# Esercizi sui circuiti elettrici

# Indice

## Nota per gli studenti

Non esiste alcuna ricetta che vi possa insegnare a mettere a punto una strategia efficace che vi conduca alla corretta soluzione di un problema. Pensiamo sia utile riportare qui alcuni consigli generali, utili per elaborare le formule ed i calcoli e per organizzare le idee prima di iniziare.

» Cercate fiduciosamente la risposta al vostro problema nelle cose che avete appreso; durante le lezioni, vi è stato certamente proposto uno schema coerente e completo della materia, il solo che può aiutarvi a trovare la strada per risolvere il problema.
» Identificate bene quali siano i dati assegnati e quali quelli da trovare. Domandarsi cosa chieda il problema vuol dire avere esaminato con cura il testo, cercando in esso eventuali informazioni nascoste.
» Ricercate il metodo di soluzione più adeguato. Si deve spesso scegliere tra diverse vie per risolvere un certo problema: un metodo può richiedere meno equazioni da risolvere rispetto ad un altro, oppure può richiedere soltanto calcoli algebrici.
» Pianificate il metodo da usare e le corrette equazioni da scrivere. Portate avanti i calcoli a livello letterale quanto più è possibile: un'equazione scritta con simboli è facilmente controllabile per mezzo di una verifica dimensionale dei diversi termini.
» Quando svolgete un passaggio non fatelo meccanicamente, ma soffermatevi a riflettere sul ruolo che questo passaggio assume nello sviluppo logico del ragionamento che state conducendo.
» Domandatevi se la soluzione trovata ha senso, se è fisicamente realistica e se l'ordine di grandezza sia ragionevole. La cosa migliore sarebbe risolvere nuovamente il problema con un metodo alternativo; ma, si sa, ... il tempo è tiranno! Controllare il risultato ottenuto aiuta a sviluppare un certo senso critico verso i vari metodi di soluzione, nonché l'intuizione.

Prima di concludere, un'ultima raccomandazione legata più specificamente agli esercizi di Elettrotecnica che di qui a poco inizierete a svolgere: fate sempre un accurato disegno del circuito, aggiungendo ad esso tutte le informazioni ed i riferimenti che vi sembrano opportuni. Qualche volta, può aiutare anche un nuovo disegno del circuito, che operi opportune semplificazioni.

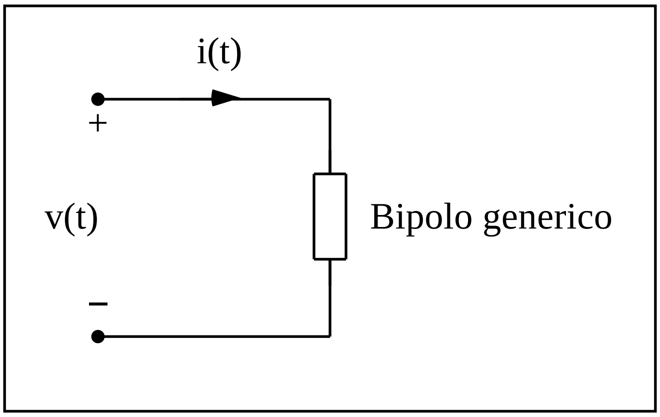
Auguri e buon lavoro!

# 4 - Esercizi sui circuiti elettrici

# Esercizi preparatori

**P1** - La tensione e la corrente ai terminali del bipolo di figura sono nulle per $t < 0$, mentre valgono

$$v(t) = 8\, e^{-500t}, \quad i(t) = 15\, t\, e^{-500t}, \quad \text{per } t \geq 0 .$$




Calcolare la potenza e l'energia elettrica assorbite dal bipolo.

Risposta:

$$p(t) = v(t)\, i(t) = 120\, t\, e^{-1000t} ,$$

$$U(0, t) = \int_0^t p(\tau)\, d\tau = \frac{3}{25000}\left[1 - (1 + 1000t)\, e^{-1000t}\right] .$$

Alla fine di questo volume di esercizi abbiamo posto una tavola di integrali, utile per risolvere non soltanto gli integrali che qui proponiamo, ma anche quelli che incontrerete nella vita professionale.

**P2** - Un filo è percorso da una corrente che vale

$$i(t) = \begin{cases} 12\, \mathrm{sen}(2\pi t) & t > 0 , \\ 0 & t < 0 . \end{cases}$$

Se questa corrente fluisce attraverso un bipolo definito dalla relazione (convenzione dell'utilizzatore)

$$v(t) = 4 \int_0^t i(\tau)\, d\tau \,,$$

si valuti la potenza istantanea assorbita dall'elemento.

Risposta:

$$p(t) = \frac{288}{\pi} \left[1 - \cos(2\pi t)\right] \mathrm{sen}(2\pi t) \,.$$

**P3** - Consideriamo un bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore. La tensione e la corrente siano nulle prima dell'istante $t = 0$, mentre

$$v(t) = 8\, e^{-t} \,, \quad i(t) = 20\, e^{-t} \quad \text{per } t > 0 \,.$$

Trovare l'energia assorbita dall'elemento nel primo secondo di operazione.

Risposta:

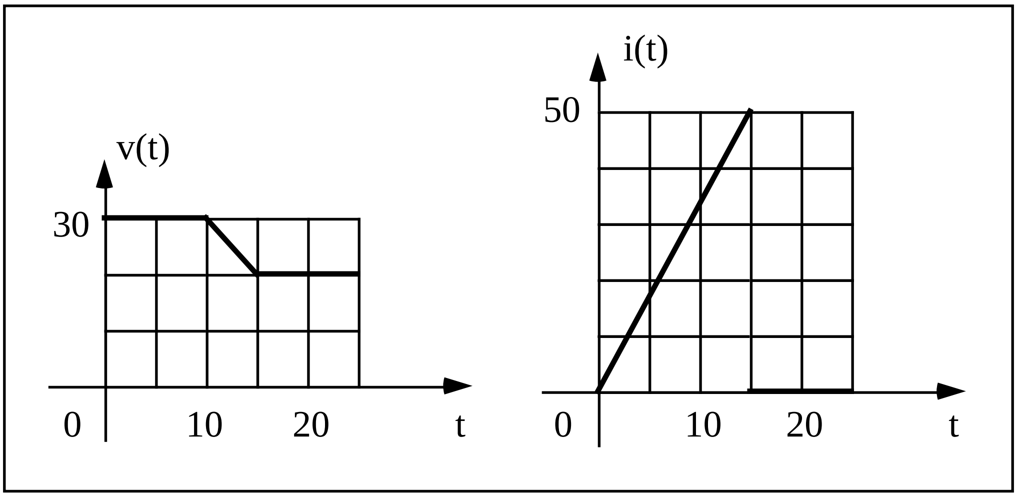
$$U(0, 1) = 80 \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \mathrm{J} \quad 69.17 \mathrm{~J} \,.$$

**P4** - Una batteria sta fornendo energia allo starter di un'automobile. Se la corrente che la attraversa vale, per $t \geq 0$, $i(t) = 10\, e^{-t}$ e la tensione sullo starter è $v(t) = 12\, e^{-t}$ (convenzione del generatore), determinare la potenza istantanea erogata $p(t)$ e l'energia $U(0, t)$ erogata dalla batteria a partire dall'istante iniziale 0 e fino al generico istante t.

Risposta:

$$p(t) = 120\, e^{-2t} \,, \; U(0, t) = 60 \left(1 - e^{-2t}\right) .$$

**P5** - Consideriamo un bipolo generico come quello dell'esercizio P1. Supponendo che la tensione e la corrente siano quelle mostrate nella figura che segue, quanto vale l'energia assorbita dal generico bipolo nell'intervallo $0 \leq t \leq 25$?




Risposta: U(0, 25) = $10.13\bar{8}$ kJ, laddove il trattino sopra un numero indica la periodicità della cifra segnata. In tal senso, 1/3 = 0.3333 ··· = $0.\bar{3}$.

**P6** - Un bipolo, sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore, per istanti positivi di tempo è attraversato dalla corrente $i(t) = 2\ \mathrm{sen}(t - \pi)$ quando è sottoposto alla tensione $v(t) = 2\ \mathrm{sen}(t)$. Possiamo concludere che si tratta di un bipolo passivo?

Risposta: pur essendo l'energia assorbita dal bipolo pari a

$$U_{el\text{-}ass}(0, t) = - 2t - \mathrm{sen}(2t) ,$$

non possiamo essere certi che si tratti di un bipolo passivo dato che solamente per una certa storia (quella assegnata dall'esercizio) esso assorbe energia.

**P7** - La sezione di una rotaia di acciaio è uguale ad S. Quale resistenza avrà un tratto di lunghezza L?

Dati: $\rho_{acciaio} = 0.18\ \mu\Omega$m, S = 45 cm$^2$, L = 15 km.

Risposta: R = 0.6 Ω.

**P8** - Una lampada elettrica, costituita da un filamento di tungsteno (coefficiente di temperatura $\alpha$), viene collegata ad un generatore di tensione continua $V_0$, dissipando una potenza P quando la temperatura del filamento è T. Qual è il valore della resistenza del filamento ad una temperatura $T_0 < T$?

Dati: $\alpha$ = 4.5 $10^{-3}$ $K^{-1}$, $V_0$ = 220 V, P = 100 W, T = 3000 K, $T_0$ = 1000 K.

Risposta: $R(T_0)$ = 48.4 Ω.

**P9** - Prima di iniziare lo studio delle reti elettriche, riteniamo importante che controlliate sino in fondo se sapete risolvere un sistema di equazioni lineari. Provate con i quattro esempi che seguono.

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 = 37 \\ x_1 - 2\,x_2 = -\,19 \end{cases} \qquad [x_1 = 11\ ,\ x_2 = 15]\ ,$$

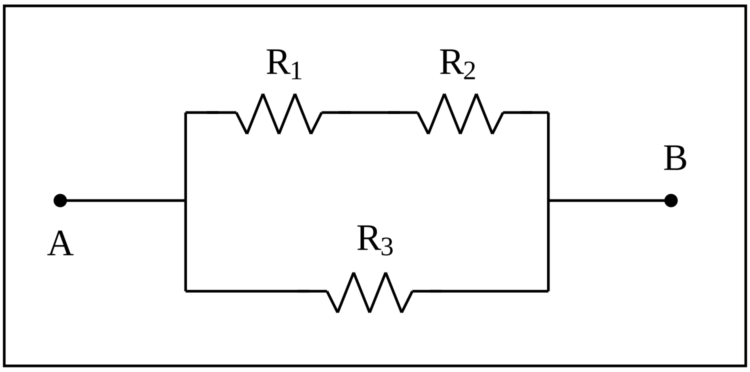
$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 = -\,9 \\ x_1 - x_2 + 3\,x_3 = 2 \\ 3\,x_1 - 6\,x_2 - x_3 = 25 \end{cases} \qquad [x_1 = 2\ ,\ x_2 = -\,3\ ,\ x_3 = -\,1]\ ,$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 - 5\,x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3\,x_2 - 6\,x_4 = 9 \\ 2\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 = -\,5 \\ x_1 + 4\,x_2 - 7\,x_3 + 6\,x_4 = 0 \end{cases} \qquad [x_1 = 3\ ,\ x_2 = -\,4\ ,\ x_3 = -\,1\ ,\ x_4 = 1]\ ,$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 - 4\,x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 2\,x_2 - x_3 + 7\,x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 - 3\,x_5 = 1 \\ x_1 + 4\,x_2 - 14\,x_3 + 6\,x_4 + 2\,x_5 = -\,1 \end{cases} \qquad [x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1]\ .$$

# Esercizi sul regime stazionario

**S1** - Calcolare la resistenza equivalente vista dai morsetti AB.

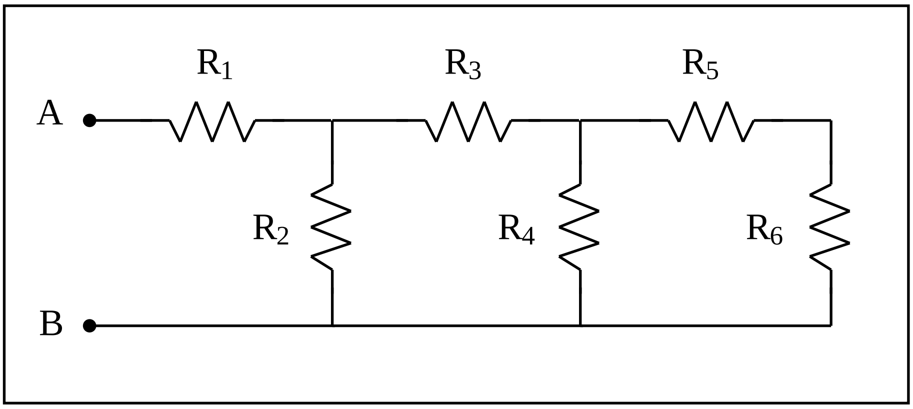



Dati: $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$.

Risposta: la resistenza equivalente $R_{AB}$ vale

$$R_{AB} = 7.5\ \Omega\ .$$

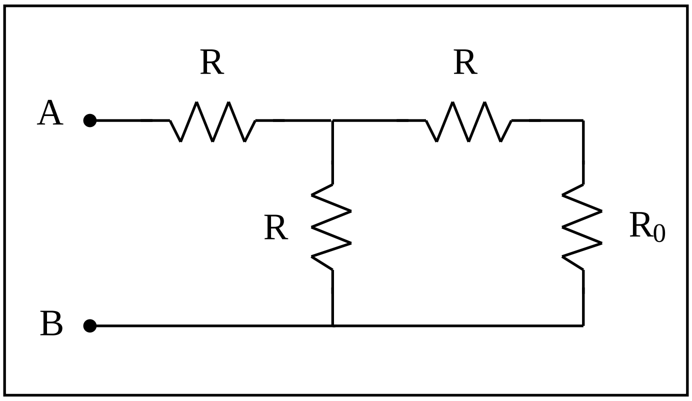
**S2** - Per la rete mostrata in figura, calcolare la resistenza equivalente vista dai morsetti AB.




Dati: $R_k = R = 2\ \Omega$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Risposta: $R_{AB} = 3.25\ \Omega$.

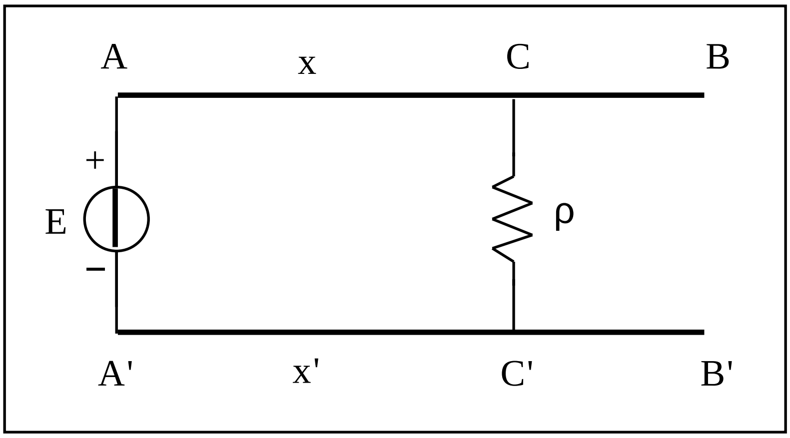
**S3** - Determinare il valore della resistenza R in maniera tale che la resistenza equivalente, vista dai morsetti AB, valga $R_0$.




Risposta: $R = R_0/\sqrt{3}$.

**S4 -** Due fili conduttori paralleli AB ed A'B' di lunghezza L, di sezione costante e costituiti di un materiale omogeneo, formano una linea elettrica (bifilare) di resistenza complessiva 2R ai cui capi A ed A' sono connessi i poli di un generatore di forza elettromotrice E (di resistenza interna trascurabile). In un certo istante, per cause accidentali, un punto C del filo AB viene a trovarsi collegato elettricamente attraverso una resistenza parassita ρ col punto più vicino C' dell'altro filo. Misurando allora (in assenza di utenti) la resistenza della linea tra A ed A', si trova per essa un valore a, mentre invece si trova un valore b qualora si mettano a contatto diretto gli estremi B e B'. Si determini:

a) la distanza x del punto C dall'estremo A;
b) il valore della resistenza parassita;
c) l'abbassamento della differenza di potenziale che, avvenuto l'incidente, si è verificato, sempre in assenza di utenti, tra gli estremi B e B';
d) la potenza che in tale evento si è dissipata nel circuito.

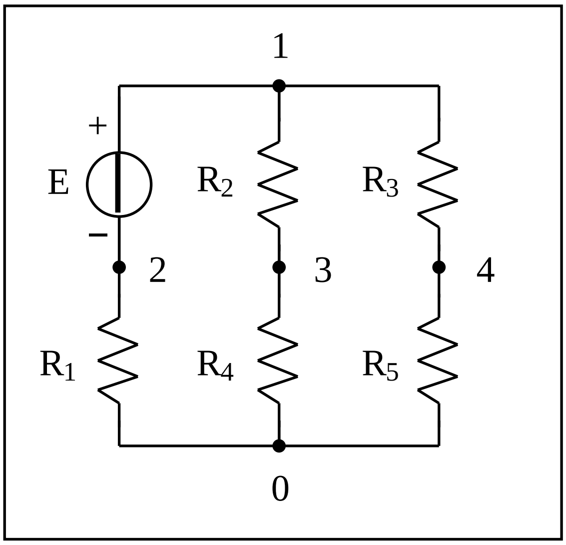



Dati: L = 50 km, R = 590 Ω, a = 805 Ω, b = 780 Ω, E = 100 V.

Risposte: riportiamo, nell'ordine richiesto, le diverse risposte

a) x = 28.8 km , b) $\rho$ = 125 Ω , c) $V_{CC'}$ = 15.5 V , d) P = 12.4 W .

**S5** - Calcolare la differenza di potenziale tra i punti 3 e 4 del circuito di figura.




Dati: E = 200 V, $R_1$ = 10 R, $R_2$ = 14 R, $R_3$ = 2 R, $R_4$ = 6 R, $R_5$ = 18 R.

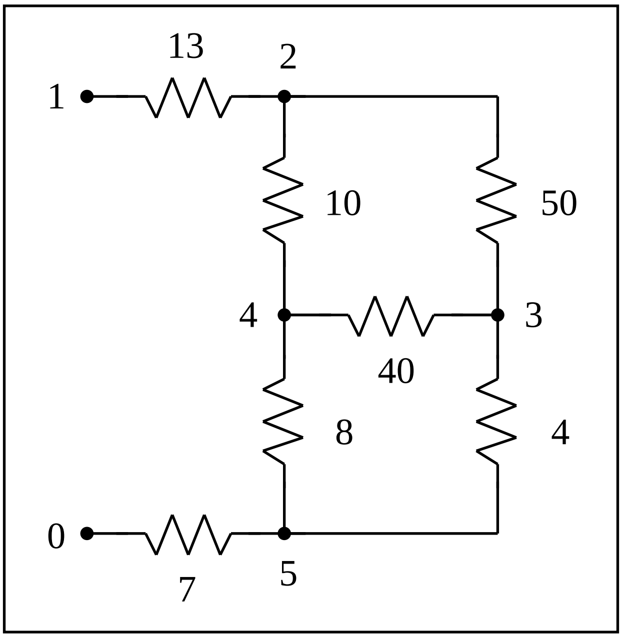
```
Esercizio S5
*R = 10 Ω
R1    2    0    100
R2    1    3    140
R3    1    4    20
R4    3    0    60
R5    4    0    180
VE    1    2    DC    200
.END
```

Risposta: la differenza di potenziale richiesta vale

$V_3 - V_4 = -60$ V ,

quale che sia il valore R. Nella codifica Spice riportata abbiamo utilizzato un particolare valore di R, cioè R = 10 Ω: provate a cambiarlo e verificare che la differenza di potenziale non cambia.

**S6** - Per lo schema disegnato in figura, calcolare la resistenza equivalente ‘vista’ dai morsetti 1 e 0.



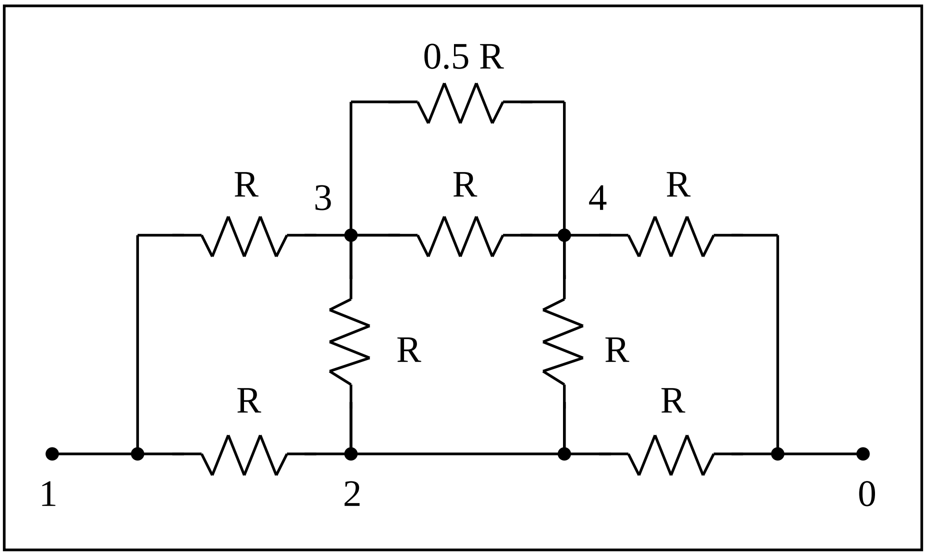

```
Esercizio S6
*Resistenza equivalente
VE    1   0   1
R12   1   2   13
R23   2   3   50
R24   2   4   10
R34   3   4   40
R35   3   5   4
R45   4   5   8
R50   5   0   7
.END
```

Risposta: la resistenza richiesta vale

$R_{10} = 33\ \Omega$ .

Fate attenzione: le approssimazioni numeriche introdotte da Spice potrebbero determinare un risultato leggermente diverso da quello atteso. Notate pure la comodità di indicare la resistenza presente in un lato con due pedici che ricordano i nodi terminali del lato stesso ($R_{12}$, ad esempio).

**S7** - Determinare il valore della resistenza equivalente che si misura dai morsetti 1 e 0.




Dati: R = 30 Ω.

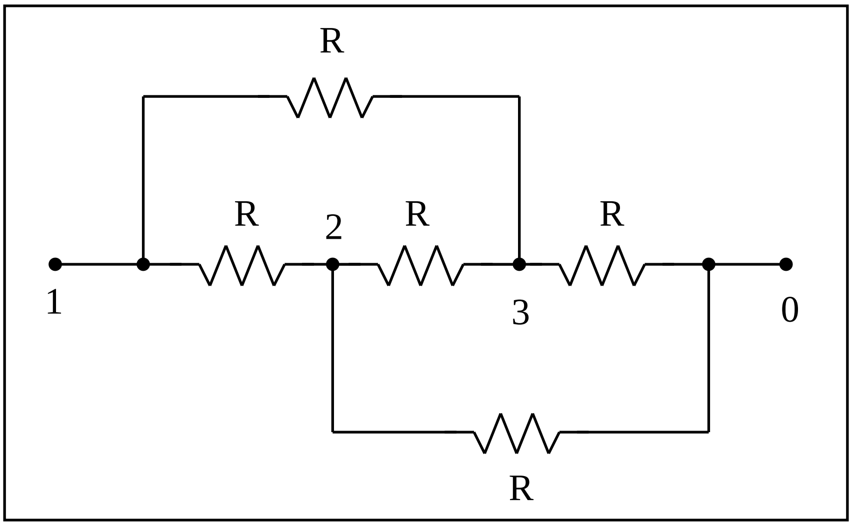
| | | | |
|---|---|---|---|
| Esercizio S7 | | | |
| *Resistenza equivalente | | | |
| VE | 1 | 0 | 1 |
| R12 | 1 | 2 | 30 |
| R23 | 2 | 3 | 30 |
| R31 | 3 | 1 | 30 |
| R341 | 3 | 4 | 30 |
| R342 | 3 | 4 | 15 |
| R42 | 4 | 2 | 30 |
| R20 | 2 | 0 | 30 |
| R40 | 4 | 0 | 30 |
| .END | | | |

Risposta: la resistenza equivalente cercata è pari a

$R_{10}$ = 32 Ω .

Cosa accade se cambiamo il valore di R, dimezzandolo, ad esempio? Sapreste trovare la resistenza equivalente in funzione di un generico valore di R? Dovreste apprezzare il vantaggio di disporre di un tale risultato.

**S8** - Si determini il valore della resistenza equivalente tra i morsetti 1 e 0 del circuito mostrato in figura.




```
Esercizio S8
*R = 2 Ω
VE    1   0   1
R12   1   2   2
R23   2   3   2
R13   1   3   2
R20   2   0   2
R30   3   0   2
.END
```

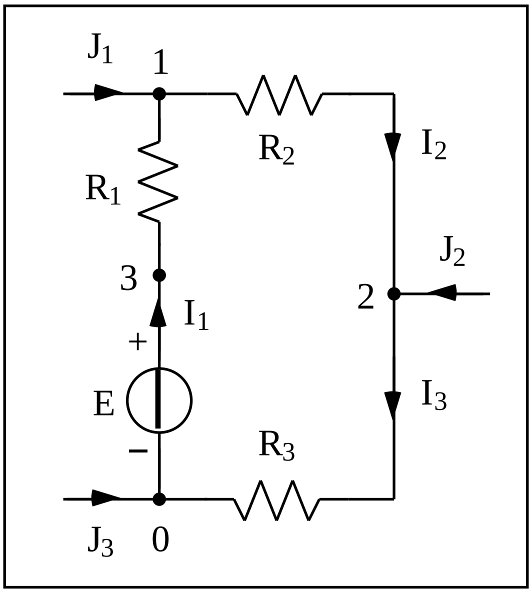
<u>Risposta</u>: non c'è verso di risolvere l'esercizio proposto usando le regole della serie e del parallelo. Adoperando le trasformazioni di una stella in un triangolo di resistori, oppure quelle equivalenti di un triangolo in una stella, troverete che la resistenza richiesta è pari a

$$R_{10} = R \ .$$

Se adoperate la codifica riportata, troverete, ovviamente, $R_{10} = 2\ \Omega$.

Ricordate che Spice considera su ogni bipolo, anche sui generatori, la convenzione dell'utilizzatore: per trovare la resistenza equivalente dovete, pertanto, cambiare il segno della corrente del generatore indicata dal simulatore. Notate pure il valore assunto dai potenziali di ciascun nodo.

