Capitolo 7

Circuiti in evoluzione dinamica

Nei precedenti capitoli sono state studiate le principali proprietà dei circuiti elettrici in regime stazionario, ma non si è ancora esaminata la maniera in cui si stabilisce, in un circuito, questa condizione di regime, quando, ad esempio, un ramo contenente un generatore di forza elettromotrice venga collegato o scollegato, e nemmeno sono state stabilite le leggi che regolano la transizione da un regime ad un altro, quando qualche parametro del circuito varia. Come si avrà modo di sottolineare nel seguito, queste transizioni possono innescarsi per diversi motivi, ma sono sostanzialmente controllate dalla presenza dei bipoli a memoria, cioè l'induttore ed il condensatore, i soli in grado di immagazzinare energia: è evidente, quindi, che il comportamento dell'intero circuito sarà condizionato dal livello di energia posseduto all'istante iniziale da questi bipoli. Cosa debba intendersi, poi, per 'istante iniziale' è chiaramente definito, nei casi concreti, dalla procedura che si mette in opera per effettuare i collegamenti tra gli elementi del circuito, d'abitudine realizzati per mezzo di dispositivi chiamati **interruttori**, dei quali conviene introdurre subito un'adeguata idealizzazione. Precisamente, un interruttore è un bipolo che abbia la caratteristica di essere del tutto simile ad un circuito aperto prima di un determinato istante t_0, detto istante di chiusura, e che si comporti come un bipolo cortocircuito per tutti gli istanti successivi. Il bipolo così definito è un interruttore in chiusura; in maniera del tutto analoga è possibile definire un interruttore in apertura.

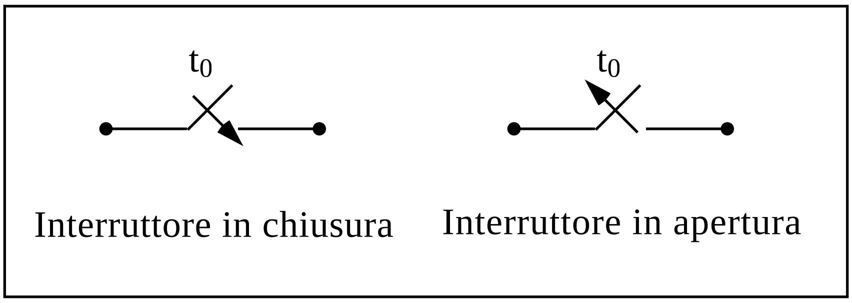


Figura 7.1: simboli per il bipolo interruttore (ideale).

Ovviamente, dove è possibile, conviene porre $t_0 = 0$, coincidente con l'arbitraria origine dei tempi. In altri termini, ai capi di un interruttore chiuso si manifesta una tensione nulla; dualmente, una corrente nulla attraversa un interruttore aperto.

In questo capitolo si vogliono studiare i fenomeni transitori ‘nel dominio del tempo’, la cui rigorosa definizione andrà costruendosi man mano che le conoscenze cresceranno. Non è facile dare una definizione rigorosa, e forse non è neppure utile, ma viene detto ‘transitorio’ ogni fenomeno di passaggio da un regime ad un altro: in questo testo, la maggior parte dei problemi riguarda transizioni da e verso un regime stazionario o sinusoidale.
Come accennato, i transitori nei circuiti elettrici sono spesso dovuti alla ‘commutazione’, cioè alla azione di apertura o chiusura di interruttori, ed il loro studio permette di mettere in evidenza le eventuali sovratensioni e sovracorrenti che si instaurano nei diversi bipoli della rete e che possono superare anche di decine di volte le corrispondenti ampiezze permanenti. Il buon progetto di un circuito elettrico, dunque, non può prescindere da una chiara comprensione delle dinamiche transitorie, il cui studio consente, tra l’altro, di capire quali modifiche subiscano i segnali prodotti da amplificatori, filtri oppure altri dispositivi elettrici ed elettronici, rispetto a quelli di ingresso.
L’obiettivo formativo è insegnare come si risolvano i transitori delle reti lineari, del primo e del secondo ordine, con forzamento costante o sinusoidale nel tempo. Un cenno verrà fatto, alla fine del capitolo, ai transitori in presenza di elementi non lineari, laddove l’efficacia del simulatore Spice appare del tutto evidente.

I tipi principali di funzionamento in condizioni variabili nel tempo sono quattro e possono essere così indicati:

- regime periodico sinusoidale, anche detto corrente alternata, in gergo;
- regimi periodici non sinusoidali;
- funzionamento transitorio;
- funzionamento in condizioni dinamiche generali.

Ciascuno di questi termini richiede, naturalmente, opportune ed approfondite definizioni e spiegazioni, che saranno date di volta in volta nei capitoli seguenti. Per il momento, basti pensare che il regime sinusoidale è fondamentale dal punto di vista pratico, poiché esso corrisponde alle condizioni di funzionamento normale della maggior parte dei dispositivi elettrici, sia a livello domestico che industriale. Inoltre, anche dal punto di vista concettuale, il regime sinusoidale è essenziale, poiché costituisce la base per analizzare anche i regimi periodici non sinusoidali.
Vanno sotto il nome di transitorie quelle condizioni di funzionamento, solitamente di durata limitata, in cui un circuito si trova quando passa da una condizione di regime all’altra, dello stesso tipo o di tipo diverso. Infine, tipiche del funzionamento dei dispositivi elettronici sono le condizioni in cui ciascuna grandezza varia nel tempo in maniera non prevedibile ‘a priori’, ma dipendente

dalle informazioni che si vogliono comunicare: si pensi alla radio, alla TV, ai telefoni, agli elaboratori elettronici, e così via.
Nel prossimo capitolo verrà affrontato lo studio del regime sinusoidale, mentre i paragrafi che seguono saranno dedicati ai transitori ed al funzionamento in condizioni dinamiche generali. Come già accennato in precedenza, il regime sinusoidale, data la sua notevole importanza pratica, verrà studiato in dettaglio, perché è essenziale imparare a ‘sbrigarsela bene’ con i circuiti in corrente alternata. Sarà importante, quindi, padroneggiare tutti quei ‘trucchi’ algebrici che consentono di risolvere ‘a mano’ questo tipo di circuiti. Spice servirà, comunque: non fosse altro che per controllare la correttezza dei risultati ottenuti ‘a mano’.

Teoria dei circuiti in regime dinamico qualsiasi

• Protagonisti:
- bipoli, doppi bipoli ed altri componenti;
- grandezze fondamentali [corrente (A), tensione (V)];
- grandezze derivate [potenza (W) ed energia elettrica (J o Wh)].

• Leggi generali: LKC e LKT, valide in ogni istante.

• Caratteristiche statiche o dinamiche: descrivono il comportamento elettrico di ciascun componente.

Prima di entrare nel vivo, però, si vuole sottolineare ancora una volta che risolvere un circuito in condizioni di funzionamento comunque variabili nel tempo significa pur sempre dover risolvere un sistema di 2r equazioni in altrettante incognite: queste incognite, però, a differenza del regime stazionario, non sono più semplici numeri, bensì funzioni del tempo. Se è vero, quindi, che il passaggio dal regime stazionario al funzionamento variabile nel tempo non richiede concettualmente grandi cambiamenti nella formulazione del problema della risoluzione dei circuiti, occorre dire pure con la massima chiarezza che i calcoli da fare per risolvere un circuito si complicano non poco, poiché si tratterà di affrontare la soluzione di equazioni di tipo nuovo: le cosiddette equazioni differenziali. Nella realtà, queste equazioni sono state studiate a fondo, a partire del secolo XVII dai soliti Newton e Leibnitz, e sono state sviluppate poi nei secoli successivi da schiere di illustri matematici che hanno spiegato come fare a risolverle, fornendo spesso abili ‘trucchi’ per risparmiare fatica.
In questo testo, però, tutto ciò interessa relativamente poco, poiché lo scopo principale non è quello di imparare tecniche e trucchi matematici, ma di risolvere

circuiti. Si cercherà, pertanto, di risparmiare fatica il più possibile, ricorrendo di tanto in tanto a Spice, che funziona egregiamente anche in condizioni variabili nel tempo. Prima, però, di utilizzarlo, vale la pena perseguire alcune tappe intermedie:

• dare, con un semplice esempio, un'idea delle difficoltà connesse con la soluzione di un'equazione differenziale, non fosse altro che per capire almeno le difficoltà che Spice consentirà di scansare;
• distinguere i diversi possibili tipi di funzionamento in condizioni variabili nel tempo, con lo scopo di capire bene quali siano i casi in cui davvero non potremo fare altro che ricorrere a Spice, da quelli in cui, invece, come vedremo subito, potremo disporre di un semplice 'trucco matematico', inventato, o meglio, riscoperto alla fine del secolo XIX, che consentirà di ottenere la soluzione dei circuiti in regime sinusoidale.

Per questi motivi è possibile esaminare in maniera quantitativa, soltanto semplici circuiti che richiedono la soluzione di equazioni differenziali abbastanza agevoli. Poi, verranno classificati i diversi tipi possibili di funzionamento in condizioni variabili nel tempo, distinguendo quelli per i quali il 'trucco matematico' dei fasori funziona e consente di risolvere i circuiti 'a mano', da quelli in cui, invece, non si ha altra scelta se non ... usare correttamente Spice.

7.1 Evoluzione libera

Si consideri il circuito mostrato in Figura 7.2, in cui un condensatore carico viene collegato, per mezzo di un interruttore, ad un resistore, in un certo istante di tempo che, per comodità, viene assunto quale istante iniziale t = 0.

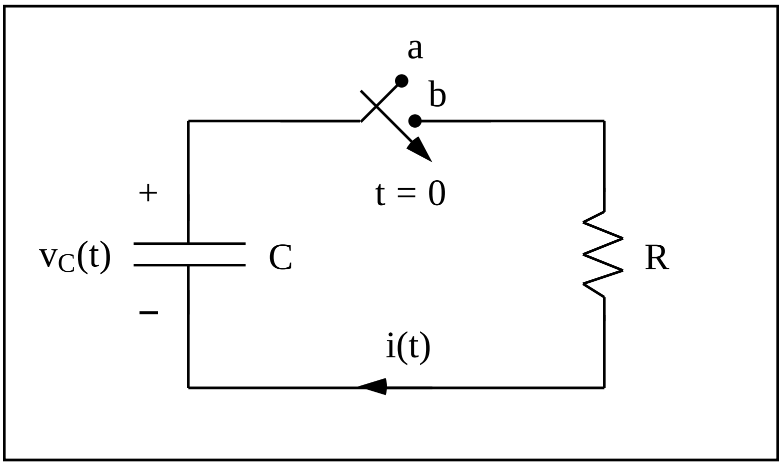


Figura 7.2: scarica di un condensatore.

L’indicazione apposta sull’interruttore indica proprio che esso mette in collegamento elettrico il condensatore con il resistore all’istante t = 0, istante iniziale di osservazione del fenomeno.
Ciò che si può intuitivamente immaginare è che il valore della tensione iniziale ai capi del condensatore $v_C(0) = V_0$ tradisce la presenza di un’energia elettrica immagazzinata che, in qualche modo, con la chiusura dell’interruttore, determinerà la circolazione di una corrente. Questa corrente i(t) interessa anche il resistore e, pertanto, parte dell’energia inizialmente accumulata nel condensatore viene, poco per volta, trasformata in calore nel resistore. L’energia, assorbita dal circuito (ed ovviamente usata per alcuni scopi come, ad esempio, il riscaldamento), determina una variazione temporale delle grandezze che descrivono il circuito, cioè la tensione ai capi del condensatore e la corrente che circola nei due bipoli, variazione che si vuole studiare e, se possibile, determinare in maniera analitica.
Per raggiungere questo scopo, quando l’interruttore è definitivamente commutato dalla posizione ‘a’ alla posizione ‘b’, cioè in un qualunque istante t > 0, si scriva la LKT all’unica maglia del circuito

$$v_C - R\,i = 0 \; .$$

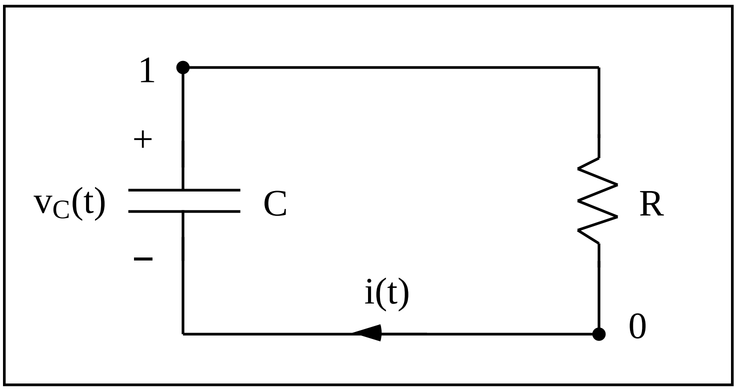


Figura 7.3: rappresentazione del circuito a commutazione avvenuta.

Per non appesantire la notazione adoperata, quando non si potranno generare confusioni, l’indicazione della dipendenza dal tempo verrà omessa: in tal modo, è preferibile scrivere v_C in luogo della più completa $v_C(t)$.
Ora, essendo la relazione che collega la tensione e la corrente ai capi del condensatore, per il quale è stata fatta la convenzione del generatore, pari a

$$i = - C \, \frac{dv_C}{dt} \; ,$$

sostituendo nella precedente LKT, è possibile ottenere l’equazione differenziale che regola la tensione

$$v_C + RC\,\frac{dv_C}{dt} = 0\ .$$

Questa equazione differenziale definisce le ‘dinamiche’ della tensione, cioè stabilisce come questa grandezza debba variare nel tempo e, prima di risolverla, conviene leggere l’appendice alla fine di questo capitolo.

Tornando all’equazione differenziale, per risolverla, essendo un’equazione omogenea, è necessario considerare l’equazione caratteristica

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\,\frac{1}{RC}\ .$$

La soluzione di questa equazione algebrica consente di scrivere l’integrale generale dell’equazione differenziale nella forma

$$v_C(t) = K \exp\left(-\,\frac{t}{RC}\right),$$

dove K è una costante di integrazione, la cui determinazione si effettua per mezzo della condizione iniziale

$$v_C(0) = V_0\ ,$$

cioè conoscendo l’energia che inizialmente si trovava immagazzinata nel condensatore, che è pari a

$$U_C(0) = \frac{1}{2}\,C\,v_C^2(0) = \frac{1}{2}\,C\,V_0^2\ .$$

Imponendo questa condizione iniziale, risulta immediatamente

$$v_C(t) = V_0 \exp\left(-\,\frac{t}{RC}\right).$$

Si è allora giunti alla soluzione del problema: la tensione ai capi del condensatore tende esponenzialmente ad annullarsi al crescere del tempo, nel senso che, se la tensione iniziale è positiva, essa decresce da questo valore fino a zero, mentre, se la tensione iniziale è negativa, cresce fino a zero, come mostra la Figura 7.4.

Inoltre, ciò che veramente conta non è tanto il tempo ‘t’, ma la variabile adimensionale t/(RC). La grandezza RC ha le dimensioni di un tempo e viene, pertanto, detta costante di tempo del circuito. Se si pone

$$\tau = RC \,,$$

è ragionevole affermare che, dopo un tempo pari a 10 τ, la funzione esponenziale è praticamente nulla e l’evoluzione del circuito si può ritenere conclusa.

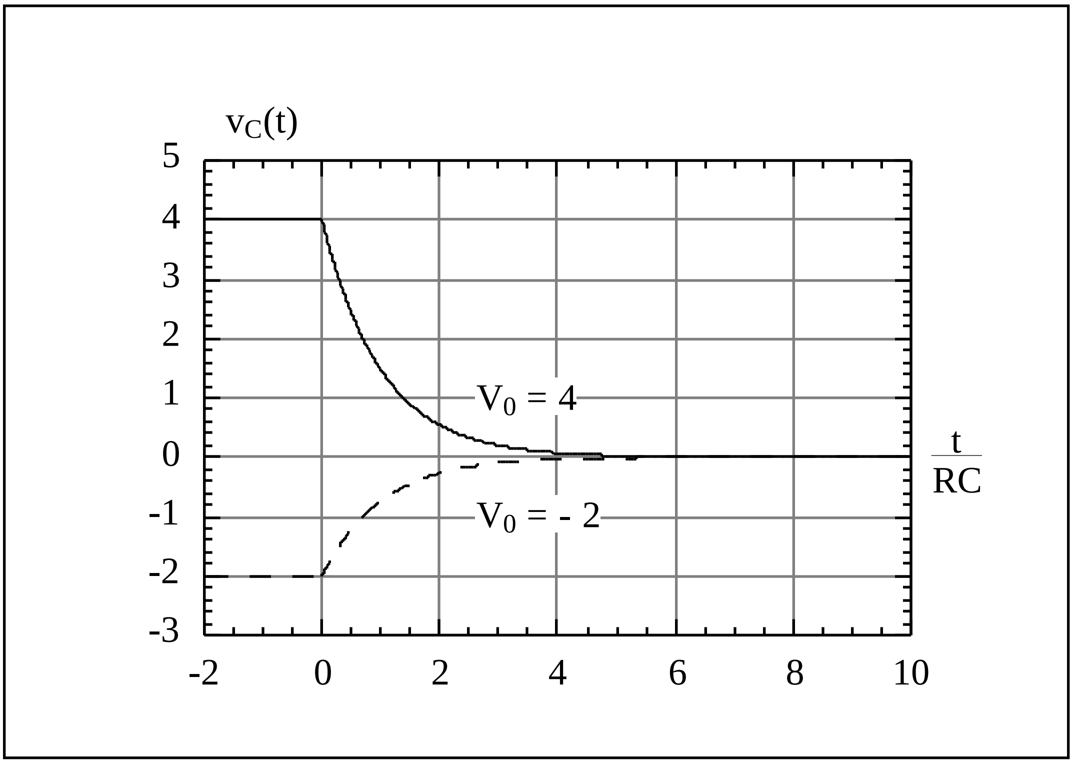


Figura 7.4: andamento temporale della tensione ai capi del condensatore.

In altri termini, se si aspetta un intervallo di tempo pari ad una diecina di costanti di tempo, si può affermare che il condensatore si è completamente scaricato, rilasciando alla restante parte del circuito cui è collegato, nel nostro esempio un resistore, interamente l’energia che inizialmente possedeva. È ben noto che, a rigore, bisognerebbe attendere un intervallo di tempo infinito; tuttavia, nella pratica circuitale, la costante di tempo è un parametro caratteristico legato al tempo impiegato dal circuito ad estinguere le condizioni transitorie.

Una volta che sia nota la tensione, si può dire che la corrente vale

$$i = - C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{V_0}{\tau} \exp\left(- \frac{t}{\tau}\right) = \frac{V_0}{R} \exp\left(- \frac{t}{\tau}\right) ,$$

da cui discende che l’energia complessivamente assorbita dal resistore è pari a

$$U_R(0, \infty) = \int_0^\infty R\, i^2(t)\, dt = R \frac{V_0^2}{R^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{V_0^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} C V_0^2 ,$$

coincidente proprio con l’energia inizialmente immagazzinata nel condensatore.

Prima di chiudere questo paragrafo, viene codificata con Spice la rete appena studiata, nel caso particolare (Figura 7.3)

$$R = 5 , \quad C = 2 \text{ mF} , \quad V_0 = 2 .$$

```
Esempio 1
*Scarica del condensatore
C0      1     0     2m      IC=2
R0      1     0     5
.TRAN       1m      100     UIC
.PROBE
.END
```

L’istruzione Spice per individuare il condensatore di capacità 2 mF, connesso tra i nodi 1 e 0, inizialmente carico alla tensione di 2 volt, è

```
C0      2     0     2m      IC=2 ,
```

in cui C0 è il nome scelto. La prima lettera del nome deve essere sempre una C. Similmente, per un induttore di induttanza 2 mH, connesso tra i nodi 1 e 0 ed inizialmente carico alla corrente di 1 ampere, la sintassi è

```
L0      1     0     2m      IC=1 ,
```

in cui il nome scelto è L0. Si noti che per individuare un induttore la prima lettera è sempre una L.

Il comando ‘.TRAN’ nella sua versione più completa è

```
.TRAN     TSTEP     TSTOP     TSTART     TMAX     UIC
```

in cui TSTEP è il passo con cui vengono visualizzati i dati calcolati, TSTOP l’istante di arresto in cui va terminato il calcolo, TSTART è l’istante iniziale che, se non esplicitamente indicato, viene assunto pari a zero, TMAX è il più grande passo di elaborazione dei risultati che, se non indicato, è assunto pari a TSTEP, UIC impone al simulatore di usare le condizioni iniziali riportate nel file (Utilize Initial Conditions). Nel caso in esame è stato scelto

TSEP = 1 ms ,   TSTOP = 100 ms ,

pari, rispettivamente, ad un decimo e dieci volte il valore della costante di tempo.
La penultima riga contiene il comando ‘.PROBE’ che richiede a Spice di creare, in uscita, un nuovo file, individuato con l’estensione ‘.DAT’, che contiene tutti i dati delle elaborazioni effettuate. Questo nuovo file può essere letto dal post-processore grafico PROBE, in grado di produrre grafici di alta qualità sulla base dei dati forniti. Solo un po’ di pratica aiuterà a rendersi conto di quanto sia più ... semplice usare questo processore grafico, piuttosto che descrivere come si adoperi.
In definitiva, come si è potuto constatare, l’analisi di una rete che lavori in condizioni dinamiche non è molto più complicata di quella di una rete che operi in regime stazionario, ovviamente dal punto di vista di Spice; basta ricordare il comando ‘.TRAN’ ed imparare ad usare il post-processore PROBE.

Per controllare di aver ben compreso le cose dette, è possibile studiare la scarica di un induttore, considerando il circuito mostrato in Figura 7.5.

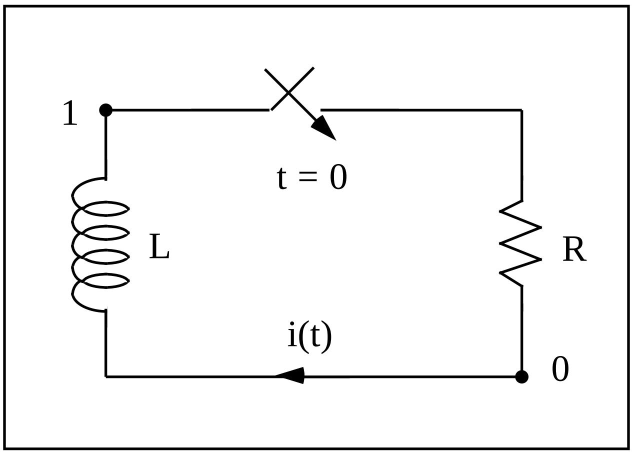


Figura 7.5: scarica di un induttore.

Si troverà che la corrente, per $t \geq 0$, vale

$$i(t) = I_0 \exp\left(- \frac{t}{\tau}\right) ,$$

in cui la costante di tempo è

$$\tau = \frac{L}{R} \; .$$

Una possibile codifica Spice viene, qui di seguito, riportata, nel caso particolare

$$R = 2 \; , \quad L = 2 \text{ mH} \; , \quad I_0 = 1 \; .$$

```
Esempio 2
*Scarica dell'induttore
L0      1     0     2m      IC=1
R0      1     0     2
.TRAN       0.1m       10m        UIC
.PROBE
.END
```

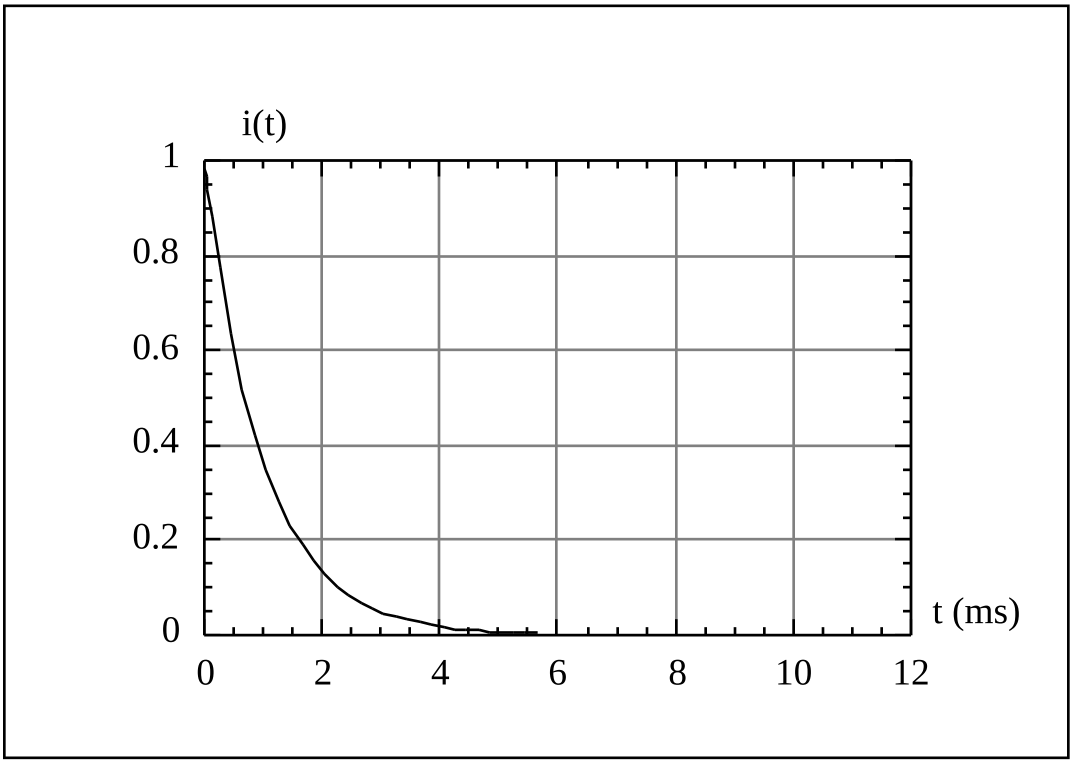


Figura 7.6: andamento temporale della corrente durante la scarica.

