il circuito tende per $t\to\infty$ (regime stazionario):

$$v_{CP}(t)=e(t)/2=-10\,V.$$

Le costanti k_1,k_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su v_C e su dv_C/dt:

$$v_C(0^+)=10=k_1-10\quad\Rightarrow\quad k_1=20;$$

$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{0^+}=-\frac{1}{C}\left[i_L(0^+)+\frac{v_C(0^+)-e(0^+)}{R}\right]=-8\cdot10^6=\alpha k_1+\beta k_2\;\Rightarrow\;k_2=20.$$

La tensione sul condensatore per $t>0$ è, quindi:

$$v_C(t) = 20e^{-2\cdot 10^5 t}[\cos(2\cdot 10^5 t) - \sin(2\cdot 10^5 t)] - 10 = 28.3e^{-2\cdot 10^5 t}[\cos(2\cdot 10^5 t + 0.79)] - 10 \text{ V}.$$

La potenza assorbita per $t > 0$ si può valutare in due modi: possiamo calcolare preliminarmente la corrente che circola nel condensatore:

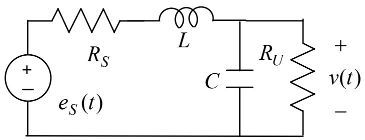
$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = -40e^{-2\cdot 10^5 t}\sin(2\cdot 10^5 t + 1.57) \text{ A, da cui:}$$

$$p_C(t) = v_C(t)i_C(t) = -565e^{-4\cdot 10^5 t}[\sin(4\cdot 10^5 t + 2.36) + 0.71] + 400e^{-2\cdot 10^5 t}\sin(2\cdot 10^5 t + 1.57) \text{ W}$$

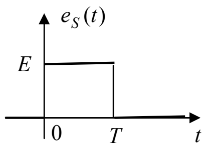
Allo stesso risultato si perviene ricordando l'espressione dell'energia di un condensatore:

$$p_C(t) = \frac{C}{2}\frac{dv_C^2(t)}{dt} = 2.5\cdot 10^{-6}\frac{d}{dt}[28.3e^{-2\cdot 10^5 t}\cos(2\cdot 10^5 t + 0.79) - 10]^2.$$

ES. 2.6 Il seguente circuito rappresenta un semplice sistema *trasmettitore-canale-ricevitore*. Calcolare la tensione sul ricevitore (R_U) in ogni istante e tracciarne l'andamento.

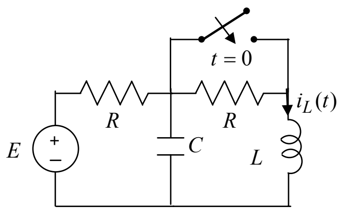


$E = 6\,V, \quad T = 1 ns$
$R_S = R_U = 50\,\Omega$
$L = 2\,nH, \quad C = 10\,pF$



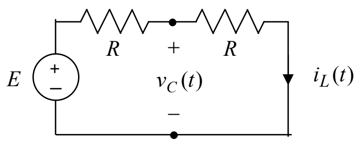
Risultato: $v(t) = 0\,V$ per $t < 0$; $v(t) = -3.74e^{-4.45\cdot 10^9 t} + 0.74e^{-22.55\cdot 10^9 t} + 3\,V$ per $0 < t < T$;
$v(t) = 320e^{-4.45\cdot 10^9 t} - 4.6\cdot 10^9 e^{-22.55\cdot 10^9 t}$ per $t > T$.

ES. 2.7 La rete in figura è in regime stazionario fino $t = 0$, istante in cui si chiude l'interruttore. Calcolare la corrente $i_L(t)$ per $t > 0$.



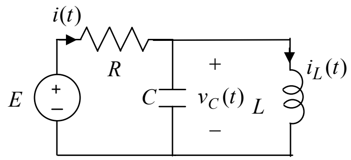
$E = 2\,V$
$R = 1/3\,\Omega$
$L = 1\,mH$
$C = 2\,mF$

Il circuito da analizzare per $t < 0$ è disegnato a lato.
Essendo in regime stazionario, il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito:



$$i_L(t) = E/2R = 3\,A, \quad v_C(t) = E/2 = 1\,V \qquad (t < 0).$$

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 1\,V$ e $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 3\,A$.
Il circuito da analizzare per $t > 0$ è disegnato a lato.
Dal circuito resistivo associato si ricavano le equazioni:



$$i_L + i_C = \frac{E - v_C}{R}, \quad v_C = v_L,$$

da cui è semplice ottenere le equazioni di stato della rete:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{E}{RC} - \frac{v_C}{RC} - \frac{i_L}{C}, \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{v_C}{L},$$

Ricavando v_C dalla seconda e sostituendola nella prima si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{E}{RLC}.$$

Le radici dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata sono: $\lambda_1 = -1000, \lambda_2 = -500$, quindi la soluzione si può esprimere nella forma:

$$i_L(t) = k_1 e^{-1000t} + k_2 e^{-500t} + i_{LP}(t),$$

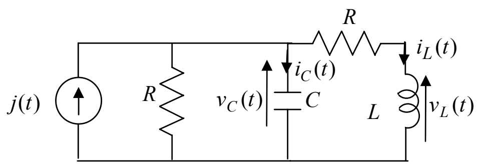
dove $i_{LP}(t)$ è una soluzione particolare che può essere scelta come la soluzione di regime a cui il circuito tende per $t \to \infty$ (regime stazionario): $i_{LP}(t) = E/R = 6\,A.$.

Le costanti k_1, k_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su i_L e su di_L/dt:

$$i_L(0^+) = 3 = k_1 + k_2 + 6; \qquad \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{L}v_C(0^+) = 1000 = -1000k_1 - 500k_2,$$

da cui: $k_1 = 1, k_2 = -4$, e quindi la soluzione per $t > 0$ è $i_L(t) = e^{-1000t} - 4e^{-500t} + 6\,A$.

ES. 2.8 La rete in figura è in regime stazionario per $t < 0$. Determinare:
  a) le grandezze di stato all'istante $t = 0^+$
  b) la corrente nel condensatore e la tensione nell'induttore all'istante $t = 0^+$
  c) la tensione sul condensatore per $t > 0$
  d) la tensione sull'induttore per $t > 0$



$$j(t) = \begin{cases} 2 & t < 0 \\ 2\sin(\omega t) & t > 0 \end{cases}$$

$\omega = 10^6$ rad/s, $R = 1\,\Omega$
$L = 1\,\mu$H, $C = 2\,\mu$F

Risultato:
a) $v_C(0^+) = 1\,$V, $i_L(0^+) = 1\,$A
b) $i_C(0^+) = -2\,$A, $v_L(0^+) = 0\,$V
c) $v_C(t) = 2.28e^{-10^6 t}\cos(10^6 t + 0.90) + 1.26\cos(10^6 t - 0.32)\,V$ per $t > 0$
d) $v_L(t) = 4.46\cos(10^6 t - 0.46) - e^{-10^6 t}[3.22\sin(10^6 t + 1.69) - 9.12\sin(10^6 t + 2.48)]\,V$ per $t > 0$.