**S9** - Determinare, per la rete mostrata in figura, le correnti circolanti in ciascun ramo.



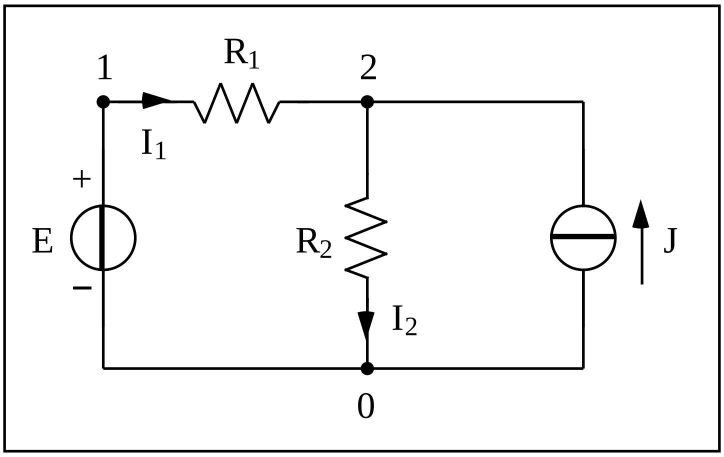

Dati: $E = 20$ V, $J_1 = 10$ A, $J_2 = -20$ A, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Esercizio S9 | | | | |
| *Circuito con più generatori | | | | |
| R1 | 1 | 3 | 10 | |
| R2 | 1 | 2 | 2 | |
| R3 | 2 | 0 | 3 | |
| VE | 3 | 0 | DC | 20 |
| I1 | 0 | 1 | DC | 10 |
| I2 | 0 | 2 | DC | -20 |
| .END | | | | |

Risposta: le tre correnti richieste valgono

$I_1 = 2$ A , $I_2 = 12$ A , $I_3 = -8$ A .

**S10 -** Trovare le correnti nella rete mostrata in figura e verificare che la potenza erogata dai due generatori è uguale a quella complessivamente assorbita dai resistori.



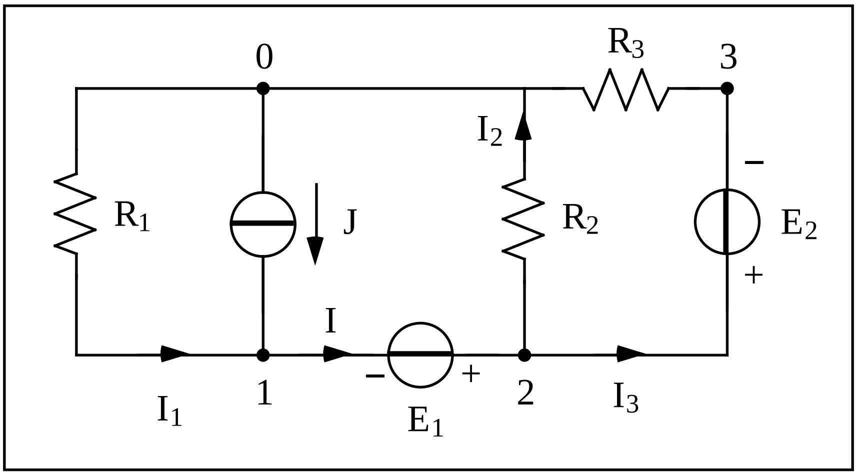

Dati: E = 10 V, J = 2 A, $R_1$ = 5 Ω, $R_2$ = 20 Ω.

```
Esercizio S10
*Semplice esercizio di rete in continua
R1      1     2     5
R2      2     0     20
VE      1     0     DC      10
IJ          0     2     DC      2
.END
```

<u>Risposta</u>: le correnti sono pari a

$I_1$ = - 1.2 A ,   $I_2$ = 0.8 A .

**S11** - Per la rete mostrata in figura, determinare la corrente I che passa attraverso il generatore di tensione $E_1$.



Dati: $E_1$ = 12 V, $E_2$ = 6 V, J = 5 A, $R_1$ = 15 Ω, $R_2$ = 3 Ω, $R_3$ = 6 Ω.

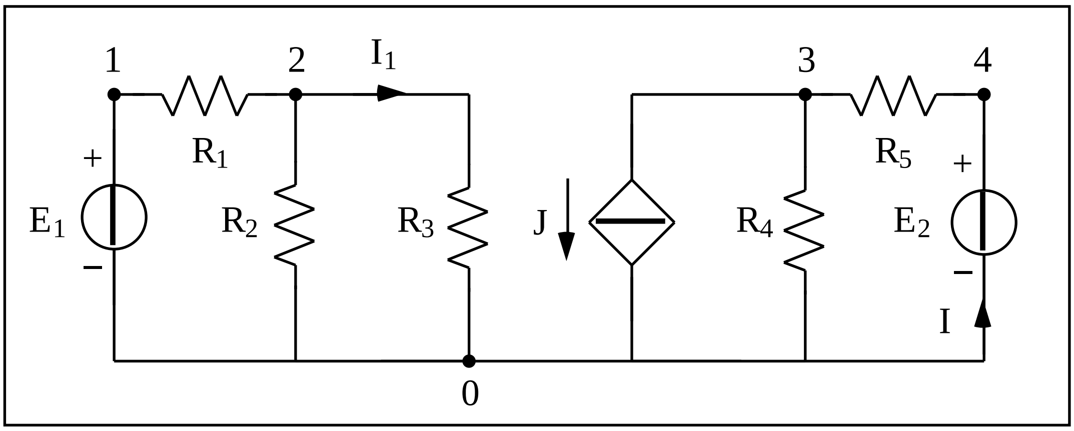
```
Esercizio S11
*Circuito con più generatori
R1    0    1    15
R2    2    0    3
R3    3    0    6
VE1      2    1    DC    12
VE2      2    3    DC    6
IJ       0    1    DC    5
.END
```

Risposta: la corrente richiesta è pari a

I = 5 A .

Come sempre, il simulatore Spice fornisce il valore del potenziale in tutti i nodi del circuito e, pertanto, è possibile calcolare il valore delle correnti in tutti i rami del circuito. Controllate pure che, data la presenza di un generatore di corrente, l'indicazione 'Total power dissipation' fornita dal simulatore *non* fornisce la potenza complessivamente erogata dai generatori (manca la potenza erogata dal generatore di corrente). Infine, l'indicazione 'DC' presente nei tre generatori potrebbe essere omessa.

**S12** - Calcolare la corrente I che circola attraverso il resistore $R_3$ nella rete mostrata in figura.




Dati: $E_1$ = 20 V, $E_2$ = 7 V, J = α $I_1$, α = 2/3, $R_1$ = 2 Ω, $R_2$ = 4 Ω, $R_3$ = 12 Ω, $R_4$ = 3 Ω, $R_5$ = 6 Ω.

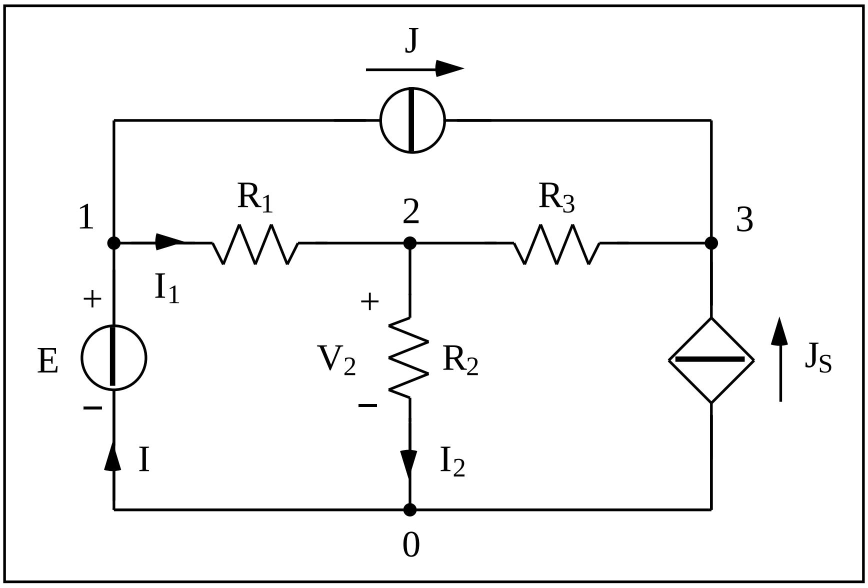
```
Esercizio S12
*Circuito con generatore controllato
R1      1     2     2
R2      2     0     4
R3      5     0     12
R4      3     0     3
R5      4     3     6
VE1        1     0     DC      20
VE2        4     0     DC      7
VEJ        2     5     DC      0
FJ      3     0     VEJ        0.667
.END
```

<u>Risposta</u>: la corrente richiesta vale

$I = 1$ A .

Fate attenzione alla codifica del generatore controllato ed alla presenza del nuovo nodo 5.

**S13** - Determinare la corrente I che circola attraverso il generatore indipendente di tensione nella rete mostrata in figura.




Dati: $E = 20$ V, $J = 30$ A, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $J_S = \alpha V_2$, $\alpha = 0.25$ S.

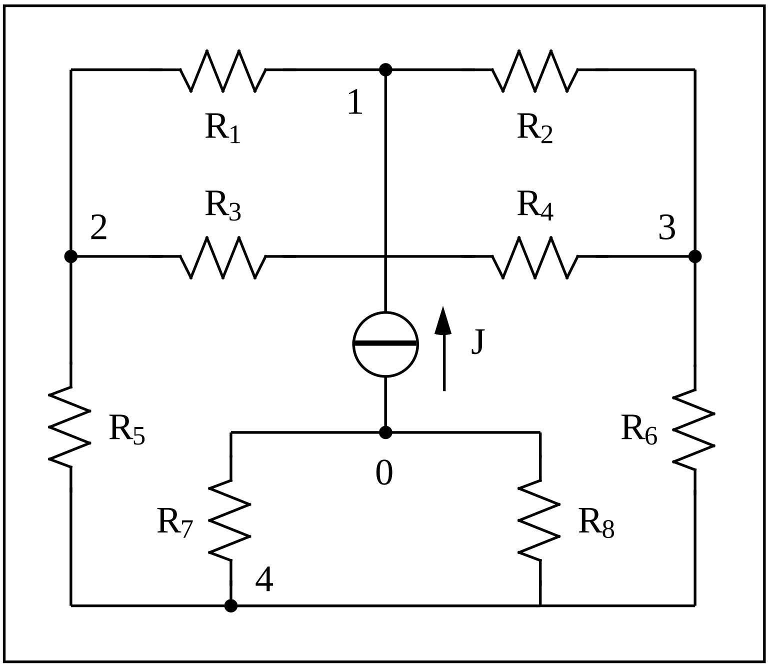
```
Esercizio S13
*Generatore di corrente controllato
R1    1    2    1
R2    2    0    2
R3    2    3    3
VE    1    0    20
IJ    1    3    30
G1    0    3    2    0    0.25
.END
```

Risposta: la corrente richiesta assume il valore

$I = 10$ A .

Prestate sempre attenzione alla codifica del generatore controllato.

**S14** - Per la rete di figura calcolare le tensioni $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ adoperando le leggi di Kirchhoff.




Dati: $J = 2$ A, $R_1 = 150\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 150\ \Omega$, $R_4 = 100\ \Omega$, $R_5 = 25\ \Omega$, $R_6 = 50\ \Omega$, $R_7 = R_8 = 20\ \Omega$.

```
Esercizio S14
```

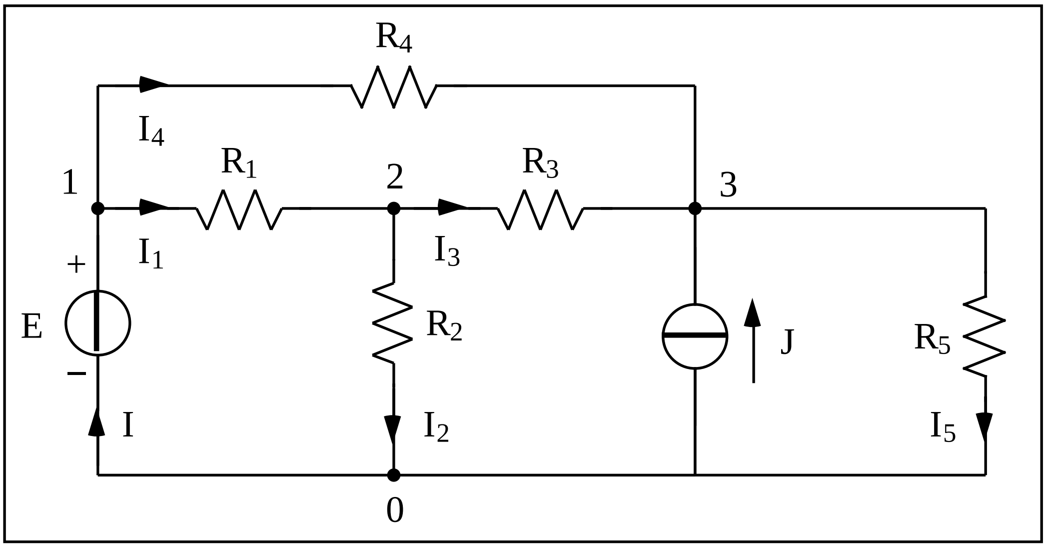
```
*Rete in continua
R1      2     1      150
R2      3     1      100
R3      2     1      150
R4      3     1      100
R5      2     4      25
R6      3     4      50
R7      4     0      20
R8      4     0      20
IJ           0     1      DC      2
.END
```

Risposta : i potenziali richiesti valgono

$V_1$ = 120 V ,   $V_2$ = 45 V ,   $V_3$ = 70 V ,   $V_4$ = 20 V ,

come potete controllare immediatamente adoperando il simulatore Spice. Cosa indica la ‘Total power dissipation’?

**S15** - Determinare la corrente I che interessa il ramo contenente il generatore indipendente di tensione della rete mostrata in figura.




Dati:   E = 50 V,   J = 1 A,   $R_1$ = 80 Ω,   $R_2$ = 50 Ω,   $R_3$ = 40 Ω,   $R_4$ = 800 Ω, $R_5$ = 200 Ω.

```
Esercizio S15
```

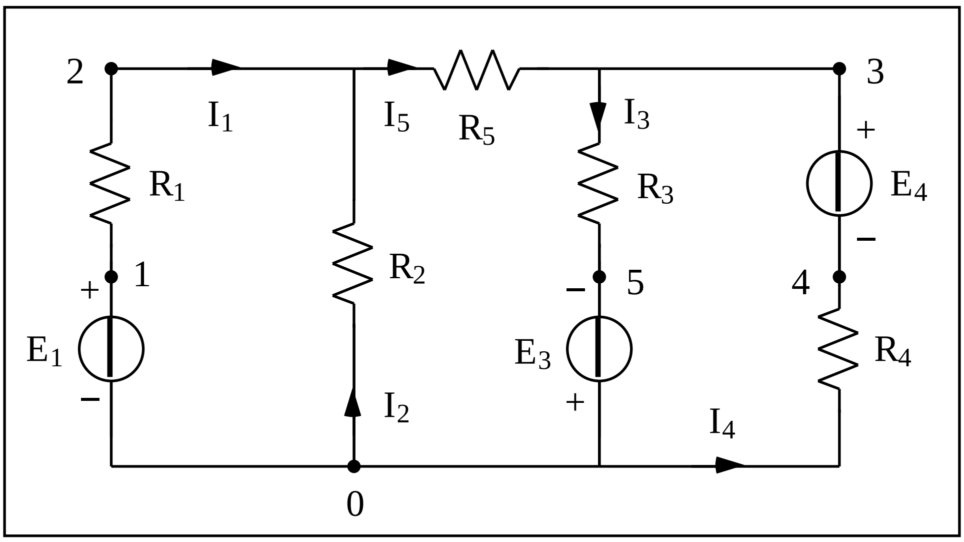
| *Circuito con due generatori | | | | |
|---|---|---|---|---|
| R1 | 1 | 2 | 80 | |
| R2 | 2 | 0 | 50 | |
| R3 | 2 | 3 | 40 | |
| R4 | 1 | 3 | 800 | |
| R5 | 3 | 0 | 200 | |
| VE | 1 | 0 | DC | 50 |
| IJ | 0 | 3 | DC | 1 |
| .END | | | | |

<u>Risposta</u>: la corrente richiesta vale

$I = 0.114$ A .

Usando i risultati forniti dal simulatore Spice, trovate la potenza assorbita dal resistore $R_5$ e quella erogata dal generatore di corrente. E quanto valgono la corrente $I_4$ e la potenza assorbita dal resistore $R_4$? Cosa dire poi della potenza *erogata* da $R_2$? Verificate, infine, il teorema di conservazione delle potenze elettriche, prestando, come d'abitudine, attenzione all'indicazione 'Total power dissipation' fornita d Spice.

**S16** - Calcolare le correnti della rete mostrata in figura.

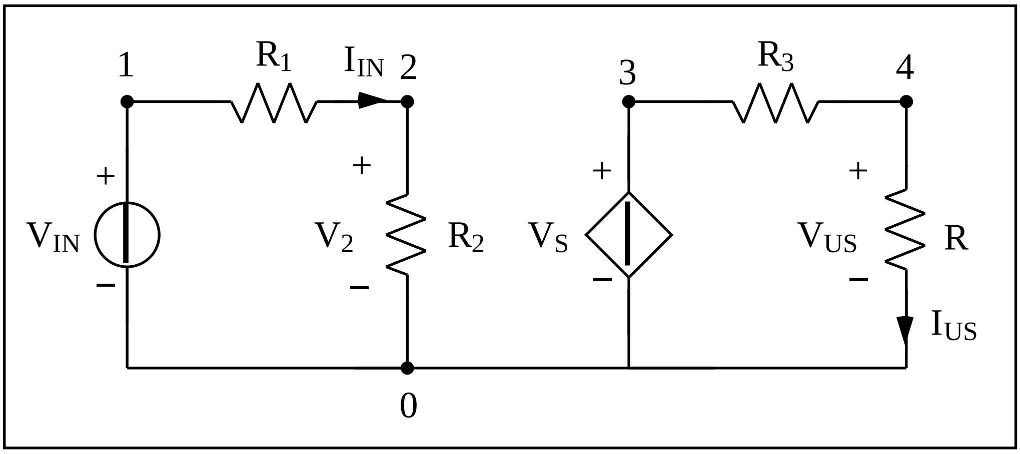



Dati: $E_1 = 10$ V, $E_3 = 70$ V, $E_4 = -20$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 1\ \Omega$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Esercizio S16 | | | | |
| *Circuito con più generatori | | | | |
| R1 | 1 | 2 | 10 | |
| R2 | 0 | 2 | 5 | |
| R3 | 3 | 5 | 2 | |
| R4 | 0 | 4 | 4 | |
| R5 | 2 | 3 | 1 | |
| VE1 | 1 | 0 | DC | 10 |
| VE3 | 0 | 5 | DC | 70 |
| VE4 | 3 | 4 | DC | -20 |
| .END | | | | |

Risposta: $I_1$ = 4 A, $I_2$ = 6 A, $I_3$ = 15 A, $I_4$ = 5 A, $I_5$ = 10 A.

**S17** - Un amplificatore fornisce un guadagno in tensione tra una tensione di ingresso $V_{IN}$ ed una tensione di uscita $V_{US}$. Determinare il rapporto $V_{US}/V_{IN}$, sapendo che la tensione erogata dal generatore controllato è $V_S = \alpha V_2$.

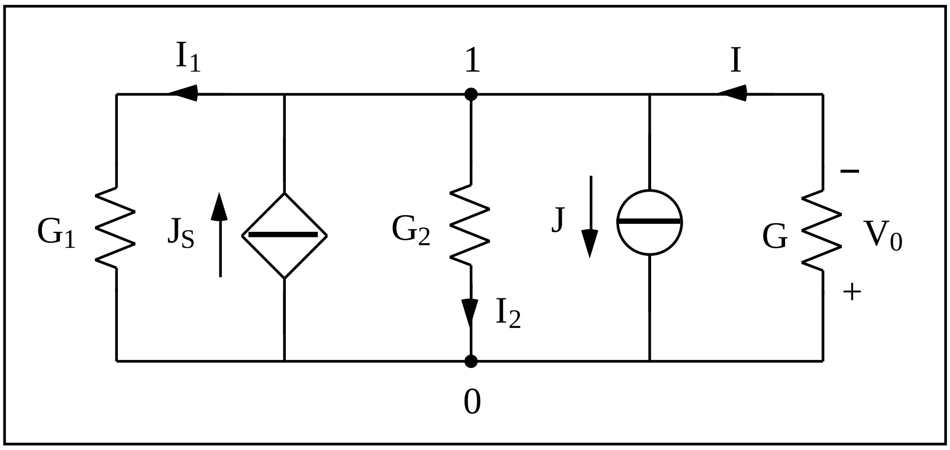



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Esercizio S17 | | | | | |
| *α = 100, $R_1$ = 5kΩ, $R_2$ = 5kΩ, $R_3$ = 192Ω, R = 8 Ω . | | | | | |
| R1 | 1 | 2 | 5K | | |
| R2 | 2 | 0 | 5000 | | |
| R3 | 3 | 4 | 192 | | |
| R4 | 4 | 0 | 8 | | |
| VI | 1 | 0 | DC | 1 | |
| ES | 3 | 0 | 2 | 0 | 100 |
| .TF | V(4) | | VI | | |
| .END | | | | | |

Risposta: il rapporto richiesto vale

$$\frac{V_{US}}{V_{IN}} = \alpha \frac{R}{R + R_3} \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

**S18** - La figura mostra un circuito che simula il comportamento di un fascio elettronico in un tubo catodico del televisore. Determinare la conduttanza G in modo che la tensione $V_0$ sia pari a 24 V.




Dati: $J = 20$ A, $J_S = \alpha\, I$, $\alpha = 2$, $G_1 = 1/4$ S, $G_2 = 1/3$ S, $V_0 = 24$ V.

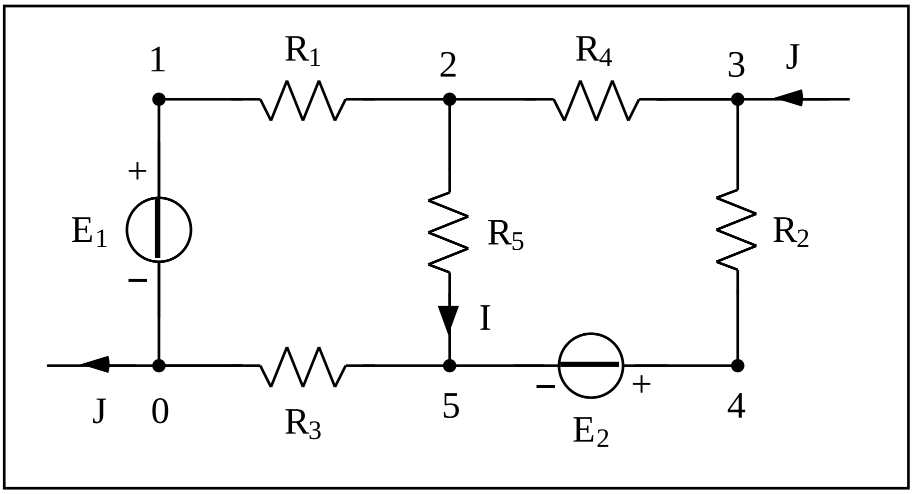
```
Esercizio S18
*Tubo catodico del televisore
R0      0     2     12
R1      1     0     4
R2      1     0     3
VI      2     1     DC     0
IJ      1     0     DC     20
FS      0     1     VI     2
.END
```

Risposta: risulta che

$$G = \frac{J - I_1 - I_2}{(1 + \alpha)\, V_0} = \frac{1}{12}\ \text{S} .$$

Attenzione alla codifica del generatore controllato.

**S19** - Determinare la corrente I e la potenza assorbita dal resistore $R_5$, per la rete mostrata in figura.




Dati: $E_1$ = 60 V, $E_2$ = 130 V, J = 12 A, $R_1 = R_5$ = 2 Ω, $R_2 = R_3$ = 5 Ω, $R_4$ = 4 Ω.

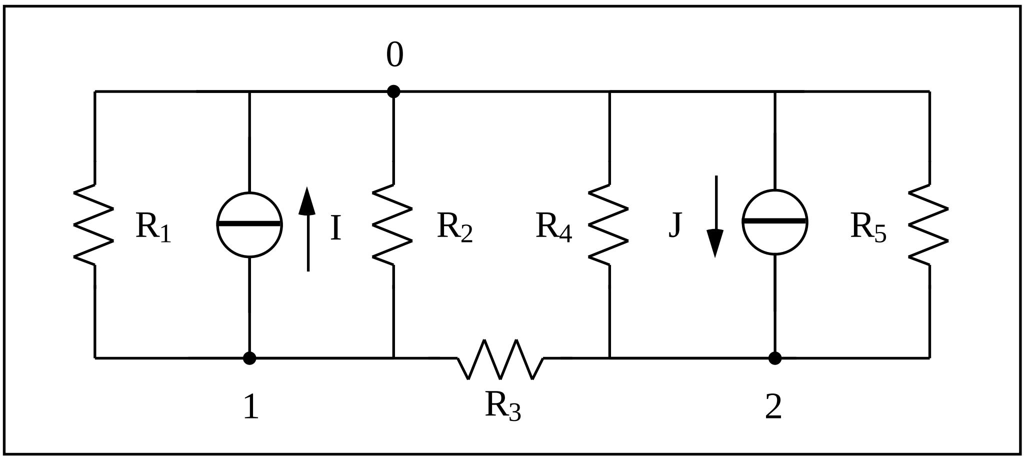
```
Esercizio S19
*Ancora più di un generatore
R1      1     2     2
R2      4     3     5
R3      5     0     5
R4      3     2     4
R5      2     5     2
VE1        1     0     DC     60
VE2        4     5     DC     130
IJ         0     3     DC     12
.END
```

Risposta: i dati richiesti sono pari a

$$I = 14\ A\ , \quad P_5 = 392\ W\ .$$

Si può dire che l'indicazione 'Total power dissipation', fornita da Spice, consente di determinare la potenza complessivamente erogata dai generatori indipendenti? E quanto vale la potenza erogata dal generatore indipendente di corrente? Quale efficace controllo dei risultati trovati potete, infine, verificare la conservazione delle potenze elettriche.

**S20** - Per la rete di figura, determinare i potenziali di nodo $V_1$ e $V_2$, assumendo quale riferimento $V_0 = 0$ V.




Dati: $I = 3$ A, $J = 16$ A, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 6\ \Omega$, $R_5 = 12\ \Omega$.

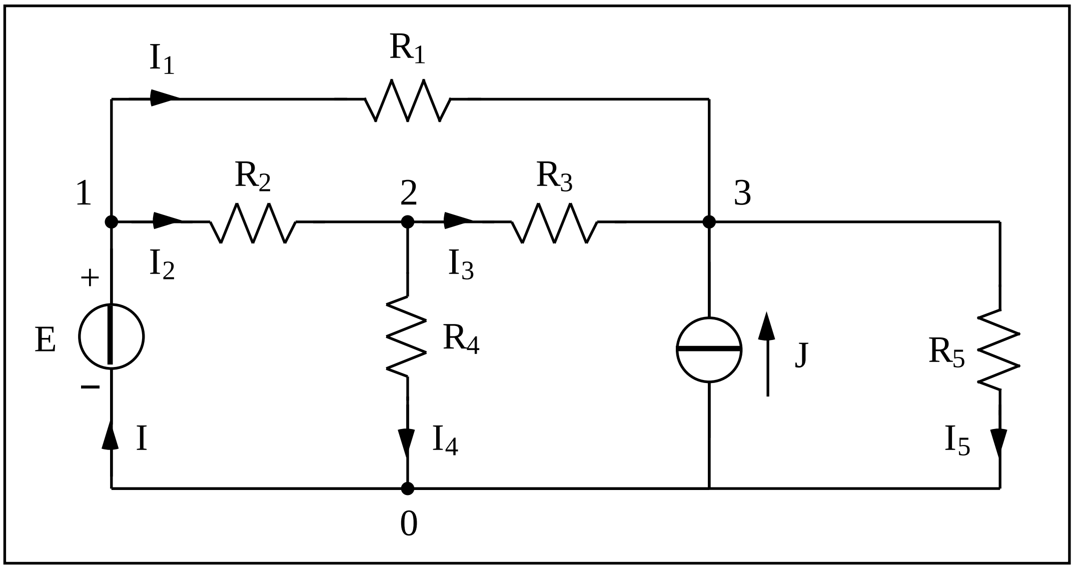
```
Esercizio S20
*Potenziali nodali
R1    1    0    10
R2    1    0    2
R3    1    2    2
R4    2    0    6
R5    2    0    12
I0    1    0    3
IJ    0    2    16
.END
```

Risposta: i potenziali richiesti valgono

$$V_1 = 10 \text{ V}, \quad V_2 = 28 \text{ V}.$$

Controllate sul file di uscita di Spice l'indicazione 'Total power dissipation' (deve essere nulla). Inoltre, adoperando i potenziali di nodo trovati, determinare le correnti che circolano nei diversi rami della rete. Infine, dopo aver calcolato le potenze erogate dai due generatori di corrente, verificare la conservazione delle potenze elettriche.