7.2 Evoluzione forzata

Nel paragrafo precedente è stato mostrato che un condensatore ed un induttore, quando sono carichi e vengono collegati ad un resistore, non si scaricano immediatamente, ma seguono una legge di scarica di tipo esponenziale, rilasciando gradualmente nel tempo l'energia inizialmente immagazzinata in essi In questo paragrafo, invece, si vuole studiare come si possa ottenere la carica di un bipolo a memoria, come ad esempio un induttore, inizialmente scarico.

• Il problema delle condizioni iniziali

Prima di continuare lo studio dei transitori nei circuiti elettrici, è necessario sviluppare alcune considerazioni sulle condizioni iniziali: in particolare, è utile considerare le eventuali discontinuità nella tensione o nella corrente dei bipoli a memoria, al fine di imporre le giuste condizioni iniziali.

Per iniziare, si prenda in esame il caso di un induttore. Mentre per la tensione v(t) ai suoi capi, quale che sia la convenzione fatta, non si può escludere qualche discontinuità, per la corrente i(t) non è possibile accettare discontinuità. È evidente che quanto appena detto esclude il caso di un induttore collegato direttamente ad un generatore di tensione, dato che, in questa assai particolare situazione circuitale, ai capi dell'induttore è possibile forzare qualsiasi tensione. Considerando, infatti, l'energia immagazzinata nell'induttore

$$U_L(t) = \frac{1}{2} L\, i^2(t) \,,$$

segue che ad una discontinuità nella corrente corrisponderebbe una discontinuità nell'energia, vale a dire una potenza illimitata.

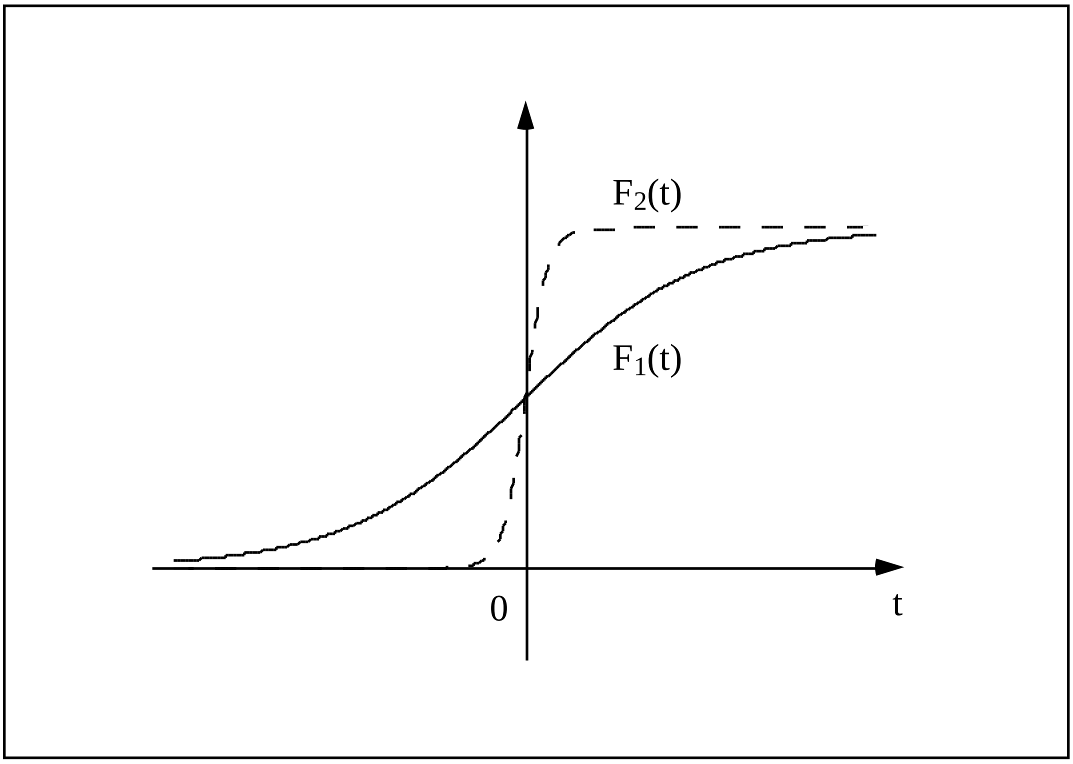


Figura 7.7: due funzioni, una più ripida, l'altra meno ripida attorno all'origine.

È utile a tal fine ricordare che la potenza elettrica è niente altro che la derivata dell'energia e, pertanto, se la funzione da derivare è discontinua, la derivata diventa illimitata. Questo ultimo punto merita qualche ulteriore commento.
Dato che un disegno vale più di mille parole, si tenterà di mostrare graficamente ciò che si sta dicendo. La Figura 7.7 mostra due funzioni del tempo, una più pendente (tratteggiata) dell'altra (a tratto continuo) attorno all'origine. Di queste due funzioni se ne è determinato la derivata, che è mostrata nella Figura 7.8.

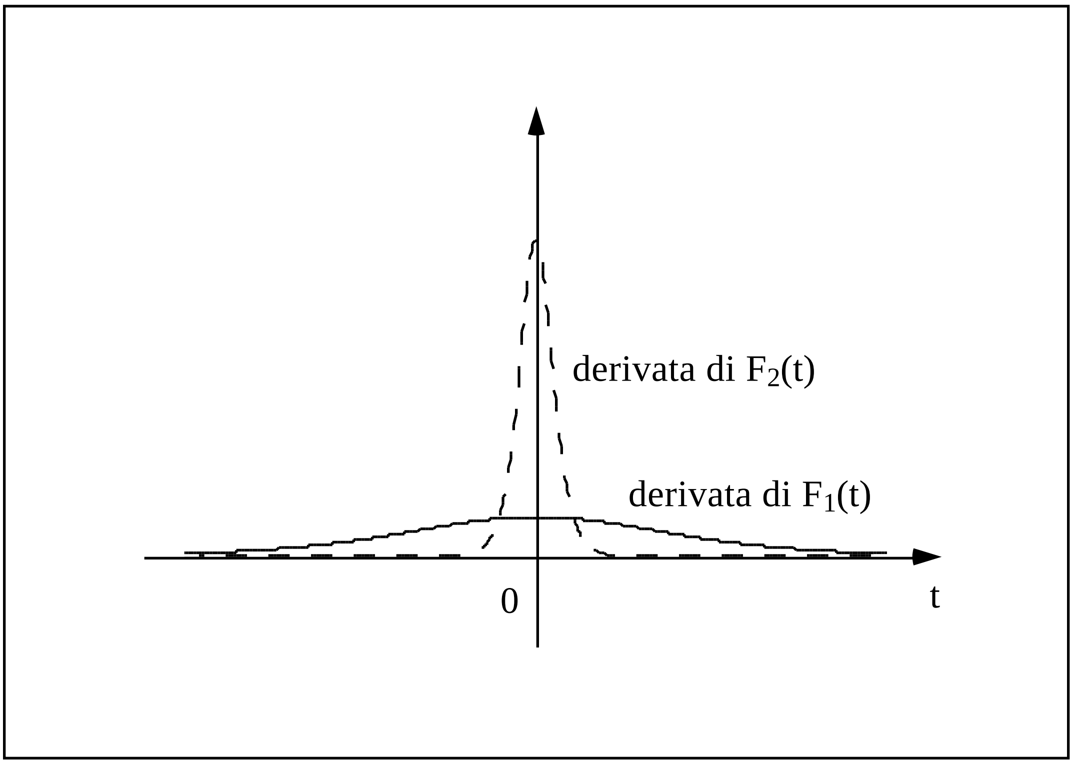


Figura 7.8: la funzione più ripida mostra una derivata più grande.

Ebbene, come è evidente osservando questa figura, la funzione più ripida presenta una derivata più alta in prossimità dell'origine.
Portando al limite questo ragionamento, si può dire che se la funzione presenta un salto in un certo istante, allora la sua derivata diventerà tanto più grande, quanto più la variazione della funzione è brusca. Ciò era esattamente quanto detto a proposito della potenza e dell'energia: l'energia non può essere discontinua, dato che ciò comporterebbe una potenza illimitata nell'istante di salto.
Detto ciò, è chiaro che, non potendo essere discontinua l'energia in un induttore, la corrente non può presentare brusche variazioni e deve variare con continuità.
Se si esamina il caso di un condensatore, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti per il caso dell'induttore, partendo dall'energia immagazzinata

$$U_C(t) = \frac{1}{2} C\, v^2(t) \,,$$

pur di sostituire la tensione alla corrente, si ottiene l'impossibilità di ammettere discontinuità nella tensione ai capi del condensatore.
Riassumendo quanto detto ed immaginando che la manovra dell'interruttore avvenga all'istante generico $t = t_0$, si può parlare del valore che la generica variabile assume in un istante immediatamente precedente ed immediatamente susseguente la manovra dell'interruttore. Ebbene, se si considera la corrente in un induttore o la tensione su un condensatore, dette **variabili di stato**, questi due valori, prima e dopo la commutazione, devono coincidere, non potendo presentare salti bruschi oppure altre discontinuità. In base a queste considerazioni sulle discontinuità è possibile ricavare le condizioni iniziali necessarie a risolvere le equazioni differenziali che descrivono la dinamica di una rete, come si mostrerà nella rimanente parte di questo capitolo. In generale, si considera il regime precedente la commutazione dell'interruttore che dà inizio al transitorio e si calcolano i valori delle correnti negli induttori e delle tensioni sui condensatori. Dopo aver manovrato l'interruttore le correnti negli induttori e le tensioni sui condensatori rimangono inalterate e costituiscono quindi le condizioni di raccordo a cavallo della commutazione.
Nel seguito verranno esaminati alcuni esempi di transitori nelle reti elettriche, per rendere più concrete le considerazioni fatte.

• Soluzione analitica
Si ritorni al semplice esempio accennato in precedenza, schematizzato, nella sua condizione iniziale di funzionamento, in Figura 7.9.

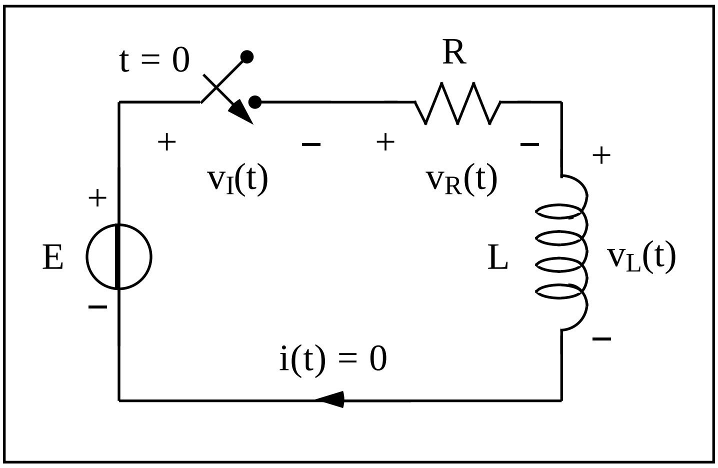


Figura 7.9: circuito con interruttore aperto.

Esso è costituito, come si vede, da un generatore indipendente di tensione di f.e.m. E costante nel tempo, collegato in serie, attraverso l'interruttore ideale, ad un resistore di resistenza R e, quindi, ad un induttore ideale di induttanza L. Nelle condizioni iniziali, cui la Figura 7.9 si riferisce, l'interruttore è aperto, e l'induttore è supposto scarico, privo cioè di energia immagazzinata: ciò implica che

nell’induttore, in queste condizioni, non circola alcuna corrente. La soluzione del circuito in queste condizioni è molto semplice e può essere ottenuta applicando, come sempre, le LK. Dopo aver compiuto le operazioni di rito (e avere quindi introdotto le diverse grandezze del circuito), si applichi subito la LKC, la quale dice semplicemente che esiste un’unica corrente che percorre tutti gli elementi del circuito, poiché essi sono in serie fra loro; aggiungendo, poi, che l’interruttore ideale è in posizione ‘aperto’, ed equivale quindi a un circuito aperto, il valore di questa corrente non può che essere zero. Si conclude, pertanto, che, nelle condizioni indicate, l’intero circuito non è percorso da corrente.
Per quel che riguarda, poi, le tensioni, la LKT, applicata all’unica maglia esistente, è rappresentata dalla seguente equazione, nella quale non è difficile inserire la caratteristica del generatore,

$$E = v_I + v_R + v_L \ .$$

La caratteristica del resistore e dell’induttore richiedono che, essendo costantemente nulla la corrente per $t < 0$, anche le rispettive tensioni lo siano. Dunque, fino a quando l’interruttore è aperto, la LKT si riduce in realtà alle seguenti semplici condizioni:

$$v_R = 0 \ , \quad v_L = 0 \ , \quad v_I = E \ .$$

Ciò significa che tutta la tensione del generatore di tensione si ritrova applicata ai morsetti aperti dell’interruttore ideale e che questa situazione può continuare per tempo indeterminato, fino a quando l’interruttore non verrà chiuso.
Si assuma allora che ad un certo istante, che per comodità verrà indicato con $t = 0$, si faccia scattare il cronometro e venga bruscamente chiuso l’interruttore.

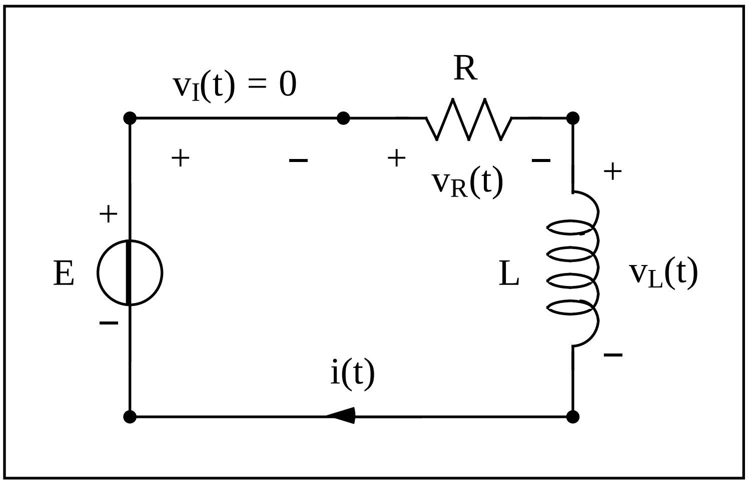


Figura 7.10: l’interruttore è chiuso.

Per comprendere cosa succede, è utile cominciare a rappresentare il circuito nella sua ‘nuova’ condizione, mostrata in Figura 7.10. Questa volta, come si vede, l’interruttore è in posizione ‘chiuso’ ed equivale dunque a un cortocircuito; ne deriva che la tensione applicata ai suoi morsetti non può che essere nulla. Inoltre, essendo l’interruttore chiuso, una corrente diversa da zero può ora circolare nell’intero circuito. Rispetto alla situazione precedente, è cambiato, per la verità, quasi tutto ed è necessario determinare la condizione di funzionamento del circuito dall’istante $t = 0$ in poi, vale a dire per $t \geq 0$.
Scrivendo tutte le equazioni che governano il funzionamento del circuito, vale a dire le LK e le caratteristiche dei bipoli, la LKC stabilisce semplicemente, come già più volte sottolineato, che la stessa corrente i, da determinare istante per istante, circola in tutti i bipoli, poiché questi sono in serie fra loro. La LKT, applicata all’unica maglia esistente, è rappresentata ora, cioè per $t \geq 0$, dalla seguente equazione (si noti l’assenza del termine v_I, che è ora nullo)

$$E = v_R + v_L \ .$$

Non resta, a questo punto, che aggiungere le caratteristiche del resistore e dell’induttore

$$v_R = R\, i \ , \quad v_L = L \frac{di}{dt} \ ,$$

e sostituirle nella relazione precedente, in modo da ricondursi ad un’unica equazione differenziale nella sola corrente

$$E = R\, i + L \frac{di}{dt} \ .$$

Si è giunti così al punto centrale dell’intera questione: risolvere questa equazione differenziale, con la condizione iniziale

$$i(0) = 0 \ .$$

Questa condizione iniziale è stata ricavata secondo le seguenti considerazioni: prima della commutazione dell’interruttore la corrente era nulla; dopo la commutazione la corrente seguirà le dinamiche imposta dall’equazione differenziale; nell’istante della commutazione, tuttavia, la corrente deve mantenersi continua e, pertanto,

$$i(0^-) = i(0^+) = 0 \ .$$

Il limite destro e sinistro sono uguali nell'istante della commutazione dell'interruttore ed allora la corrente dell'induttore è continua.
La soluzione dell'equazione omogenea, come suggerisce l'appendice di questo capitolo, è

$$i_0(t) = K \exp\left(- \frac{R}{L} t\right) ,$$

mentre, essendo il forzamento costante, vale la pena cercare l'integrale particolare come una funzione costante

$$i_p(t) = \text{costante} .$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, risulta immediatamente che

$$i_p(t) = \frac{E}{R} .$$

In definitiva, l'integrale generale è pari a

$$i(t) = i_0(t) + i_p(t) = K \exp\left(- \frac{R}{L} t\right) + \frac{E}{R} ,$$

mentre la costante di integrazione si determina imponendo la condizione iniziale

$$i(0) = 0 = K + \frac{E}{R} \quad \rightarrow \quad K = - \frac{E}{R} .$$

La soluzione del nostro problema, in definitiva, vale

$$i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left(- \frac{R}{L} t\right)\right] ,$$

il cui andamento temporale, detto transitorio di carica dell'induttore, è mostrato in Figura 7.11. Le ascisse di questa figura riportano il tempo normalizzato alla costante di tempo del circuito; le ordinate rappresentano la corrente rapportata al valore dell'integrale particolare.
Per sapere quali saranno i valori di tensioni e correnti in una rete elettrica quando il transitorio sia terminato, supponendo di utilizzare generatori stazionari, vale la pena ricordare che induttori e condensatori si possono sostituire con dei cortocircuiti e dei circuiti aperti, rispettivamente. La corrente che percorre il circuito in esame è, dunque, di nuovo costante e vale

$$i(t) = \frac{E}{R}\,, \quad \text{dopo un tempo sufficientemente lungo.}$$

È ovvio che ‘a regime’ un induttore può essere percorso da una corrente, ma non presenta una tensione ai suoi capi; dualmente, un condensatore può essere sottoposto a tensione, ma non è percorso da corrente.

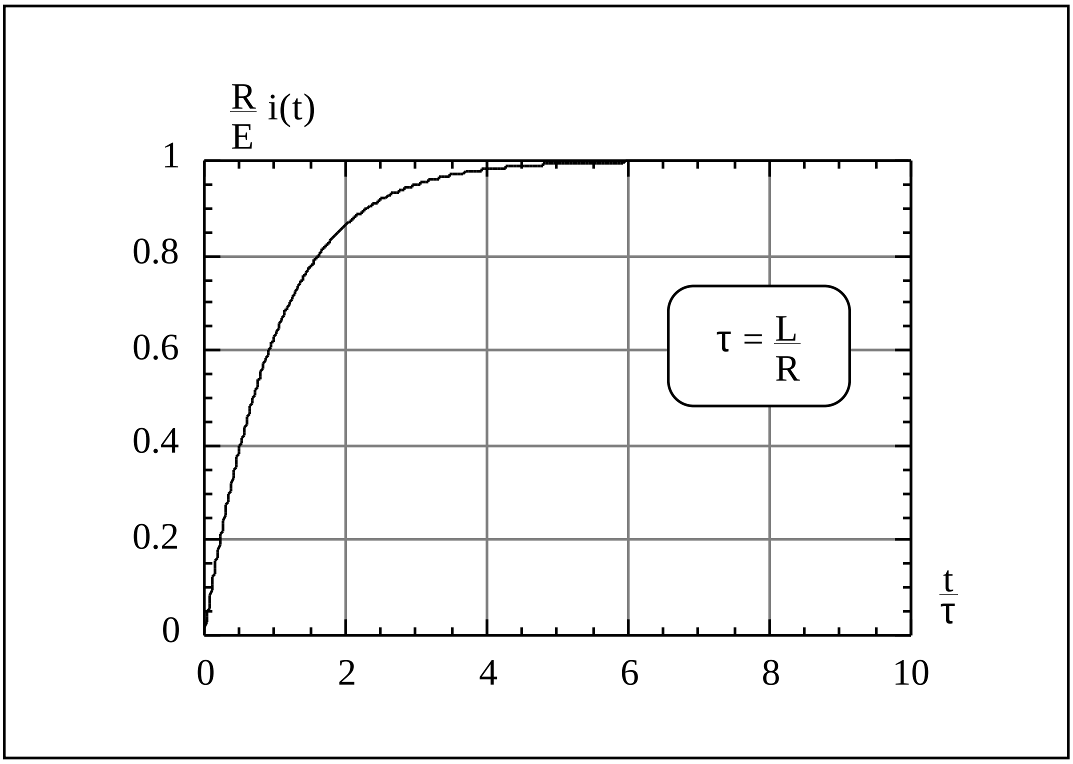


Figura 7.11: andamento temporale della corrente.

Per comprendere sino in fondo quanto si sta tentando di dire, si riconsideri la Figura 7.11. Essa mostra che la corrente raggiunge il valore asintotico in un tempo pari a circa 6 costanti di tempo: allora, se il valore della costante di tempo è piccolo, il circuito raggiunge la nuova situazione stazionaria in poco tempo, altrimenti, cioè per costanti di tempo elevate, ci vuole più tempo a raggiungere il valore finale.

• Soluzione numerica

Si tenti, ora, di capire come sia possibile risolvere un’equazione differenziale in maniera non rigorosa, ma almeno approssimata, che è poi proprio quello che fa Spice (almeno concettualmente). Il trucco è semplice ed è fatto di tanti ‘passi’ successivi e venne estensivamente adoperato da Eulero per la soluzione numerica delle equazioni differenziali che regolano il moto dei pianeti e, per questo motivo, porta il suo nome, essendo conosciuto come metodo di Eulero (diretto).

Per rendere le cose più concrete, si scelga E = 100, R = 10, L = 2; sostituendo questi valori numerici, l'equazione differenziale diventa

$$100 = 10\, i(t) + 2 \frac{di(t)}{dt} ,$$

la quale deve essere verificata in ogni istante successivo alla commutazione dell'interruttore, cioè per $t > 0$.
Il **primo passo** da fare è ricavare il termine contenente la derivata della funzione incognita $i(t)$ dall'equazione, riscrivendo l'equazione differenziale nella forma

$$\frac{di(t)}{dt} = 50 - 10\, i(t) .$$

Il **secondo passo** è ricavare il valore della derivata prima della corrente all'istante $t = 0^+$, sapendo che, per ipotesi, la corrente è nulla, all'istante iniziale

$$\frac{di(0^+)}{dt} = 50 - 10\, i(0) = 50 .$$

Il **terzo passo** richiede di ricordare che la derivata di una qualsiasi funzione può essere calcolata, almeno in modo approssimato, utilizzando il rapporto incrementale

$$\frac{di(t_1)}{dt} \quad \frac{i(t_2) - i(t_1)}{t_2 - t_1} ,$$

purché i due istanti di tempo t_1 e t_2 siano abbastanza vicini l'uno all'altro: quanto più lo sono, tanto più preciso è il valore che si ottiene per la derivata. Notate che non si è usato il simbolo di uguaglianza ma quello ( ) di approssimativamente uguale. Questa espressione può allora essere riscritta in modo da poter calcolare il valore di $i(t_2)$, quando si sia già calcolato il valore della derivata all'istante t_1:

$$i(t_2) \quad i(t_1) + \frac{di(t_1)}{dt} (t_2 - t_1) = i(t_1) + \left[50 - 10\, i(t_1) \right] (t_2 - t_1) .$$

Questa espressione è la vera formula 'magica' che fornisce la soluzione approssimata dell'equazione differenziale, a patto di ripetere i passi illustrati.
Si inizi ad applicare il metodo al nostro esempio, partendo con

$$t_1 = 0 \quad \text{e} \quad t_2 = 0.001 ,$$

continuando, poi, con

$$t_1 = 0.001 \quad \text{e} \quad t_2 = 0.002\ ,$$

e così via. Si ottiene, allora, utilizzando una semplice calcolatrice per fare i conti, che, per $t_1 = 0$ e $t_2 = 0.001$, risulta

$$i(0.001) \quad i(0) + \left[50 - 10\, i(0)\right] (0.001 - 0) = 0.05\ .$$

Ripetendo per $t_1 = 0.001$ e $t_2 = 0.002$, è possibile determinare $i(0.002)$

$$i(0.002) \quad i(0.001) + \left[50 - 10\, i(0.001)\right] (0.002 - 0.001) = 0.09975\ .$$

A questo punto, il metodo per andare avanti ‘passo dopo passo’ nella soluzione dell’equazione dovrebbe essere chiaro. È possibile controllare che, per questo esempio, si ottengono i valori riassunti nella tabella che segue.

t	i(t)
0	0
0.001	0.05000000000000
0.002	0.09975000000000
0.003	0.14925125000000
0.004	0.19850499375000
0.005	0.24751246878125
0.006	0.29627490643734

Riportare in una tabella tutti i dati calcolati sarebbe troppo lungo; conviene organizzare i dati in un grafico. Allora, se si ripete il calcolo per molti altri punti, si giunge alla soluzione riportata in Figura 7.12.
La soluzione che si ottiene non è quella matematica, rigorosa, ma è comunque sufficiente per molti scopi pratici. D’altra parte, la cosa importante è che, con questo metodo, se si vuole migliorare l’approssimazione con cui si desidera la soluzione, basta avvicinare gli istanti in cui campioniamo la soluzione.
Vale la pena ricordare che l’equazione differenziale che si sta esaminando, una volta stabilito che $i(0) = 0$, ammette la soluzione analitica

$$i(t) = 10\left(1 - e^{-5t}\right)\ , \quad \text{per } t \geq 0\ .$$

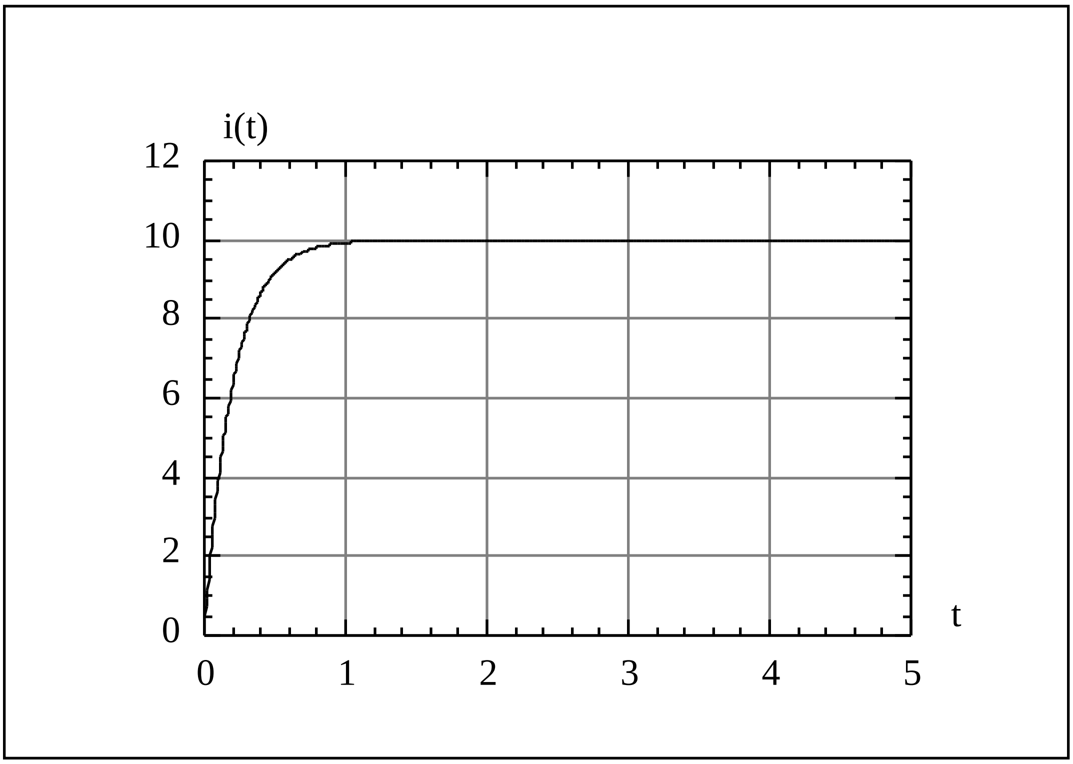


Figura 7.12: andamento temporale della corrente.

Si noti come questa soluzione sia uguale a zero all'istante t = 0 ed al tempo stesso si controlli con cura che il grafico riportato in Figura 7.12 sia corrispondente proprio alla soluzione mostrata.

• **Codifica Spice**

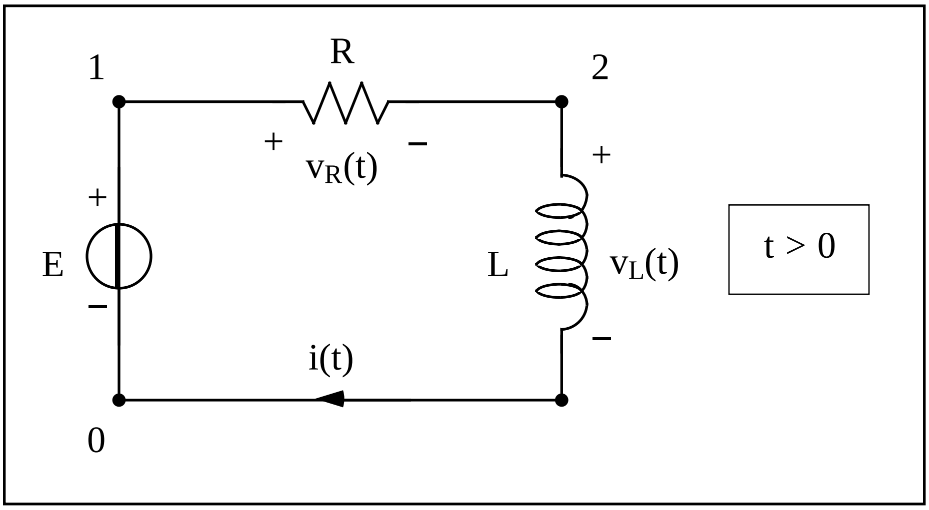


Figura 7.13: carica del circuito RL.

Come al solito, si comincia a numerare i tre nodi della rete, ridisegnata in Figura 7.13 per t > 0, dopo che l'interruttore ha chiuso la maglia e, pertanto, il generatore eroga la tensione continua E. Il listato che segue può essere utilizzato per simulare la rete.

```
Esempio 3
*Carica del circuito RL
VE      1    0    100
R0      1    2    10
L0      2    0    2       IC=0
.TRAN        0.02  2      UIC
.PROBE
.END
```

La terza, la quarta e la quinta riga introducono, rispettivamente il generatore di tensione, il resistore e l'induttore. La quinta, in particolare,

L0 2 0 2 IC=0 ,

che descrive l'induttore, posto tra i nodi 2 e 0, di valore 2 henry, è completata con l'indicazione 'IC=0'; essa sottolinea il fatto che l'induttore, quando l'interruttore commuta, non è attraversato da corrente e, quindi, la condizione iniziale di funzionamento (Initial Condition, in inglese) è nulla. Se l'induttore, all'istante iniziale, fosse stato interessato da una corrente di 2 mA, si sarebbe dovuto porre 'IC=2m'.
La sesta riga avverte il simulatore che è nostra intenzione eseguire un'analisi dinamica della rete, chiedendo di risolvere il transitorio con un passo di 0.02 secondi e fino a 2 secondi. Questo passo è stato scelto basandoci sul valore della costante di tempo pari a

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{2}{10} = 0.2 \ .$$

Un semplice criterio che consenta all'elaboratore di non svolgere troppi calcoli e, al tempo stesso, di fornire risultati attendibili, è di scegliere il passo utile per la soluzione pari a un decimo della costante di tempo. È evidente che quanto più piccolo viene scelto questo passo, tanto più accurata è la soluzione; tuttavia un passo eccessivamente piccolo potrebbe rappresentare una scelta troppo onerosa da portare avanti in un tempo breve: un buon compromesso è quello che è stato indicato precedentemente.
Prima di concludere questo paragrafo, vale la pena risolvere il circuito di Figura 7.14, in cui l'interruttore si chiude all'istante t = 0.

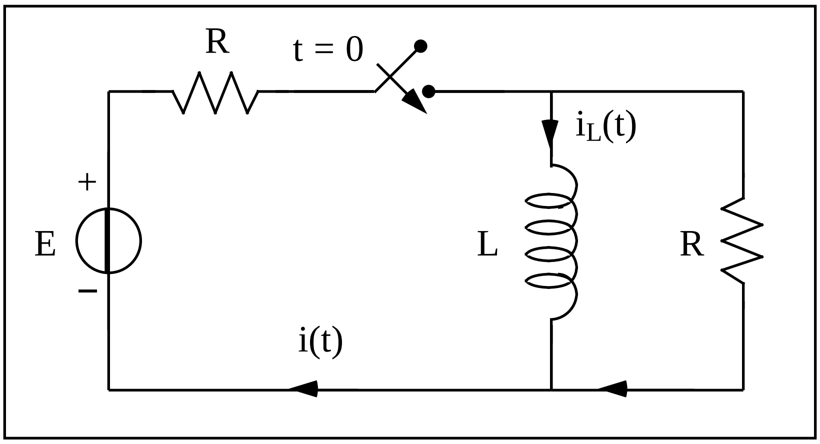


Figura 7.14: altro circuito del primo ordine.

Supponendo la rete a riposo prima della commutazione dell'interruttore, si troverà come andamento per la corrente nell'induttore

$$i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad t \geq 0 ,$$

con la costante di tempo pari a $\tau = 2L/R$.
Infine, risulta evidente che quanto detto per la carica di un induttore possa adattarsi altrettanto bene alla carica di un condensatore, nel qual caso la variabile di stato è rappresentata dalla tensione ai capi del condensatore.

7.3 Risposta al gradino del circuito RLC

Continuando nello studio dei transitori, è interessante considerare esempi più complicati. In particolare, vale la pena esaminare il circuito RLC forzato con un generatore di tensione a gradino, rappresentato in Figura 7.15, un esempio interessante per molte applicazioni.

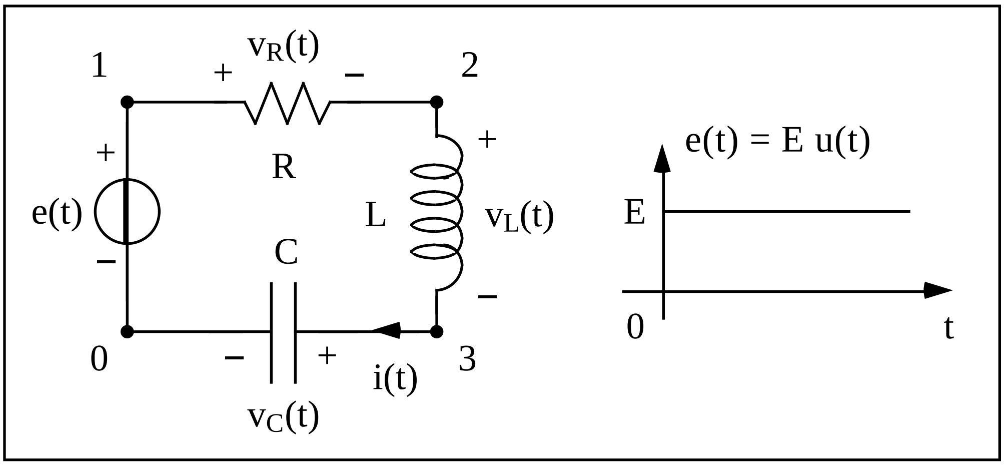


Figura 7.15: circuito RLC forzato con un gradino di tensione.

La funzione di Heaviside, detta anche gradino unitario, è definita come

$$u(t) = \begin{cases} 1\ , & \text{per } t > 0\ , \\ 0\ , & \text{per } t < 0\ , \end{cases}$$

non essendo assegnato il suo valore in zero. Ora, adoperando questa funzione, non è difficile scrivere che il generatore di tensione impone una tensione pari a

$$e(t) = E\ u(t) = \begin{cases} E\ , & \text{per } t > 0\ , \\ 0\ , & \text{per } t < 0\ . \end{cases}$$

Dato che la rete è a riposo per $t < 0$, si assume che sia la corrente dell'induttore $i(t)$, sia la tensione sul condensatore $v_C(t)$ siano nulle; le due condizioni iniziali sono, quindi,

$$i(0) = 0\ , \quad v_C(0) = 0\ .$$

Si passa, poi, a scrivere l'equazione differenziale che regola la tensione ai capi del condensatore; ragionamenti analoghi, tuttavia, potrebbero farsi per la corrente nell'induttore. Applicando la LKT alla maglia, per $t > 0$, risulta

$$- E + v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0\ .$$

È interessante notare che, invece della funzione $e(t)$, si è sostituito già il valore che questa tensione assume dopo la commutazione, vale a dire E. Inoltre, essendo la corrente legata alla tensione sul condensatore dalla relazione

$$i(t) = C\ \frac{dv_C(t)}{dt}\ ,$$

utilizzando le caratteristiche dei diversi bipoli, è possibile scrivere

$$v_R(t) = R\ i(t) = RC\ \frac{dv_C(t)}{dt}\ , \quad v_L(t) = L\ \frac{di(t)}{dt} = LC\ \frac{d^2v_C(t)}{dt^2}\ .$$

Sostituendo nella LKT, risulta

$$LC\ \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC\ \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = E\ ,$$

che si può anche scrivere nella forma equivalente

$$\frac{d^2}{dt^2} v_C(t) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt} v_C(t) + \frac{v_C(t)}{LC} = \frac{E}{LC} \ .$$

Questa equazione differenziale, che descrive la dinamica della tensione ai capi del condensatore per t > 0, è di secondo ordine, come era prevedibile, vista la presenza nel circuito di due elementi a memoria, il condensatore e l'induttore. Prima di risolverla, tuttavia, bisogna determinare le condizioni iniziali che rendono possibile il calcolo delle costanti di integrazione. È già noto che le due variabili di stato sono nulle per t = 0; a ciò si aggiunga che, poiché, come si è già avuto modo di dire,

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \ ,$$

deve anche essere

$$i(0^+) = 0 = C \frac{dv_C(0^+)}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_C(0^+)}{dt} = 0 \ .$$

Pertanto, il problema di Cauchy da risolvere è

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dv_C(t)}{dt} + \dfrac{v_C(t)}{LC} = \dfrac{E}{LC} \ , \\ v_C(0) = 0 \ , \quad \dfrac{dv_C(0^+)}{dt} = 0 \ . \end{cases}$$

L'integrale particolare, essendo il forzamento costante, può essere senza dubbio cercato tra le funzioni costanti, per cui

$$v_{Cp}(t) = E \ .$$

D'altra parte, a transitorio estinto, è evidente che tutta la tensione fornita dal generatore si ritrovi ai capi del condensatore, che, a regime, si comporta proprio come un circuito aperto.
Per la determinazione, invece, dell'integrale generale dell'equazione omogenea, è necessario risolvere l'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \ ,$$

che può avere due soluzioni reali oppure complesse a seconda che

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} \geq 0 \ , \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0 \ .$$

Si distinguano questi due casi, cominciando dal primo, e, per rendere le cose più concrete, verranno utilizzati i seguenti valori numerici per i diversi parametri:

$$R = 4 \ , \quad L = 1 \text{ mH} \ , \quad C = 1/3 \text{ mF} \ , \quad E = 2 \ .$$

In questo caso, l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 4 \quad 10^3 \lambda + 3 \quad 10^6 = 0$$

ammette le due radici reali e distinte

$$\lambda_1 = - 1000 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = - 3000 \ .$$

Pertanto, l'integrale generale vale

$$v_C(t) = 2 + K_1 \, e^{-1000t} + K_2 \, e^{-3000t} \ ,$$

laddove le due costanti di integrazione, per soddisfare le condizioni iniziali, devono verificare il sistema

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = - 2 \ , \\ K_1 + 3 \, K_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Da ciò discende che la tensione ai capi del condensatore vale

$$v_C(t) = 2 - 3 \, e^{-1000t} + e^{-3000t} \ .$$

È possibile controllare il risultato analitico ottenuto, simulando con Spice il circuito.

```
Esempio 4
*Circuito RLC (caso non oscillante)
R0      1      2      4
L0      2      3      1m         IC=0
```

```
C0      3    0    333u      IC=0
VE      1    0    2
.TRAN        5u        6m      UIC
.PROBE
.END
```

Il risultato della simulazione è riportato in Figura 7.16. Vale la pena notare subito due cose: la scala dei tempi è in millisecondi e la tensione si avvicina, al crescere del tempo, in maniera monotona al valore di regime di 2 volt. Inoltre, si osservi il flesso a tangente orizzontale presente nell'origine dei tempi; esso discende dalle condizioni iniziali imposte. Come viene indicato nella stessa figura, questo è un comportamento tipico ogni qual volta si verifica la disuguaglianza

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \; .$$

Si provi a ritrovare quanto detto nel caso $R = 2\sqrt{L/C}$, che non presenta alcuna difficoltà aggiuntiva rispetto a quanto finora detto: ciò che interessa sottolineare è che, per alcuni valori dei parametri della rete, l'andamento della tensione può essere non oscillante.

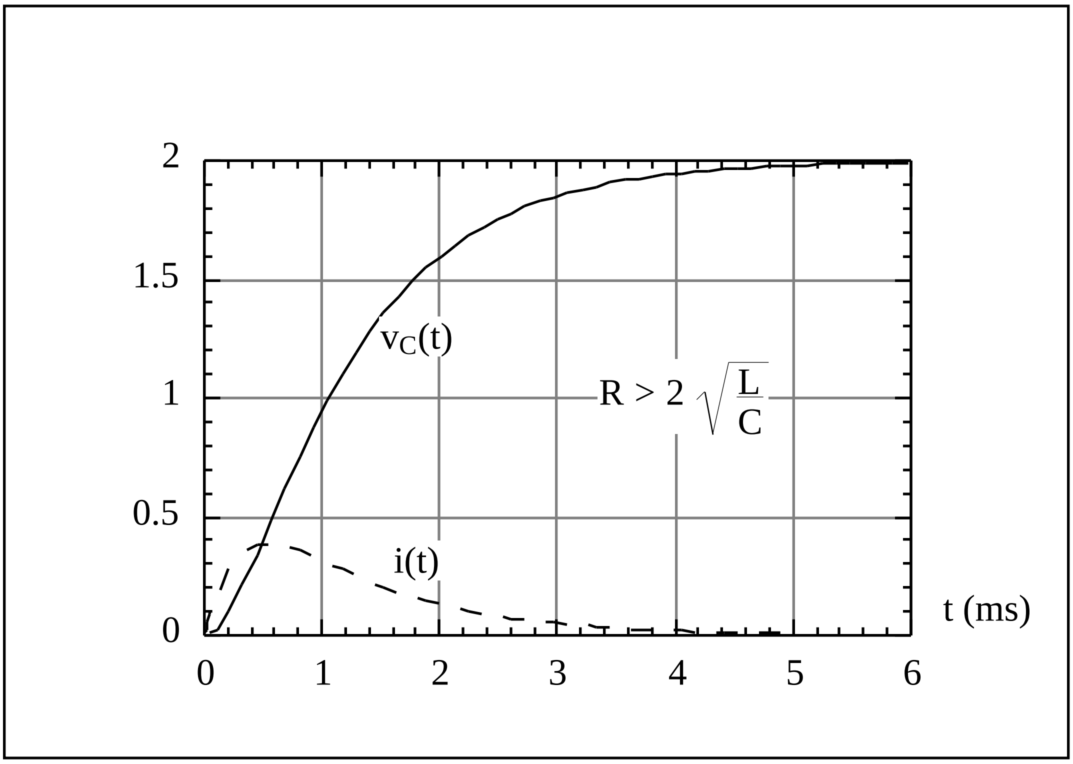


Figura 7.16: andamento temporale della tensione sul condensatore.

Si consideri, poi, il secondo caso $R < 2\sqrt{L/C}$, scegliendo i valori

$$R = 4 \,,\quad L = 1 \text{ mH} \,,\quad C = 1/20 \text{ mF} \,,\quad E = 2 \,,$$

in cui si è, rispetto al caso precedente, semplicemente ridotto il valore della capacità, lasciando inalterati gli altri parametri. L'equazione caratteristica ammette le due soluzioni complesse e coniugate

$$\lambda_1 = - 2000 + 4000 \, j \quad e \quad \lambda_2 = - 2000 - 4000 \, j \,.$$

Pertanto, l'integrale generale, una volta imposte le condizioni iniziali, sarà pari a

$$v_C(t) = 2 - 2 \, e^{-2000t} \left[\cos(4000t) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4000t) \right] .$$

L'andamento della tensione può diventare oscillante, come mostrato in Figura 7.17, essendo descritto da una funzione che, mentre oscilla attorno al valore di 2 volt, si smorza 'su esso' sempre più al crescere del tempo. Si noti pure come, nell'intervallo (0 ÷ 3) ms, la tensione sul condensatore superi il valore di 2 volt, valore che assumerà quando il transitorio sarà concluso: proprio queste oscillazioni, superando i valori attesi di regime, creano quelle sovratensioni (un discorso analogo vale, comunque, per le correnti) che durante il transitorio, provocato dalla chiusura o dalla apertura di un interruttore, possono danneggiare alcuni componenti del circuito, mostrando l'importanza dello studio delle reti in regime dinamico.

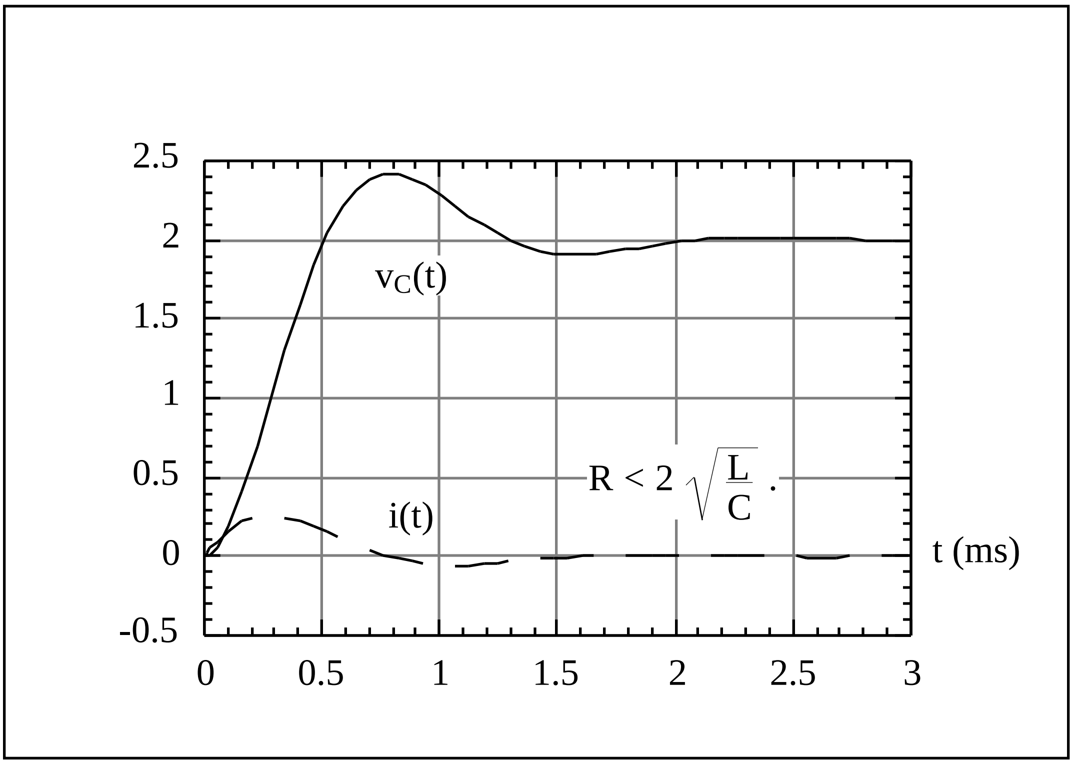


Figura 7.17: andamento temporale oscillante della tensione sul condensatore.

```
Esempio 5
*Circuito RLC (caso oscillante)
R0      1     2     4
L0      2     3     1m        IC=0
C0      3     0     0.05m     IC=0
VE      1     0     2
.TRAN         5u       3m     UIC
.PROBE
.END
```

È importante ricordare che, a differenza del caso precedente, se si è per $R < 2\sqrt{L/C}$, le grandezze del circuito tendono ai valori di regime in maniera oscillante.
Infine, per continuare a riflettere su queste cose, si tenti di a risolvere il circuito RLC parallelo, in cui, questa volta, il circuito si suppone forzato a un generatore di corrente ed i tre bipoli passivi, resistore, induttore e condensatore, sono posti in parallelo. Ebbene, discutendo con cura i vari casi, è possibile giungere a delle conclusioni molto simili alle precedenti.