**S21** - Trovare le correnti in tutti i rami (secondo i versi indicati) applicando il metodo dei potenziali nodali.




Dati: $E = 50$ V, $J = 0.75$ A, $R_1 = 800\ \Omega$, $R_2 = 80\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 50\ \Omega$, $R_5 = 200\ \Omega$.

```
Esercizio S21
*Potenziali nodali
R1    1    3    800
R2    1    2    80
R3    2    3    40
R4    2    0    50
R5    3    0    200
V1    1    0    50
IJ    0    3    0.75
.END
```

Risposta: i potenziali e le correnti richieste sono pari a

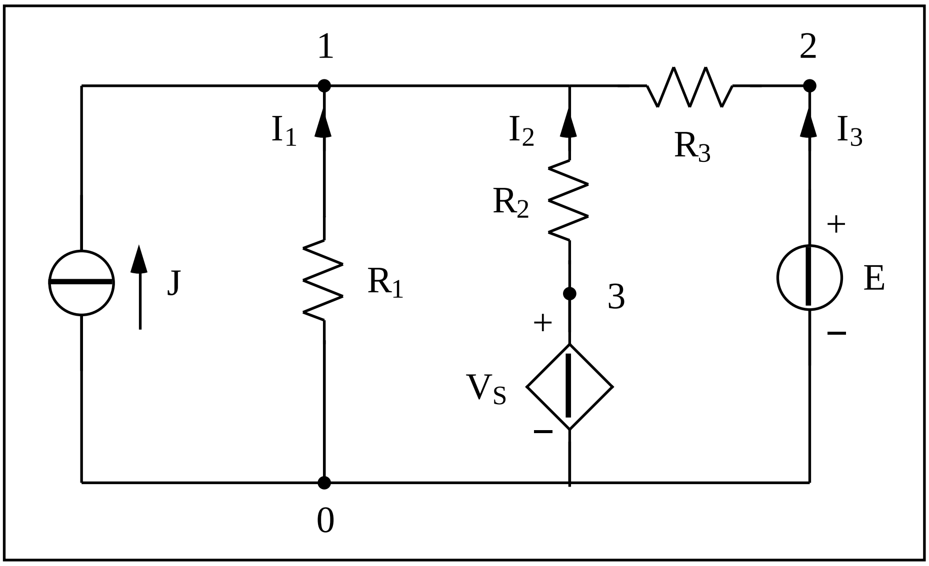
$V_2 = 34$ V , $V_3 = 53.2$ V ;

$I = 0.196$ A , $I_1 = -\ 4$ mA , $I_2 = 0.2$ A ,

$I_3 = -\ 0.48$ A , $I_4 = 0.68$ A , $I_5 = 0.266$ A .

Ricordatevi di verificare sempre la conservazione delle potenze elettriche.

**S22** - Calcolare la potenza assorbita dal generatore controllato e le potenze erogate dai generatori indipendenti, usando il metodo dei potenziali nodali.




Dati: E = 45 V, J = 0.45 A $V_S = r\, I_3$, r = 6.25 Ω, $R_1$ = 100 Ω, $R_2$ = 5 Ω, $R_3$ = 25 Ω.

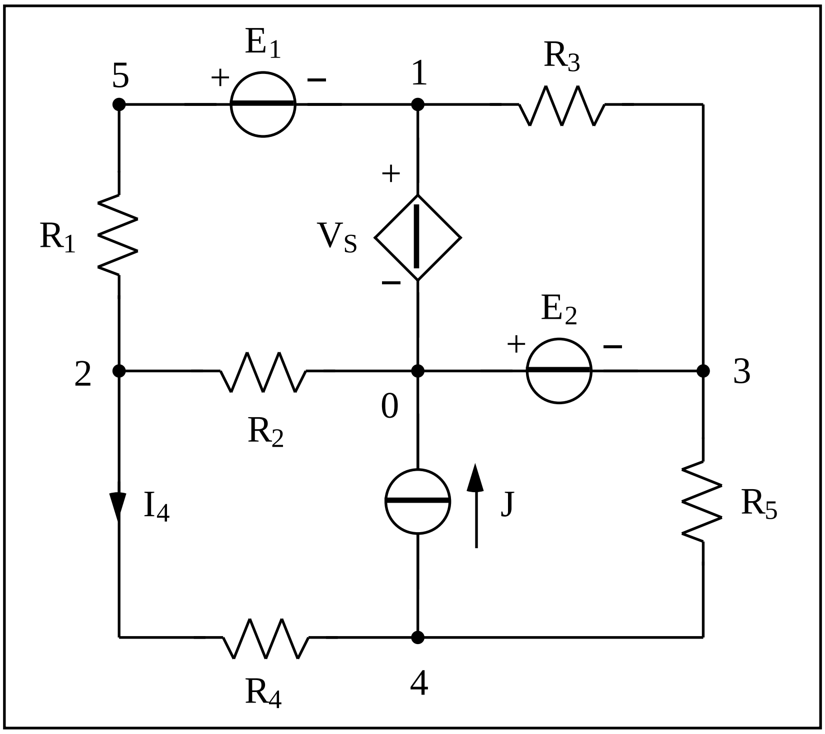
```
Esercizio S22
*Generatore controllato
R1   1   0   100
R2   1   3   5
R3   1   2   25
IJ   0   1   0.45
V1   2   0   45
H1   3   0   V1    -6.25
.END
```

Risposta: le potenze richieste valgono

$$P_S = -\,V_S\, I_2 = 11.25 \text{ W}, \quad P_J = V_1\, J = 6.75 \text{ W}, \quad P_E = E\, I_3 = 54 \text{ W}.$$

Fate attenzione alla codifica del generatore controllato.

**S23 -** Calcolare la corrente $I_4$, applicando il metodo dei potenziali nodali.



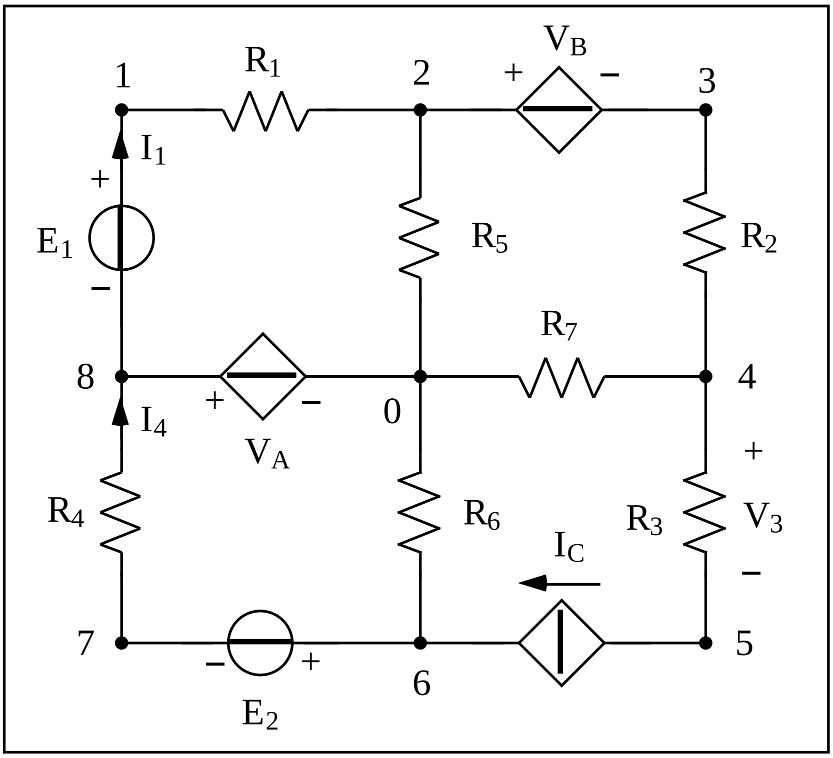

Dati: $E_1$ = 16 V, $E_2$ = 8 V, J = 1 A, $V_S$ = α $I_4$, α = 4 Ω, $R_1$ = 2 Ω, $R_2$ = 3 Ω, $R_3$ = 2 Ω, $R_4$ = 6 Ω, $R_5$ = 8 Ω.

```
Esercizio S23
*Ancora un generatore controllato
R1    5    2    2
R2    2    0    3
R3    3    1    2
R4    6    4    6
R5    3    4    8
VE1     5    1    DC    16
VE2     0    3    DC    8
VE4     2    6    DC    0
IJ    4    0    DC    1
HS    1    0    VE4    4
.END
```

Risposta: la corrente richiesta vale

$I_4$ = 2 A .

**S24** - Per il circuito di figura, determinare la corrente $I_1$. Individuare, inoltre, le porte di controllo dei generatori controllati.

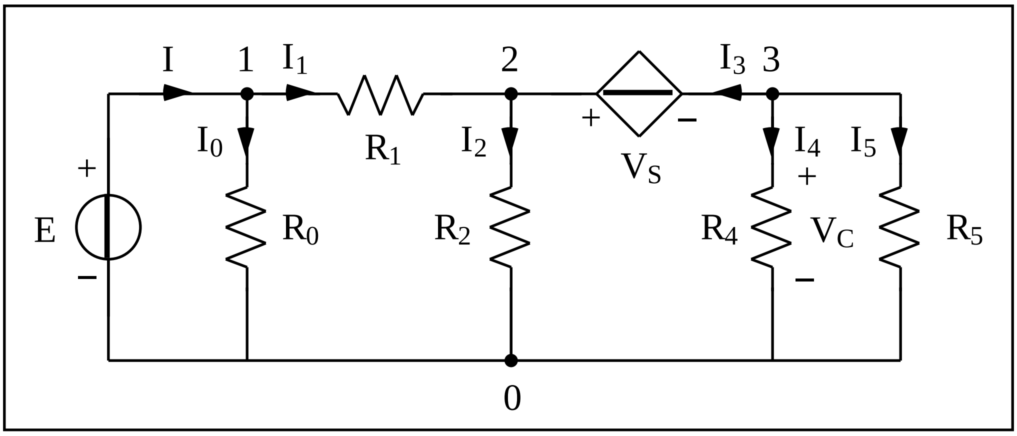



Dati: $E_1$ = 10 V, $E_2$ = 6 V, $V_A = \alpha\, I_4$, $\alpha$ = 4 Ω, $V_B = \beta\, V_3$, $\beta$ = 3, $I_C = \gamma\, I_1$, $\gamma$ = 2, $R_1$ = 7 Ω, $R_2$ = 4 Ω, $R_3$ = 6 Ω, $R_4$ = 1 Ω, $R_5$ = 5 Ω, $R_6$ = 2 Ω, $R_7$ = 3 Ω.

```
Esercizio S24
*Un esercizio complicato
R1    1    2    7
R2    4    3    4
R3    4    5    6
R4    7    8    1
R5    2    0    5
R6    6    0    2
R7    4    0    3
VE1     1    8    DC    10
VE2     6    7    DC    6
HA    8    0    VE2      4
EB    2    3    4    5    3
FC    5    6    VE1      -2
.END
```

Risposta: $I_1$ = 0.3264 A.

**S25** - Calcolare le correnti per la rete di figura adoperando il metodo dei potenziali nodali.




Dati: $E = 100$ V, $V_S = \alpha\, V_C$, $\alpha = 4$, $R_0 = 80\ \Omega$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_4 = 20\ \Omega$, $R_5 = 30\ \Omega$.

```
Esercizio S25
*Generatore controllato
R0   1   0   80
R1   1   2   10
R2   2   0   60
R4   3   0   20
R5   3   0   30
V1   1   0   100
E2   2   3   3   0   4
.END
```

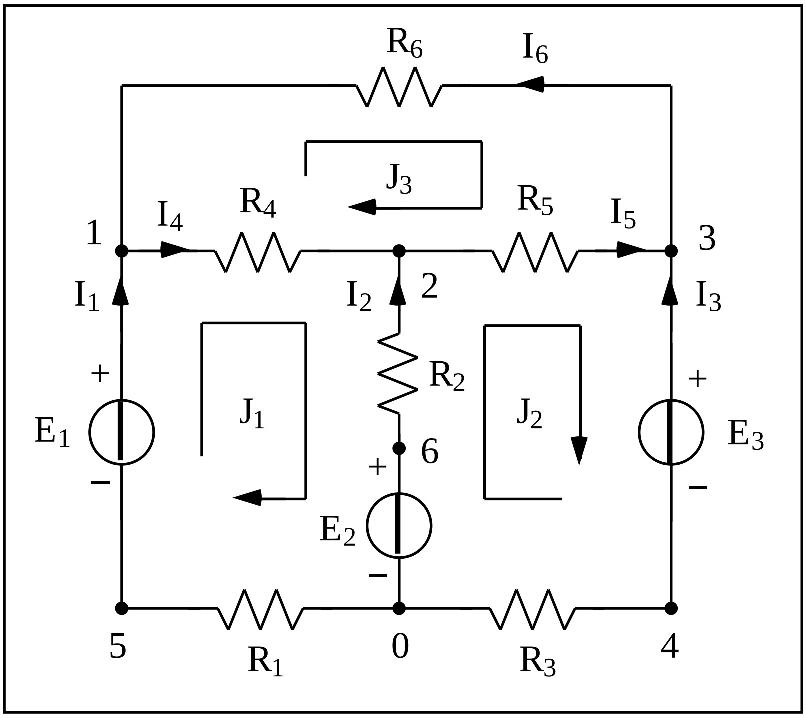
Risposta: le correnti richieste valgono

$I = 3.75$ A , $I_0 = 1.25$ A , $I_1 = 2.5$ A , $I_2 = 1.25$ A ,

$I_3 = -\,1.25$ A , $I_4 = 0.75$ A , $I_5 = 0.5$ A .

Verificate la conservazione delle potenze elettriche in una rete in cui è presente un generatore controllato.

**S26** - Calcolare le correnti per la rete di figura, secondo i versi indicati, adoperando il metodo delle correnti di maglia.




Dati: $E_1$ = 460 V, $E_2$ = 230 V, $E_3$ = 115 V, $R_1$ = 8 Ω, $R_2$ = 4 Ω, $R_3$ = 10 Ω, $R_4$ = 2 Ω, $R_5$ = 6 Ω, $R_6$ = 12 Ω.

Risposta: $I_1$ = 20.5 A, $I_2$ = - 9 A, $I_3$ = - 11.5 A, $I_4$ = 15 A, $I_5$ = 6 A, $I_6$ = - 5.5 A.

Il listato Spice

```
Esercizio S26
*Correnti di maglia
V1   1   5   460
V2   6   0   230
V3   3   4   115
R1   5   0   8
R2   2   6   4
R3   4   0   10
R4   1   2   2
R5   2   3   6
R6   3   1   12
.END
```

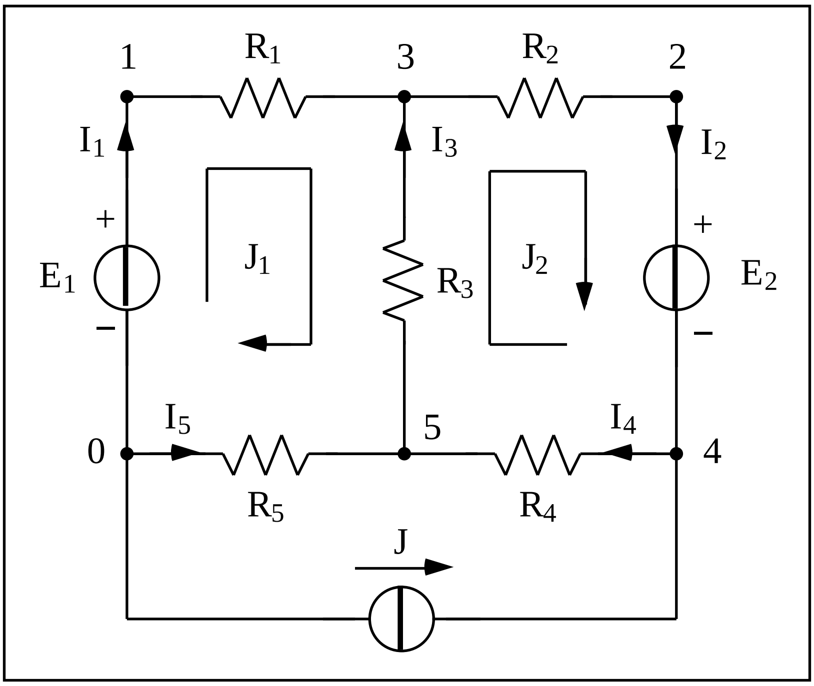
consente di determinare i potenziali

$V_1$ = 296 V , $V_2$ = 266 V , $V_3$ = 230 V ,

$V_4$ = 115 V , $V_5$ = - 164 V , $V_6$ = 230 V ,

per mezzo dei quali è facile convincersi che la soluzione da noi proposta in precedenza è corretta.

**S27** - Calcolare le correnti per la rete di figura, secondo i versi indicati, adoperando il metodo delle correnti di maglia.




Dati: $E_1$ = 600 V, $E_2$ = 400 V, J = 12 A, $R_1$ = 10 Ω, $R_2$ = 8 Ω, $R_3$ = 40 Ω, $R_4$ = 14 Ω, $R_5$ = 2 Ω.

Risposta: le correnti di maglia sono pari a

$J_1$ = 8 A , $J_2$ = - 4 A .

Di conseguenza, le correnti di lato valgono

$I_1$ = 8 A , $I_2$ = - 4 A , $I_3$ = - 12 A , $I_4$ = 8 A , $I_5$ = - 20 A .

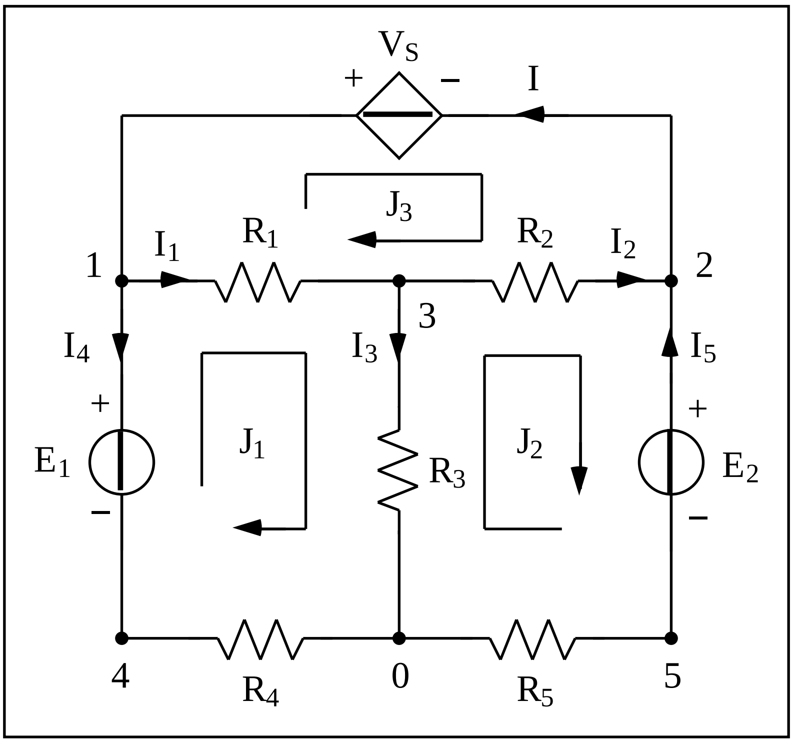
Per controllare i risultati dell’esercizio possiamo adoperare il simulatore Spice e, per mezzo del segmento di programma

| Esercizio S27 | | | |
|---|---|---|---|
| *Correnti di maglia | | | |
| V1 | 1 | 0 | 600 |
| V2 | 2 | 4 | 400 |
| I1 | 0 | 4 | 12 |
| R1 | 1 | 3 | 10 |
| R2 | 2 | 3 | 8 |
| R3 | 3 | 5 | 40 |
| R4 | 4 | 5 | 14 |
| R5 | 5 | 0 | 2 |
| .END | | | |

otteniamo i seguenti valori dei potenziali nei nodi della rete

$V_1 = 600$ V , $V_2 = 552$ V , $V_3 = 520$ V , $V_4 = 152$ V , $V_5 = 40$ V .

**S28** - Calcolare le correnti per la rete di figura, secondo i versi indicati, adoperando il metodo delle correnti di maglia.

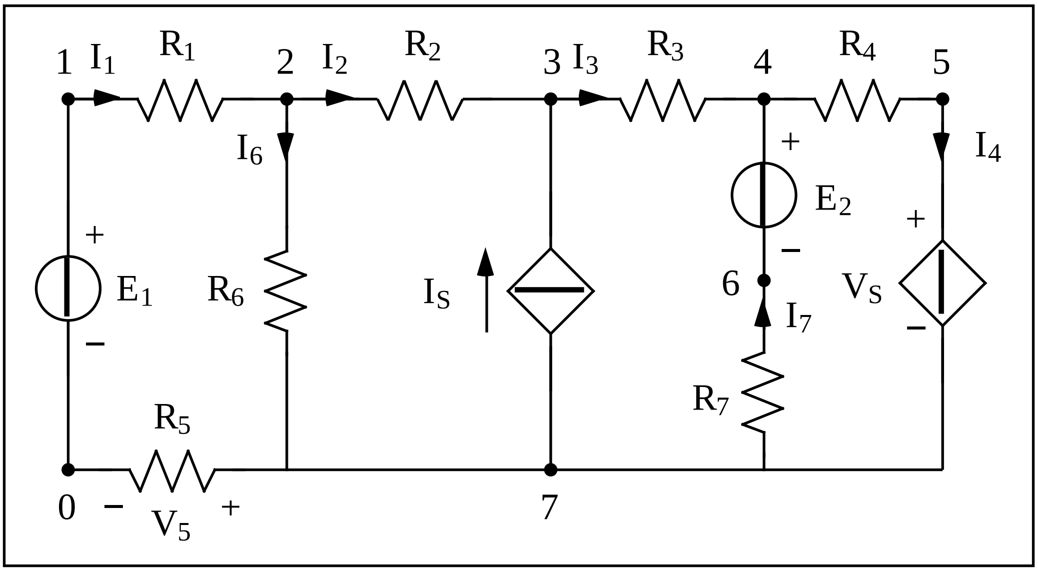



Dati: $E_1 = -10$ V, $E_2 = 24$ V, $V_S = \alpha\, I_3$, $\alpha = 7\ \Omega$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 5\ \Omega$.

```
Esercizio S28
*Correnti di maglia
HS      1     2     VN     7
VN      6     0     DC     0
V1      1     4     DC     -10
V2      2     5     DC     24
R1      1     3     1
R2      3     2     2
R3      3     6     3
R4      4     0     4
R5      0     5     5
.END
```

Risposta: $J_1$ = - 4 A, $J_2$ = - 5 A, $J_3$ = - 7 A; I = 7 A, $I_1$ = 3 A, $I_2$ = 2 A, $I_3$ = 1 A, $I_4$ = 4 A, $I_5$ = 5 A.

**S29** - Risolvere la rete mostrata in figura utilizzando sia il metodo delle correnti di maglia, sia quello dei potenziali nodali e discuterne la convenienza. Verificare la conservazione delle potenze elettriche.




Dati: $E_1$ = 16 V, $E_2$ = 12 V, $V_S = \alpha V_5$, $\alpha$ = 3, $I_S = \beta I_4$, $\beta$ = 2, $R_1$ = 3 Ω, $R_2$ = 2 Ω, $R_3$ = 6 Ω, $R_4$ = 7 Ω, $R_5$ = 5 Ω, $R_6$ = 1 Ω, $R_7$ = 4 Ω.

Controllate l'esercizio adoperando il segmento Spice di seguito riportato.

```
Esercizio S29
```

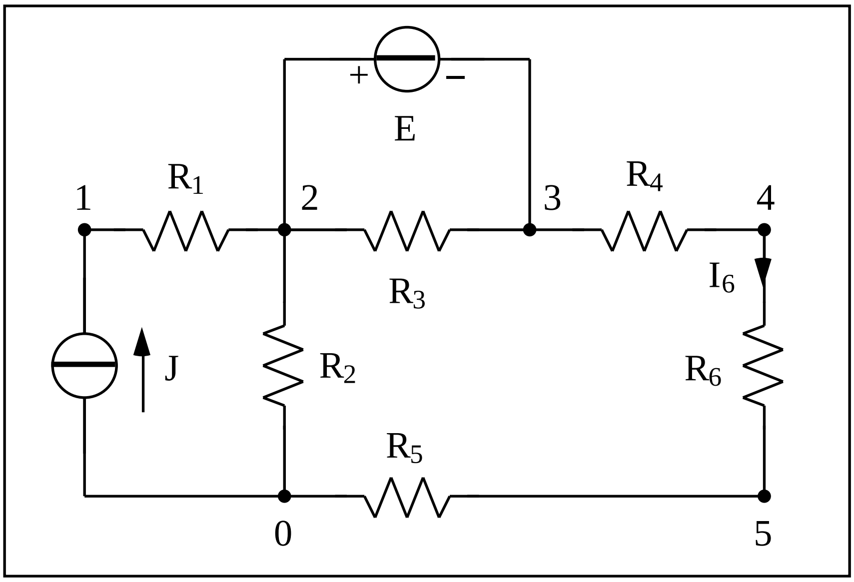
| *Circuito con due generatori controllati | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| R1 | 1 | 2 | 3 | | |
| R2 | 2 | 3 | 2 | | |
| R3 | 3 | 4 | 6 | | |
| R4 | 4 | 5 | 7 | | |
| R5 | 7 | 0 | 5 | | |
| R6 | 2 | 7 | 1 | | |
| R7 | 7 | 6 | 4 | | |
| VE1 | 1 | 0 | DC | 16 | |
| VE2 | 4 | 6 | DC | 12 | |
| VE4 | 5 | 8 | DC | 0 | |
| ES | 8 | 7 | 7 | 0 | 3 |
| FS | 7 | 3 | VE4 | 2 | |
| .END | | | | | |

Risposta: risulta

$I_1 = 2.076$ A , $I_2 = 2.684$ A , $I_3 = - 2.920$ A ,

$I_4 = - 2.801$ A , $I_6 = - 0.6081$ A , $I_7 = - 0.1170$ A .