7.4 Altri esempi

Dopo aver studiato l'esempio 'canonico' del circuito RLC, allo scopo di meglio mettere a fuoco le tecniche, per i circuiti del primo e del secondo ordine, si riportano altri esempi, discutendo i quali verranno introdotti anche altri tipi di generatori simulabili con Spice.

• Circuito del primo ordine
Si inizi con la rete mostrata in Figura 7.18, supposta a riposo per $t < 0$, e si voglia determinare la tensione $v_L(t)$ ai capi dell'induttore, orientata secondo la convenzione standard. Si assuma $R = 1$, $L = 1$ mH, $T = 4$ ms, $I = 2$.

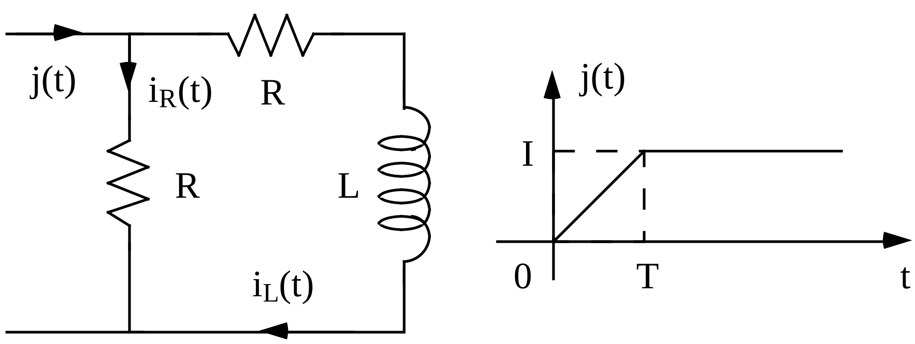


Figura 7.18: circuito forzato con un gradino non istantaneo.

Partendo dalla rappresentazione della corrente del generatore, i dati che è possibile desumere dalla forma d'onda assegnata consentono di rappresentarla nella forma analitica

$$j(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } t < 0\,, \\ \dfrac{I}{T}\,t\,, & \text{per } 0 \le t < T\,, \\ I\,, & \text{per } t \ge T\,. \end{cases}$$

Inoltre, dato che la rete è a riposo per $t < 0$, si può assumere che la variabile che descrive lo stato della rete, cioè la corrente che passa attraverso l'induttore, parta da una condizione iniziale nulla, vale a dire

$$i_L(0) = 0\,.$$

Pur avendo ben presente il fatto che si richiede la tensione ai capi dell'induttore, si è deciso di determinare prima la corrente; poi, per mezzo della relazione costitutiva del bipolo, si potrà ottenere la tensione. Pertanto, per $t > 0$, prima o dopo l'istante T, la rete può essere descritta dal seguente modello matematico:

$$\begin{cases} j = i_L + i_R\,, \\ L\,\dfrac{di_L}{dt} + R\,i_L = R\,i_R\,. \end{cases}$$

Eliminando dal precedente sistema la corrente $i_R(t)$, non è difficile arrivare all'unica equazione differenziale nella corrente $i_L(t)$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{j}{2\tau}\,,$$

laddove $\tau = L/(2R) = 500\ \mu s$ rappresenta la costante di tempo del circuito. La soluzione dell'omogenea, che non dipende dal forzamento, vale

$$i_L(t) = K\,e^{-t/\tau}$$

e va aggiunto ad essa un integrale particolare che dipende dall'intervallo temporale che si sta considerando, cioè se si è prima o dopo l'istante T. In tal modo il problema di Cauchy relativo al primo intervallo può scriversi come

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{i_L}{\tau} = \dfrac{I}{2T}\dfrac{t}{\tau} \quad (0 < t < T)\ , \\ i_L(0) = 0\ . \end{cases}$$

Volendo trovare un integrale particolare di questo problema, essendo il forzamento un polinomio di primo grado in t, è opportuno cercare tra le funzioni

$$i_{Lp}(t) = A\ t + B\ .$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, bisogna imporre che

$$A + \frac{A\ t + B}{\tau} = \frac{I}{2T}\frac{t}{\tau}\ .$$

Ora, invocando il principio di identità dei polinomi, risulta

$$\begin{cases} A + \dfrac{B}{\tau} = 0\ , \\ A = \dfrac{I}{2T}\ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} B = -\ A\ \tau = -\ \dfrac{I\tau}{2T}\ , \\ A = \dfrac{I}{2T}\ . \end{cases}$$

Riassumendo, nel primo tratto deve essere

$$i_{Lp}(t) = \frac{I}{2}\frac{t}{T} - \frac{I\tau}{2T} = \frac{I\tau}{2T}\left(\frac{t}{\tau} - 1\right),$$

ovvero l'integrale generale

$$i_L(t) = K\ e^{-t/\tau} + \frac{I\tau}{2T}\left(\frac{t}{\tau} - 1\right).$$

Imponendo la condizione iniziale di nullo della corrente, si ha che

$$i_L(t) = \frac{I\tau}{2T}\left(e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1\right),$$

cui corrisponde la tensione

$$v_L(t) = \frac{LI}{2T}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) .$$

Nell'intervallo successivo t ≥ T, il problema di Cauchy diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{i_L}{\tau} = \dfrac{I}{2\tau} \quad (t > T) , \\ i_L(T) = \dfrac{I\tau}{2T}\left(e^{-T/\tau} + \dfrac{T}{\tau} - 1\right) . \end{cases}$$

Il nuovo integrale particolare, essendo cambiato il forzamento della rete, è questa volta più semplice dato che si può cercare tra le funzioni costanti

$$i_{Lp}(t) = D .$$

La costante D si trova imponendo che l'integrale particolare sia soluzione della nostra equazione differenziale e, pertanto, deve valere

$$D = \frac{I}{2} .$$

L'integrale generale assumerà pertanto la forma funzionale

$$i_L(t) = \tilde{K}\, e^{-t/\tau} + \frac{I}{2} ,$$

in cui la nuova costante di integrazione $\tilde{K}$ va trovata imponendo la continuità della corrente nell'istante T, ovvero

$$i_L(T) = \tilde{K}\, e^{-T/\tau} + \frac{I}{2} \quad \rightarrow \quad \tilde{K} = \left[i_L(T) - \frac{I}{2}\right] e^{T/\tau} .$$

Riassumendo, il nuovo tratto di soluzione è

$$i_L(t) = \left[i_L(T) - \frac{I}{2}\right] e^{-(t-T)/\tau} + \frac{I}{2} , \quad \text{per } t \geq T ,$$

che comporta una tensione pari a

$$v_L(t) = \frac{L}{\tau}\left[\frac{I}{2} - i_L(T)\right] e^{-(t-T)/\tau} = \frac{LI}{2T}\left(1 - e^{-T/\tau}\right) e^{-(t-T)/\tau} = \frac{1 - e^{-T/\tau}}{4}\, e^{-(t-T)/\tau} , \quad \text{per } t > T .$$

In definitiva, posto

$$v_0 = \frac{LI}{2T} = \frac{1}{4} ,$$

la tensione ai capi dell'induttore risulta pari a

$$\frac{v_L(t)}{v_0} = \begin{cases} 0 , & \text{per } t < 0 , \\ 1 - e^{-t/\tau} , & \text{per } 0 \leq t < T , \\ \left(1 - e^{-T/\tau}\right) e^{-(t-T)/\tau} , & \text{per } t \geq T , \end{cases}$$

e la Figura 7.19 la mostra in ogni suo tratto.
A ben guardare sembra proprio un'onda quadra; il circuito assegnato è in grado di trasformare la forma d'onda della corrente in ingresso in una che tende a diventare sempre più 'discontinua' negli istante 0 e T. In tal modo, la tensione ai capi dell'induttore approssima un'onda quadra. È evidente che per realizzare ciò deve accadere che la costante di tempo del circuito τ sia sufficientemente minore dell'intervallo T.

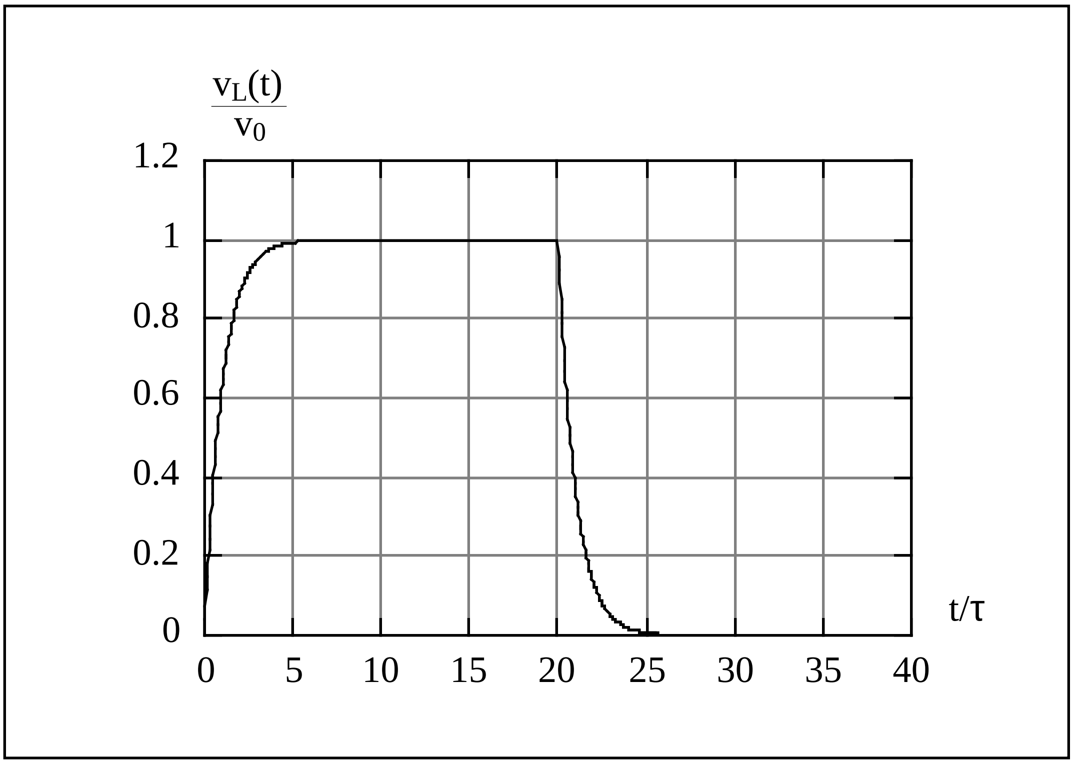


Figura 7.19: andamento temporale della tensione ai capi dell'induttore.

• Circuito del secondo ordine
Si passi, ora, alla rete mostrata in Figura 7.20, supposta a riposo per $t < 0$. Si vuole determinare l'andamento della tensione ai capi del condensatore. Si assuma $j(t) = J\, u(t)$, $J = 2$ mA, $R = 2$, $L = 1$ mH, $C = 1$ mF.

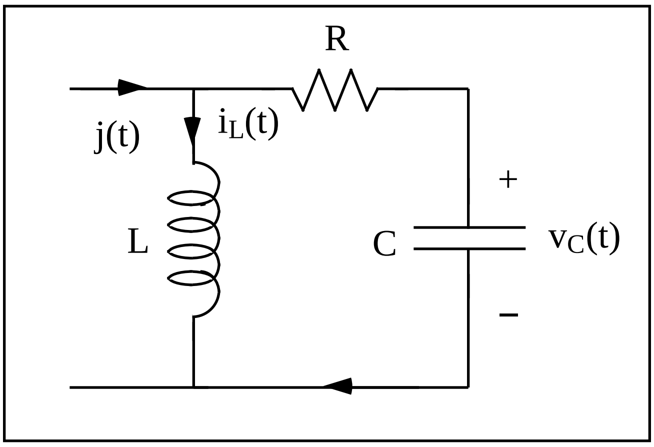


Figura 7.20: circuito del secondo ordine.

La prima cosa da fare è cominciare a costruire il modello matematico della rete assegnata applicando le LK

$$\begin{cases} i_L + C\dfrac{dv_C}{dt} = j & \text{[equazione al nodo] ,} \\ L\dfrac{di_L}{dt} = RC\dfrac{dv_C}{dt} + v_C & \text{[equazione alla maglia] .} \end{cases}$$

Ricavando dalla prima equazione la corrente dell'induttore e sostituendo nella seconda, si ottiene l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{1}{C}\frac{dj}{dt} = 0 \ .$$

Per stabilire il carattere della soluzione omogenea, è sufficiente studiare l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \ ,$$

la quale, essendo

$$\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} = 4\ 10^6 - 4\ 10^6 = 0 \ ,$$

avrà due radici reali e coincidenti pari a

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\tau} ,$$

laddove con $\tau = 1$ ms si è indicato la costante di tempo del circuito. Pertanto la più generale soluzione dell'equazione omogenea è del tipo

$$v_{C0}(t) = \left(K_1 + K_2\, t\right) e^{-t/\tau} .$$

La nostra rete, alimentata dal generatore

$$j(t) = J\, u(t) ,$$

è a riposo per $t < 0$; allora deve essere

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0 , \qquad i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0 ,$$

per la continuità delle variabili di stato. Dal sistema di equazioni (LK), si ottiene

$$\frac{dv_C(0^+)}{dt} = \frac{j(0^+) - i_L(0^+)}{C} = \frac{J}{C} = 2 .$$

Riassumendo, il problema di Cauchy che bisogna risolvere per determinare la risposta al gradino è

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v_C}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{v_C}{LC} = 0 \quad (t > 0) , \\ v_C(0) = 0 , \quad \dfrac{dv_C(0^+)}{dt} = \dfrac{J}{C} . \end{cases}$$

Disponendo già della soluzione dell'equazione omogenea (che coincide con la soluzione generale per), bisogna determinare soltanto le due costanti di integrazione. Imponendo le due condizioni iniziali, si può scrivere il semplice sistema

$$K_1 = 0 , \quad K_2 = \frac{J}{C} ,$$

che implica la soluzione

$$v_C(t) = \frac{J}{C}\, t\, e^{-t/\tau}\, u(t) = 2\, t\, e^{-t/\tau}\, u(t) .$$

• Forzamento periodico

Si consideri il circuito disegnato in Figura 7.21.

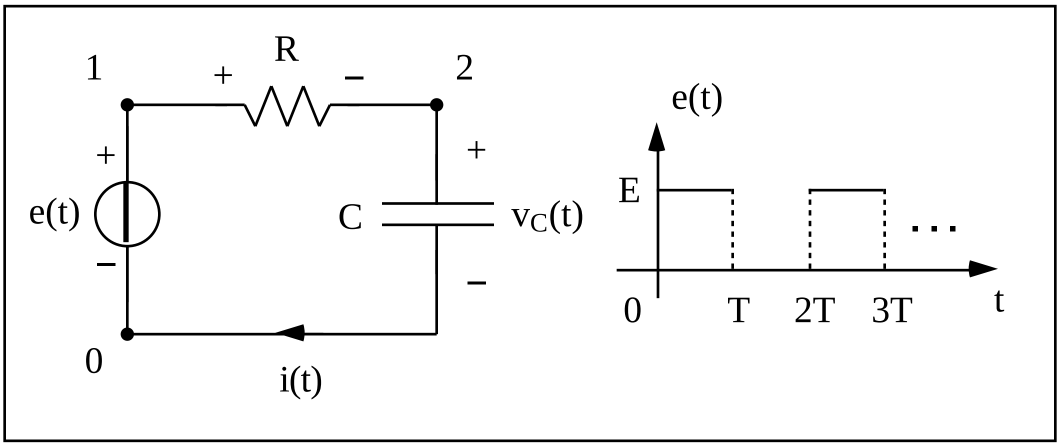


Figura 7.21: circuito RC con forzamento a onda quadra.

Si tratta di un circuito RC forzato con una tensione a forma di ‘onda quadra’, un tipo di generatore molto diffuso nella pratica tecnica e che, spesso, si avrà modo di incontrare nel prosieguo degli studi. Per $t < 0$, la tensione è nulla; per $t > 0$, la tensione è rappresentata da una funzione che si ripete periodicamente assumendo il valore ‘E’ nell’intervallo $0 < t < T$, il valore ‘0’ nell’intervallo $T < t < 2T$, poi di nuovo ‘E’ nell’intervallo $2T < t < 3T$, e così via fino all’infinito.

Il listato che di qui a poco sarà commentato mostra come il circuito si possa simulare per mezzo di Spice, nel caso in cui il periodo di ripetizione dell’onda quadra è cinque volte più grande della costante di tempo del circuito, cioè $T = 10$ ms $> RC = 2$ ms, avendo scelto $R = 2$ kΩ e $C = 1$ μF.

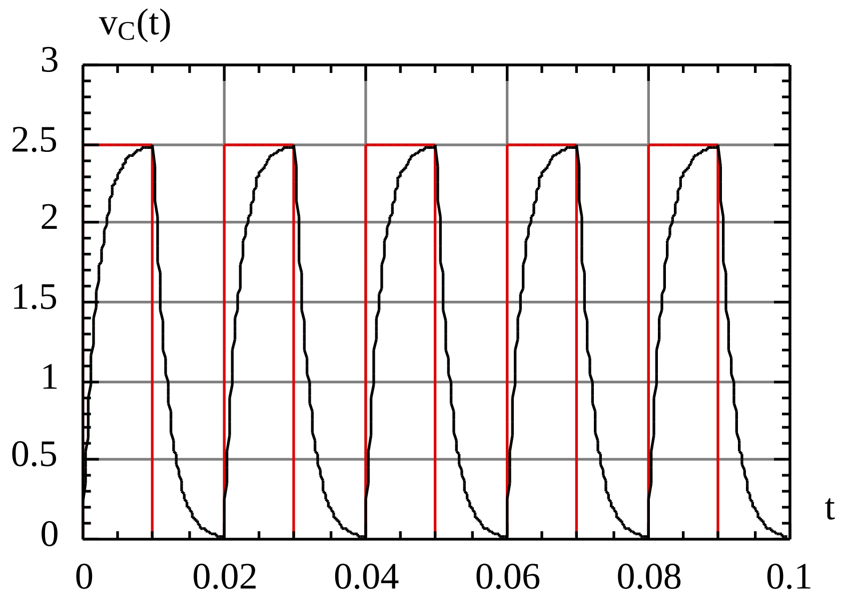


Figura 7.22: carica e scarica periodica in un circuito RC.

```
Esempio 6
*Circuito RC con forzamento a onda quadra
R0     1    2    2k
C0     2    0    1u
VE     1    0    PULSE(0  2.5  0  1n  1n  10m  20m)
.TRAN       0.1m      100m
.PROBE
.END
```

La tensione sul condensatore, come mostrato in Figura 7.22, nel primo periodo si carica, tendendo al valore E = 2.5 che praticamente raggiunge; nel secondo periodo si scarica ritornando a zero. Questa operazione di carica e scarica si ripete ogni volta che la tensione del generatore commuta alla tensione ‘E’ e da questa a ‘0’.
L’istruzione nuova è quella che introduce il generatore di tensione

VE 1 0 PULSE(0 2.5 0 1n 1n 10m 20m) ,

in cui, tenendo sottocchio la Figura 7.23, il primo valore dopo la parola chiave ‘PULSE’ è 0 e rappresenta il valore iniziale ‘V1’, 2.5 quello di picco ‘V2’, il terzo valore impone che ‘TD = 0’; il terzo e quarto campo scelgono, rispettivamente, i valori di ‘TR = 1n’, il tempo di salita, e di ‘TF = 1n’, il tempo di discesa. Infine, ‘PW = 10m’ rappresenta il tempo in cui la tensione si mantiene costante al valore V2, e ‘T = 40m’ è il periodo totale.

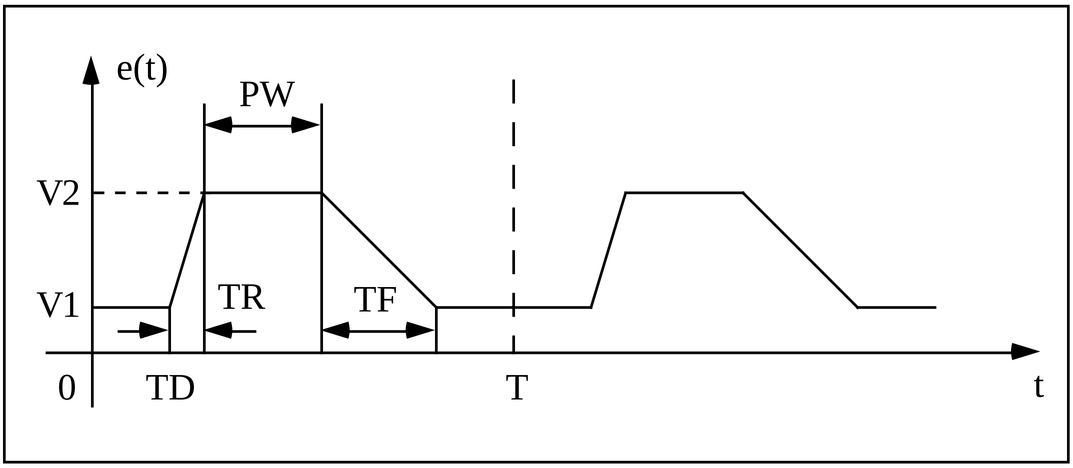


Figura 7.23: impulso periodico.

Si noti che, utilizzando ‘1n’ per il tempo di salita ed ‘1n’ per quello di discesa, praticamente si ottiene un’onda quadra ‘perfetta’, per i tempi in gioco nell’esempio in esame.

```
Esempio 7
*Circuito RC con generatore a onda quadra
R0    1    2    2k
C0    2    0    1u
VE    1    0    PULSE(0 2.5 0 1n 1n 0.4m 0.8m)
.TRAN      0.01m     10m
.PROBE
.END
```

Nel caso riportato in Figura 7.24, per il quale T = 0.4 ms < RC = 2 ms, in ciascun periodo la tensione sul condensatore non ‘ha il tempo’ per caricarsi o scaricarsi e, pertanto, abbozza solo un debole salita verso ‘E’ oppure una incerta discesa verso ‘0’. Il risultato è che l’andamento temporale risulta completamente diverso da quello mostrato in precedenza e, dopo un certo tempo, la tensione sembra ‘oscillare’, in maniera più o meno lineare, tra due valori intermedi compresi tra ‘0’ ed ‘E’.

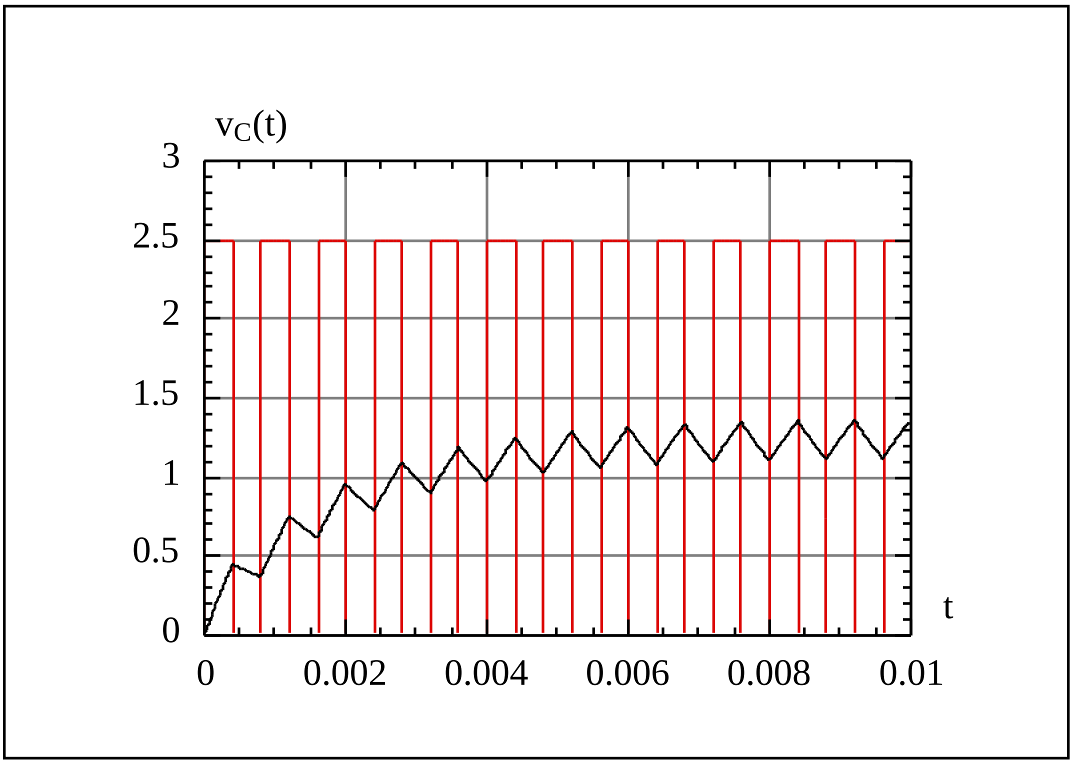


Figura 7.24: carica e scarica periodica in un circuito RC.

Non è possibile riportare tutti i tipi di forme d'onda che Spice consente di trattare: si rimanda a manuali specifici per le altre forme d'onda. Tuttavia, se sono stati ben assimilati i semplici esempi riportati, si hanno a disposizione tutti gli elementi per risolvere qualsiasi transitorio si presenterà nella pratica professionale.

7.5 Transitori in circuiti con generatori controllati

Si passi, ora, ad esaminare la rete mostrata in Figura 7.25: un condensatore carico alla tensione $v(0) = v_0$, si scarica su due resistori posti in parallelo R_1 e R_2 in presenza di un generatore di tensione controllato in corrente.
Nella rete assegnata è presente un generatore di tensione controllato in corrente (α ha le dimensioni di una resistenza) ed il condensatore è stato caricato, non interessa come, ad un valore di tensione non nulla. Assumendo le convenzioni per le tensioni e per le correnti mostrate in Figura 7.25, le leggi di Kirchhoff e le relazioni caratteristiche dei diversi bipoli impongono che

$$\begin{cases} i = - C \dfrac{dv}{dt} , \\ v = \alpha\, i_1 - R_1\, i_1 = (\alpha - R_1)\, i_1 , \\ i_1 = - i \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} . \end{cases}$$

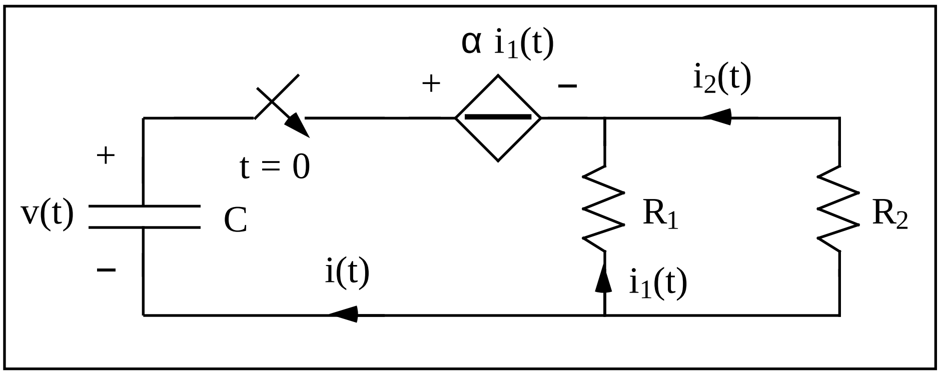


Figura 7.25: transitorio in un circuito con generatore controllato.

Eliminando dal precedente sistema le due correnti, non è difficile ottenere l'equazione differenziale che regola l'andamento della tensione

$$\frac{v}{\alpha - R_1} = C \frac{dv}{dt} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \,, \quad \text{con } \tau = CR_2 \frac{R_1 - \alpha}{R_1 + R_2} \,.$$

Pertanto, il problema della ricerca della tensione ai capi del condensatore si può riassumere nel seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{\tau} = 0 \,, \\ v(0) = v_0 \quad \text{per } t > 0 \,. \end{cases}$$

Il fatto che la costante di tempo

$$\tau = CR_2 \frac{R_1 - \alpha}{R_1 + R_2}$$

possa diventare negativa comporta che la tensione in esame, al trascorrere del tempo, possa aumentare. Basta una rapida occhiata a questa costante di tempo per convincersi che essa è positiva per $R_1 > \alpha$ ed è negativa per $R_1 < \alpha$. Tutti i transitori finora sviluppati hanno mostrato a dinamiche convergenti (a zero, verso un certo valore) e dinamiche 'esplosive' spaventano non poco. La realtà è che nessun circuito può produrre indefinitamente tali dinamiche dato che, prima o poi, interverranno dei fenomeni di saturazione, tipici di ciascun componente: quando le tensioni e le correnti diventano troppo elevate, il funzionamento dei componenti non è più lineare e diventano importanti effetti non lineari che arrestano la crescita esponenziale.
La soluzione del precedente problema di Cauchy vale

$$v(t) = v_0 \, e^{-t/\tau} \,, \quad \text{per } t > 0 \,,$$

e rappresenta una funzione esponenziale smorzata se τ è positivo, un'esponenziale 'che esplode' per valori negativi di τ. In altri termini,

se $R_1 > \alpha$, allora $\tau > 0$ e la dinamica è del tipo smorzato;

se $R_1 < \alpha$, allora $\tau < 0$ e la dinamica è del tipo esplodente.

La Figura 7.26 che segue mostra alcune dinamiche della tensione v(t) per valori, positivi e negativi, della costante di tempo. Si noti come, per valori positivi, l'evoluzione temporale della tensione sia sempre più 'a corto raggio', quanto più la costante di tempo è piccola. Ciò lascia intuire, tra le altre cose, che, quando $\tau = 0$, la tensione ai capi del condensatore potrebbe non essere più continua nell'istante di commutazione, esibendo un gradino nell'istante iniziale.

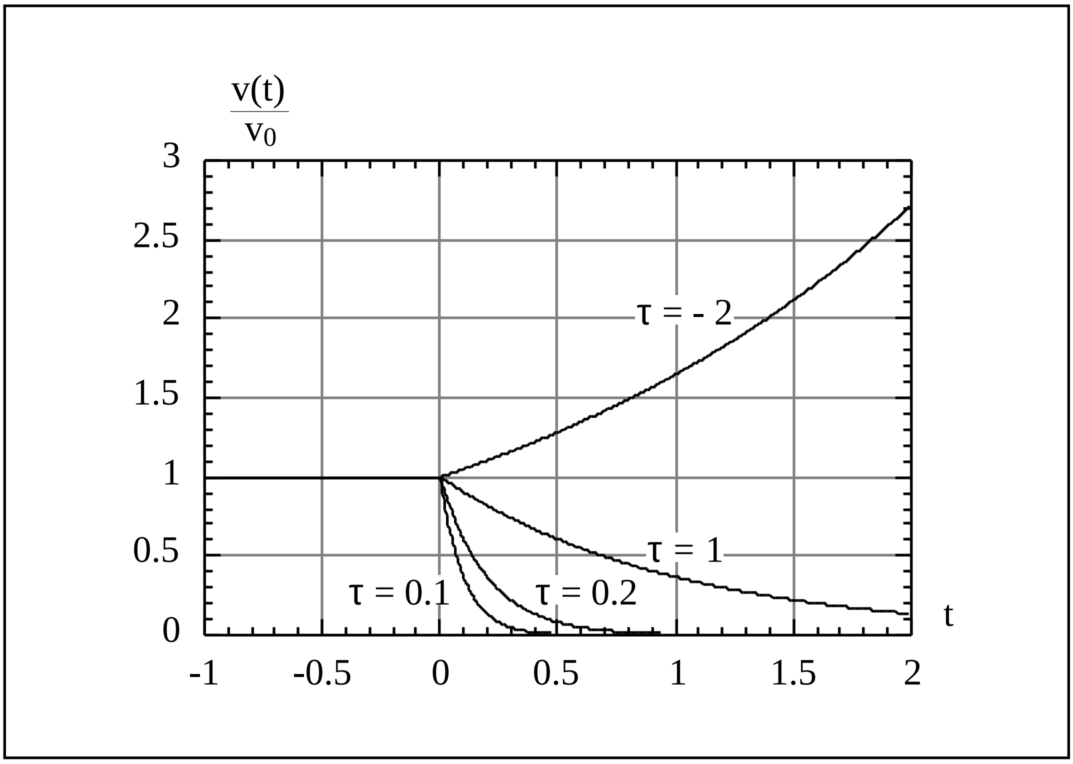


Figura 7.26: dinamiche in un circuito con generatore controllato.

Si osservi ancora dalla Figura 7.26 come, per $t < 0$, la tensione si mantenga costante al valore v_0 e che, non appena l'interruttore collega il condensatore al resto del circuito, comincia il transitorio che, dopo qualche costante di tempo, fa evolvere rapidamente la tensione verso valori molto elevati, oppure rende praticamente nulla la tensione. Il fatto che la tensione possa crescere col passare del tempo non deve turbare più di tanto: se la tensione cresce, vuol dire che nella rete deve essere presente una sorgente di energia da qualche parte. Questa sorgente è certamente il generatore controllato dato che i generatori pilotati sono **dispositivi attivi**.

Per a convincersi fino in fondo delle dinamiche mostrate, si studino con Spice per i due seguenti casi:

$v_0 = 10$, $R_1 = R_2 = 1$, $C = 4$ mF, $\alpha = 0.5$;
$v_0 = 10$, $R_1 = R_2 = 1$, $C = 4$ mF, $\alpha = 1.5$.

Nel primo caso, si troverà una costante di tempo positiva e pari a $\tau = 1$ ms; nel secondo, la costante di tempo è negativa e vale $\tau = -1$ ms.
In definitiva, le dinamiche che si instaurano in un circuito in cui siano presenti generatori controllati possono essere non convergenti col passare del tempo.

7.6 Circuiti sottoposti a forzamento sinusoidale

Il regime sinusoidale è quel particolare regime che si instaura nelle reti elettriche quando i generatori sono funzioni sinusoidali del tempo, tutti della stessa frequenza. È evidente che, nei circuiti reali, ciò accade per la commutazione di un interruttore e, pertanto, il regime sinusoidale non si instaura immediatamente: alla chiusura, ad esempio, di un interruttore può avere luogo un transitorio che, più o meno rapidamente, si estingue per lasciare il posto alla soluzione di regime. Questa soluzione di regime è proprio quella che si può calcolare con il metodo dei fasori, oggetto di studio del prossimo capitolo.
Per comprendere, almeno in un caso semplice, come tutto ciò accada, si esamini il transitorio che la chiusura dell'interruttore T provoca nel circuito mostrato in Figura 7.27. L'interruttore collega il generatore alla rete nell'istante t = 0: lo scopo è determinare la corrente che fluisce nell'induttore.
Volendo rendere ancora più concrete le cose, si assuma che

$$j(t) = I\ \mathrm{sen}(\omega t)\ ,$$

e che i diversi parametri del circuito siano pari a

$$\omega = 2\pi \text{ krad/s}\ , \quad I = 2\ , \quad R = 1\ , \quad L = \frac{1}{2\pi} \text{ mH}\ .$$

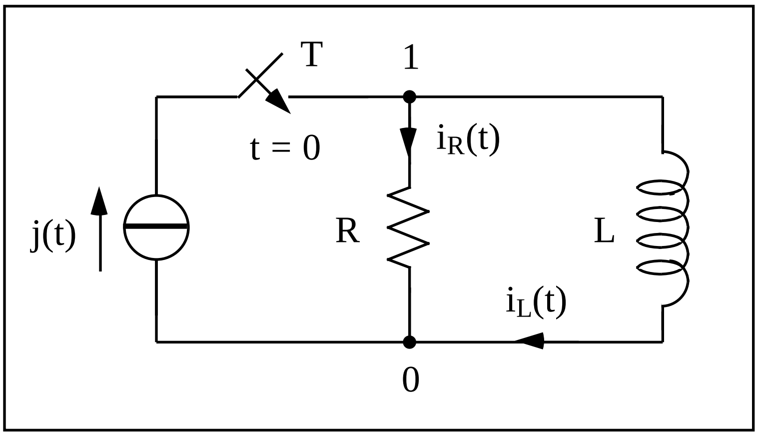


Figura 7.27: transitorio con forzamento sinusoidale.

La rete è a riposo prima che l’interruttore commuti e, pertanto, la corrente nell’induttore, che è l’unica variabile di stato presente nella rete, essendo nulla per $t < 0$, si mantiene continua anche nell’istante di commutazione. Ciò comporta che, in $t = 0$, si può assumere

$$i_L(0) = 0 \ ,$$

che costituirà la condizione iniziale per la soluzione del transitorio.
Applicando le leggi di Kirchhoff alla rete una volta che il generatore di corrente sia stato collegato alla rete, si può scrivere il seguente sistema costituito dalle due seguenti equazioni:

$$\begin{cases} i_R + i_L = j & [\text{prima legge al nodo } 1] \ , \\ R\, i_R = L \dfrac{di_L}{dt} & [\text{seconda legge alla maglia R - L}] \ . \end{cases}$$

Questo sistema, eliminando la corrente $i_R(t)$ dalla seconda equazione, può essere ridotto all’unica equazione differenziale

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = j \ .$$

Riassumendo, la corrente che circola nell’induttore dopo la commutazione dell’interruttore si può descrive per mezzo del sistema, equazione differenziale e condizione iniziale,

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{i_L}{\tau} = \dfrac{I}{\tau}\,\text{sen}(\omega t)\ , \quad \text{per } t > 0\ , \\ i_L(0) = 0\ , \end{cases}$$

in cui si è introdotto, come d'abitudine, la costante di tempo del circuito

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{2\pi}\ \text{ms}\ .$$

La soluzione dell'equazione omogenea vale

$$i_{L0}(t) = K\ e^{-t/\tau}\ ,$$

mentre la ricerca di un integrale particolare può essere fatta osservando il termine noto dell'equazione differenziale, il cosiddetto forzamento: dato si tratta di una funzione trigonometrica, possiamo cercare un integrale particolare nella classe delle funzioni trigonometriche della stessa pulsazione

$$i_{Lp}(t) = K_1 \cos(\omega t) + K_2\, \text{sen}(\omega t)\ ,$$

dove K_1 e K_2 sono due costanti da determinare. Imponendo che l'integrale particolare sia una soluzione della nostra equazione differenziale, risulta

$$\begin{cases} \dfrac{K_1}{\tau} + \omega\, K_2 = 0\ , \\ \dfrac{K_2}{\tau} - \omega\, K_1 = \dfrac{I}{\tau}\ . \end{cases}$$

Il precedente sistema di equazioni, che governa il valore delle due costanti indeterminate, è stato ottenuto imponendo che la forma funzionale scelta per l'integrale particolare sia soluzione del nostro problema e raccogliendo i termini in coseno e poi quelli in seno ad ambo i membri dell'equazione così ottenuta. Esso viene poi facilmente esplicitato, ottenendo

$$K_1 = -\,I\,\frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}\ , \quad K_2 = I\,\frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}\ .$$

Tornando all'integrale particolare, esso deve assumere la forma

$$i_{Lp}(t) = \frac{I}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \left[-\,\frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\, \text{sen}(\omega t) \right],$$

che può essere semplificata ponendo

$$\text{sen}\,\phi = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\ , \quad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\ ,$$

relazioni che si spiegano facilmente osservando il triangolo di Figura 7.28.

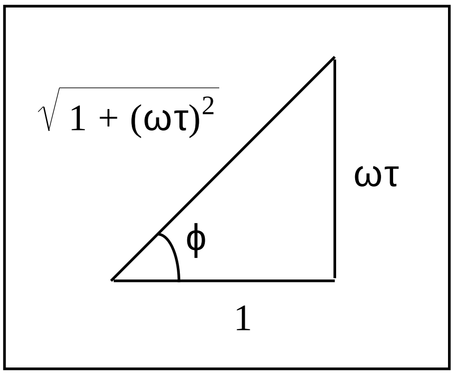


Figura 7. 28: definizione dell'angolo di fase ϕ.

Sostituendo, si può scrivere l'integrale particolare

$$i_{Lp}(t) = \frac{I}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\left[-\,\text{sen}\,\phi\,\cos(\omega t) + \cos\phi\,\text{sen}(\omega t)\right] = \frac{I\,\text{sen}(\omega t - \phi)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\ .$$

Pertanto, l'integrale generale della nostra equazione differenziale è pari a

$$i_L(t) = \frac{I\,\text{sen}(\omega t - \phi)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} + K\,e^{-t/\tau}\ .$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, è possibile facilmente determinare la costante di integrazione K, vale a dire che

$$i_L(t) = \frac{I}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\left[\text{sen}(\omega t - \phi) + e^{-t/\tau}\,\text{sen}\,\phi\right]\ .$$

Sostituendo i valori numerici, si verifica agevolmente che l'angolo φ vale

$$\phi = \arctan(\omega\tau) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}\ .$$

La Figura 7.29 riporta sia la soluzione completa, a tratto pieno, sia il solo integrale particolare, tratteggiato, cioè la corrente che circola nel circuito a transitorio terminato. Come è evidente, dopo un intervallo abbastanza breve, i due andamenti risultano indistinguibili. Deve, infatti, essere

$$i_L(t) \qquad \frac{I\ \mathrm{sen}(\omega t - \phi)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\ , \quad \text{per } t \text{ » } \tau\ ,$$

e questa corrente è proprio quella che, nel prossimo capitolo, si imparerà a determinare rapidamente con il metodo dei fasori. Si tratta, in altri termini, della soluzione asintotica.

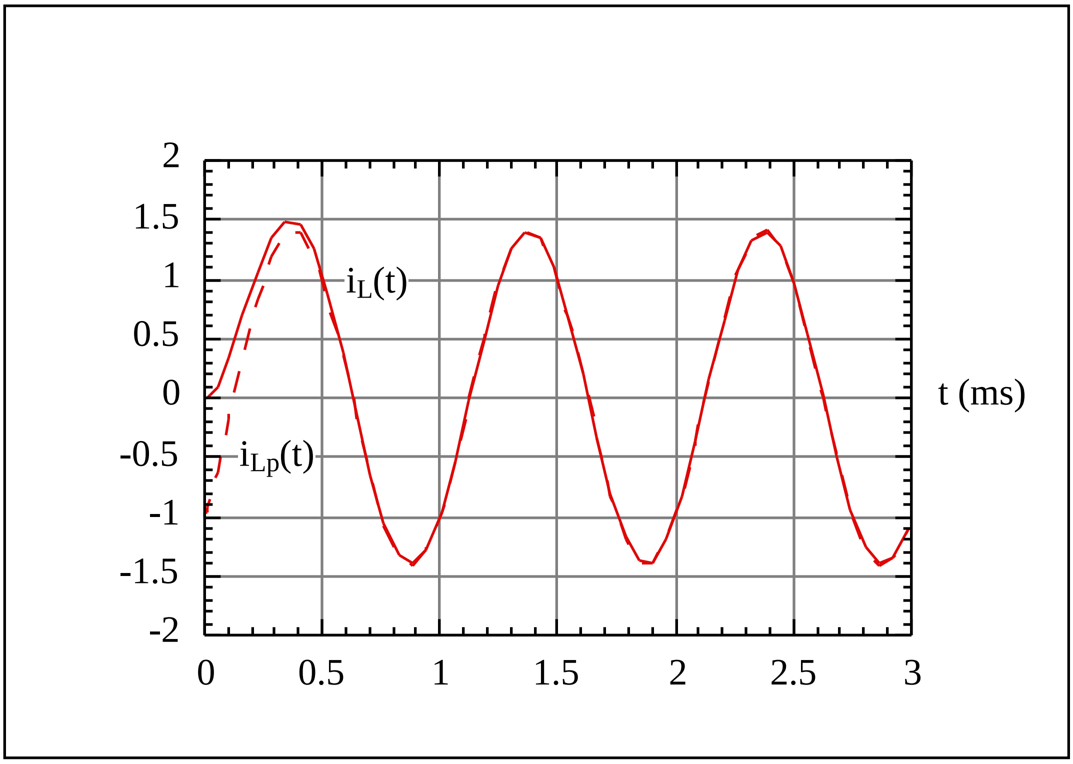


Figura 7.29: andamenti della corrente del generatore e dell’induttore.

Proprio in questa uguaglianza sta tutta la forza del metodo simbolico: esso ci consente di ottenere le soluzioni di regime quando il circuito è forzato da soli generatori sinusoidali, aventi **tutti** la stessa pulsazione, senza ricorrere al complicato apparato di equazioni differenziali. Esso, in altri termini, è un metodo che consente di operare con le reti in regime sinusoidale per trovare la soluzione per mezzo di tecniche algebriche nel campo complesso.

Non resta che fornire il listato Spice per simulare la rete e controllare i risultati trovati; la nuova istruzione

```
IJ    0   1   sin(0  2  1k  0  0) ,
```

consente di simulare un generatore sinusoidale di ampiezza 2 ampere e frequenza pari a 1 kHz.

```
Esempio 8
*Transitorio con forzamento sinusoidale
IJ       0    1    sin(0  2  1k  0  0)
R0       1    0    1
L0       1    0    159.155u      IC=0
.TRAN    1u     3m     UIC
.PROBE
.END
```

Nel caso generale, questa istruzione introduce un generatore di corrente, ma potrebbe essere usata con altrettanto successo per un generatore di tensione, dipendente dal tempo secondo la relazione:

$$i_G(t) = \begin{cases} I_0 \, , & \text{per } 0 \le t \le TD \, ; \\ I_0 + I_A \, e^{-\delta (t - TD)} \, \mathrm{sen}\left[2\pi f \, (t - TD)\right] , & \text{per } TD \le t \le TSTOP \, . \end{cases}$$

La sintassi per un tal generatore connesso tra i nodi 1 e 0 è

IG   0   1   sin(I_0 I_A f TD δ) ,

dove i diversi parametri rappresentano

I_0	il valore iniziale,
I_A	il valore massimo della sinusoide,
f	la frequenza,
TD	il tempo di ritardo,
δ	il fattore di attenuazione.

La corrente I_0 è un valore costante di corrente che, nel caso in esame, è stata considerata nulla; I_A è, invece, il valore massimo della sinusoide, pari a 2 volt nel caso in esame. Il tempo ‘TD’ rappresenta un certo ritardo, assente nell’esempio, e che consente di non far partire la sinusoide dall’istante t = 0, ma dall’istante TD. La frequenza della funzione sinusoidale è f ed, infine, la quantità δ, misurata in s^{-1}, rappresenta un’eventuale attenuazione che è possibile aggiungere alla sinusoide: anch’essa è stata assunta nulla.

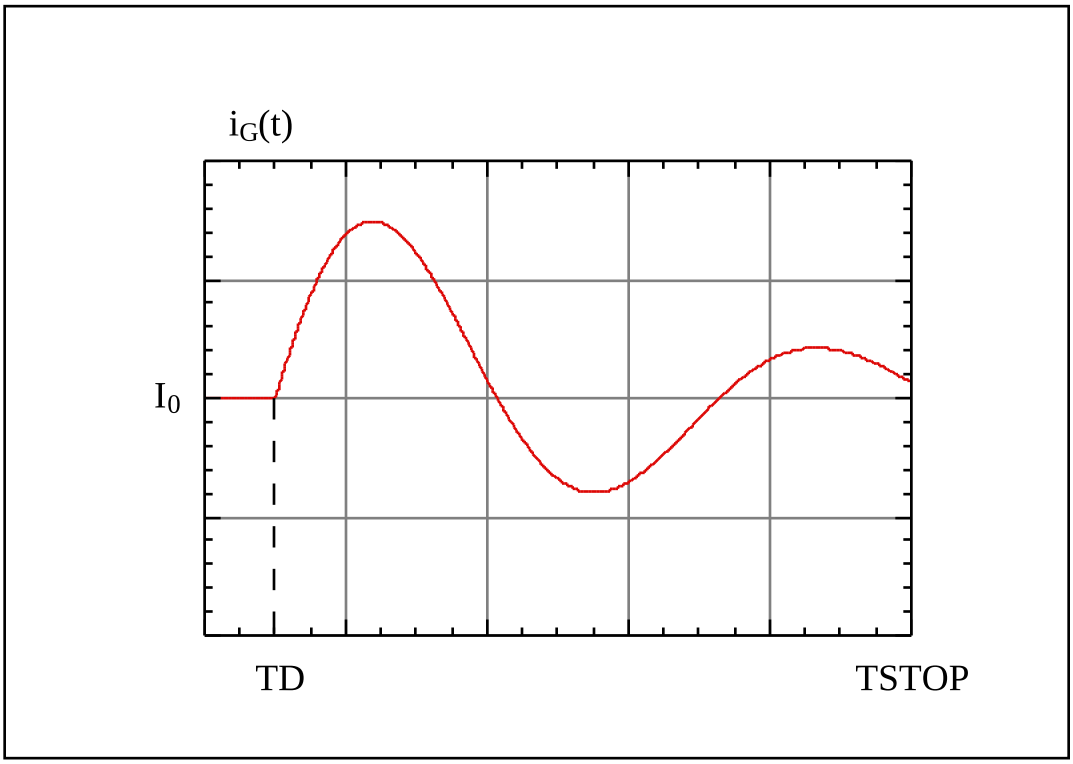


Figura 7.30: funzione sinusoidale smorzata.

Per non lasciare troppo nel vago le definizioni riportate, la Figura 7.30 li riassume tutti ed aiuta a ricordarli. Se non altrimenti specificato, l'attenuazione δ ed il tempo di ritardo TD vengono assunti pari a zero, mentre, se non venisse indicata esplicitamente, la frequenza sarebbe assunta pari a 1/TSTOP: è abitudine diffusa dire che questi sono i valori assunti per 'default' dal compilatore. Per evitare qualunque confusione, comunque, si è preferito riportarli tutti.