**S30** - Calcolare la potenza dissipata nella resistenza $R_6$.




Dati: J = 5 A, E = 340 V, $R_1$ = 8 Ω, $R_2$ = 20 Ω, $R_3$ = 80 Ω, $R_4$ = 5 Ω, $R_5$ = 10 Ω, $R_6$ = 45 Ω.

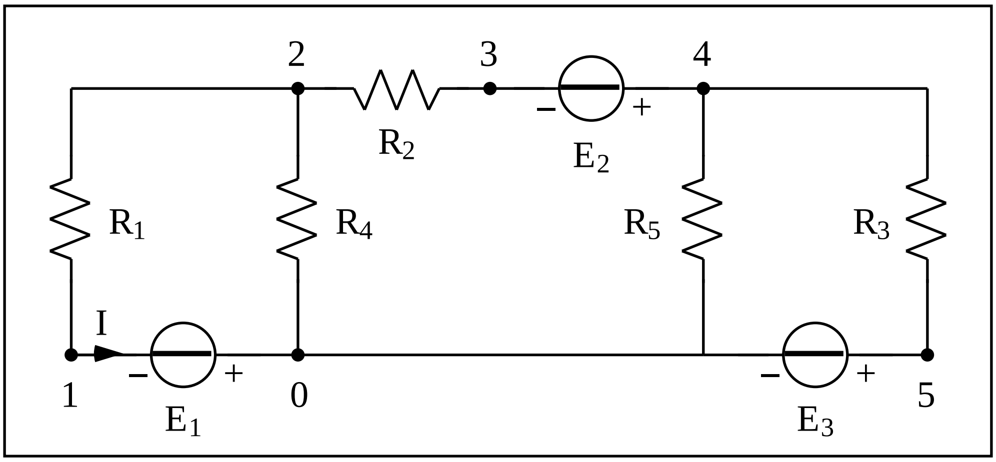
Domandatevi anzitutto il ruolo del resistore $R_3$.

```
Esercizio S30
*Potenza sul resistore
R1    1    2    8
R2    2    0    20
R3    2    3    80
R4    3    4    5
R5    5    0    10
R6    4    5    45
VE    2    3    340
IJ    0    1    5
.END
```

Risposta: la potenza richiesta è pari a

$$P = 405 \text{ W} .$$

**S31 -** Per la rete mostrata in figura, determinare la corrente I. Verificare, poi, la conservazione delle potenze elettriche.




Dati: $E_1 = E_2 = 10$ V, $E_3 = 8$ V, $R_1 = 9\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$, $R_5 = 2\ \Omega$.

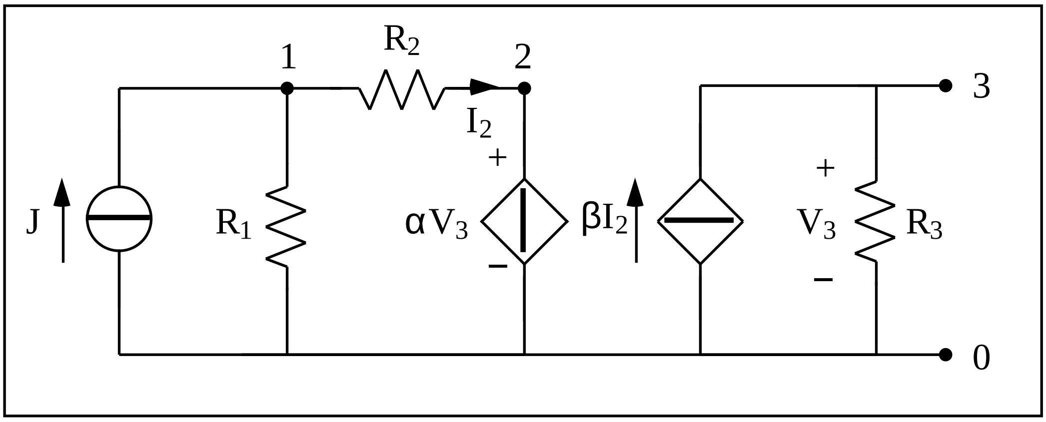
Risposta: la corrente richiesta vale

$$I = 0.634 \text{ A} ,$$

come potete controllare per mezzo del listato Spice che segue.

```
Esercizio S31
*Un circuito simpatico
R1      1     2     9
R2      2     3     10
R3      4     5     3
R4      2     0     5
R5      4     0     2
VE1         0     1     DC      10
VE2         4     3     DC      10
VE3         5     0     DC      8
.END
```

**S32 -** Trovare l’equivalente di Thévenin rispetto ai terminali 3 e 0.




Dati: $J = 135$ nA, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 980\ \Omega$, $R_3 = 40\ k\Omega$, $\alpha = 5\ 10^{-5}$, $\beta = 40$.

```
Esercizio S32
*Applicazione del teorema di Thévenin
R1      1     0     100
R2      1     2     980
R3      3     0     40k
IJ      0     1     DC      135n
VE2     2     4     DC      0
F2      0     3     VE2         40
E3      4     0     3     0     50u
.TF     V(3)        IJ
.END
```

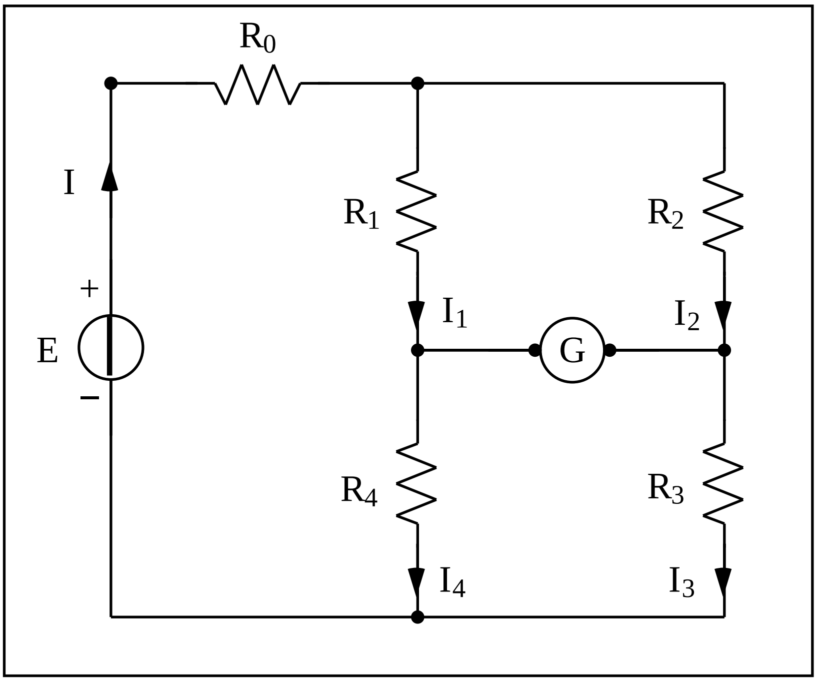
Risposta: i parametri equivalenti valgono

$E_0$ = 18.62 mV , $R_0$ = 37.24 kΩ .

**S33** - Adoperando il teorema di Norton e quello di Thévenin, verificare la *condizione di equilibrio*

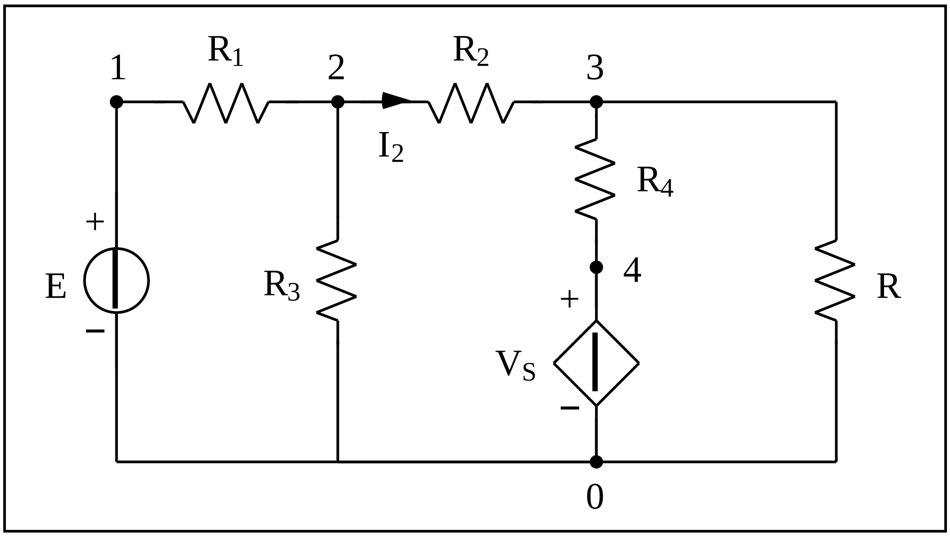
$R_1 R_3 = R_2 R_4$

per la rete a ponte mostrata in figura. In questa condizione di funzionamento, poi, verificare la conservazione delle potenze elettriche.




Lo strumento indicato con ‘G’ è un galvanometro. Potete immaginare che si tratti di un misuratore di corrente molto sensibile, capace di rilevare correnti molto piccole, fino a qualche nanoampere.
La rete a ponte mostrata è il famoso ponte di Wheatstone, un circuito molto adoperato per misurare i valori intermedi di resistenze. Approfondiremo l’uso delle reti a ponte nel volume dedicato alle Misure Elettriche. Comunque, provate a simulare con Spice, in condizioni di equilibrio e non, questa rete: in condizioni di equilibrio la corrente che interessa il galvanometro non è rigorosamente nulla, ma è certamente diversi ordini di grandezza più piccola di quelle che interessano gli altri rami.

**S34** - Calcolare il più piccolo valore del resistore R che rende la potenza da esso assorbita pari a 250 W.




Dati: $R_1$ = 25 Ω, $R_2$ = 10 Ω, $R_3$ = 100 Ω, $R_4$ = 20 Ω, E = 200 V, $V_S$ = r $I_2$, r = 30 Ω.

Risolvete con molta cura questo non semplice esercizio.

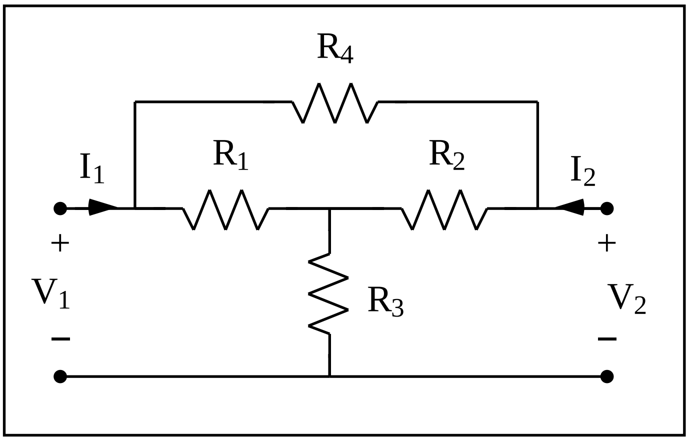
```
Esercizio S34
*Ancora un generatore controllato
R1      1      2      25
R2      2      5      10
R3      2      0      100
R4      4      3      20
R0      3      0      2.5
VE          1      0      DC      200
VE2         5      3      DC      0
HS      4      0      VE2         30
.END
```

<u>Risposta</u>: la resistenza richiesta vale

R = 2.5 Ω .

Occorre sempre una particolare attenzione nella codifica dei generatori controllati.

**S35** - Determinare la caratteristica resistiva e conduttiva del doppio bipolo mostrato in figura.

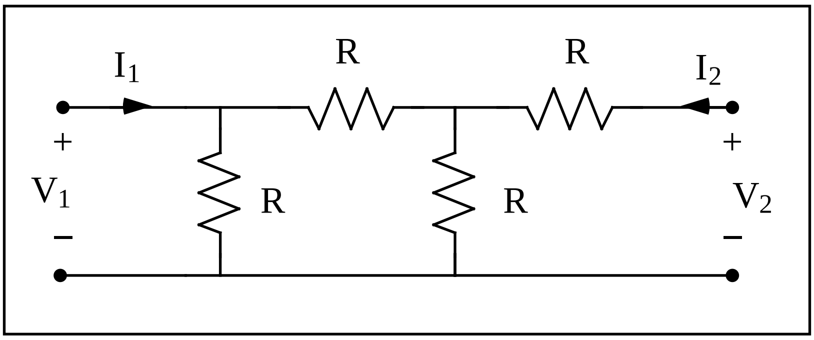



Dati: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 6\ \Omega$.

Risposta: risulta

$$R_{11} = R_{22} = 10\ \Omega\ ,\quad R_m = 8\ \Omega\ ;\quad G_{11} = G_{22} = \frac{5}{18}\ \mathrm{S}\ ,\quad G_m = -\frac{2}{9}\ \mathrm{S}\ .$$

**S36** - Determinare la rappresentazione in termini di conduttanze per il doppio bipolo mostrato in figura.

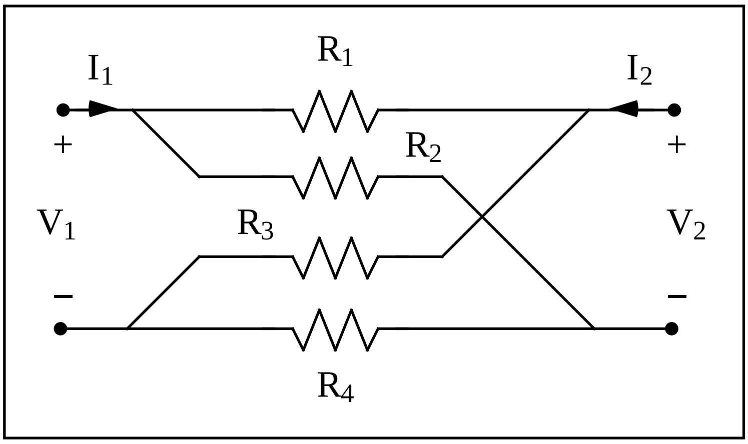



Dati: $R = 1\ \Omega$.

Risposta:

$$G_{11} = 4\ \mathrm{S}\ ,\quad G_{22} = 1\ \mathrm{S}\ ,\quad G_m = -1\ \mathrm{S}\ .$$

**S37** - Determinare la rappresentazione in termini di conduttanze della rete ‘a traliccio’ mostrata in figura.

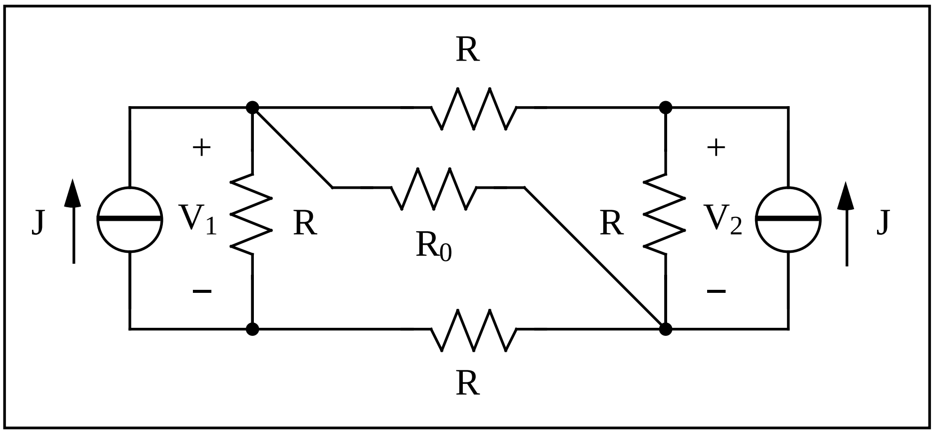



Dati: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.

Risposta: i parametri richiesti valgono

$$G_{11} = G_{22} = \frac{1}{R} , \quad G_m = 0 \text{ S} .$$

**S38** - Determinare la potenza assorbita dal doppio bipolo.

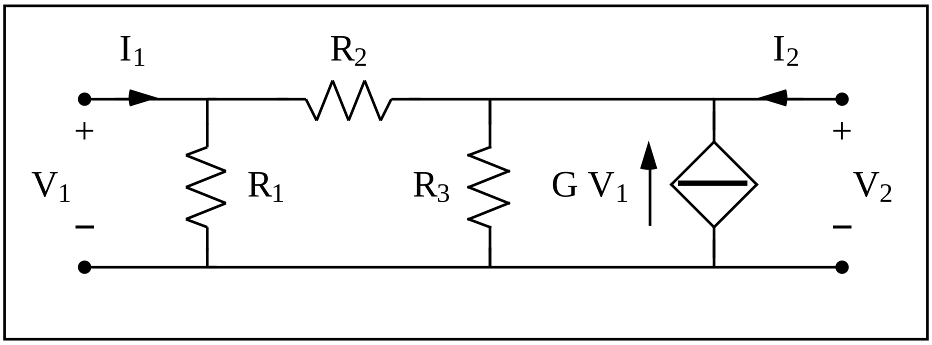



Dati: $J = 10$ A, $R = 1\ \Omega$, $R_0 = 2$ R.

Risposta: adoperando la rappresentazione in termini di resistenze del doppio bipolo, non è difficile mostrare che

$$P = \frac{500}{3} \text{ W} .$$

**S39** - Determinare la rappresentazione ibrida del doppio bipolo mostrato in figura.



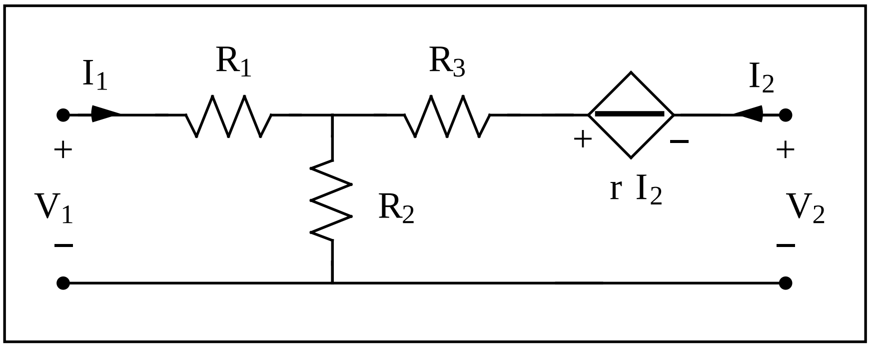

Risposta:

$$h_{11} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \qquad h_{12} = \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

$$h_{21} = -\frac{R_1 \left(1 + G R_2\right)}{R_1 + R_2}, \qquad h_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} - \frac{G R_1}{R_1 + R_2}.$$

Discutete il caso particolare G = 0 A/V.

**S40** - Determinare la rappresentazione ibrida ‘h’ che descrive il doppio bipolo. Discutere il caso particolare r = 0 V/A.

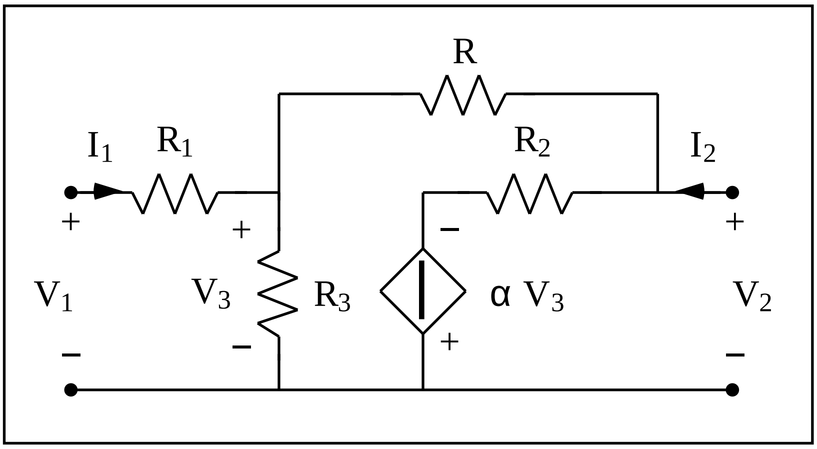



Risposta:

$$h_{11} = R_1 + \frac{R_2 \left(r - R_3\right)}{r - R_2 - R_3}, \qquad h_{12} = \frac{R_2}{R_2 + R_3 - r},$$

$$h_{21} = \frac{R_2}{r - R_2 - R_3}, \qquad h_{22} = \frac{1}{R_2 + R_3 - r}.$$

**S41** - Calcolare la rappresentazione ibrida ‘g’ che descrive il doppio bipolo.

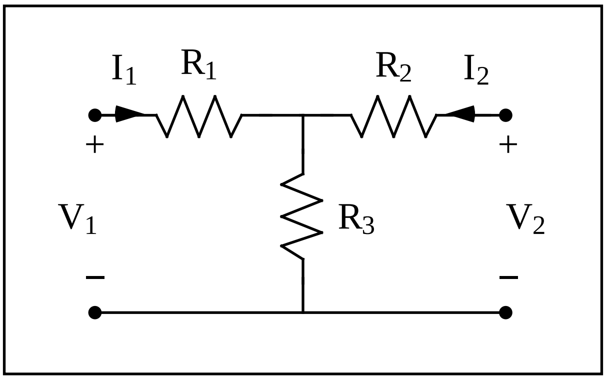



Dati: $R_1$ = 5 Ω, $R_2$ = 50 Ω, $R_3$ = 25 Ω, R = 100 Ω, α = 13.

Risposta:

$g_{11}$ = - 5 ,   $g_{12}$ = 25 Ω ,   $g_{21}$ = 0.08 S ,   $g_{22}$ = 0.25 .

**S42** - Determinare una rappresentazione in termini di parametri di trasmissione per il doppio bipolo mostrato in figura (rete a stella).



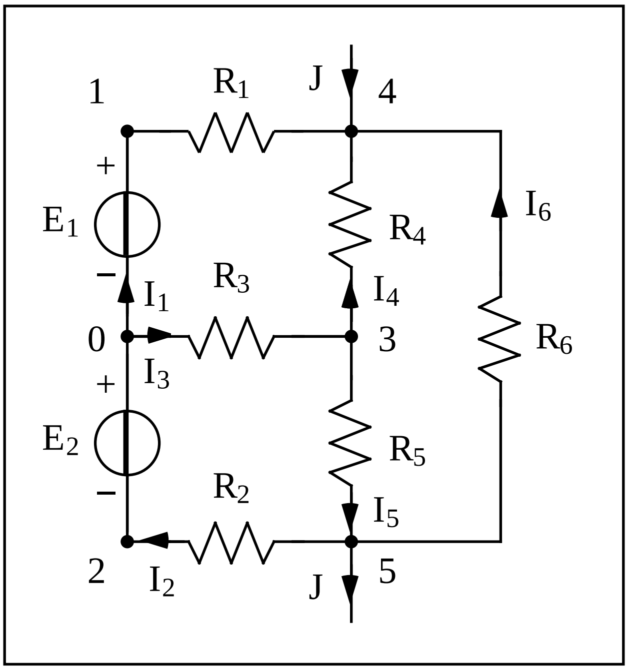

Dati: $R_1$ = $R_3$ = 1 Ω, $R_2$ = 2 Ω.

Risposta: risulta

$t_{11}$ = 2 ,   $t_{12}$ = - 0.2 Ω ,   $t_{21}$ = 1 S ,   $t_{22}$ = - 3 .

Provate a determinare anche l'altra rappresentazione in termini di parametri di trasmissione.

**S43** - Risolvere la rete e verificare che la somma delle potenze erogate dai due generatori è uguale alla somma delle potenze assorbite da tutti i resistori.



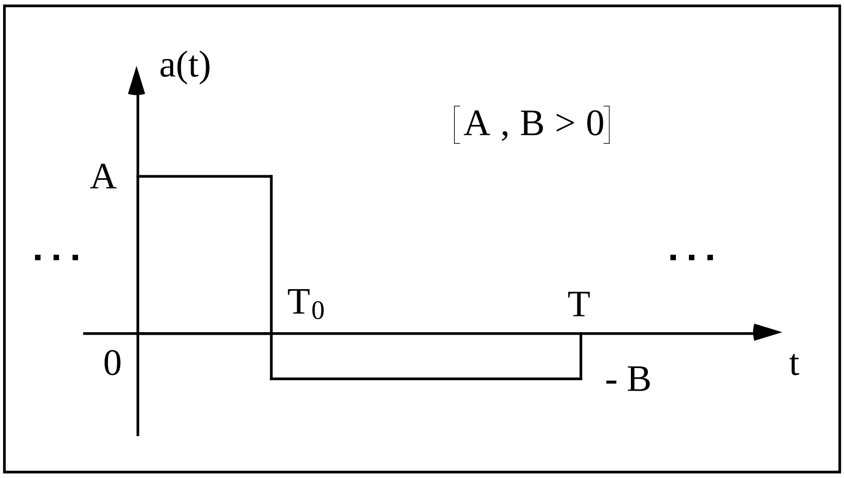

Dati: $E_1$ = 28 V, $E_2$ = 40 V, J = - 10 A, $R_1$ = 4 Ω, $R_2$ = $R_3$ = 2 Ω, $R_4$ = 3 Ω, $R_5$ = 8 Ω, $R_6$ = 1 Ω.

```
Esercizio S43
*Esercizio riepilogativo
R1      1     4     4
R2      5     2     2
R3      0     3     2
R4      3     4     3
R5      3     5     8
R6      5     4     1
VE1       1     0     DC      28
VE2       0     2     DC      40
IJ      5     4     DC      -10
.END
```

<u>Risposta</u>: $I_1$ = 10 A, $I_2$ = 13 A, $I_3$ = 3 A, $I_4$ = 2 A, $I_5$ = 1 A, $I_6$ = - 2 A.

# Esercizi sul regime sinusoidale

**A1** - Per la forma d'onda mostrata in figura, calcolare il valor medio in un periodo.

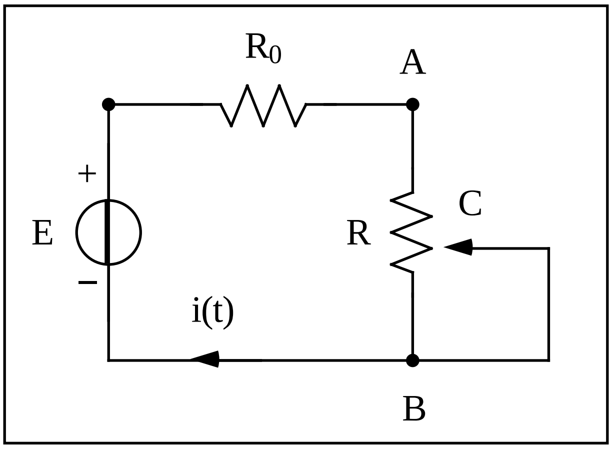



Risposta:

$$A_m = A\,\frac{T_0}{T} - B\left(1 - \frac{T_0}{T}\right).$$

Provate a scegliere un insieme di parametri A, B, T e $T_0$ in modo che la funzione periodica proposta sia alternata.

**A2** - Nel dispositivo mostrato in figura, il cursore C è animato da moto periodico tra la posizione A e la posizione B. Determinare l'energia dissipata nell'intero circuito per effetto Joule, nel tempo T, necessario per andare da A fino a B.