7.7 Transitori con elementi non lineari

Quando nella rete sono presenti bipoli non lineari, lo studio analitico delle dinamiche diventa, eccezion fatta per alcuni casi particolarmente semplici, veramente arduo. Senza alcuna pretesa di completezza, si desidera che l'allievo abbia a che fare almeno una volta con qualche problema legato alle non linearità presenti nelle reti elettriche, dal momento che questo argomento rappresenta una vera linea di frontiera per la ricerca nella teoria dei circuiti. D'altra parte, l'uso del simulatore Spice mostra proprio in questi casi tutta la sua efficienza, fornendo rapidamente soluzioni numeriche che altrimenti richiederebbero complicate analisi.
Si consideri il semplice circuito mostrato in Figura 7.31, detto circuito raddrizzatore a singola semionda, in cui si suppone che il generatore sinusoidale eroghi la tensione

$$v_0(t) = V_0 \sqrt{2}\, \mathrm{sen}(\omega t) \, .$$

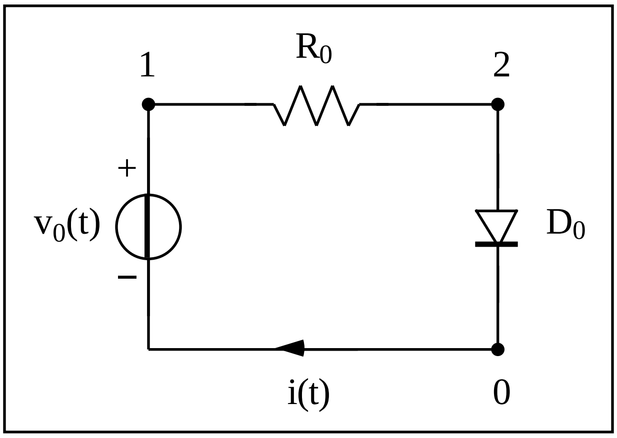


Figura 7.31: circuito raddrizzatore a semplice semionda.

Se si immagina di lavorare alla cosiddetta frequenza industriale, vale a dire a $f = 50$ Hz, e che $V_0 = 220$ ed $R_0 = 1$ kΩ, il listato che segue consente di ottenere facilmente le grandezze di interesse.

```
Esempio 9
*Raddrizzatore ad una semionda
.MODEL      DMOD1    D      (IS=1e-9)
D0     2    0    DMOD1
R0     1    2    1k
V0     1    0    sin(0  311.13  50  0)
.TRAN       0.1m     0.03      0    0.1m
.PROBE
.END
```

Tra i nodi 2 e 0 è connesso il diodo D_0 che segue il modello indicato con il nome DMOD1, con corrente di saturazione inversa pari a 1 nA. Si noti la presenza del generatore sinusoidale, il cui parametro di attenuazione, come detto nel paragrafo precedente, è stato posto a zero.

Durante la semionda positiva del generatore sinusoidale $v_0(t)$ il diodo conduce e tutta la tensione si ritrova ai capi del resistore, facendo circolare in esso una corrente non nulla. Durante la semionda negativa, invece, il diodo blocca il passaggio della corrente ed ai capi del resistore si ritrova una tensione nulla. Dato che si è considerato una sinusoide alla frequenza di 50 Hz, cioè di periodo $T = 0.02$ s = 20 ms, si ha circolazione di corrente nel circuito soltanto durante mezzo periodo, come mostra la Figura 7.32.

Mentre il generatore di tensione $v_0(t)$ è a valor medio nullo, la tensione che troviamo ai capi del resistore ha un valor medio V_M diverso da zero, rappresentato in Figura 7.32 dalla funzione costante, e pari a

$$V_M = \frac{1}{T}\int_0^T v_{12}(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} V_0\sqrt{2}\, \mathrm{sen}(\omega t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi}V_0 \quad 0.45\, V_0 \, .$$

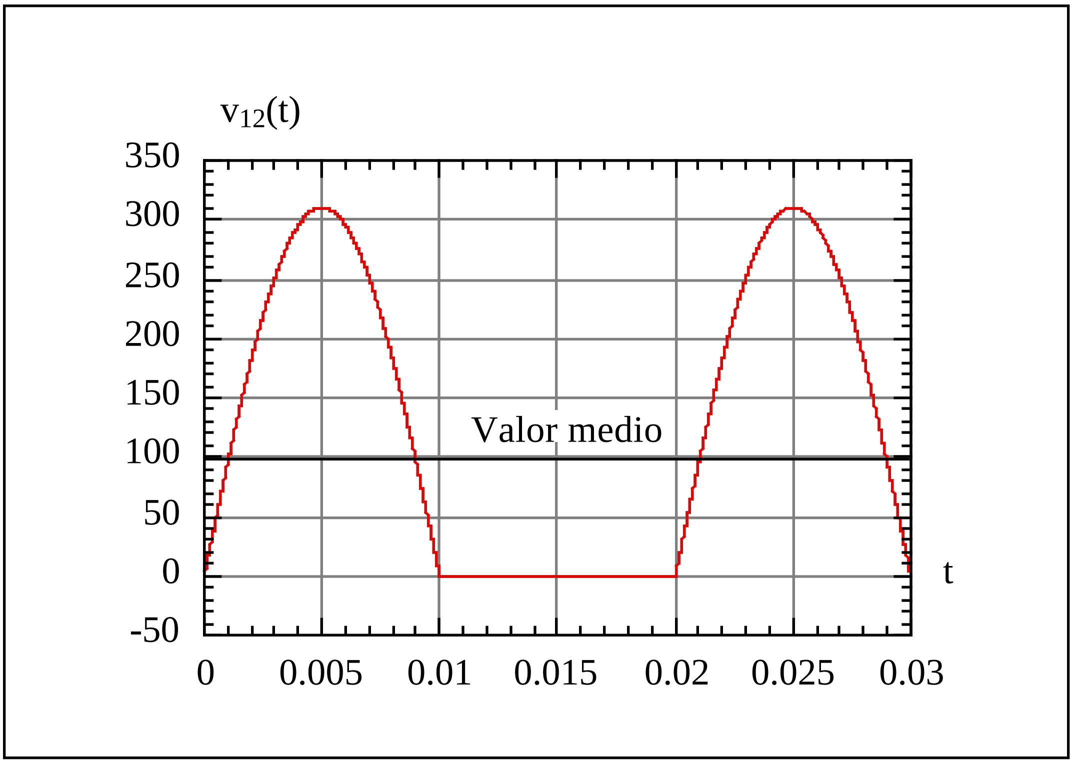


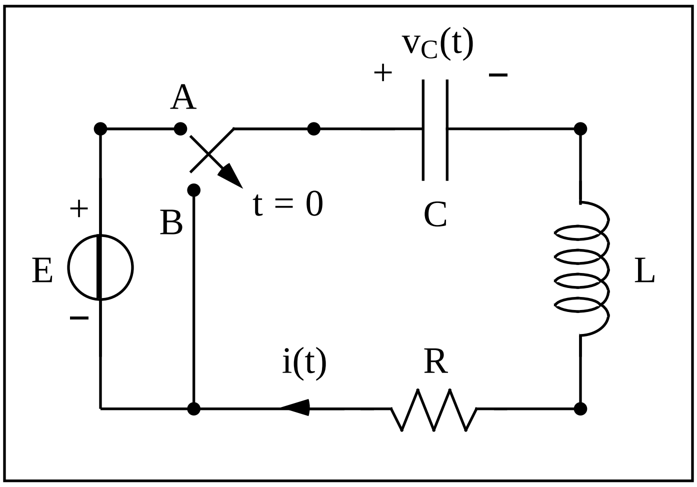
Figura 7.32: andamento della tensione ai capi del resistore R_0.

Questo schema di circuito raddrizzatore, detto a semplice semionda ed adoperato per potenze molto modeste, rappresenta il circuito più semplice in cui si realizza la trasformazione di una tensione sinusoidale a valor medio nullo in una tensione a valor medio non nullo. Risulta chiaro che per ottenere una tensione costante bisogna ulteriormente eliminare, in gergo si dice ‘filtrare’, la forma d’onda in tal modo ottenuta: ma queste cose verranno discusse in maggior dettaglio più avanti.

7.8 Esercizi di riepilogo

In questo paragrafo conclusivo, per rendere ancora più concreto quanto detto, verranno presentati sei esercizi completamente risolti, di difficoltà via via crescente. Si consiglia l’allievo di non leggere subito la soluzione, ma di tentare la soluzione, confrontando i suoi procedimenti e risultati con quelli di seguito proposti.

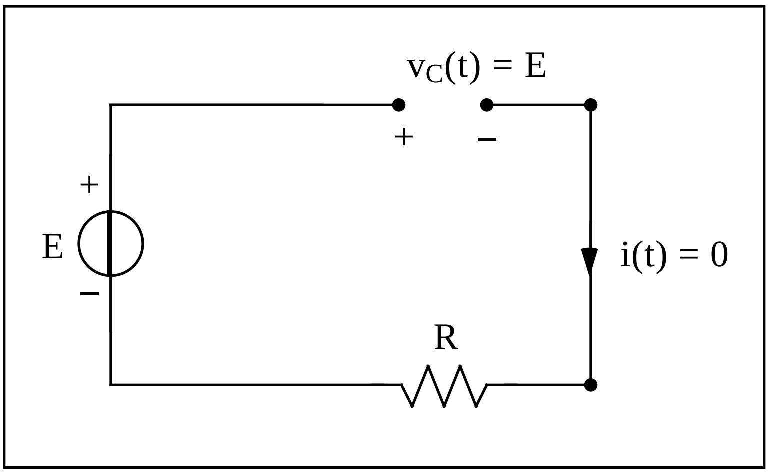
Esercizio 1 - La rete mostrata in figura è a regime per $t < 0$. All'istante $t = 0$ l'interruttore commuta dalla posizione A alla posizione B. Si determini l'andamento delle variabili di stato.



Si assuma che $E = 2$, $C = 0.08$, $L = 0.5$, $R = 3$.

◊ **Prima che l'interruttore commuti**, essendo la rete a regime, l'induttanza si comporta come un cortocircuito, mentre la capacità è assimilabile ad un circuito aperto. Pertanto, la rete si può semplificare come mostrato nella figura che segue, dalla quale si ricava prontamente che

$$v_C(t) = E\ , \quad i(t) = 0\ , \quad \text{per } t < 0\ .$$



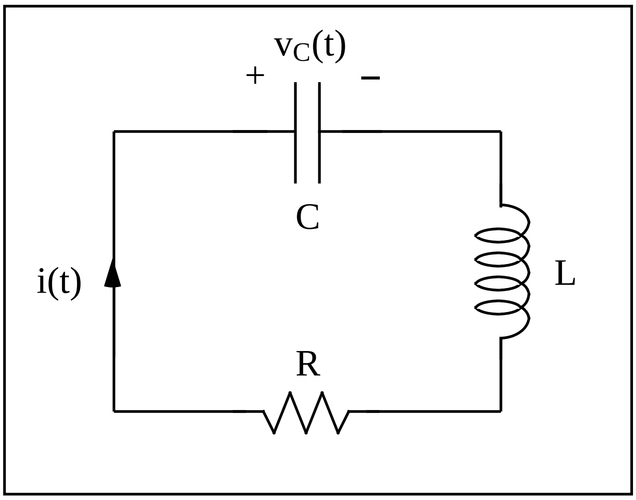
In altri termini, nella rete non circola corrente e la tensione imposta dal generatore si ritrova tutta ai capi del condensatore. Ciò comporta che le condizioni di raccordo sono

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = E\ , \quad i(0^-) = i(0^+) = 0\ .$$

In pratica, non facendo più distinzione tra limite sinistro e destro nell'istante di commutazione, le due variabili di stato devono essere entrambe continue nell'istante di commutazione e tali che

$$v_C(0) = E \ , \quad i(0) = 0 \ .$$

Dopo la commutazione dell'interruttore, la rete non è più forzata e si semplifica come suggerito dalla figura seguente.



La LKT all'unica maglia che definisce la rete e la caratteristica del condensatore si possono sintetizzare nel sistema

$$\begin{cases} v_C + L \dfrac{di}{dt} + R\, i = 0 \ , \\ i = C \dfrac{dv_C}{dt} \ . \end{cases}$$

Sostituendo la corrente, data in maniera esplicita dalla seconda equazione, nell'altra equazione, otteniamo l'unica equazione differenziale

$$v_C + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} = 0$$

nella sola tensione v_C. Normalizzando si avrà pure che

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 \, v_C = 0 \ ,$$

in cui sono state introdotte le due grandezze

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{6}\ s\,, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5\ s^{-2}\,.$$

È già nota una condizione iniziale cui deve soddisfare la tensione; per determinare l'altra, valutando il sistema fondamentale di Kirchhoff all'istante $t = 0^+$, si ha

$$\begin{cases} v_C(0^+) + L\,\dfrac{di(0^+)}{dt} + R\,i(0^+) = 0\,, \\ i(0^+) = C\,\dfrac{dv_C(0^+)}{dt}\,, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{di(0^+)}{dt} = -\dfrac{E}{L} = -2\,, \\ \dfrac{dv_C(0^+)}{dt} = 0\,. \end{cases}$$

In definitiva, la tensione ai capi del condensatore evolve secondo una dinamica dettata dal seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v_C}{dt^2} + 6\,\dfrac{dv_C}{dt} + 25\,v_C = 0\,, \quad (t > 0) \\ v_C(0) = 2\,, \quad \dfrac{dv_C(0^+)}{dt} = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 6\,\lambda + 25 = 0\,,$$

ammette le due radici complesse e coniugate

$$\lambda_1 = -3 + 4\,j \quad e \quad \lambda_2 = -3 - 4\,j\,.$$

Pertanto, la soluzione dell'equazione differenziale si può scrivere nella forma

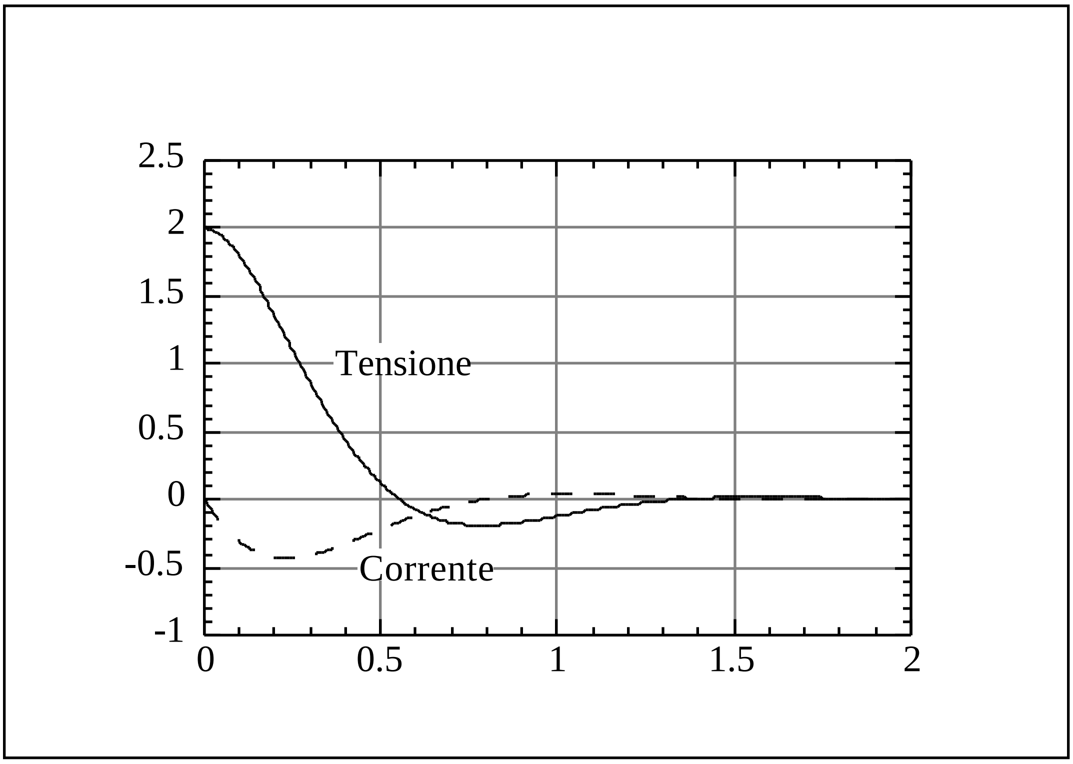
$$v_C(t) = e^{-3t}\left[K_1\cos(4t) + K_2\,\mathrm{sen}(4t)\right].$$

Imponendo, poi, le due condizioni iniziali, si ottiene il valore delle costanti di integrazione

$$K_1 = E = 2\,, \quad K_2 = \frac{3}{4}\,E = \frac{3}{2}\,,$$

e da esse la soluzione

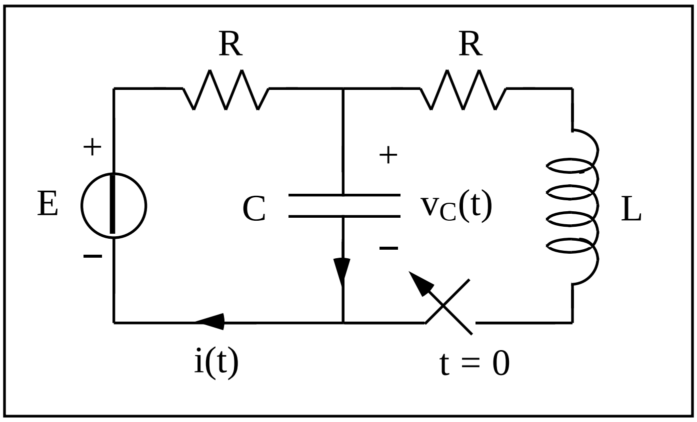
$$v_C(t) = e^{-3t}\left[2\cos(4t) + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(4t)\right] .$$



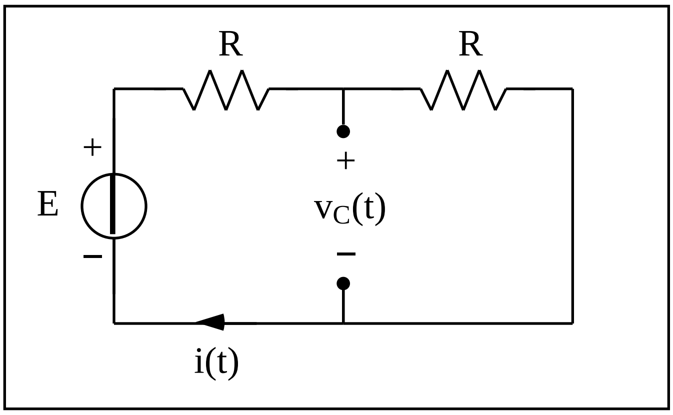
Non è difficile, infine, ricavare anche l’altra variabile di stato

$$i(t) = C\,\frac{dv_C}{dt} = -\,\frac{27}{25}\,e^{-3t}\,\mathrm{sen}(4t) .$$

Esercizio 2 - Per la rete mostrata in figura, determinare l’andamento temporale della $v_C(t)$.



◊ Per t < 0 la rete è a regime e, pertanto, essendo il forzamento costituito da un generatore di tensione in continua, l’induttore si comporta come un cortocircuito, mentre il condensatore è equivalente ad un circuito aperto.

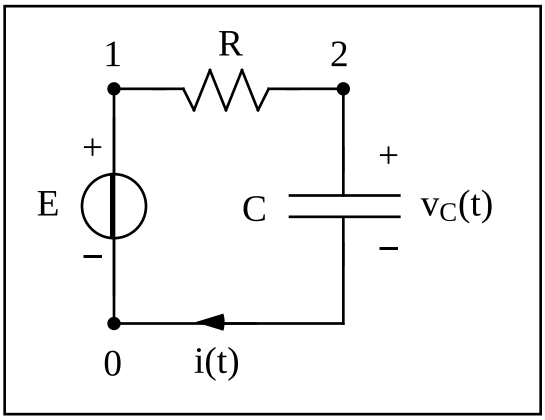


Con riferimento alla figura precedente, risulta allora:

$$v_C(t) = \frac{E}{2} \,, \quad \text{per } t < 0 \quad \rightarrow \quad v_C(0) = \frac{E}{2} \,.$$

Per $t > 0$, la rete si semplifica come mostrato nella figura che segue e la dinamica della $v_C(t)$ è descritta dall'equazione differenziale

$$E = R\, i + v_C = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C \,.$$



Posto $\tau = RC$, il circuito può essere descritto dal seguente problema di Cauchy

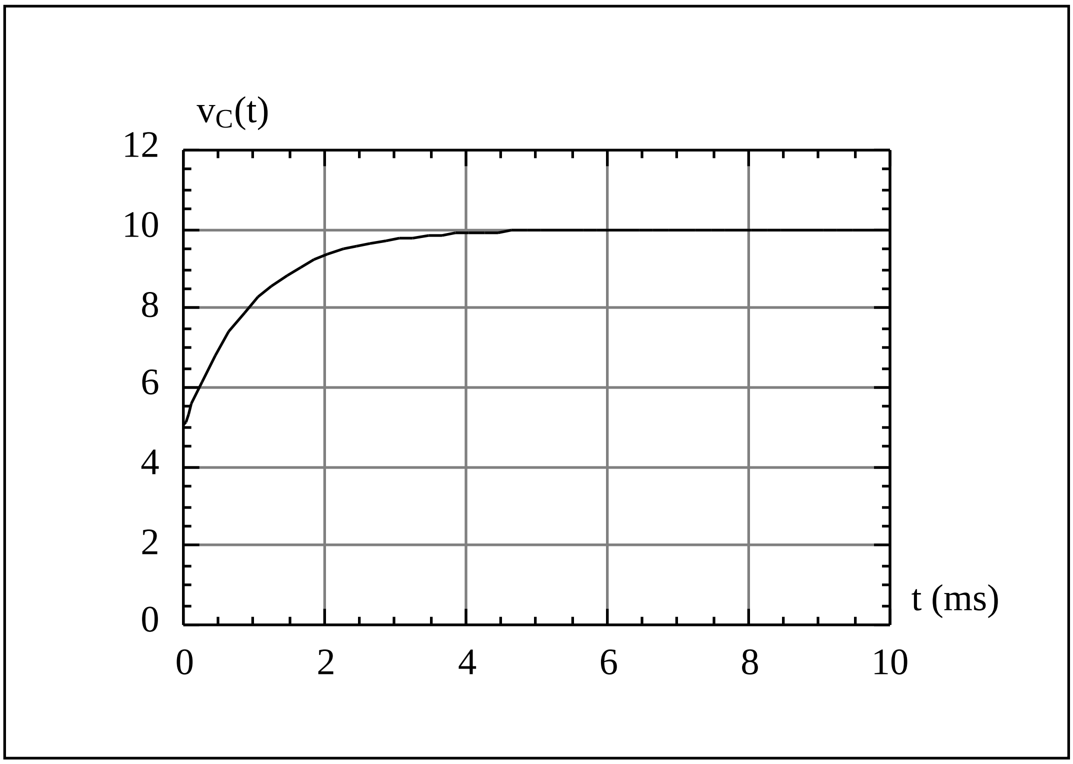
$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{v_C}{\tau} = \dfrac{E}{\tau} \\ v_C(0) = \dfrac{E}{2} \,, \quad t > 0 \,. \end{cases}$$

La soluzione è semplice da trovare e vale

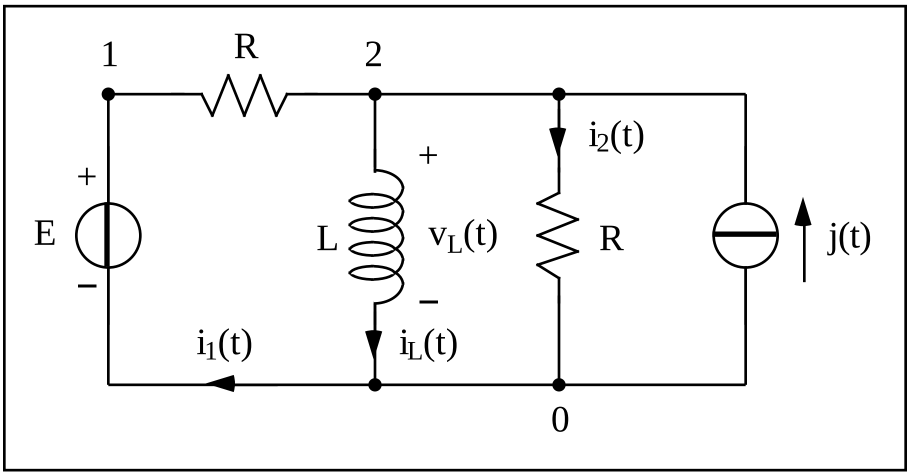
$$v_C(t) = E - \frac{E}{2} e^{-t/\tau} \,, \quad \text{per } t \geq 0 \,.$$

Posto, ad esempio, R = 1 kΩ, C = 1 μF e E = 10 V, la codifica Spice viene di seguito riportata.

```
Esempio 2
*Codifica Spice
R0      1     2     1k
C0      2     0     1u      IC=5
VE      1     0     10
.TRAN        1u      10m        UIC
.PROBE
.END
```

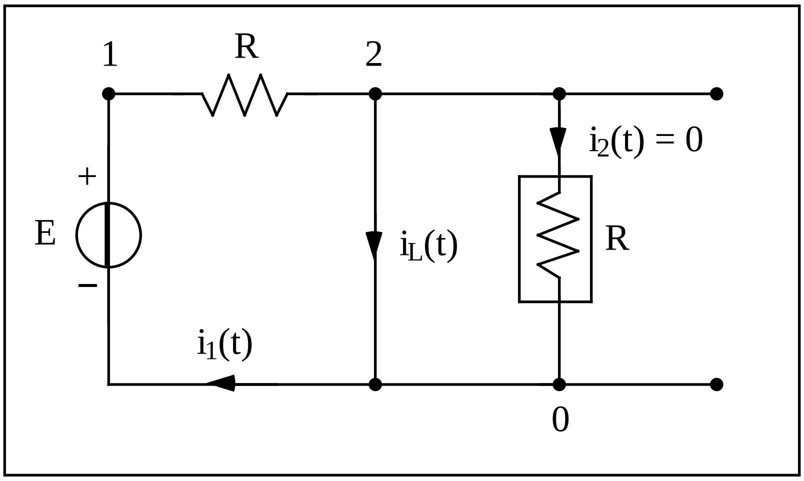


Esercizio 3 - Per la rete mostrata in figura determinare le potenze istantanee erogate dai due generatori.