Risposta:

$$U = \frac{E^2\,T}{R}\,\log\frac{R_0 + R}{R_0}\ .$$

**A3** - Determinare la somma delle quattro funzioni sinusoidali

$$a_1(t) = 2\ \mathrm{sen}(10t)\ ,\qquad a_2(t) = 4\ \mathrm{sen}\left(10t - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$a_3(t) = 6\ \mathrm{sen}(10t - \pi)\ ,\qquad a_4(t) = 8\ \mathrm{sen}\left(10t - \frac{3}{2}\,\pi\right).$$

Risposta:

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) + a_4(t) = 4\sqrt{2}\ \mathrm{sen}\left(10t + \frac{3}{4}\,\pi\right).$$

**A4** - Determinare la differenza delle due funzioni sinusoidali

$$a_1(t) = 5\cos(2t)\ ,\quad a_2(t) = \mathrm{sen}\left(2t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Risposta:

$$a(t) = a_1(t) - a_2(t) = \sqrt{26 + 5\sqrt{2}}\ \cos\left(2t + \arctan\frac{1}{1 + 5\sqrt{2}}\right).$$

**A5** - Dimostrare che la somma delle tre funzioni sinusoidali

$$a_1(t) = A\cos(\omega t)\ ,\quad a_2(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\,\pi\right),\quad a_3(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\,\pi\right),$$

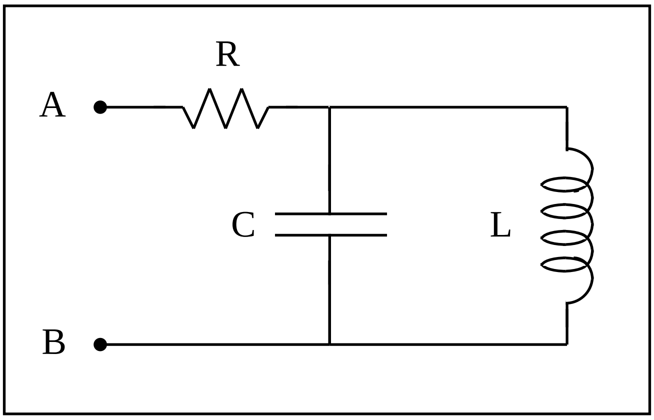
è nulla quale che sia il valore della pulsazione $\omega$ e del valore massimo A.

**A6** - Verificare che la somma delle tre funzioni sinusoidali

$$b_1(t) = B\ \mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{2}{3}\,\pi\right),\quad b_2(t) = B\ \mathrm{sen}(\omega t)\ ,\quad b_3(t) = B\ \mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{2}{3}\,\pi\right),$$

risulta nulla quale che sia il valore che scegliamo per la pulsazione $\omega$ e per il valore massimo B.

**A7** - Per il circuito di figura, si determini l'impedenza equivalente vista dai morsetti AB sia in forma algebrica, sia in forma polare.



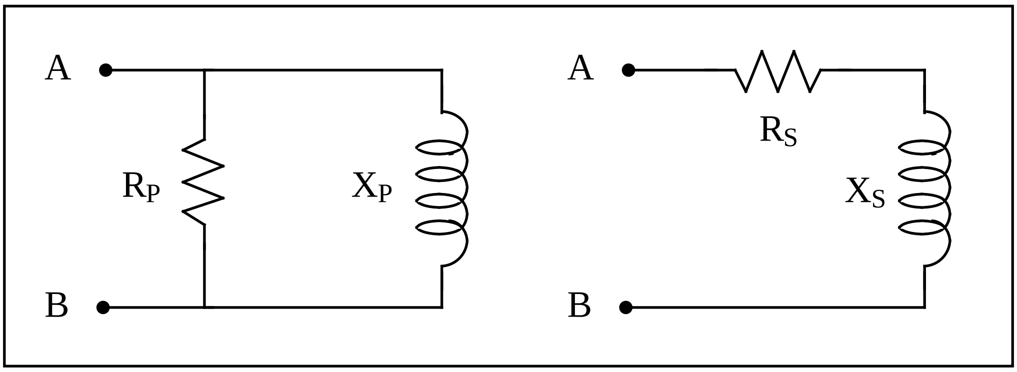

Risposta: l'impedenza scritta in forma algebrica, in termini di parte reale ed immaginaria, vale

$$\dot{Z}_{AB} = R + j\,\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = \left[ Z_{AB} \,,\, \phi \right],$$

da cui si ricava facilmente la forma polare, in termini di modulo e fase

$$Z_{AB} = \sqrt{R^2 + \frac{(\omega L)^2}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2}} \;, \quad \phi = \arg\left(\dot{Z}_{AB}\right) = \arctan \frac{\omega L}{R\left(1 - \omega^2 LC\right)} \,.$$

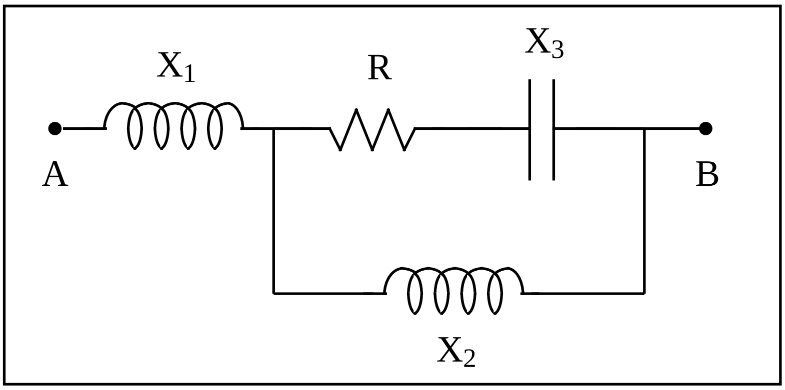
**A8** - Si determinino i valori dei parametri $R_S$ ed $X_S$ in maniera tale che i due bipoli mostrati in figura siano equivalenti, nell'ipotesi che $R_P = 10\ \Omega$, $X_P = 5\ \Omega$.




Risposta: i parametri richiesti valgono

$$R_S = 2\ \Omega \quad \text{e} \quad X_S = 4\ \Omega \,.$$

**A9** - Determinare l'impedenza equivalente 'vista' dai terminali A e B del bipolo mostrato in figura.

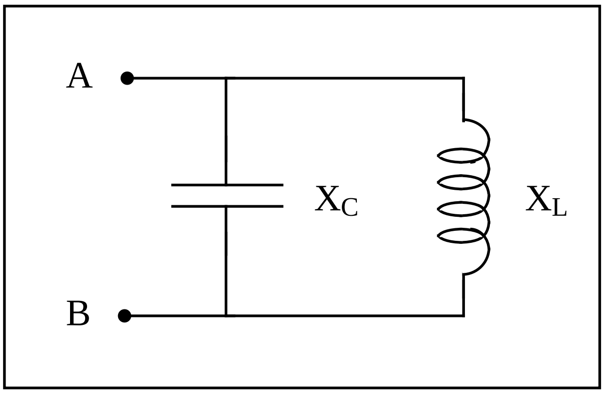



Dati: R = 5 Ω, $X_1$ = 3 Ω, $X_2$ = 10 Ω, $X_3$ = 4 Ω.

Risposta: l'impedenza equivalente è pari a

$$\dot{Z}_{AB} = \left(\frac{500}{61} + \frac{193}{61}\, j\right) \Omega \qquad (8.20 + 3.16\, j)\ \Omega\ .$$

**A10** - Si calcolino l'impedenza e l'ammettenza equivalente del bipolo dai terminali A e B.

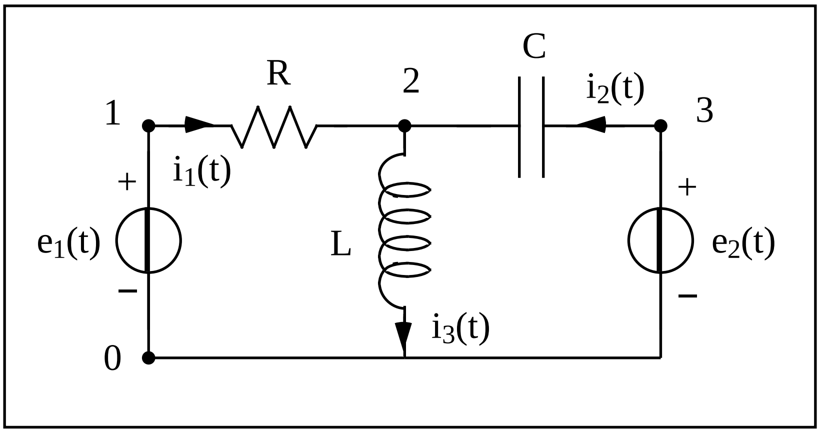



Dati: $X_L$ = 10 Ω, $X_C$ = 20 Ω.

Risposta: risulta immediatamente che

$$\dot{Z} = 20\, j\ \Omega\ , \quad \dot{Y} = -\ 0.05\, j\ S\ .$$

**A11** - Determinare le correnti che fluiscono nei tre rami della rete mostrata in figura, sia come fasori che nel dominio del tempo.




Dati: $e_1(t) = E_1 \cos(\omega t)$, $e_2(t) = E_2 \,\mathrm{sen}(\omega t)$, $E_1 = E_2 = 10$ V, $\omega = 1$ krad/s, $R = 5\ \Omega$, $L = 5$ mH, $C = 0.2$ mF.

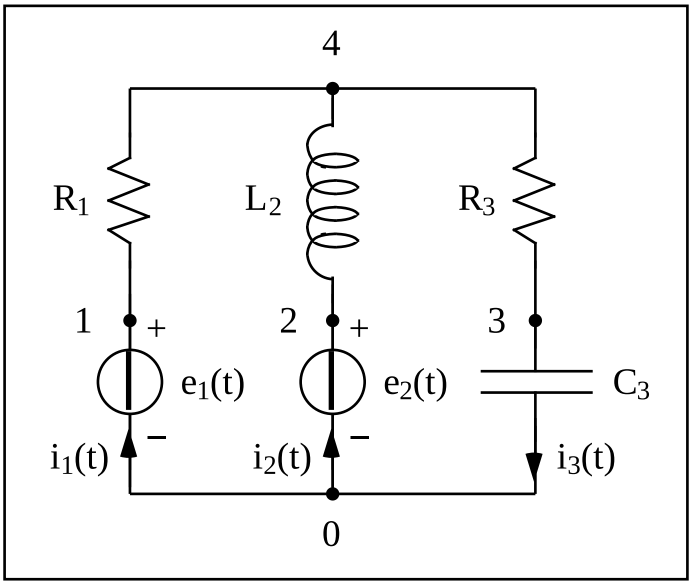
```
Esercizio A11
*Due generatori in corrente alternata
R0      1     2     5
L0      2     0     5m
C0      2     3     0.2m
VE1       1     0     AC      10       0
VE2       3     0     AC      10       -90
.AC    LIN        1     159.15        159.15
.PRINT      AC     IM(VE1)       IP(VE1)
.PRINT      AC     IM(VE2)       IP(VE2)
.PRINT      AC     IM(L0)      IP(L0)
.END
```

<u>Risposta</u>: le correnti richieste valgono

$$\begin{cases} i_1(t) = -\,2 \cos(1000t)\ , \\ i_2(t) = 2\sqrt{5}\,\cos(1000t - \arctan 2)\ , \\ i_3(t) = 4 \cos\left(1000t - \dfrac{\pi}{2}\right) = 4\,\mathrm{sen}(1000t)\ . \end{cases}$$

Si noti che arctan 2    1.107 rad.

**A12** - Risolvere la rete utilizzando prima le leggi di Kirchhoff, poi il metodo delle correnti di maglia, infine il metodo dei potenziali nodali. Quale dei due metodi ridotti risulta più conveniente per la rete assegnata?



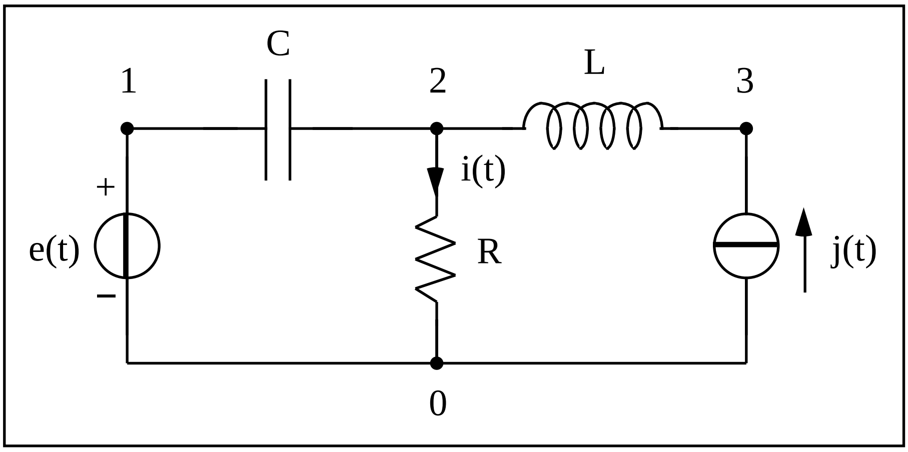

Dati: $e_1(t) = E_1$ sen$(\omega t)$, $E_1 = 10$ V, $e_2(t) = E_2$ sen$(\omega t)$, $E_2 = 20$ V, $\omega = 1$ krad/s, $R_1 = R_3 = 1\ \Omega$, $L_2 = 1$ mH, $C_3 = 1$ mF.

```
Esercizio A12
*Circuito in corrente alternata
R1     1    4    1
R3     4    3    1
L2     2    4    1m
C3     3    0    1m
VE1      1    0    AC    10      -90
VE2      2    0    AC    20      -90
.AC    LIN      1    159.15      159.15
.PRINT     AC    IM(VE1)      IP(VE1)
.PRINT     AC    IM(VE2)      IP(VE2)
.PRINT     AC    IM(C3)     IP(C3)
.END
```

Risposta: le correnti valgono

$$\begin{cases} i_1(t) = 10 \text{ sen}\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) = 10 \cos(1000t)\ , \\ i_2(t) = 10\sqrt{2} \text{ sen}\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right)\ , \\ i_3(t) = 10 \text{ sen}(1000t)\ . \end{cases}$$

**A13** - La rete mostrata in figura opera in regime sinusoidale. Determinare la corrente i(t) e la potenza complessa erogata dal generatore di tensione.



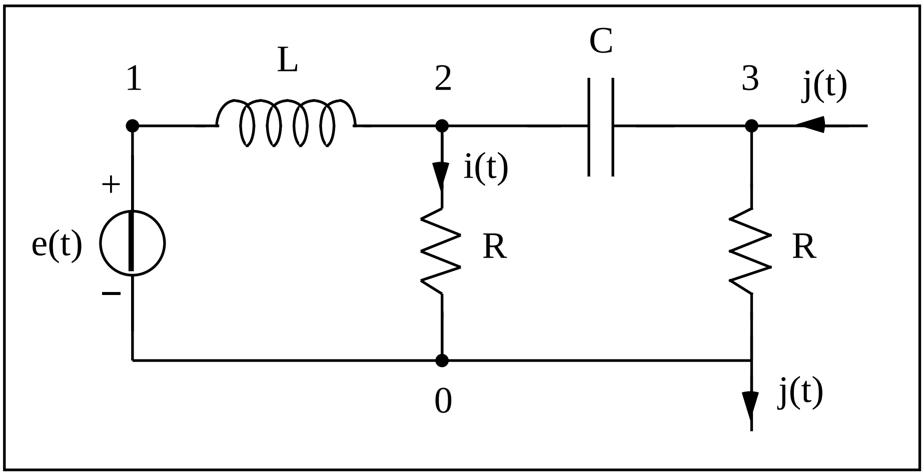

Dati: $e(t) = E\ \mathrm{sen}(\omega t)$, $j(t) = -\ I \cos(\omega t)$, $E = 10$ V, $I = 2$ mA, $\omega = 200$ rad/s, $R = 5$ kΩ, $L = 5$ mH, $C = 1$ μF.

```
Esercizio A13
*Circuito in corrente alternata
R1      0     2     5e+3
C1      2     1     1e-6
L1      2     3     5e-3
VE      1     0     AC      10       -90
IJ      0     3     AC      2e-3       -180
.PRINT   AC       IM(R1)      IP(R1)
.PRINT   AC       IM(VE)      IP(VE)
.AC     LIN       1     31.83      31.83
.END
```

<u>Risposta</u>: la corrente che fluisce nel resistore è nulla e

$$\dot{P}_G = 10\ j\ \text{mVA} .$$

**A14** - La rete mostrata in figura funziona in regime sinusoidale permanente. Applicando il teorema di Thévenin (Norton) ai morsetti 2 e 0, si determini la corrente i(t) che circola nel resistore.



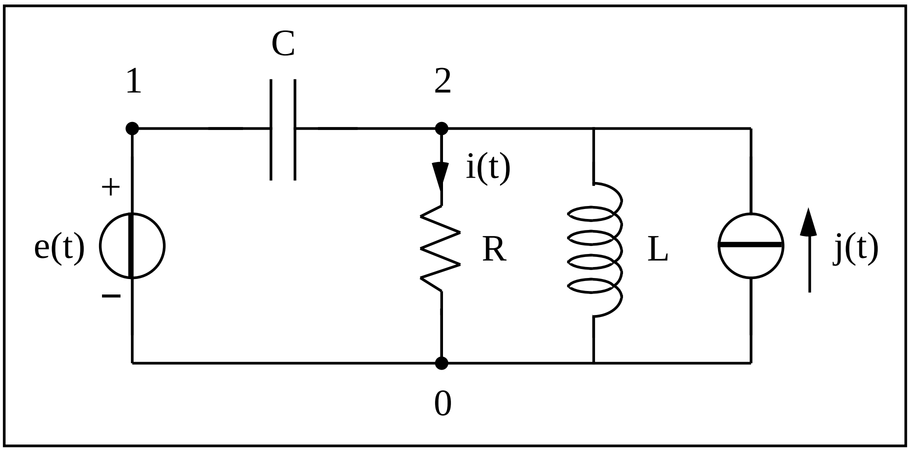

Dati: $e(t) = E \operatorname{sen}(\omega t)$, $E = 10$ V, $j(t) = I \cos(\omega t)$, $I = 2$ A, $\omega = 10$ krad/s, $R = 10\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 10\ \mu$F.

```
Esercizio A14
*Verifica del teorema del generatore equivalente
R1      2     0     10
R2      3     0     10
L1      1     2     1m
C1      2     3     10u
VE      1     0     AC     10      -90
IJ      0     3     AC     2       0
.AC     LIN         1      1591.5       1591.5
.PRINT      AC      IM(R1)   IP(R1)
.END
```

<u>Risposta</u>: la corrente è pari a

$$i(t) = -\frac{\sqrt{10}}{5} \operatorname{sen}\left(\omega t + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{10}}{5} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right).$$

**A15** - La rete mostrata in figura opera in regime sinusoidale. Applicando il teorema di Thévenin ai morsetti 2 e 0, si determini la corrente i(t) che circola nel resistore.




Dati: e(t) = E sen(ωt), E = 1 V, j(t) = - I cos(ωt), I = 1 A, ω = 1 krad/s, R = 2 Ω, L = 1 mH, C = 1/2 mF.

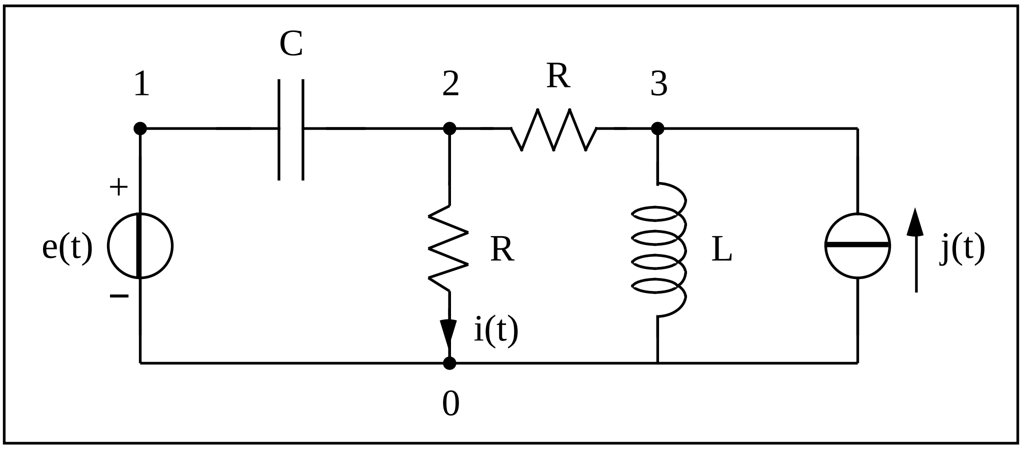
```
Esercizio A15
*Ancora sul generatore equivalente
R1      2     0     2
L1      2     0     1m
C1      1     2     0.5m
VE      1     0     AC     1     -90
IJ      0     2     AC     1     -180
.AC     LIN         1     159.15       159.15
.PRINT        AC     IM(R1)   IP(R1)
.END
```

Risposta:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{sen}\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(1000t - \frac{3}{4}\pi\right) \quad 0.3535\cos(1000t - 135°)\ .$$

Provate pure a determinare la stessa corrente usando il teorema di Norton: dovreste fare pochi calcoli, una volta in possesso dei parametri equivalenti di Thévenin, per ottenere quelli di Norton.

**A16** - Il circuito rappresentato in figura è a regime. Determinare la corrente i(t) nel resistore R applicando il teorema di Norton ai morsetti 2 e 0.




Dati: e(t) = E sen(100t), E = 1 V, j(t) = I cos(100t), I = 1 A, R = 1 Ω, R = 1 Ω, C = 10 mF.

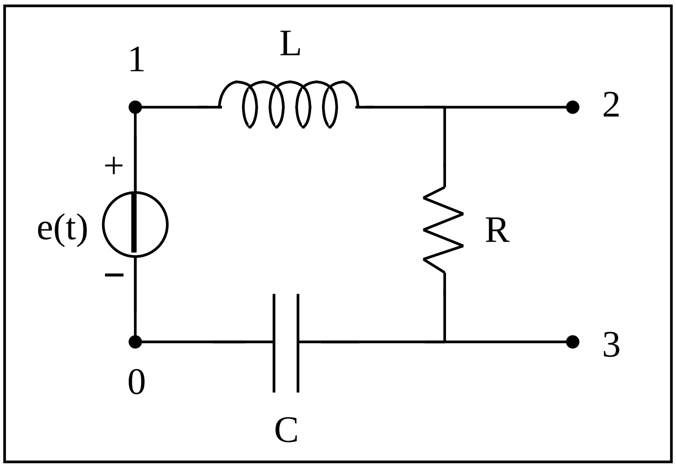
```
Esercizio A16
*Teorema di Norton
R1      2     0     1
R2      2     3     1
L1      3     0     10m
C1      1     2     10m
VE      1     0     AC     1     -90
IJ      0     3  AC     1     0
.AC     LIN        1     15.915       15.915
.PRINT       AC      IM(R1)   IP(R1)
.END
```

Il listato precedente non realizza il teorema di Norton ma fornisce una verifica della correttezza del risultato dato che possiamo ottenere i potenziali complessi di tutti i nodi della rete. Vi ricordiamo che Spice adotta le funzioni cosinusoidali quali funzioni di riferimento per la descrizione in termini di fasori.
Infine, disponendo dei potenziali, potete facilmente verificare la conservazione delle potenze complesse, ovvero delle potenze attive e reattive considerate separatamente.

Risposta: la corrente richiesta, nel dominio del tempo, vale

$$i(t) = \cos(100t) .$$

**A17** - Determinare il circuito equivalente di Thévenin (Norton), visto dai morsetti 2 e 3, per la rete mostrata in figura.




Dati: $e(t) = E \cos(\omega t)$, E = 100 V, ω = 20 krad/s, R = 10 Ω, L = 1 mH, C = 5 μF.

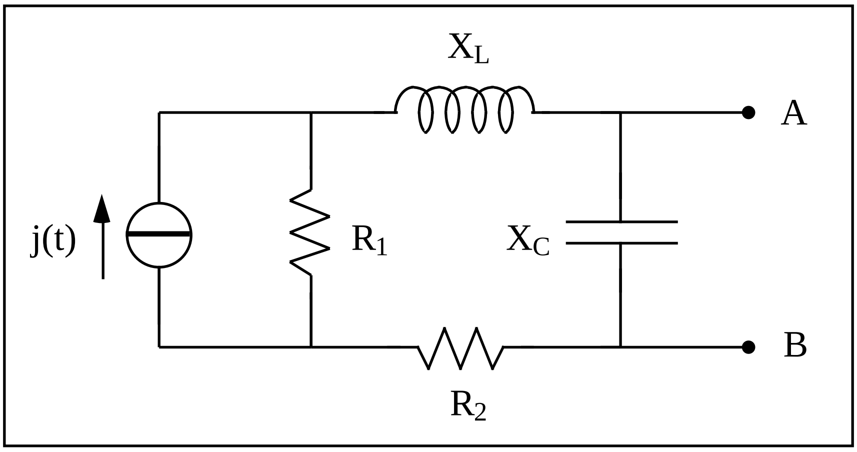
```
Esercizio A17
*Teorema del generatore equivalente
R1     2    3    10
L1     1    2    1m
C1     3    0    5u
VE     1    0    AC     100     0
.AC    LIN       1    3.183k     3.183k
.PRINT     AC    VM(2,3)    VP(2,3)
.END
```

Risposta: risulta

$$\dot{Z}_0 = 5\,(1 + j)\ \Omega\ ,$$

$$\bar{E}_0 = 25\sqrt{2}\,(1 - j\,)\ V \quad \rightarrow \quad e_0(t) = 50\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

**A18** - Determinare il circuito equivalente secondo Norton, visto dai terminali AB, per la rete mostrata in figura.

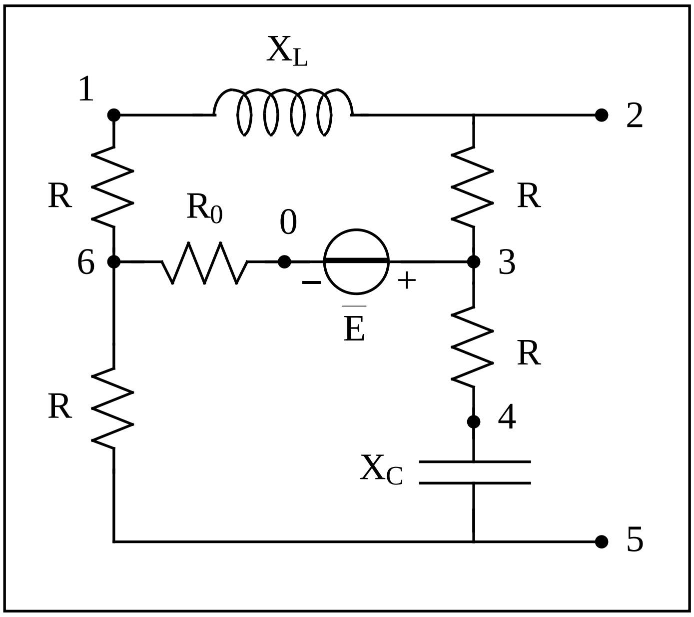



Dati: $\bar{J}$ = 16 A, $R_1$ = 25 Ω, $R_2$ = 15 Ω, $X_L$ = 30 Ω, $X_C$ = 50 Ω.

Risposta: l'impedenza equivalente e la corrente di cortocircuito valgono, rispettivamente,

$$\dot{Z}_0 = 25\,(2 - j)\ \Omega\ , \quad \bar{I}_0 = \frac{8}{5}\,(4 - 3\,j)\ A\ .$$

**A19** - Determinare il circuito equivalente secondo Thévenin (poi quello secondo Norton), visto dai terminali 2 e 5, per la rete mostrata in figura che opera in regime sinusoidale.




Dati: $\bar{E}$ = 60 V, $R_0$ = 1 Ω, R = 4 Ω, $X_L$ = 4 Ω, $X_C$ = 4 Ω.

I listati Spice che seguono servono a verificare il valore della tensione a vuoto e dell’impedenza equivalente.

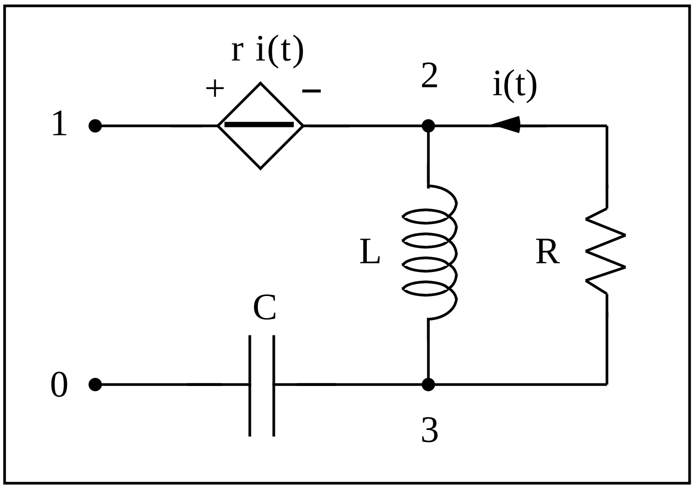
```
Esercizio A19.1
*Verifica della tensione a vuoto
R1     1    6    4
R2     6    5    4
R3     3    4    4
R4     2    3    4
R5     0    6    1
L1     1    2    4
C1     4    5    0.25
VE     3    0    AC     60     0
.AC    LIN       1    0.15915    0.15915
.PRINT    AC    VM(2,5)    VP(2,5)
.END
```

```
Esercizio A19.2
*Verifica dell’impedenza equivalente
R1     1    6    4
R2     6    5    4
R3     3    4    4
R4     2    3    4
R5     0    6    1
L1     1    2    4
C1     4    5    0.25
VE1      3    0    AC    0    0
VE2      2    5    AC    1    0
.AC    LIN       1    0.15915    0.15915
.PRINT    AC    IM(VE2)      IP(VE2)
.END
```

<u>Risposta</u>: i parametri equivalenti risultano pari a

$$\bar{E}_0 = 10 \text{ V}, \quad \dot{Z}_0 = 4.8\bar{3}\ \Omega .$$

**A20** - Calcolare l’impedenza equivalente vista dai terminali 1 e 0 per la rete mostrata in figura.




Dati: R = 30 Ω, L = 0.6 mH, C = 0.4 μF, r = 5 Ω, ω = 100 krad/s.

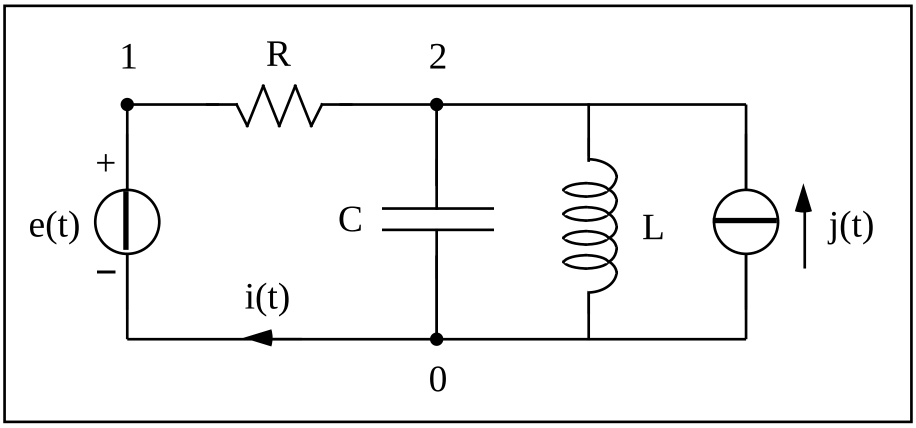
```
Esercizio A20
*Impedenza equivalente
R0      4     3     30
L0      2     3     0.6m
C0      3     0     0.4u
V0      4     2     DC      0
H0      1     2     V0      5
VIN        1     0     AC      1     0
.AC     LIN        1     15915.5     15915.5
.PRINT      AC      IR(VIN)     II(VIN)
.END
```

Risposta: l'impedenza equivalente vale

$$\dot{Z}_0 = (20 - 15j)\ \Omega\ .$$

La codifica dei generatori controllati in regime sinusoidale è simile a quella studiata in regime stazionario.

**A21** - La rete mostrata in figura è a regime. Si determini la corrente i(t) e l'energia assorbita dal resistore R in un periodo T = 2π/ω.



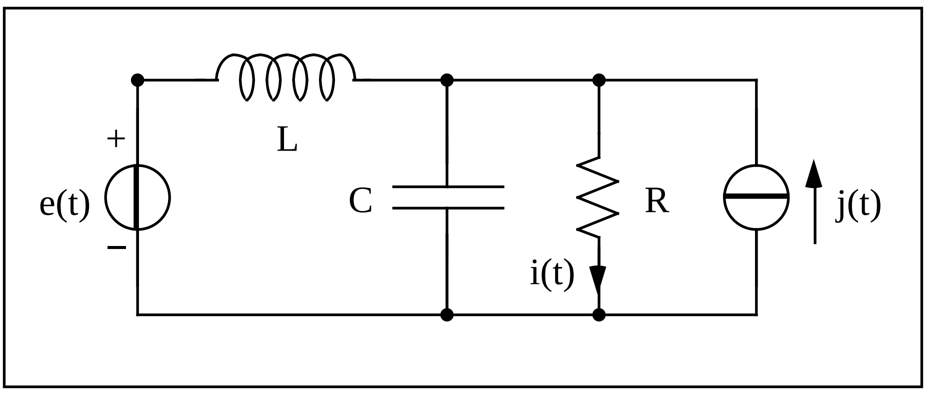

Dati: $e(t) = E = 5$ V, $j(t) = I \cos(\omega t)$, $I = 2$ A, $\omega = 1$ krad/s, $R = 1\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 1$ mF.

```
Esercizio A21
*Energia assorbita dal resistore
R1      1     2     1
L1      2     0     1m
C1      2     0     1m
VE      1     0     DC     5
IJ      0     2     DC     0     AC     2     0
.AC     LIN         1     159.15       159.15
.PRINT        AC       IM(R1)       IP(R1)
.END
```

Risposta: risulta

$$i(t) = 5 - 2\cos(1000t)\ ,\quad U(0, T) = R\, I_{EFF}^2\, T \quad 12.57 \text{ mJ}\ .$$

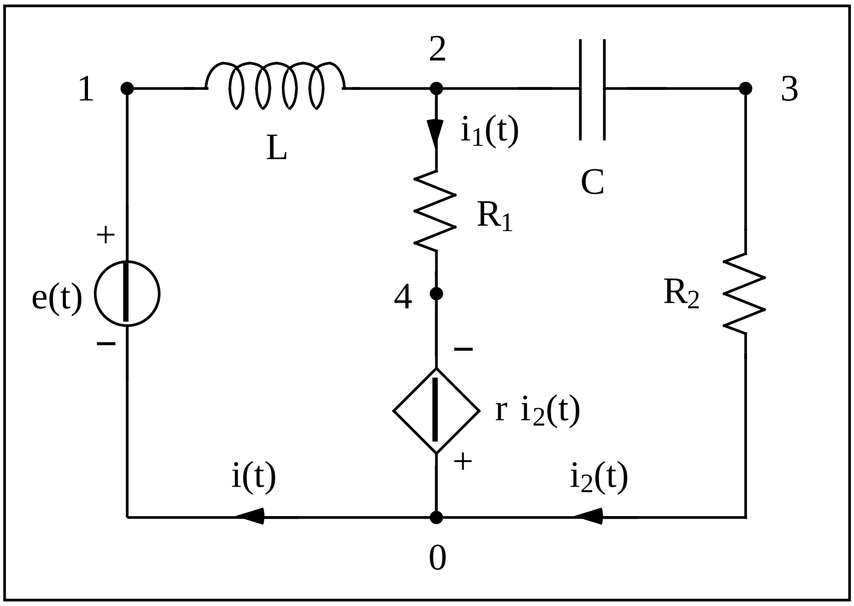
**A22** - La rete mostrata in figura è a regime. Si determini il valore medio in T della potenza istantanea assorbita dal resistore R.



Dati: $T = 0.02$ s, $\omega = 2\pi/T$, $e(t) = E = 10$ V, $j(t) = I \cos(\omega t)$, $I = 2$ A, $R = 20\ \Omega$, $L = 8$ mH, $C = 0.4$ nF.

Risposta: P 5.62 W.

**A23** - La rete mostrata in figura opera in regime sinusoidale permanente. Determinare la corrente $i_2(t)$.



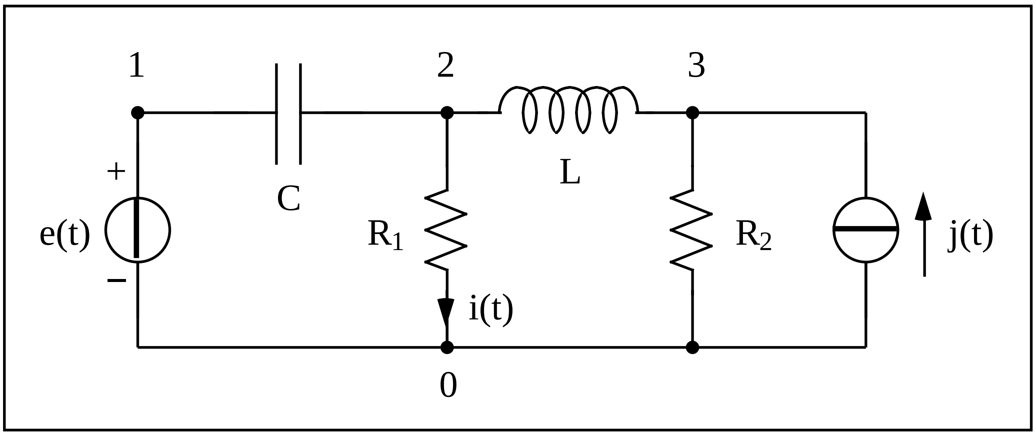

Dati: $e(t) = E \cos(\omega t)$, $E = 130$ V, $\omega = 10$ krad/s, $r = 30\ \Omega$, $R_1 = 40\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $L = 5$ mH, $C = 2\ \mu$F.

```
Esercizio A23
*Generatore controllato in alternata
VE    1   0   AC    130   0
L1    1   2   5m
R1    2   4   40
C1    2   3   2u
R2    3   5   100
VEA   5   0   DC    0
H1    0   4   VEA   30
.AC   LIN     1     1591.5     1591.5
.PRINT    AC    IM(R2)    IP(R2)
.END
```

Risposta: la corrente richiesta vale

$$i_2(t) = \frac{2}{5}\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

**A24** - La rete mostrata in figura opera in regime periodico. Determinare il valor medio della potenza assorbita nel periodo T dal resistore $R_1$.




Dati: $e(t) = E\,\text{sen}(\omega_1 t)$, $j(t) = I\cos(\omega_2 t)$, $E = 6$ V, $I = 4\sqrt{17}$ A, $T = 8\pi$ ms, $\omega_1 = 2\pi/T$, $\omega_2 = 2\,\omega_1$, $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$, $L = 8$ mH, $C = 4$ mF.

```
Esercizio A24-1
*Agisce solo il generatore con pulsazione 1
R1      2    0    2
R2      3    0    2
L0      2    3    8m
C0      1    2    4m
VE      1    0    AC     6     -90
.AC     LIN       1     39.789      39.789
.PRINT       AC      VM(R1)      VP(R1)
.END
```

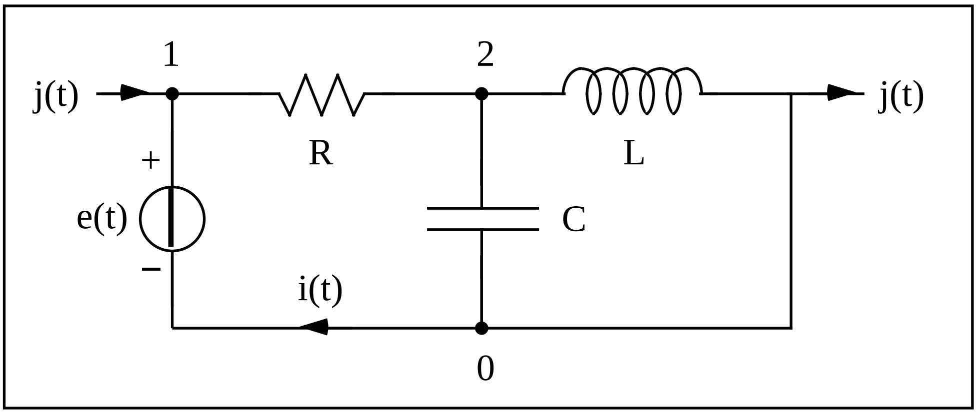
```
Esercizio A24-2
*Agisce solo il generatore con pulsazione 2
R1      2    0    2
R2      3    0    2
L0      2    3    8m
C0      0    2    4m
IJ      0    3    AC     16.492      0
```

```
.AC     LIN        1      79.577        79.577
.PRINT       AC      VM(R1)      VP(R1)
.END
```

Risposta: la potenza richiesta è pari a

$$P = \frac{106}{9}\ W\ .$$

**A25** - La rete mostrata in figura opera in regime periodico. Determinare la corrente i(t) che fluisce nel generatore.




Dati: $j(t) = I\cos(\omega_1 t)$, $e(t) = E\cos(\omega_2 t)$, $I = 4$ A, $E = 3\sqrt{2}$ V, $\omega_1 = 1$ krad/s, $\omega_2 = 3\,\omega_1$, $R = 0.75\ \Omega$, $L = 2$ mH, $C = 0.5$ mF.

Per risolvere l'esercizio proposto è necessario che usiate la sovrapposizione degli effetti.

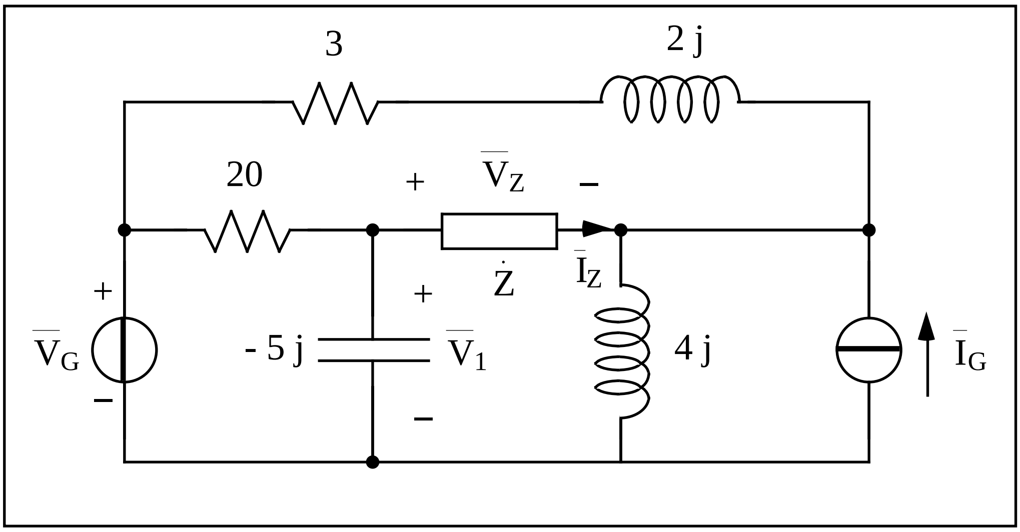
```
Esercizio A25
*Analisi con il solo generatore di tensione
R1      1      2      0.75
L1      2      0      2m
C1      2      0      0.5m
VE      1      0      AC      4.243      0
.AC     LIN           1      477.46        477.46
.PRINT       AC      IM(VE)      IP(VE)
.END
```

Risposta: la corrente richiesta vale

$$i(t) = 4\left[\cos\left(3000t + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(1000t)\right].$$

Notate come la corrente sia una combinazione di due funzioni cosinusoidali di diverse pulsazioni, una per ciascun generatore che forza la rete.

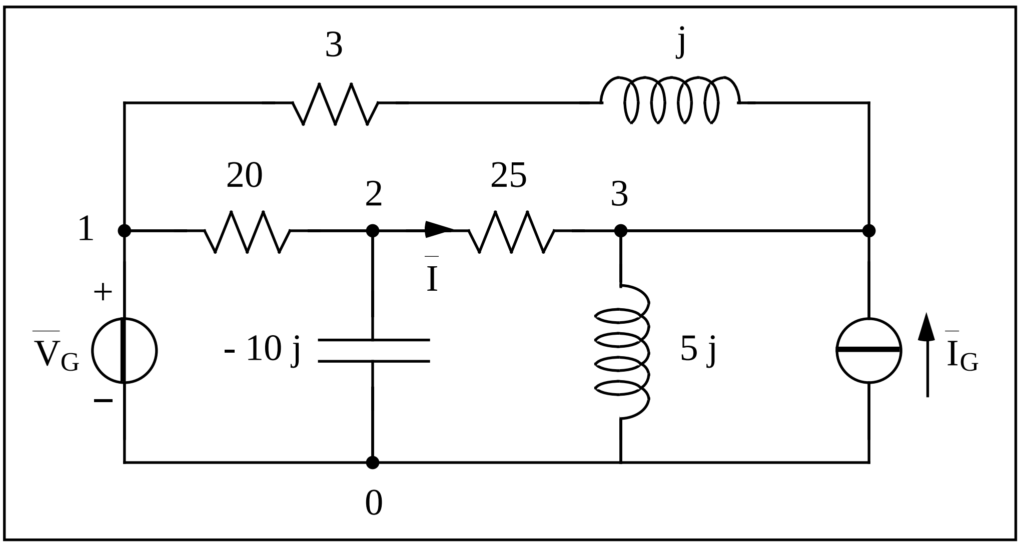
**A26** - Calcolare il valore dell'impedenza $\dot{Z}$ incognita.




Dati: $\overline{V}_G = (100 - 50\,j)$ V, $\overline{V}_1 = (40 + 30\,j)$ V, $\overline{I}_G = (20 + 30\,j)$ A.

Risposta: $\dot{Z}$ (1.35 - 3 j) Ω.

**A27** - La rete mostrata in figura opera in regime sinusoidale. Calcolare il valore della corrente che fluisce nel ramo 2 - 3.



Dati: $\overline{V}_G$ = 10 V, $\overline{I}_G$ = - 25 j A.

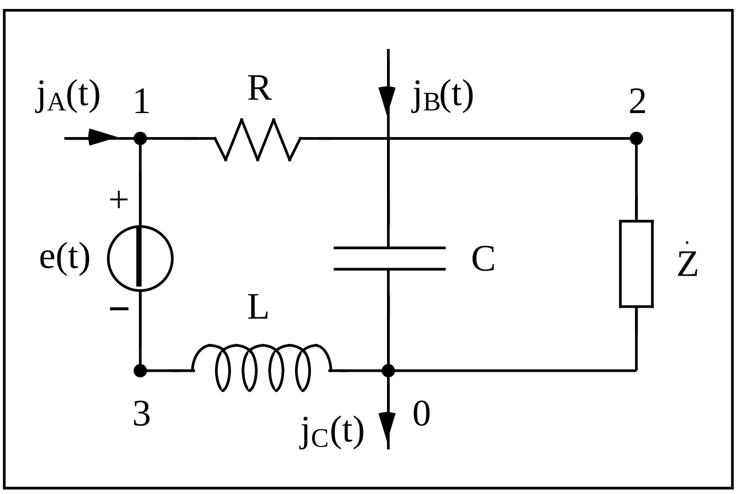
Vale la pena notare che i dati di questo esercizio sono stati assegnati direttamente nel dominio dei fasori, non nel dominio del tempo come siamo più abituati.

```
Esercizio A27
*ω = 1 krad/s
R1      1    2    20
R2      2    3    25
R3      1    4    3
L1      3    0    5m
L2      4    3    1m
C1      2    0    0.1m
VG      1    0    AC     10      0
IG      0    3    AC     25      -90
.AC     LIN       1    159.15      159.15
.PRINT   AC       IR(R2)           II(R2)
.END
```

<u>Risposta</u>: il fasore che rappresenta la corrente richiesta vale approssimativamente

$\overline{I}$ (- 1.6708 + 0.7745 j) A .

**A28** - Si determini l'impedenza $\dot{Z}$ che realizza la condizione di adattamento alla rete funzionante in regime sinusoidale. Si valutino, poi, la potenza attiva e reattiva assorbite dalla $\dot{Z}$.



Dati: $\omega$ = 100 rad/s, $e(t) = E\ \text{sen}(\omega t)$, E = 100 V, $j_A(t) = J_A\ \text{sen}(\omega t - \pi/4)$, $J_A$ = 20 A, $j_B(t) = J_B \cos(\omega t)$, $J_B$ = 5 A, R = 10 Ω, L = 0.1 H, C = 1 mF.

Prima di risolvere il quesito proposto andate a rivedere le condizioni di adattamento.

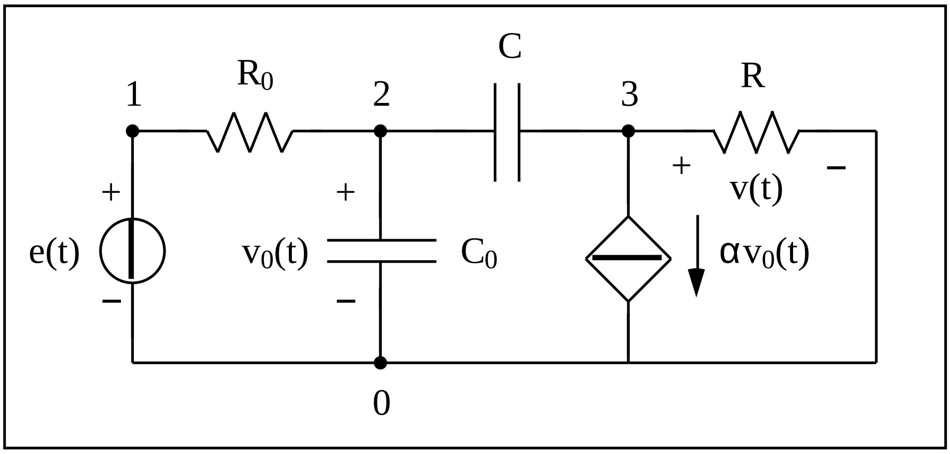
```
Esercizio A28
*Condizione di adattamento
R0    1    2    10
L0    3    0    0.1
C0    2    0    1m
Req   2    100    10
Leq   100    0    0.1
VE    1    3    AC    100    -90
IA    0    1    AC    20     -135
IB    0    2    AC    5    0
.AC   LIN    1    15.915    15.915
.PRINT    AC    VM(2)     VP(2)
.PRINT    AC    IM(Req)   IP(Req)
.END
```

<u>Risposta</u>: risulta

$$\dot{Z} = (10 + 10\,j)\ \Omega\ , \quad P \quad 916\ \text{W}\ , \quad Q \quad 916\ \text{VAr}\ .$$

Verificate, infine, la conservazione delle potenze complesse.

**A29** - Un modello di amplificatore a MOSFET (un particolare circuito elettronico) è mostrato in figura. Calcolare la tensione v(t) sulla resistenza di carico R.




Dati: $e(t) = E\ \mathrm{sen}(\omega t)$, $E = 10$ V, $\omega = 1$ krad/s, $R_0 = 100\ \Omega$, $C_0 = 10\ \mu F$, $C = 8\ \mu F$, $R = 1\ k\Omega$, $\alpha = 10$ mS.

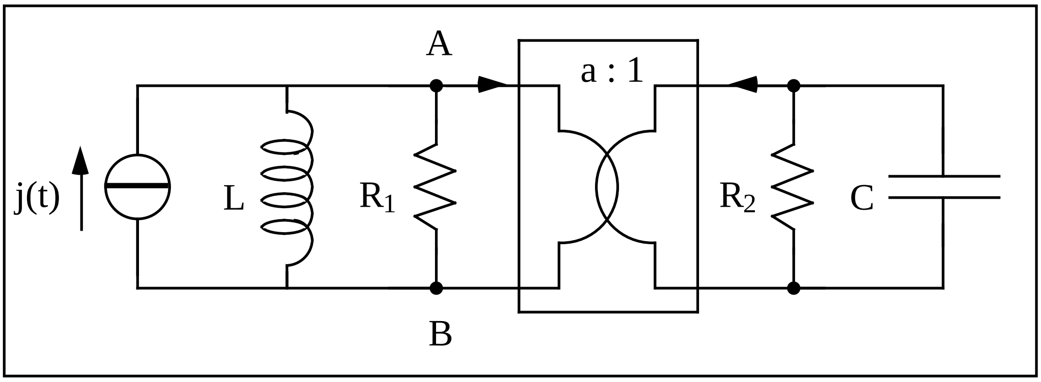
Simulate il circuito per mezzo del listato che segue.

```
Esercizio A29
*Schema di amplificatore a MOSFET
V1     1    0    AC     10     0
G1     3    0    2    0    1e-2
R0     1    2    100
C0     2    0    1e-5
C1     2    3    8e-6
R1     3    0    1000
.AC    LIN       1    159.155     159.155
.PRINT      AC      VM(3)      VP(3)
.END
```

Risposta: la tensione richiesta è pari a

$$v(t) = 6.695\ \mathrm{sen}\left(1000\ t + \frac{\pi}{6}\right).$$

**A30** - La rete in figura opera in regime sinusoidale. Determinare l'ammettenza vista dal generatore, la potenza complessa erogata dal generatore di corrente, e infine la tensione $v_{AB}(t)$.

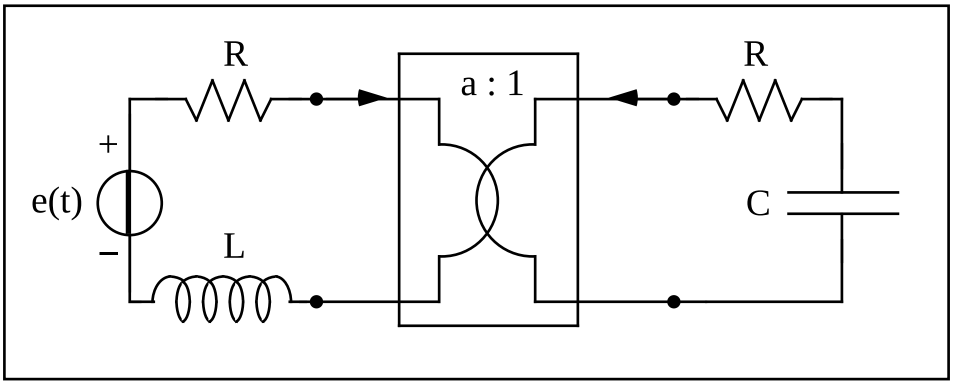



Dati: $j(t) = I \cos(\omega t)$, $I = 1$ A, $\omega = 1$ Mrad/s, $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $L = 200\ \mu H$, $C = 1.5\ \mu F$, $a = 10$.