Si assuma che $j(t) = I\,u(t)$, $I = 1$, $E = 4$, $R = 2$, $L = 1$ mH.

◊ Per $t < 0$, il generatore di corrente, essendo inattivo, si può sostituire con un circuito aperto, mentre l'induttanza si comporta come un cortocircuito. Pertanto, la rete si semplifica come di seguito mostrato.



Da essa si deduce immediatamente che

$$i_L(t) = \frac{E}{R} = 2\ , \quad \text{per } t < 0\ ,$$

e che la condizione iniziale vale

$$i_L(0) = \frac{E}{R}\ .$$

Ora, per $t > 0$, posto

$$i_1 = \frac{E - v_L}{R} \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{v_L}{R}\ ,$$

in forza della prima legge al nodo 2, si può scrivere

$$i_1 + j = i_2 + i_L \,,$$

ovvero

$$\frac{E - v_L}{R} + I = \frac{v_L}{R} + i_L \,.$$

Da quest'ultima relazione si ricava pure che

$$\frac{E}{R} + I = 2\,\frac{v_L}{R} + i_L = \frac{2\,L}{R}\,\frac{di_L}{dt} + i_L = \tau\,\frac{di_L}{dt} + i_L \quad \left(\tau = \frac{2\,L}{R} = 1 \text{ ms}\right),$$

che conduce al seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{i_L}{\tau} = \dfrac{1}{\tau}\left(\dfrac{E}{R} + I\right), \\ i_L(0) = \dfrac{E}{R} \,. \end{cases}$$

La soluzione dell'omogenea vale

$$i_{L0}(t) = K\,e^{-t/\tau} \,,$$

mentre l'integrale particolare, vale a dire la soluzione a regime, è pari a

$$i_{Lp}(t) = I + \frac{E}{R} \,.$$

Imponendo la condizione iniziale alla soluzione complessiva, non è difficile determinare il valore della costante di integrazione

$$\frac{E}{R} = K + I + \frac{E}{R} \quad \rightarrow \quad K = I \,.$$

In definitiva, si può scrivere che

$$i_L(t) = \frac{E}{R} + I\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 3 - e^{-t/\tau} \quad \text{per } t \geq 0 \,,$$

da cui si ricava prontamente la tensione

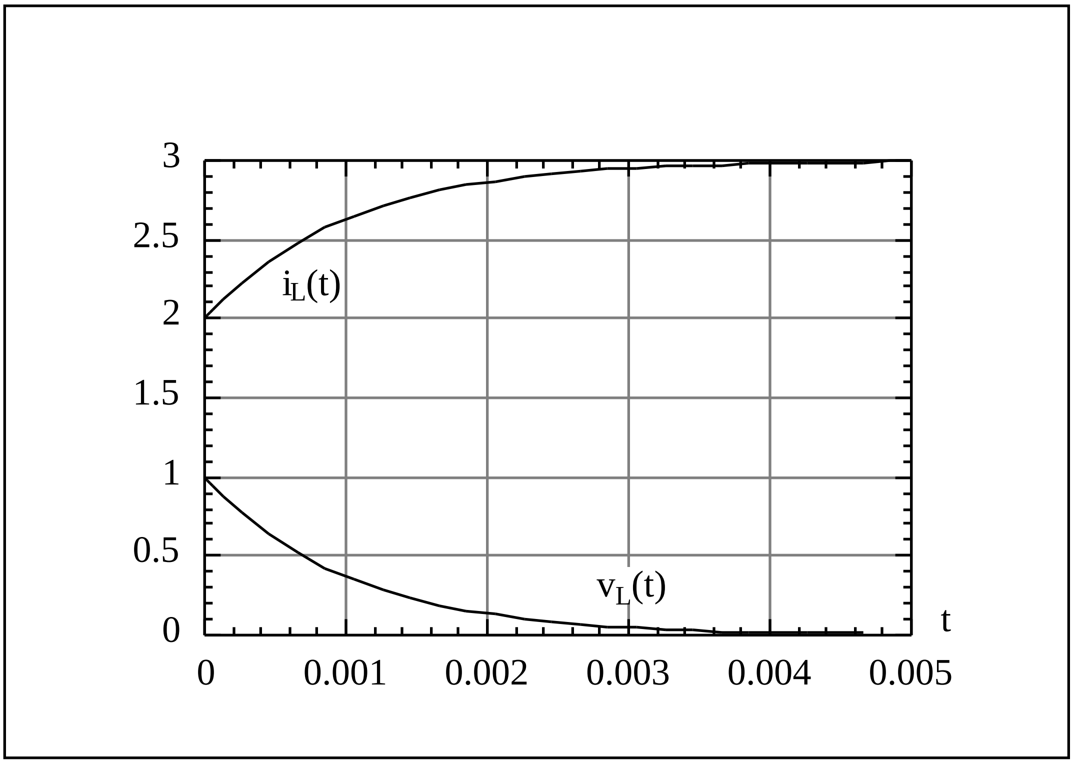
$$v_L(t) = \frac{I\,L}{\tau}\, e^{-t/\tau} = \frac{R\,I}{2}\, e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau} \quad \text{per } t > 0\ .$$

Infine, passando alle potenze erogate dei generatori, sempre per $t > 0$, si può scrivere

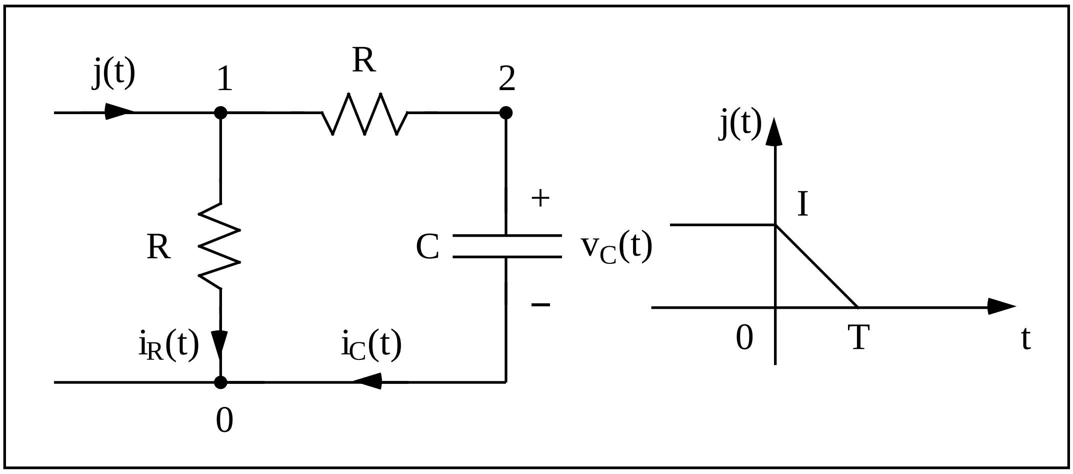
$$\begin{cases} p_E(t) = E\, i_1(t) = E\, \dfrac{E - v_L(t)}{R} = \dfrac{E^2}{R} - \dfrac{E\,I}{2}\, e^{-t/\tau} = 8 - 2\, e^{-t/\tau}\ , \\ p_j(t) = I\, v_L(t) = \dfrac{R\,I^2}{2}\, e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau}\ . \end{cases}$$

La codifica Spice, di seguito riportata, consente di visualizzare immediatamente l’andamento temporale della corrente e della tensione del condensatore.

```
Esempio 3
*Codifica
VE      1     0     DC     4
IC      0     2     DC     1
R1      1     2     2
R2      2     0     2
L0      2     0     1m     IC=2
.TRAN         0.01        10m        UIC
.PROBE
.END
```



Esercizio 4 - Per la rete mostrata in figura, determinare la corrente $i_R(t)$. Eseguire la codifica Spice assegnando dei valori numerici ai diversi parametri.



◊ La corrente erogata dal generatore è descritta dalla funzione

$$j(t) = \begin{cases} I\,, & \text{per } t < 0\,, \\ I - I\,\dfrac{t}{T}\,, & \text{per } 0 \le t \le T\,, \\ 0\,, & \text{per } t \ge T\,. \end{cases}$$

Pertanto, per $t < 0$, la rete, essendo sottoposta ad una corrente costante di valore I, è a regime. In tal caso il condensatore si comporta come un circuito aperto, per cui

$$i_R(t) = I \quad \text{e} \quad v_C(t) = 0 \,, \quad \text{per } t < 0 \,.$$

Per $t > 0$, prima o dopo l'istante T, la rete è comunque descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} j = i_R + C \dfrac{dv_C}{dt} & \text{[nodo 1]} \,, \\ R\, i_R = v_C + RC \dfrac{dv_C}{dt} & \text{[maglia 1 - R - C - 0 - R]} \,. \end{cases}$$

Eliminando la corrente $i_R(t)$ dalla prima equazione, ci riconduciamo all'unica equazione che regola le dinamiche della tensione ai capi del condensatore

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{\tau} = \frac{R\, j}{\tau} \,,$$

in cui si è posto $\tau = 2RC$.
La soluzione dell'equazione omogenea non dipende dal forzamento e vale

$$v_{C0}(t) = K\, e^{-t/\tau} \,.$$

A questa soluzione va aggiunto un integrale particolare che dipende dall'intervallo temporale preso in esame, vale a dire, se si è prima o dopo l'istante T. In particolare si ha che

$$v_{Cp}(t) = At + B \,, \quad \text{per } 0 \le t \le T \,,$$

il che significa, sostituendo nell'equazione differenziale,

$$A + \frac{At + B}{\tau} = - \frac{I}{2CT}\, t + \frac{I}{2C} \,.$$

Riordinando i vari termini ed applicando il principio di identità delle potenze, si determina il valore delle due costanti

$$A = - \frac{RI}{T} \quad \text{e} \quad B = RI + RI \frac{\tau}{T} \,.$$

Imponendo, allora, la condizione iniziale $v_C(0) = RI$ all'integrale generale

$$v_C(t) = v_{C0}(t) + v_{Cp}(t) = K\, e^{-t/\tau} + RI + RI\,\frac{\tau}{T} - RI\,\frac{t}{T} ,$$

si può ottenere la costante di integrazione

$$RI = K + RI + \frac{RI}{T}\,\tau \quad \rightarrow \quad K = -\frac{RI}{T}\,\tau .$$

Dunque, in questo intervallo temporale, la dinamica della tensione ai capi del condensatore si può scrivere nella forma adimensionale

$$\frac{v_C(t)}{RI} = 1 - \frac{\tau}{T}\, e^{-t/\tau} - \frac{t}{T} + \frac{\tau}{T} .$$

Nell'intervallo successivo $t \geq T$ la rete non risulta più forzata e, quindi, la soluzione omogenea coinciderà con l'intera soluzione. Allora, posto

$$v_C(t) = H\, e^{-t/\tau} \quad (t \geq T) ,$$

con H generica costante di integrazione, la soluzione può scriversi nella forma

$$v_C(t) = v_C(T)\, e^{-(t - T)/\tau} \quad (t \geq T) ,$$

in cui la continuità della variabile di stato impone che sia

$$v_C(T) = RI\,\frac{\tau}{T}\left(1 - e^{-T/\tau}\right) .$$

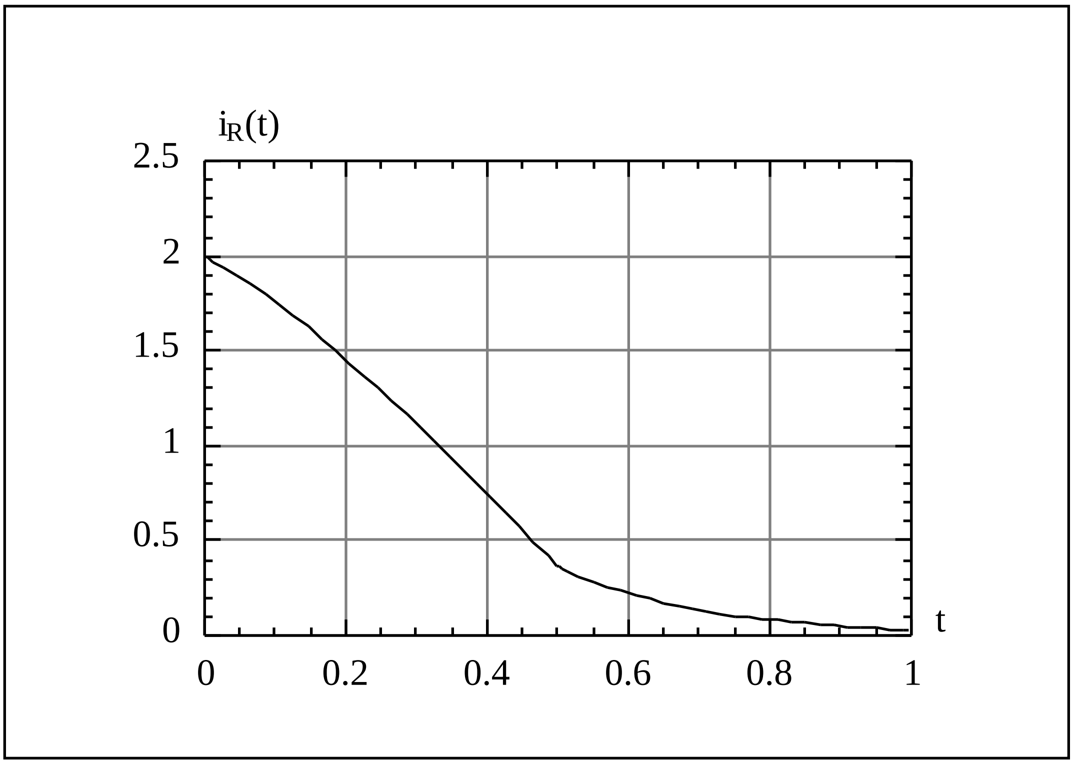
In definitiva, non è difficile ottenere la corrente $i_R(t)$ che risulta pari a

$$i_R(t) = \begin{cases} I , & \text{per } t < 0 , \\ I - I\,\dfrac{t}{T} + \dfrac{I\tau}{2T}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) , & \text{per } 0 < t < T , \\ \dfrac{I\tau}{2T}\left(1 - e^{-T/\tau}\right) e^{-(t - T)/\tau} , & \text{per } t > T . \end{cases}$$

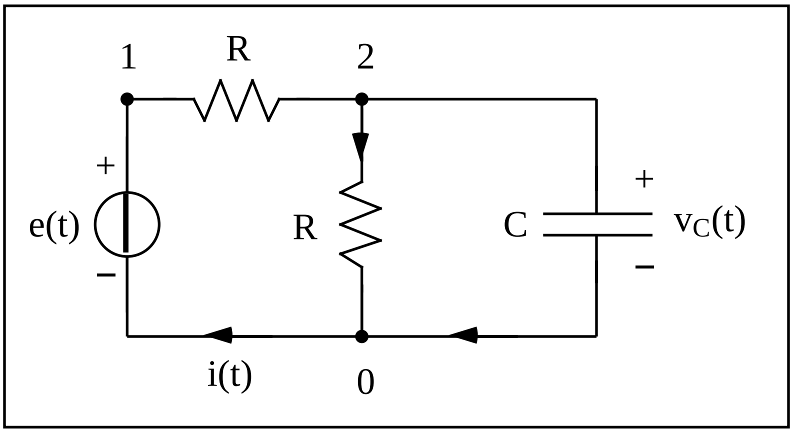
Posto, per esempio, R = 10, C = 10 mF, I = 2 e T = 0.5, il listato Spice è di seguito riportato

```
Esempio 4
*Codifica Spice
```

```
IC      0    1     PWL(0  2  0.5  0 1  0)
R1      1    2     10
R2      1    0     10
C0      2    0     10m        IC=20
.TRAN        0.01m     1
.PROBE
.END
```



Esercizio 5 - Per la rete mostrata in figura, a riposo per $t < 0$, determinare l'andamento della tensione $v_C(t)$. Eseguire, poi, la codifica Spice.



Si assuma che $e(t) = M\, t\, u(t)$ e si ponga $\tau = RC$.

◊ La rete è a riposo per $t < 0$ e, quindi, risulta

$$v_C(0) = 0 .$$

La prima legge al nodo 2 comporta che

$$i = C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} ,$$

mentre la seconda legge, applicata alla maglia 1 - R - 2 - C - 0 - e(t), stabilisce che

$$e = R\, i + v_C .$$

Eliminando dalle precedenti equazioni la corrente del generatore, risulta l'unica equazione differenziale

$$\frac{dv_C}{dt} + 2 \frac{v_C}{\tau} = \frac{M}{\tau}\, t .$$

Essendo nota la condizione iniziale che deve soddisfare la tensione, la soluzione dell'equazione omogenea si può scrivere nella forma

$$v_{C0}(t) = K\, e^{-2t/\tau} .$$

Il forzamento suggerisce la forma funzionale dell'integrale particolare

$$v_{Cp}(t) = \alpha\, t + \beta .$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, risulta

$$\alpha + \frac{2}{\tau}\,\alpha\, t + \frac{2}{\tau}\,\beta = \frac{M}{\tau}\, t ,$$

ovvero il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2\,\alpha = M , \\ \alpha + \dfrac{2}{\tau}\,\beta = 0 , \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{M}{2} \\ \beta = - \dfrac{M\tau}{4} . \end{cases}$$

L'integrale generale, allora, vale

$$v_C(t) = v_{C0}(t) + v_{Cp}(t) = K\, e^{-2t/\tau} + \frac{M}{2}\, t - \frac{M\tau}{4} \,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, si può determinare il valore della costante di integrazione

$$K = \frac{M\tau}{4} \,,$$

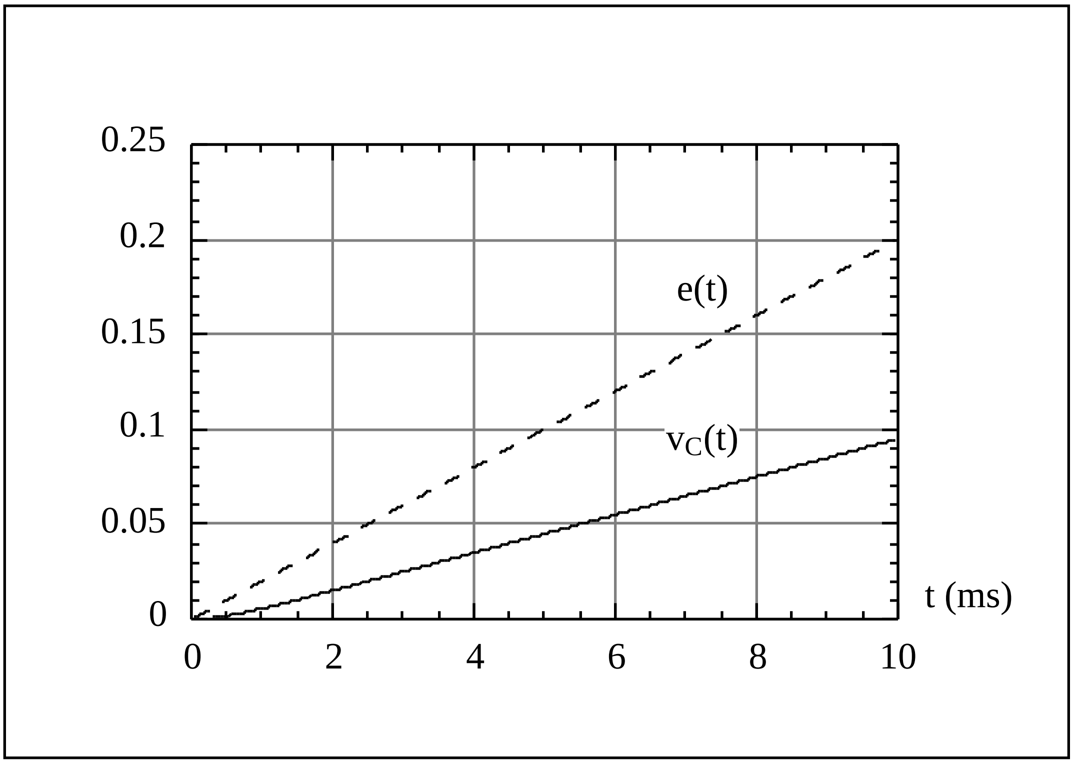
da cui discende la soluzione

$$v_C(t) = \frac{M\tau}{4}\, e^{-2t/\tau} + \frac{M}{2}\, t - \frac{M\tau}{4} \,.$$

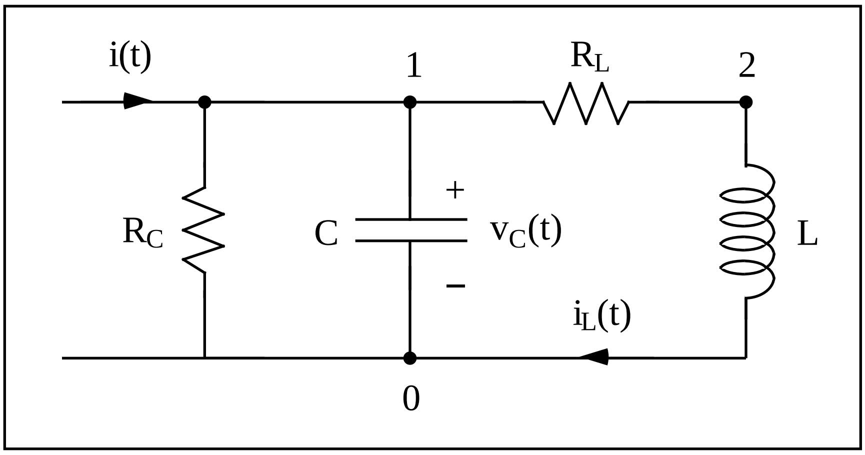
Per la simulazione numerica si sono scelti i seguenti valori numerici:

$$R = 1 \,, \quad C = 1 \text{ mF} \,, \quad M = 20 \text{ V/s} \,.$$

```
Esempio 5
*Codifica Spice
R0      1     2     1
C0      2     0     1m      IC=0
R1      2     0     1
VE      1     0     PWL(0  0  10m  20m)
.TRAN         1u       10m        0      1u       UIC
.PROBE
.END
```



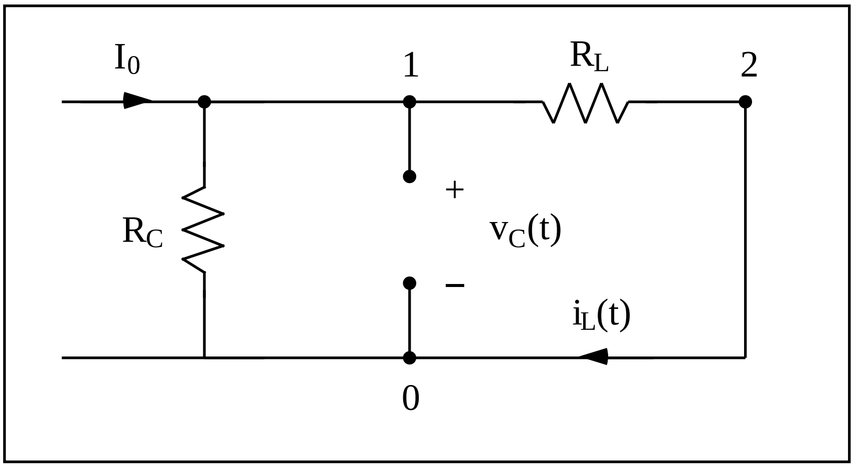
Esercizio 6 - La rete mostrata in figura è a regime per $t < 0$. Determinare l'andamento della corrente $i_L(t)$.