Risposta:

$\dot{Y} = 0.01\ (1 + j)$ S , $P = 25$ W , $Q = -25$ VAr , $v_{AB}(t) = 50\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**A31** - La rete in figura opera in regime sinusoidale. Determinare la potenza complessa erogata dal generatore di tensione.

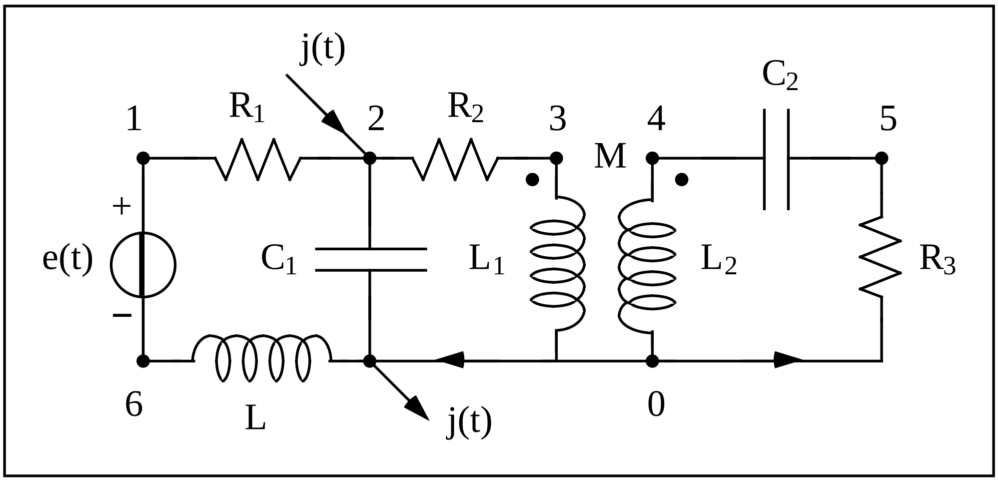



Dati: $e(t) = E \cos(\omega t)$, $E = 16.4$ V, $\omega = 200$ rad/s, $R = 10\ \Omega$, $L = 64$ mH, $C = 0.25$ mF, $a = 0.8$.

Risposta: la potenza complessa è pari a

$\dot{P} = 8.2$ VA .

**A32** - Si valutino le potenze, attiva e reattiva, erogate dal generatore di tensione nella rete di figura in regime sinusoidale.




Dati: $e(t) = 100\sqrt{2}$ sen($\omega$t), j(t) = - 20 cos($\omega$t + $\pi$/4), $\omega$ = 1 krad/s, $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 2.5\ \Omega$, L = 5 mH, $C_1$ = 0.1 mF, $C_2$ = 0.4 mF, $L_1$ = 10 mH, $L_2$ = 2.5 mH, |M| = 5 mH.

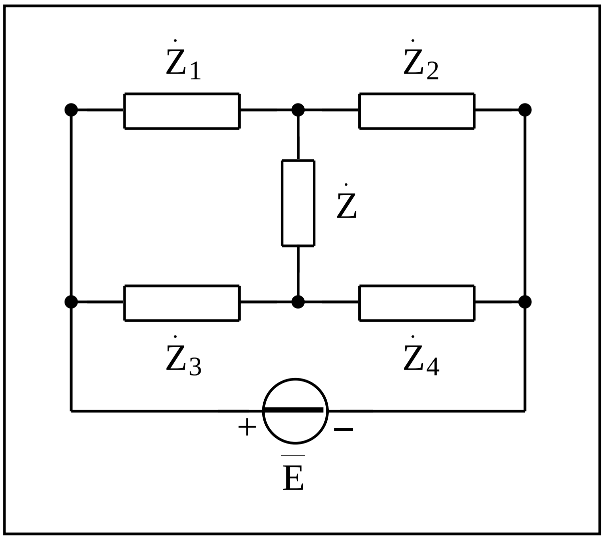
Questo esercizio è un po' più complicato di quelli fin qui proposti. Esso può essere usato come esercizio riassuntivo su Spice, oppure per organizzare un lavoro di gruppo.

```
Esercizio A32
*Doppio bipolo accoppiamento mutuo
R1    1    2    10
R2    2    3    10
R3    5    0    2.5
L0    0    6    5m
L1    3    0    10m
L2    4    0    2.5m
C1    2    0    0.1m
C2    4    5    0.4m
K12       L1       L2       1
VE    1    6    AC    141.42    -90
IJ    0    2    AC    20    225
.AC   LIN    1    159.155    159.155
.PRINT    AC    IR(VE)    II(VE)
.END
```

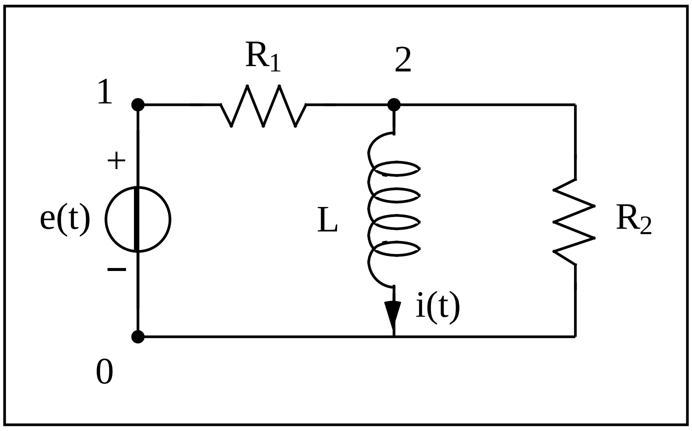
Risposta: $P_E$ = 0.6 kW e $Q_E$ = - 1.2 kVAr.

**A33** - Dimostrare che la *condizione di equilibrio* della generica rete a ponte mostrata in figura è data dalla relazione

$\dot{Z}_1 \, \dot{Z}_4 = \dot{Z}_2 \, \dot{Z}_3$ .




**A34** - Per la rete mostrata in figura, studiare l'andamento del fasore della corrente i(t) al variare della frequenza.




Dati: e(t) = E cos(ωt).

Per la codifica Spice abbiamo dato alcuni valori ai parametri. Cambiateli a vostro piacimento ed esercitatevi nello studio degli andamenti in frequenza del fasore della corrente.

```
Esercizio A34
*R1 = R2 = 20 Ω , L1 = 10 mH
R1      1     2     20
```

```
R2      2    0    20
L1      2    0    10m
VE      1    0    AC     1    0
.AC     LIN       5000      1e-6      1e+5
.PROBE
.END
```

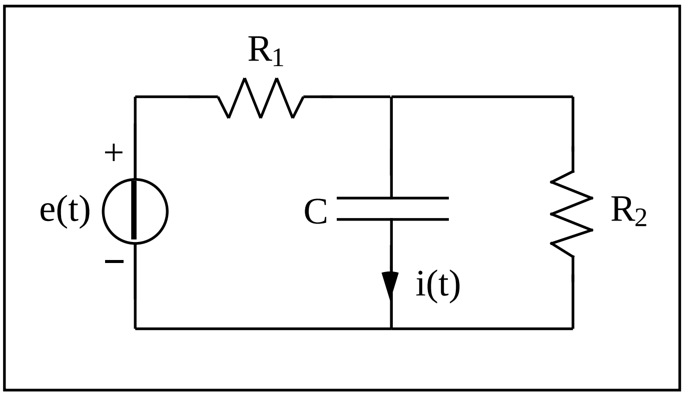
Risposta: posto

$$\tau = L\,\frac{R_1 + R_2}{R_1\,R_2}\ ,$$

il modulo e la fase del fasore $\bar{I}(\omega)$ risultano pari a

$$I(\omega) = \frac{E}{R_1}\,\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\ , \qquad \phi(\omega) = \arg\left[\,\bar{I}(\omega)\,\right] = -\arctan(\omega\tau)\ .$$

**A35** - Per la rete mostrata in figura, studiare l'andamento del fasore della corrente al variare della pulsazione imposta dal generatore.



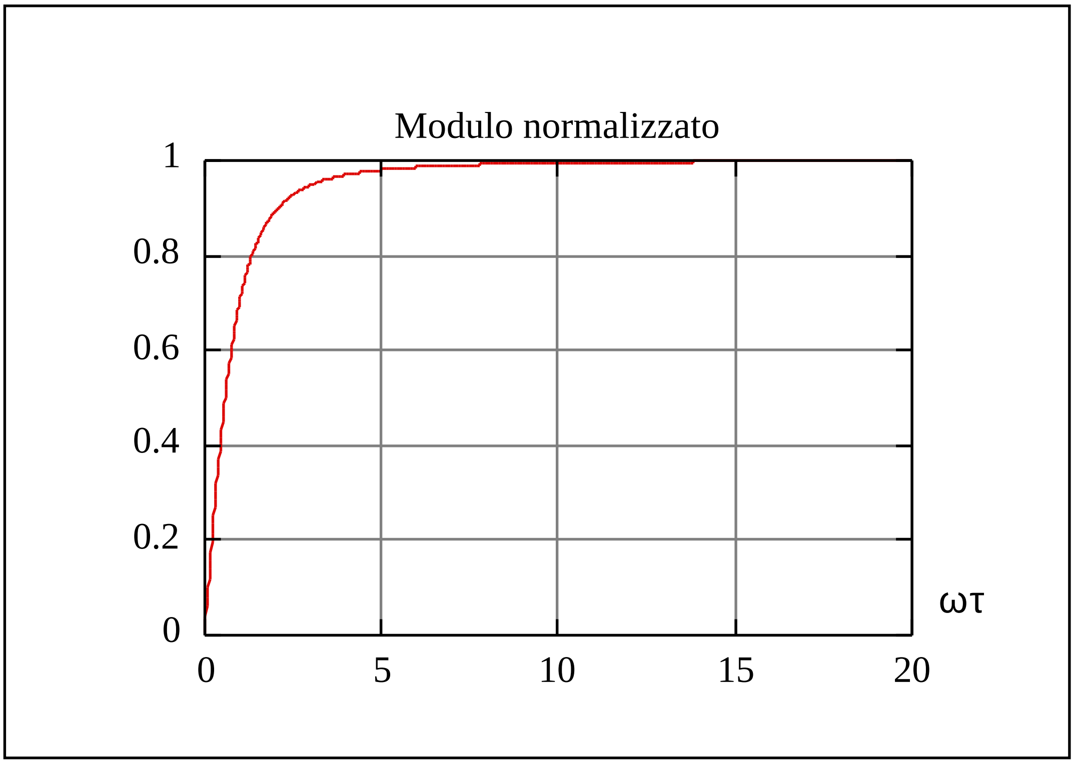

Dati: $e(t) = E\cos(\omega t)$.

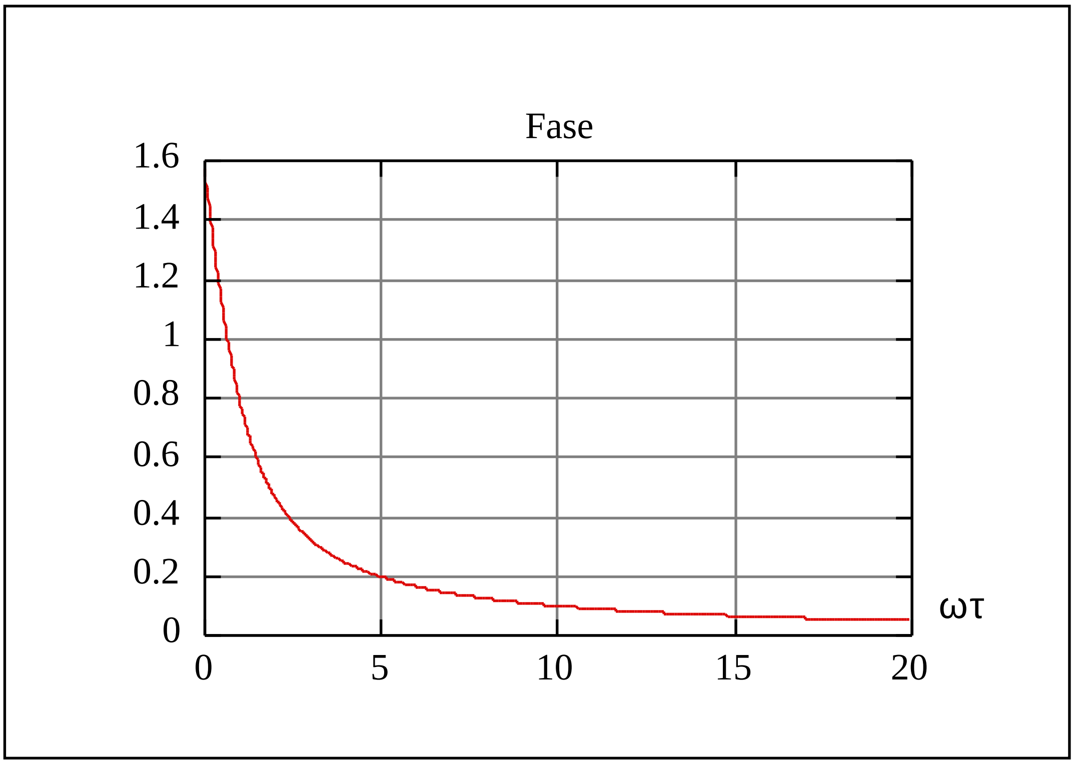
Risposta: posto $\tau = C\,R_1\,R_2/(R_1 + R_2)$, è facile verificare che

Modulo normalizzato $\rightarrow$ $$\frac{R_1}{E}\,I(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\ ,$$

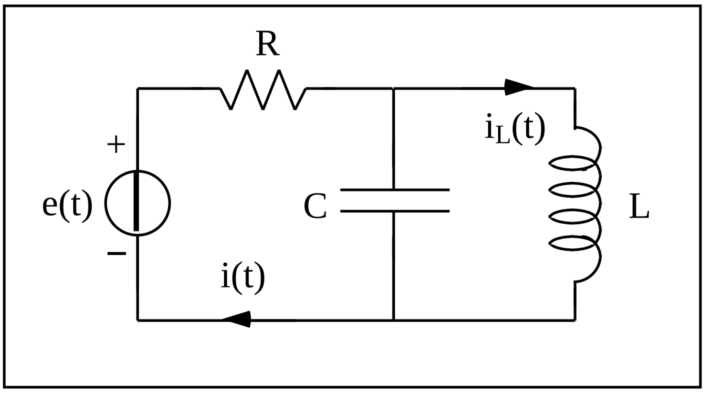
Fase $\rightarrow$ $$\phi(\omega) = \arg\left[\,\bar{I}(\omega)\,\right] = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau)\ .$$

I grafici del modulo e della fase della corrente $\bar{I}(\omega)$ sono di seguito riportati.




**A36** - Risolvere la rete per $\omega \neq \omega_0$ e discutere, a parte, il caso limite $\omega = \omega_0$. Tracciare i diagrammi dei moduli delle correnti nell'induttore e nel generatore, al variare della frequenza.

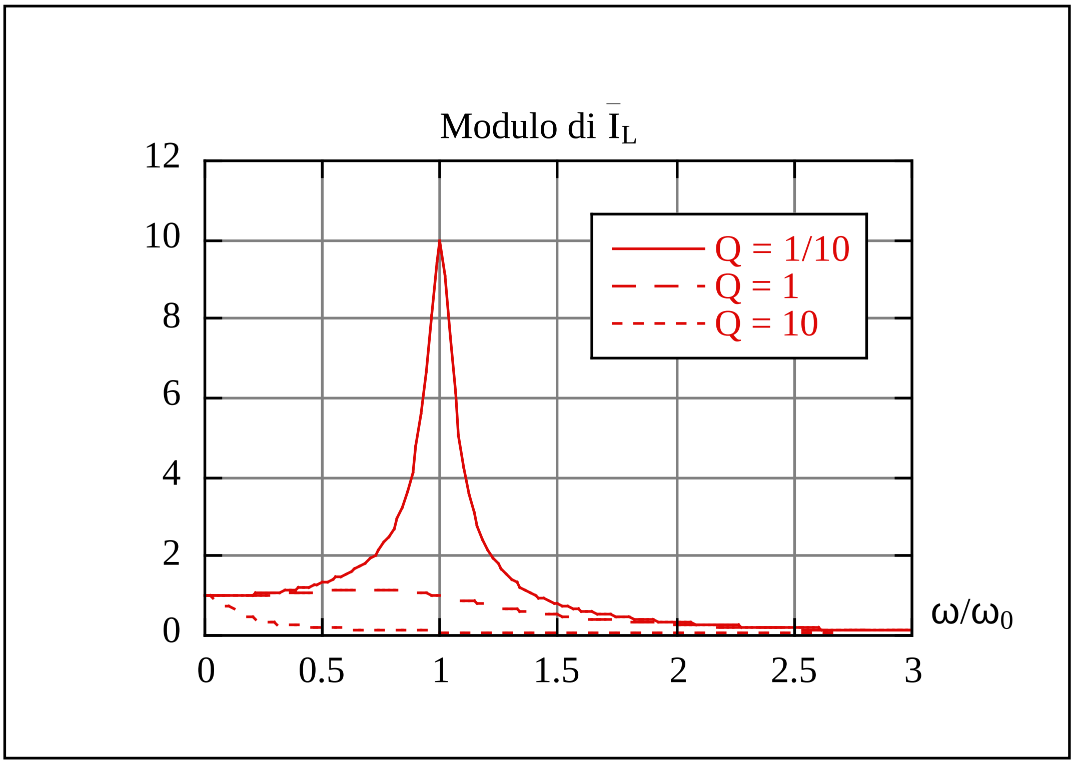


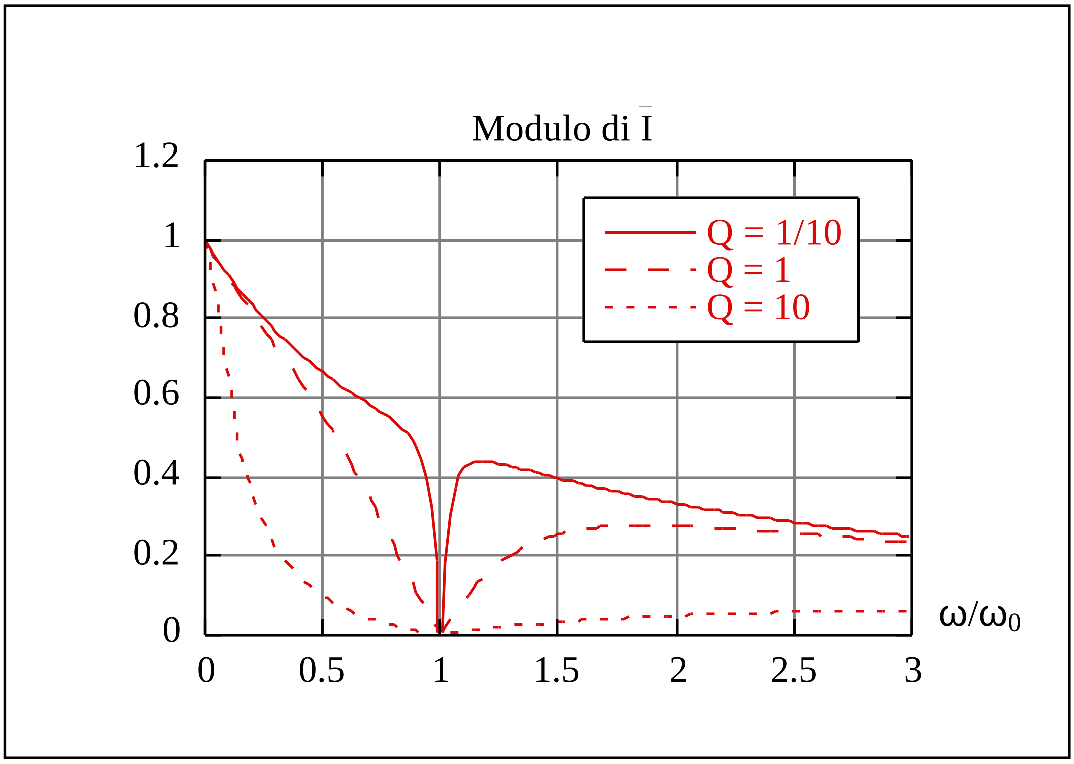

Dati: $e(t) = E \cos(\omega t)$.

Risposta: posto $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $x = \omega/\omega_0$ e $Q = \omega_0 L/R$, risulta

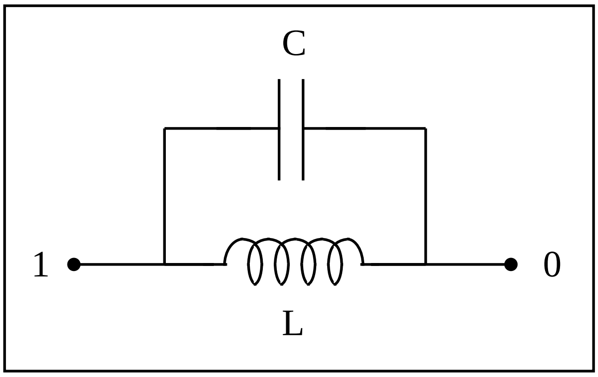
modulo di $\bar{I}_L(\omega)$ → $\frac{R}{E} I_L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + x^2 Q^2}}$ ,

modulo di $\bar{I}(\omega)$ → $\frac{R}{E} I(\omega) = \frac{|x^2 - 1|}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + x^2 Q^2}}$ .



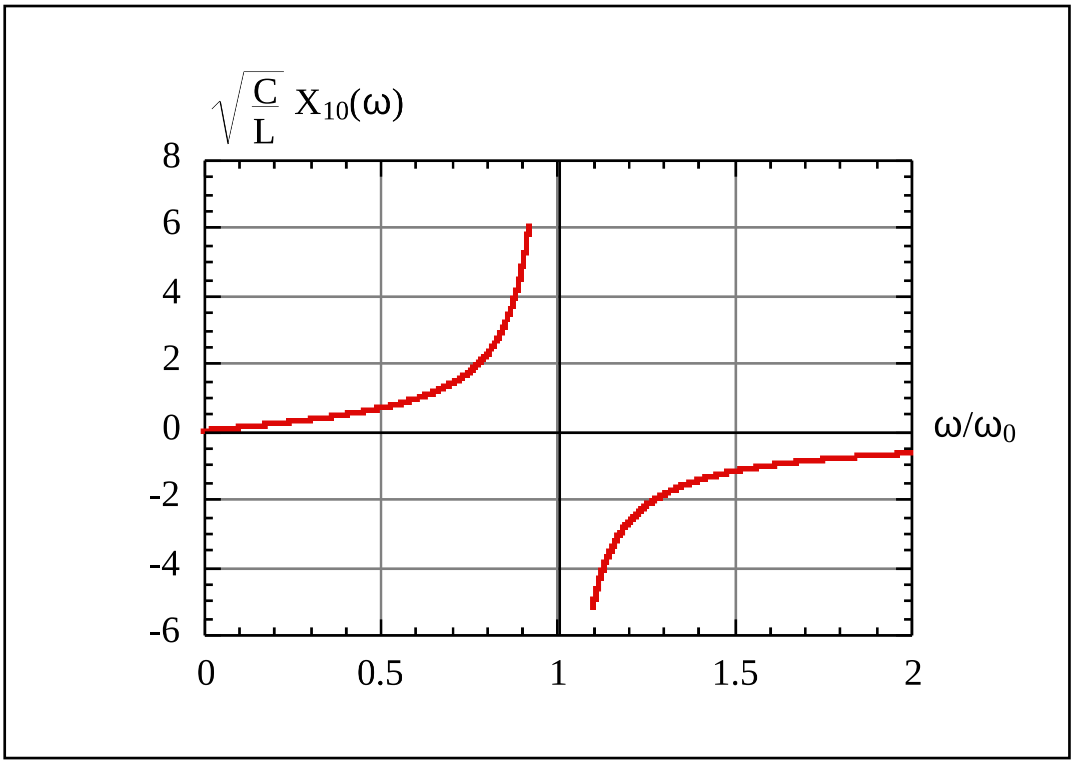



**A37** - Determinare l'andamento qualitativo della reattanza $X_{10}(\omega)$ al variare della pulsazione $\omega$.



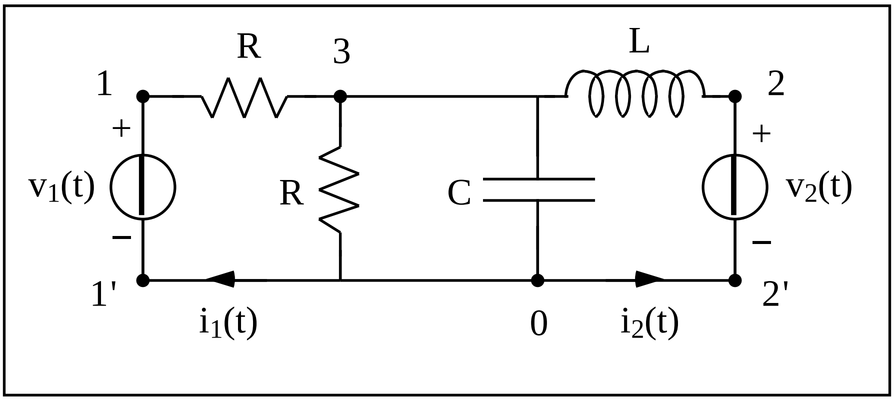

<u>Risposta</u>:

$$X_{10}(\omega) = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\ , \quad \text{con } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ .$$




Notate che la reattanza è una funzione non definita per $\omega = \omega_0$: si dice che la funzione ha in corrispondenza di questo punto un asintoto verticale, attorno al quale la reattanza assume valori molto elevati, al limite infiniti.

**A38** - Utilizzare i parametri della rappresentazione in termini di ammettenze per calcolare le correnti nei due generatori.




Dati: $v_1(t) = 10 \cos(1000t)$, $v_2(t) = 20 \text{ sen}(1000t)$, $R = 1\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 1$ mF.

Nella figura sono stati disegnati anche i nodi 1' e 2' che non sono necessari alla codifica Spice. Essi sono stati riportati solo allo scopo di facilitare l'individuazione della porta primaria e secondaria del doppio bipolo da parte dell'allievo.

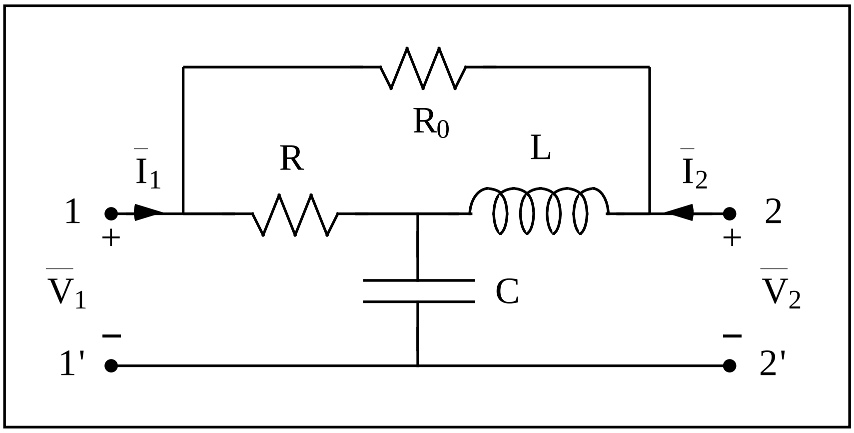
```
Esercizio A38
*Doppio bipolo in alternata
R1      1     3     1
R2      3     0     1
L1      2     3     1m
C1      3     0     1m
VE1     1     0     AC      10       0
VE2     2     0     AC      20       -90
.AC     LIN         1  159.15     159.15
.PRINT   AC         IM(R1)        IP(R1)
.PRINT   AC         IM(L1)        IP(L1)
.END
```

Risposta: risulta

$\dot{Y}_{11} = 0.5$ S , $\dot{Y}_m = 0.5j$ S , $\dot{Y}_{22} = (0.5 - j)$ S ;

$i_1(t) = 15 \cos(1000t)$ , $i_2(t) = - 5 \sqrt{17} \cos(1000t + \arctan 0.25)$ .

**A39** - Per il doppio bipolo mostrato in figura, calcolare le rappresentazioni in termini di impedenze, di ammettenze ed ibrida.




Dati : ω = 1 krad/s, R = 2 Ω, $R_0$ = 2 Ω, L = 2 mH, C = 1 mF.

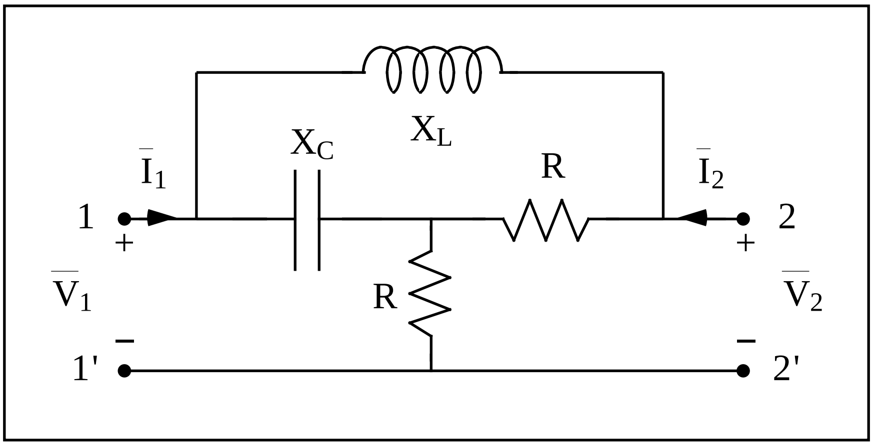
Risposta:

$\dot{Z}_{11} = \frac{6 - 3j}{5}\ \Omega$ , $\dot{Z}_m = \frac{2 - j}{5}\ \Omega$ , $\dot{Z}_{22} = \frac{4 + 3j}{5}\ \Omega$ ;

$$\dot{Y}_{11} = \frac{3 + j}{4} \text{ S} , \quad \dot{Y}_m = \frac{-1 + j}{4} \text{ S} , \quad \dot{Y}_{22} = \frac{3 - 3j}{4} \text{ S} ;$$

$$\dot{H}_{11} = \frac{1}{\dot{Y}_{11}} = \frac{6 - 2j}{5} \ \Omega , \quad \dot{H}_{12} = \frac{\dot{Z}_m}{\dot{Z}_{22}} = \frac{1 - 2j}{5} = - \dot{H}_{21} , \quad \dot{H}_{22} = \frac{1}{\dot{Z}_{22}} = \frac{4 - 3j}{5} \text{ S} .$$

**A40** - Per il doppio bipolo mostrato in figura, determinare la rappresentazione in termini di impedenze. Cosa accade se $X_L = X_C$?




Risposta: gli elementi della rappresentazione in termini di impedenze risultano

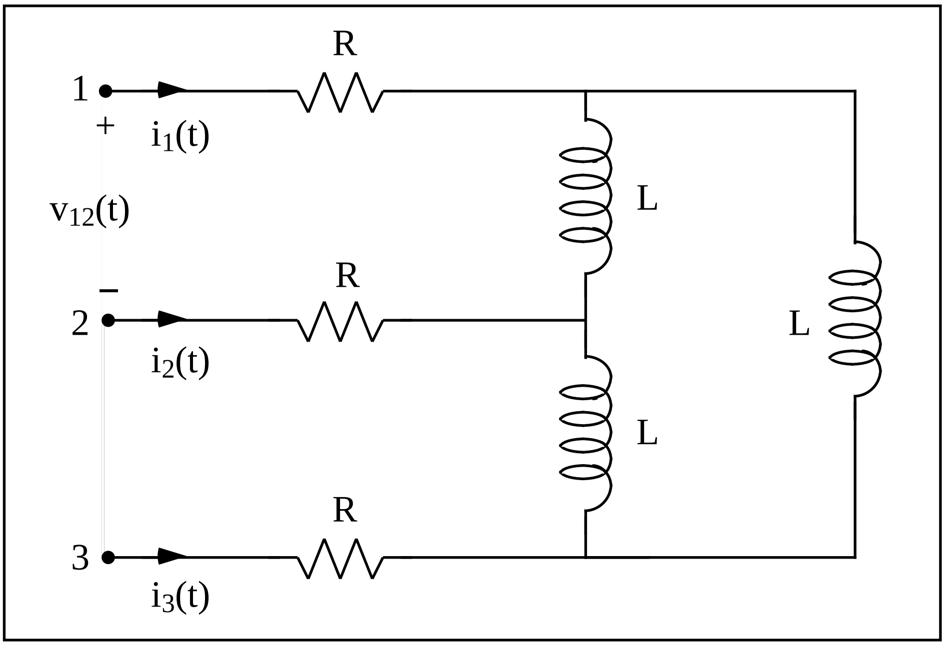
$$\dot{Z}_{11} = R - j \frac{X_C (R + j X_L)}{R + j (X_L - X_C)} , \quad \dot{Z}_m = R - j \frac{R X_C}{R + j (X_L - X_C)} ,$$

$$\dot{Z}_{22} = R + j \frac{R (X_L - X_C)}{R + j (X_L - X_C)} .$$

Nel caso particolare $X_L = X_C$, i precedenti elementi diventano

$$\dot{Z}_{11} = R + \frac{X_C^2}{R} - j X_C , \quad \dot{Z}_m = R - j X_C , \quad \dot{Z}_{22} = R .$$

**A41** - Supponendo che la rete trifase mostrata in figura sia alimentata da una terna simmetrica diretta, determinare le correnti $i_1(t)$, $i_2(t)$ ed $i_3(t)$.

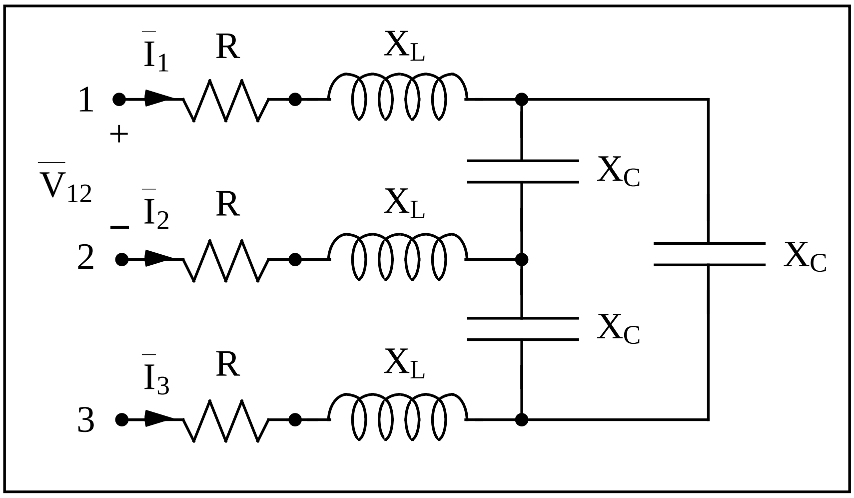



Dati: $v_{12}(t) = V_0 \cos(\omega t + \pi/4)$, $V_0 = 12\sqrt{6}$ V, $\omega = 300$ rad/s, $R = 3\ \Omega$, $L = 30$ mH.

<u>Risposta</u>: le tre correnti di linea valgono

$$i_1(t) = 4 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right), \quad i_2(t) = 4 \cos\left(\omega t - \frac{5}{6}\pi\right), \quad i_3(t) = - 4\, \mathrm{sen}(\omega t)\ .$$

**A42** - Supponendo che la rete trifase mostrata in figura sia alimentata da una terna simmetrica diretta, calcolare le correnti $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ ed $\bar{I}_3$.

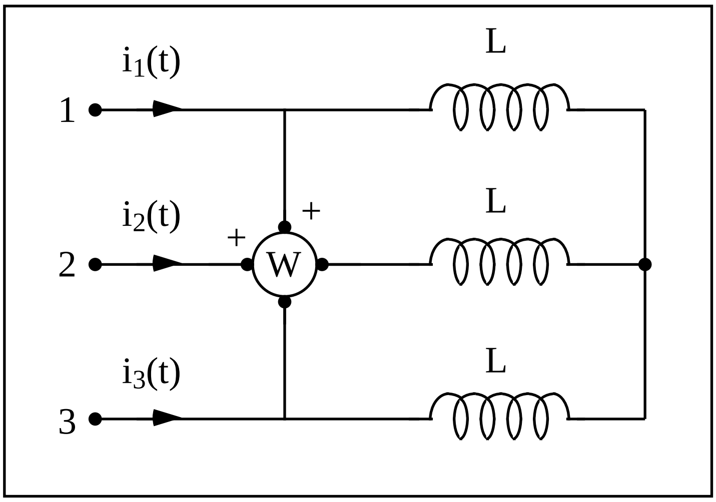



Dati: $\bar{V}_{12} = 200\sqrt{3}$ V, $R = 5\ \Omega$, $X_L = 2\ \Omega$, $X_C = 6\ \Omega$.

Risposta: le tre correnti valgono

$$\bar{I}_1 = \left[40\ ,\ -\frac{\pi}{6}\right]\ ,\quad \bar{I}_2 = \left[40\ ,\ -\frac{5\pi}{6}\right]\ ,\quad \bar{I}_3 = 40\ j\ .$$

**A43** - Calcolare l'indicazione fornita dal wattmetro, nella rete trifase simmetrica ed equilibrata mostrata in figura.

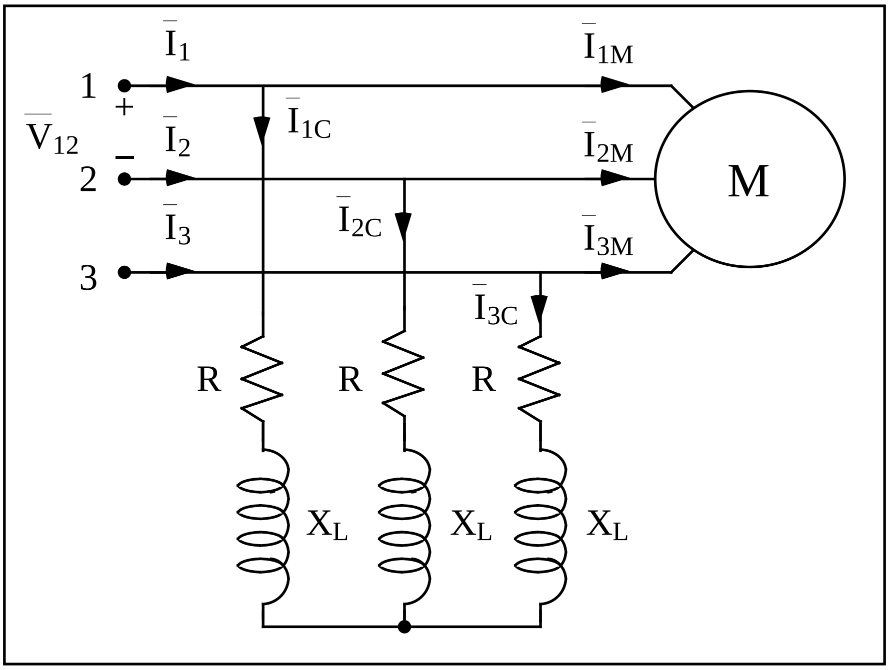



Dati: $i_2(t) = I_0 \sqrt{2}\ \mathrm{sen}(\omega t)$, $I_0 = 20$ A, $\omega = 100$ rad/s, $L = 1$ mH.

Risposta:

indicazione del wattmetro = $-\ 40\sqrt{3}$ W .

**A44** - Supponendo di alimentare la rete trifase di figura con una terna simmetrica diretta di tensioni, determinare le tre correnti di linea.

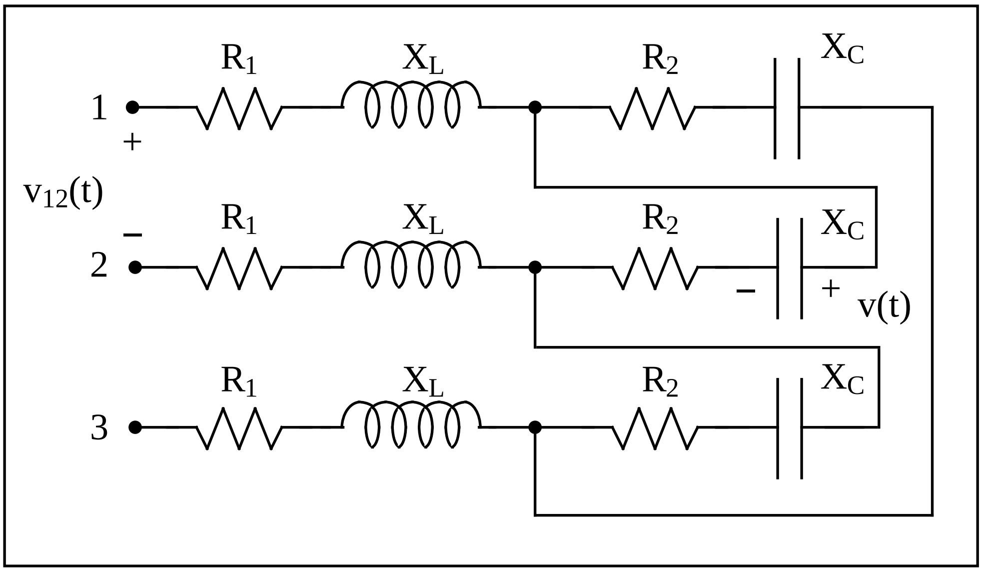



Dati: $\overline{V}_{12} = 220\sqrt{3}$ V, $P_M = 1.5$ kW, $Q_M = 1.5$ kVAr, $R = X_L = 10\ \Omega$.

Risposta: le correnti risultano pari a

$$\overline{I}_1 = \left[\frac{146}{11}\sqrt{2}\ ,\ -\frac{5}{12}\pi\right],\quad \overline{I}_2 = \left[\frac{146}{11}\sqrt{2}\ ,\ \frac{11}{12}\pi\right],\quad \overline{I}_3 = \left[\frac{146}{11}\sqrt{2}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right].$$

**A45** - Calcolare la tensione concatenata $v_{12}(t)$ per la rete trifase simmetrica ed equilibrata mostrata in figura.

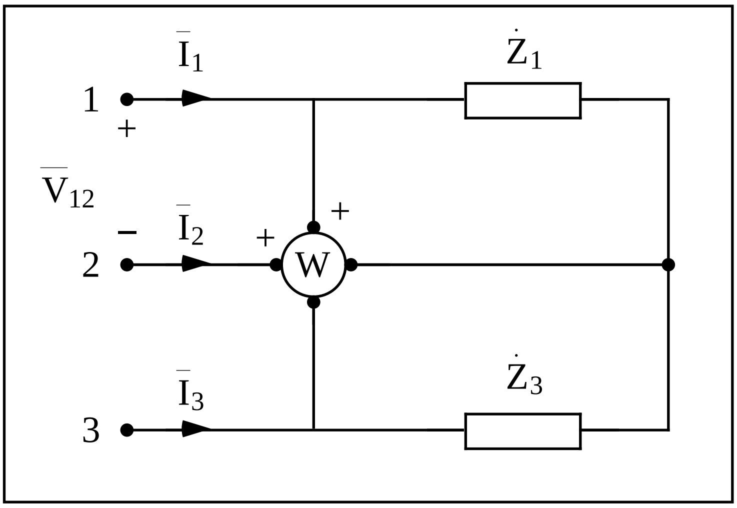



Dati: $v(t) = V_0\ \text{sen}(\omega t - \pi/3)$, $V_0 = 330\sqrt{2}$ V, $R_1 = X_L = 5\ \Omega$, $R_2 = X_C = 15\ \Omega$.

Risposta: la tensione richiesta vale

$$v_{12}(t) = 660 \text{ sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

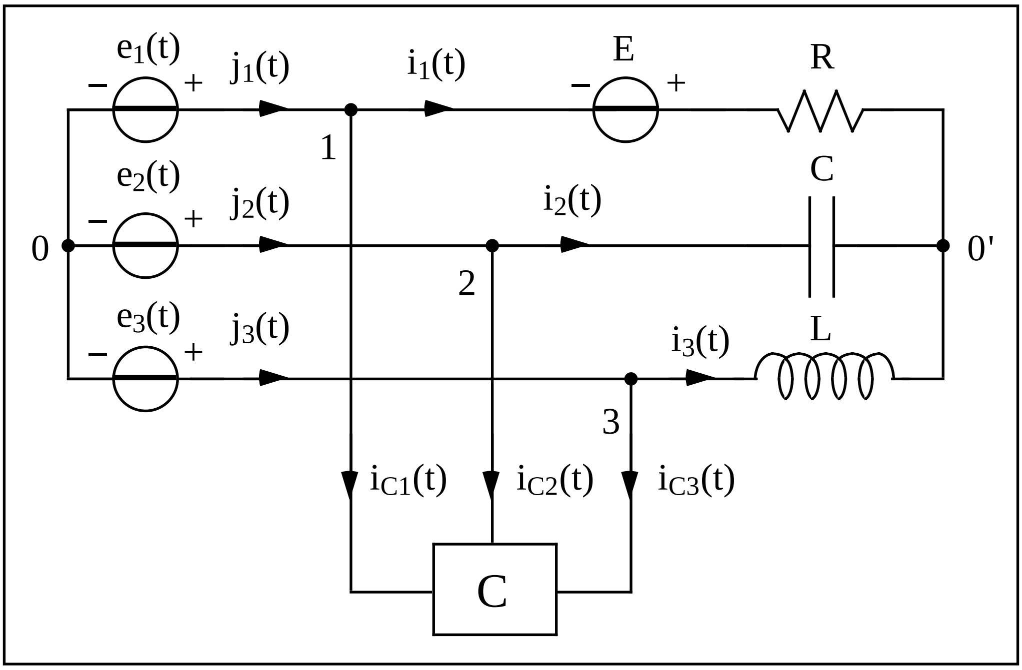
**A46** - Supponendo di alimentare la rete trifase di figura con una terna simmetrica diretta di tensioni, dopo aver calcolato le tre correnti di linea $\bar{I}_k$, con k = 1, 2, 3, determinare l'indicazione del wattmetro.




Dati: $\bar{V}_{12} = 220\sqrt{3}$ V, $\dot{Z}_1 = 10\,(1 + j)\ \Omega$, $\dot{Z}_3 = 5\,(1 + j)\ \Omega$.

Risposta: il wattmetro fornisce l'indicazione $9680\sqrt{3}$ W.

**A47** - Supponendo che le tensioni $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ costituiscano una terna simmetrica diretta, calcolare le tre correnti di linea $j_1(t)$, $j_2(t)$ e $j_3(t)$. Le potenze che definiscono il carico C, composto di soli resistori e condensatori, si intendono valutate alla frequenza di esercizio imposta dai generatori.




[Attenzione: si tratta di un esercizio veramente complicato in cui è necessario applicare la sovrapposizione degli effetti. Il generatore ‘E’ eroga una tensione continua, non alternata].

Dati: $E = 50$ V, $e_1(t) = E_0 \sqrt{2}\, \mathrm{sen}(\omega t)$, $E_0 = 200$ V, $\omega = 1$ krad/s, $R = 2\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 1$ mF, $P_C = 12$ kW, $Q_C = -9$ kVAr.

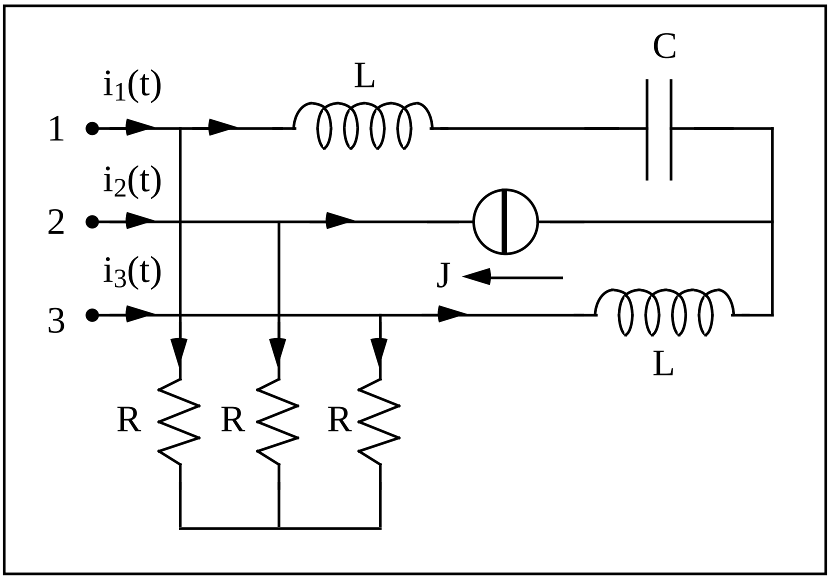
<u>Risposta</u>:

$$\begin{cases} j_1(t) = 25 + 25\, \mathrm{sen}\left(\omega t - \phi_1\right) - 200\sqrt{6}\, \mathrm{sen}(\omega t)\ , \\ j_2(t) = 25\, \mathrm{sen}\left(\omega t - \phi_1 - \dfrac{2}{3}\pi\right) - 200\sqrt{6}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\, \mathrm{sen}\left(\omega t + \phi_2\right)\ , \\ j_3(t) = -25 + 25\, \mathrm{sen}\left(\omega t - \phi_1 - \dfrac{4}{3}\pi\right) - 200\sqrt{6}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\, \mathrm{sen}\left(\omega t - \phi_2\right)\ , \end{cases}$$

in cui, per semplificare la notazione, abbiamo posto

$$\phi_1 = \arctan\frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \arctan\left(4 + \sqrt{3}\right)\ .$$

**A48** - La rete di figura è alimentata da una terna simmetrica di tensioni concatenate. Determinare la corrente $i_2(t)$ che circola nella seconda linea.

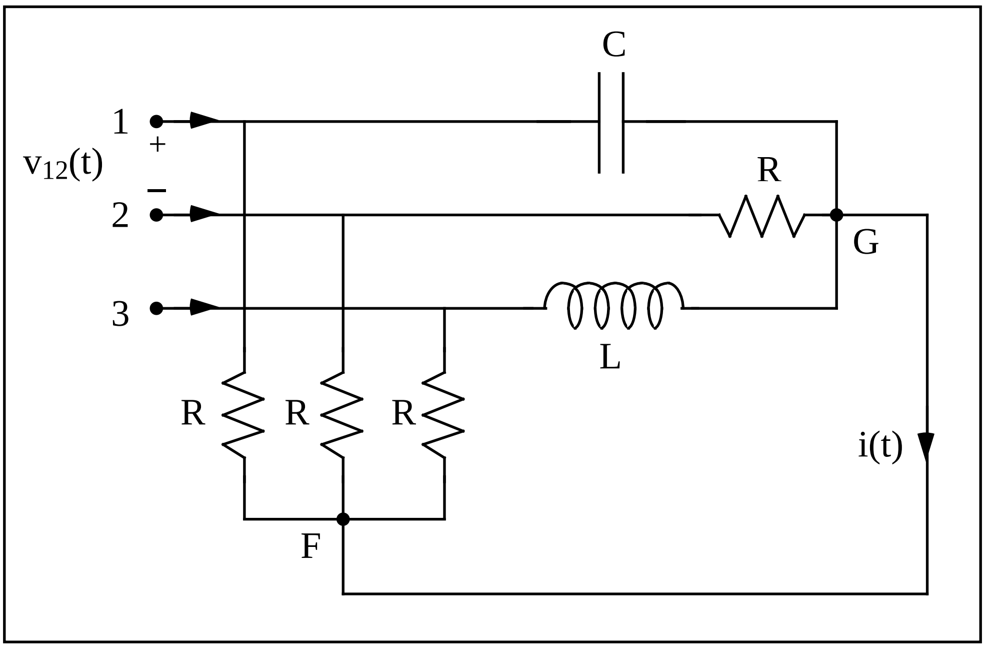



Dati: $v_{12}(t) = V_0 \cos(\omega t)$, $V_0 = 200\sqrt{6}$ V, $\omega = 500$ rad/s, J = 10 A, R = 5 Ω, L = 1 mH, C = 4 mF.

Risposta: la corrente richiesta vale

$$i_2(t) = -10 + 40\sqrt{2}\cos\left(500t - \frac{5}{6}\pi\right).$$

**A49** - Determinare la corrente i(t) per la rete trifase mostrata in figura, supponendo di alimentare la rete con un terna di tensioni simmetriche.



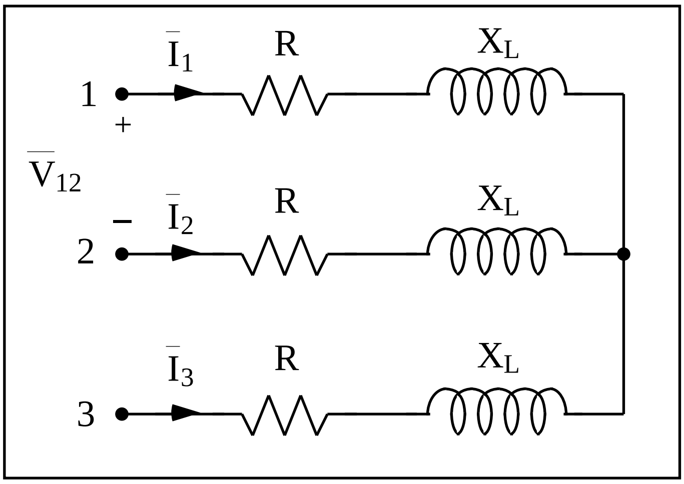

[Potreste anche provare ad applicare il teorema di Thévenin dai terminali F e G].

Dati: $v_{12}(t) = E_0 \sqrt{6}\ \mathrm{sen}(\omega t + \pi/6)$, $E_0 = 220$ V, $\omega = 1$ krad/s, R = 2 Ω, L = 1 mH, C = 1 mF.

<u>Risposta</u>: la corrente richiesta è pari a

$$i(t) = \frac{165}{2}\sqrt{2}\left(2\sqrt{3} - 1\right)\mathrm{sen}\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right).$$

**A50** - Supponendo che la rete trifase sia alimentata da una terna simmetrica diretta di tensioni concatenate, rifasare il sistema a cos ϕ = 0.9.




Dati: R = $X_L$ = 5 Ω, $V_{12} = V_0 = 380$ V, f = 50 Hz.

<u>Risposta</u>:

» carico trifase e condensatori connessi a stella $C_S$ 164.22 μF;
» carico trifase e condensatori connessi a triangolo $C_T$ 54.7 μF.