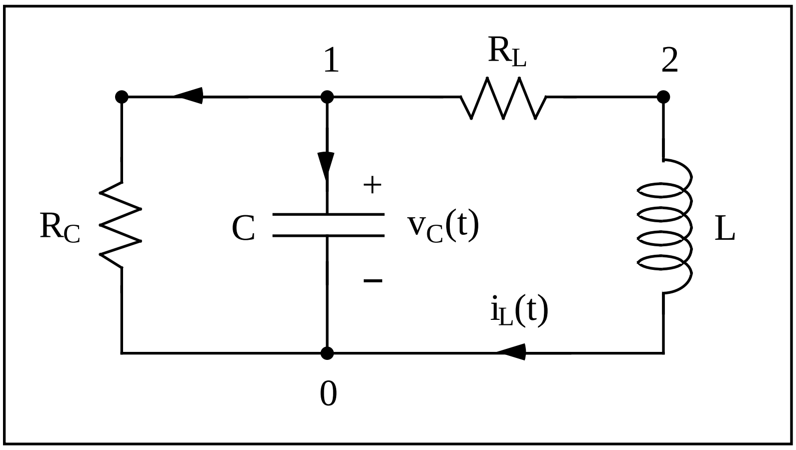
Si assuma che $i(t) = I_0\, u(-t)$, $I_0 = 13$, $R_C = 4$, $R_L = 2.5$, $L = 0.5$, $C = 10$ mF.

◊ Per $t < 0$ la rete è a regime e, pertanto, il condensatore si comporterà come un circuito aperto e l'induttore come un cortocircuito, come suggerisce la figura che segue. Da ciò discende immediatamente che

$$i_L(t) = I_0 \frac{R_C}{R_C + R_L} = 8 \quad \text{e} \quad v_C(t) = R_L\, i_L(t) = R_L\, I_0 \frac{R_C}{R_C + R_L} = 20\ .$$



Per $t > 0$ il generatore può essere sostituito con un circuito aperto e la rete si semplifica come mostrato di seguito.



Le leggi di Kirchhoff impongono che le due variabili di stato siano collegate per mezzo delle relazioni

$$\begin{cases} i_L + \dfrac{v_C}{R_C} + C\,\dfrac{dv_C}{dt} = 0 \,, \\ v_C = R_L\, i_L + L\,\dfrac{di_L}{dt} \,, \end{cases}$$

che vanno risolte tenendo conto delle alle condizioni iniziali

$$i_L(0) = 8 \quad \text{e} \quad v_C(0) = 20 \,.$$

Valutando il sistema precedente in $t = 0^+$, si ottiene il valore delle derivate delle variabili di stato:

$$\begin{cases} i_L(0^+) + \dfrac{v_C(0^+)}{R_C} + C\,\dfrac{dv_C(0^+)}{dt} = 0 \,, \\ v_C(0^+) = R_L\, i_L(0^+) + L\,\dfrac{di_L(0^+)}{dt} \,, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dv_C(0^+)}{dt} = -1300 \,, \\ \dfrac{di_L(0^+)}{dt} = 0 \,. \end{cases}$$

Eliminando dalla seconda equazione la tensione ai capi del condensatore, non è difficile ottenere un'unica equazione che regola l'andamento della corrente dell'induttore

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{R_L}{L} + \frac{1}{CR_C}\right)\frac{di_L}{dt} + \left(1 + \frac{R_L}{R_C}\right)\frac{i_L}{LC} = 0 \,.$$

Sostituendo i valori numerici assegnati, la determinazione della corrente dell'induttore può sintetizzarsi nel problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + 30\,\dfrac{di_L}{dt} + 325\, i_L = 0 \,, \\ i_L(0) = 8 \,, \quad \dfrac{di_L(0^+)}{dt} = 0 \,. \end{cases}$$

Le due soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 30\,\lambda + 325 = 0$$

sono complesse e coniugate

$$\lambda_1 = -15 + 10\,j \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -15 - 10\,j \,.$$

Scrivendo, allora, l'integrale generale nella forma

$$i_L(t) = e^{-15t}\left[K_1 \cos(10t) + K_2\, \mathrm{sen}(10t)\right] ,$$

si deduce immediatamente che

$$i_L(0) = 8 \quad \rightarrow \quad K_1 = 8 \,.$$

Inoltre, essendo

$$\frac{di_L}{dt} = - 15\ e^{-15t}\left[8\ \cos(10t) + K_2\ \text{sen}(10t)\right] + 10\ e^{-15t}\left[- 8\ \text{sen}(10t) + K_2\ \cos(10t)\right] ,$$

discende rapidamente che

$$K_2 = 12 .$$

In definitiva, si può concludere che

$$i_L(t) = e^{-15t}\left[8\ \cos(10t) + 12\ \text{sen}(10t)\right] .$$

```
Esempio 6
*Codifica Spice
RC     1    0    4
RL     1    2    2.5
L0     2    0    0.5       IC=8
C0     1    0    10m       IC=20
.TRAN       0.1m      1    UIC
.PROBE
.END
```

Appendice: richiami sulle equazioni differenziali

Un'equazione differenziale, in generale, stabilisce una relazione tra la variabile indipendente 't', la funzione 'u' ed alcune sue derivate. Essa può essere scritta in forma implicita come

$$F(t, u, u', u'', \cdots) = 0 ,$$

dove 'F' rappresenta la funzione che collega le diverse grandezze in gioco. A rigore si sarebbe dovuto scrivere $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$, ... ; per brevità, però, ove possibile, si omette l'argomento della funzione incognita e delle sue derivate. Si chiama ordine di un'equazione differenziale l'ordine massimo di derivata che vi compare. In molti casi è possibile esplicitare l'equazione rispetto alla derivata di ordine massimo, in modo da scrivere, nel caso di un'equazione del secondo ordine, ad esempio, la nuova forma

$$u'' = f(t, u, u') .$$

Si chiama soluzione, oppure integrale, di un'equazione differenziale una qualsiasi funzione che soddisfa l'equazione, cioè che, sostituita nell'equazione, la trasforma in un'identità. L'integrale generale di un'equazione differenziale di ordine N è, invece, un'espressione contenente N parametri

$$u = \phi(t, c_1 , c_2 , \cdots , c_N)$$

e che, al variare dei parametri, descrive tutte le soluzioni dell'equazione differenziale. Qualunque soluzione ottenuta sostituendo dei valori qualsiasi ai parametri nell'integrale generale viene detta soluzione, oppure integrale, particolare.

• Equazioni lineari

Un'equazione differenziale ordinaria del **primo ordine**, lineare, a coefficienti costanti, è una relazione che collega una funzione incognita u(t) del tempo, o di qualsiasi altra variabile, e la sua derivata prima, nella forma

$$\frac{du}{dt} + a_0 u = f(t) ,$$

in cui la funzione f(t), detta 'forzamento', rappresenta una funzione assegnata, mentre a_0 è una costante nota.

Similmente, un'equazione differenziale ordinaria del **secondo ordine**, lineare, a coefficienti costanti, è una relazione che collega una funzione incognita u(t) del tempo, o di qualsiasi altra variabile, la sua derivata prima e la derivata seconda, nella forma

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a_1 \frac{du}{dt} + a_0\, u = f(t) \ ,$$

in cui a_0 e a_1 sono costanti note.

In queste brevi note, senza alcuna pretesa di rigore e completezza, ci si limiterà a ricordare solo che l'integrale generale, cioè l'insieme di tutte le possibili soluzioni, di un'equazione differenziale lineare si può scrivere come la somma di due termini

$$u(t) = u_0(t) + u_p(t) \ ,$$

dove $u_0(t)$ indica la più generale soluzione dell'equazione omogenea associata, ottenuta annullando il forzamento, mentre $u_p(t)$ è una qualunque soluzione dell'equazione completa.

• Equazione omogenea

Per un'equazione del primo ordine omogenea, supponendo che la soluzione sia un esponenziale del tipo exp(λt), l'equazione differenziale si trasforma nel problema algebrico

$$\lambda + a_0 = 0 \qquad \text{(equazione caratteristica)} \ .$$

La soluzione generale di un'equazione omogenea, lineare ed a coefficienti costanti, del primo ordine è, pertanto,

$$u_0(t) = K \exp(-\, a_0 t) \ ,$$

dove K è una costante di integrazione arbitraria.

Per un'equazione del secondo ordine omogenea, supponendo che la soluzione sia un esponenziale del tipo exp(λt), l'equazione differenziale si trasforma nel problema algebrico

$$\lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0 = 0 \qquad \text{(equazione caratteristica)} \ .$$

Esistono dunque due valori di λ che rendono l'esponenziale exp(λt) soluzione dell'equazione e tali valori sono le radici dell'equazione caratteristica. Per la linearità dell'equazione, eccezion fatta per il caso in cui le radici di questa equazione siano coincidenti, che sarà considerato a parte, si può affermare che l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea è dato da

$$u_0(t) = K_1 \exp(\lambda_1 t) + K_2 \exp(\lambda_2 t) \ ,$$

dove λ_1 e λ_2 sono le radici dell'equazione caratteristica, K_1 e K_2 due costanti arbitrarie. Per verifica, si può sostituire tale espressione nell'equazione differenziale: essa è soddisfatta per qualsiasi valore delle costanti, purché λ_1 e λ_2 abbiano i valori indicati. Restano da esaminare i vari casi che la natura dell'equazione caratteristica può presentare.
Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono, in generale,

$$\lambda_{1,2} = - \frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4\, a_0}}{2} \ .$$

Come è noto, a seconda del valore del discriminante, le radici possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate, affermazione legata al fatto che i coefficienti della equazione caratteristica sono, per ipotesi, reali. Qualche problema può sorgere nel caso di radici coincidenti, in quanto apparentemente la tecnica utilizzata non sembra condurre alle due soluzioni distinte che sono necessarie per costruire l'integrale generale dell'equazione omogenea.
SI consideri, ad esempio, l'equazione differenziale omogenea

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 3\, \frac{du}{dt} + 2\, u = 0 \ .$$

L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 3\, \lambda + 2 = 0$$

è un'equazione di secondo grado che, avendo discriminante positivo, ammette le soluzioni **reali e distinte**

$$\lambda_{1,2} = - \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9 - 8}}{2} = - \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \left[\begin{array}{l} -1 \ , \\ -2 \ . \end{array} \right.$$

L'integrale generale dell'equazione vale

$$u(t) = K_1\, e^{-t} + K_2\, e^{-2t} \ .$$

Per essere sicuri di aver ben compreso come si determini la soluzione di un'equazione omogenea a radici reali e distinte, si verifichi la correttezza delle soluzioni di seguito proposte:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\,\frac{du}{dt} - 5\,u = 0 \quad \rightarrow \quad u = K_1\,e^{t} + K_2\,e^{-5t}\ ;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 5\,\frac{du}{dt} + 6\,u = 0 \quad \rightarrow \quad u = K_1\,e^{-2t} + K_2\,e^{-3t}\ ;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 7\,\frac{du}{dt} + 12\,u = 0 \quad \rightarrow \quad u = K_1\,e^{3t} + K_2\,e^{4t}\ .$$

Si mostrerà, ora, che, anche nel caso di **radici reali e coincidenti**, è possibile costruire un'altra soluzione dell'equazione in esame, utilizzando un semplice ed intuitivo processo al limite. Si parta dal caso in cui le radici siano distinte e si ponga

$$\lambda_1 = \lambda\ , \quad \lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda\ ,$$

con $\Delta\lambda$ per il momento arbitrario. Si può rilevare che, in virtù della linearità dell'equazione e della omogeneità, una qualsiasi combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione; tale sarà, dunque, anche la particolare combinazione lineare descritta dalla seguente espressione

$$u_1(t) = \frac{\exp\left[(\lambda + \Delta\lambda)\,t\right] - \exp(\lambda t)}{\Delta\lambda}\ .$$

Facendo tendere $\Delta\lambda$ a zero, per t assegnato, e quindi λ_2 a λ_1, si nota chiaramente che la $u_1(t)$ tende alla derivata di $\exp(\lambda t)$ rispetto a λ. La funzione $u_1(t)$, infatti, non è altro che il rapporto incrementale della funzione $\exp(\lambda t)$ 'vista' come funzione di λ e non di t, vale a dire

$$u_1(t) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\exp\left[(\lambda + \Delta\lambda)\,t\right] - \exp(\lambda t)}{\Delta\lambda} = t\,\exp(\lambda t)\ .$$

Si è quindi dimostrato che, nel caso di radici reali e coincidenti, due soluzioni distinte sono

$$u_1(t) = t\,\exp(\lambda t)\ , \qquad u_2(t) = \exp(\lambda t)\ .$$

Come esempio, si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 12 \frac{du}{dt} + 36\, u = 0 \ .$$

L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 12\, \lambda + 36 = 0$$

è un'equazione di secondo grado che, avendo discriminante nullo, ammette le soluzioni reali e coincidenti

$$\lambda_{1,2} = \frac{12}{2} \pm \frac{\sqrt{144 - 144}}{2} = 6 \ .$$

L'integrale generale dell'equazione pertanto vale

$$u = e^{6t}\, (K_1 + K_2\, t) \ .$$

Si verifichi che le soluzioni delle equazioni differenziali omogenee proposte sono quelle indicate a fianco:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 8 \frac{du}{dt} + 16\, u = 0 \quad \rightarrow \quad u = e^{-4t} \left(K_1 + K_2\, t\right) ;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 10 \frac{du}{dt} + 25\, u = 0 \quad \rightarrow \quad u = e^{-5t} \left(K_1 + K_2\, t\right) ;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4 \frac{du}{dt} + 4\, u = 0 \quad \rightarrow \quad u = e^{-2t} \left(K_1 + K_2\, t\right) .$$

Infine, se le radici dell'equazione caratteristica sono **complesse e coniugate**, l'integrale generale dell'omogenea può scriversi nella forma

$$u(t) = \left[K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)\right] \exp(\alpha t) \ ,$$

in cui le radici sono poste nella forma

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\, \omega \ .$$

Si consideri, ad esempio, l'equazione differenziale

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\,\frac{du}{dt} + 8\,u = 0\,.$$

L’equazione caratteristica è l’equazione di secondo grado

$$\lambda^2 + 4\,\lambda + 8 = 0$$

che, avendo discriminante negativo, ammette le soluzioni complesse e coniugate

$$\lambda_{1,2} = -\,\frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{16 - 32}}{2} = -\,2 \pm 2\,j\,.$$

L’integrale generale dell’equazione, pertanto, vale

$$u = e^{-2t}\left[K_1 \cos(2t) + K_2\,\mathrm{sen}(2t)\right].$$

Si controlli che le soluzioni delle equazioni differenziali omogenee proposte sono quelle riportate:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 2\,\frac{du}{dt} + 10\,u = 0 \quad \rightarrow \quad u = K_1\,e^t \cos(3t) + K_2\,e^t\,\mathrm{sen}(3t)\,;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 16\,u = 0 \quad \rightarrow \quad u = K_1 \cos(4t) + K_2\,\mathrm{sen}(4t)\,;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 64\,u = 0 \quad \rightarrow \quad u = K_1 \cos(8t) + K_2\,\mathrm{sen}(8t)\,.$$

Quali delle soluzioni trovate negli ultimi tre esempi possono rappresentare le ‘uscite’ di un qualche sistema fisico?

• Integrale particolare

Esistono tecniche particolari, legate al tipo di funzione forzante, e tecniche generali, come il metodo della variazione delle costanti, per trovare un **integrale particolare** dell’equazione completa. Per un corso di Elettrotecnica, i forzamenti più interessanti dal punto di vista applicativo sono quelli costanti, quando i generatori erogano tensioni e correnti continue, oppure sinusoidali, nel caso delle tensioni e correnti sinusoidali: per mezzo di questi forzamenti elementari, è anche possibile rappresentare forzamenti più complicati.

Una buona idea è cercare l'integrale particolare tra le funzioni dello stesso tipo del forzamento. Questa tecnica funziona sempre che il forzamento non coincida con qualche integrale dell'omogenea; qualora ciò accadesse, è necessario ricorrere a tecniche più sofisticate che i limiti imposti in questa appendice non consentono di esaminare. Per comprendere fino in fondo cosa si vuole dire, si prenda in esame l'equazione differenziale completa

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 3\,\frac{du}{dt} + 2\,u = t^2\,.$$

L'equazione caratteristica è un'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0$$

che, avendo discriminante positivo, ammette le soluzioni reali e distinte

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 1\,, \\ 2\,. \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea, allora, vale

$$u_0 = K_1\, e^t + K_2\, e^{2t}\,.$$

L'integrale particolare, essendo il forzamento un polinomio di secondo grado, può essere ricercato nella forma del trinomio di secondo grado

$$u_p = C\, t^2 + D\, t + E\,.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale completa, deve essere

$$2\,C - 3\,(2\,C\,t + D) + 2\,(C\,t^2 + D\,t + E) = t^2\,,$$

ovvero riordinando i monomi simili

$$2\,C\,t^2 + (2\,D - 6\,C)\,t + 2\,C - 3D + 2E = t^2\,.$$

Il principio di identità dei polinomi impone che i coefficienti dei monomi simili devono essere uguali, affinché risulti vera l'uguaglianza per ogni istante di tempo. Si ha, allora

$$\begin{cases} 2\,C = 1\,, \\ 2\,D - 6\,C = 0\,, \\ 2\,C - 3D + 2E = 0\,, \end{cases}$$

e, quindi,

$$C = \frac{1}{2}\,,\ D = \frac{3}{2}\,,\ E = \frac{7}{4}\,.$$

In definitiva, l’integrale generale dell’equazione differenziale completa si può scrivere nella forma

$$u = K_1\,e^{t} + K_2\,e^{2t} + \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{3}{2}\,t + \frac{7}{4}\,.$$

Ora è il momento di verificare le soluzioni delle equazioni differenziali forzate, qui di seguito proposte:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\,\frac{du}{dt} + 5\,u = 13\,e^{3t} \quad \rightarrow \quad u = K_1\,e^{-2t}\cos(t) + K_2\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(t) + \frac{e^{3t}}{2}\,;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 6\,\frac{du}{dt} + 10\,u = 2\,\mathrm{sen}(2t) \quad \rightarrow \quad u = K\,e^{-3t}\,\mathrm{sen}(t + \phi) + \frac{\mathrm{sen}(2t) - 2\cos(2t)}{15}\,;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 2\,\frac{du}{dt} - 8\,u = 3\,e^{-2t} \quad \rightarrow \quad u = K_1\,e^{4t} + K_2\,e^{-2t} - \frac{t}{2}\,e^{-2t}\,.$$

• **Condizioni iniziali**

Una volta ottenuta la soluzione dell’equazione differenziale completa, è necessario imporre le **condizioni iniziali**, per calcolare le costanti presenti nell’integrale generale (problema di Cauchy). Si noti che i valori delle condizioni iniziali devono essere imposti alla soluzione completa, non all’integrale generale dell’omogenea. Si consideri, ad esempio, un punto materiale che si muova sotto l’azione di una forza esterna periodica secondo l’equazione differenziale

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 5\,\frac{du}{dt} + 6\,u = \cos(t)\,.$$

Si vuole risolvere questa equazione, considerando che all’istante iniziale $t = 0$ il corpo si trovava fermo nella posizione $u(0) = 0.1$.

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 5\,\lambda + 6 = 0$$

e, avendo discriminante positivo, ammette le soluzioni reali e distinte

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 24}}{2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} -2\,, \\ -3\,. \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea vale allora

$$u_0 = K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{-3t}\,.$$

L'integrale particolare avrà la forma

$$u_p = C \cos(t) + D \,\mathrm{sen}(t)\,.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale completa, deve essere

$$5\,(C + D) \cos(t) + 5\,(D - C)\,\mathrm{sen}(t) = \cos(t)\,.$$

Risulta, quindi,

$$\begin{cases} 5\,(C + D) = 1\,, \\ D - C = 0\,, \end{cases}$$

da cui discendono le due costanti

$$C = D = \frac{1}{10}\,.$$

In definitiva, l'integrale generale dell'equazione differenziale completa si può scrivere nella forma

$$u = K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{-3t} + \frac{\cos(t) + \mathrm{sen}(t)}{10}\,.$$

La determinazione delle costanti di integrazione K_1 e K_2 deve essere effettuata sulla soluzione completa trovata, in maniera tale che

$$u(0) = 0.1 \quad \text{e} \quad \frac{du(0)}{dt} = 0 \ ,$$

(si rammenti che il punto materiale è inizialmente fermo). Risulta, allora,

$$u(0) = 0.1 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = 0 \ ,$$

$$\frac{du(0)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad - 2\, K_1 - 3\, K_2 = - 0.1 \ .$$

Riassumendo, si ha il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 0 \ , \\ 2\, K_1 + 3\, K_2 = 0.1 \ , \end{cases}$$

da cui discende immediatamente che

$$K_1 = - 0.1 \quad \text{e} \quad K_2 = 0.1 \ .$$

La soluzione cercata, pertanto, vale

$$u = \frac{e^{-3t} - e^{-2t} + \cos(t) + \operatorname{sen}(t)}{10} \ .$$

Ci si cimenti, ora, con i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} - 4\, \dfrac{du}{dt} + 3\, u = 10\, e^{-2t} \ , \\ u(0) = 1 \ , \quad \dfrac{du(0)}{dt} = - 3 \ , \end{cases} \qquad \left[\ u = \frac{4}{3}\, e^{t} - e^{3t} + \frac{2}{3}\, e^{-2t} \right] ;$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + 4\, u = 8\, t^2 \ , \\ u(0) = 0 \ , \quad \dfrac{du(0)}{dt} = 0 \ , \end{cases} \qquad \left[\ u = \cos(2t) + 2\, t^2 - 1 \right] ,$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} - 3\, \dfrac{du}{dt} + 2\, u = 10\, e^{t} \ , \\ u(0) = 0 \ , \quad \dfrac{du(0)}{dt} = - 1 \ , \end{cases} \qquad \left[\ u = - 9\, e^{t} + 9\, e^{2t} - 10\, t\, e^{t} \right] .$$

• Sistemi di equazioni differenziali

Si chiama **sistema differenziale** un insieme di equazioni differenziali contenenti più funzioni incognite di una stessa variabile e le loro derivate, di modo che in ogni equazione compaia almeno una derivata. In pratica, si riescono a risolvere sistemi con un numero di equazioni uguale al numero delle incognite.

Un sistema differenziale si chiama lineare se le funzioni incognite e le loro derivate compaiono al primo ordine in ogni equazione. Il sistema è in forma normale se è esplicitato rispetto a tutte le derivate. Ad esempio, il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{3}{2}\, t^2 \,, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4\,x - 2\,y + 4\,t + 1 \,, \end{cases}$$

è lineare e scritto in forma normale. Inoltre, è un sistema lineare a coefficienti costanti, in quanto i coefficienti delle funzioni incognite e delle derivate sono costanti.

È possibile eliminare tra le equazioni di un sistema lineare tutte le incognite tranne una. L'equazione ottenuta conterrà una funzione incognita e la sua derivata del primo ordine o di ordine superiore. Questa equazione sarà anch'essa lineare e, se il sistema di partenza è a coefficienti costanti, l'equazione ottenuta sarà anch'essa a coefficienti costanti. Dopo aver trovato la funzione incognita di tale equazione, si può sostituire la sua espressione nelle equazioni assegnate, determinando le altre funzioni incognite.

Per rendere più chiare le cose dette, si esamini il seguente esempio, nel quale si vuole risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{3}{2}\, t^2 \,, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4\,x - 2\,y + 4\,t + 1 \,. \end{cases}$$

Per eliminare l'incognita 'y' e la sua derivata, si derivi la prima equazione del sistema, ovviamente rispetto a 't'. Si ottiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3\,t \,.$$

Sempre dalla prima equazione, si ha pure la relazione

$$y = x - \frac{dx}{dt} + \frac{3}{2}\,t^2 \,,$$

che, posta nella seconda equazione, consente di ottenere la derivata dell'incognita 'y', che vale

$$\frac{dy}{dt} = -\,4\,x - 2\left(x - \frac{dx}{dt} + \frac{3}{2}\,t^2\right) + 4\,t + 1 = -\,6\,x + 2\,\frac{dx}{dt} - 3\,t^2 + 4\,t + 1\,.$$

Sostituendo quest'ultimo risultato nell'equazione che forniva la derivata seconda della funzione 'x', è facile ottenere un'equazione del secondo ordine, a coefficienti costanti, in questa sola variabile:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3\,t \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6\,x = 3\,t^2 - t - 1\,.$$

Risolvendo questa equazione come discusso in precedenza, segue immediatamente che

$$x(t) = K_1\,e^{2t} + K_2\,e^{-3t} - \frac{1}{2}\,t^2 \,,$$

e, ponendo questa espressione nella prima equazione del sistema assegnato, si ottiene pure la seconda funzione incognita

$$y = x - \frac{dx}{dt} + \frac{3}{2}\,t^2 = -\,K_1\,e^{2t} + 4\,K_2\,e^{-3t} + t^2 + t\,.$$